高等数学题解词典

问题与解答

陕西科学技术出版社

高等数学题解词典

问题与解答

陕西科学技术出版社

（陕）新登字 002 号

高等数学题解辞典
——问题与解答
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街 131 号）
开源新技术研究所排版
新华书店经销　　西北大学印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　67 印张　4 插页　211.5 万字
1993 年 10 月第 1 版　1993 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—4000
ISBN 7—5369—1169—6/O・37
定价：340元

前言

近年来，随着科学、文化教育事业的发展，许多院校的数学教师热切希望有一本以题解为中心的、比较系统、实用的高等数学工具书。鉴于建国 40 年来全国各大专院校数学教学已经积累了丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国数学教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，编写一部适合我国情况又能体现当代这门课程发展特点，查阅比较方便的高等数学题解辞典。为此，我们邀请部分富有教学经验的数学教师编写了这部大型工具书。

本辞典是以题解为中心的工具书，内容包括函数、极限、连续、导数、积分、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、线积分和面积分、级数、微分方程等 11 章，主要供大专院校数学教师教学、进修时使用，也可供广大数学爱好者及大专院校学生参考。

编写本辞典时，力求贯彻以下要求：

1. 重视提高解题的分析能力，由于高等数学本身的特点及能参阅本辞典的读者水平都较高，所以对每题不专作分析解说，而只作简捷的数学运算，只在适当的地方作些说明，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且也能培养分析问题和

解决问题的能力。

2. 在各段题目的编写时注重题材的广泛性、典型性、技巧性与综合性。

3. 注意题材的归类，以典型带一般，题目编排分类清楚，条理分明，各类题目选好典型，使读者举一反三，触类旁通。

4. 十多年来我国为了招考研究生，广大数学工作者自编了很多综合性强、技巧性高的好试题，我们精选了很多这方面的题目，编入本书。

本辞典的编写工作始筹于 1985 年，第一稿在郑州地区完成，第二稿在西安等地区完成(是以西安地区为中心，包括北京、郑州、武汉、海口等地区的 30 多位教授学者参加)。其间曾在郑州航空工业管理学院、西北建筑工程学院、海南大学召开三次编审会议，先后历时 7 年。我们希望这部辞典能反映出我国数学工作者 40 年来在高等数学教学方面的成就，这是我们编者们的共同心愿。

本书在编写过程中承蒙许多数学界老前辈和同仁们鼓励、支持和帮助，尤其是西安冶金建筑学院潘鼎坤教授，对全部内容提要作了逐字逐句的仔细审查，参加部分工作的还有夏旭芳、康晓雯、刘彦波、黄文阁、郑旭东、毛毅杰、张立红和李芳，在此一并致谢。

由于我们水平有限，参加编写的人员较多，而且很分散，上述编写要求未必都能达到，选材也可能有疏漏和不当之处，望读者批评指正。

编　者

1992 年 4 月

编写说明

1. 收录范围　本书是以工科高等数学内容为中心，兼顾理科数学分析的内容。本书辑录了目前我国工科院校高等数学课程新涉及到的主要题型，还选进了一部分数学分析的题目，吸收了国外有影响资料的部分题目，也辑录了我国高等院校、科研单位的硕士研究生入学试题、本科生试题和数学竞赛试题的部分内容，还辑录了国内数学杂志的部分典型题目，共收录题目 3800 余道。附录介绍高等数学发展简史，简介高等数学中有关的数学家。

2. 目录与问题的编排　为了使读者容易找到所查问题或者类似问题的解法，本辞典仍按我国目前高等数学的体系，按章、节、段来编排，这完全体现在目录中，从而使目录能起到索引的作用。在问题的编排上采取尽量收罗的办法，每段内题目安排的原则是由浅入深，由易到难，以典型带一般，使读者能举一反三，触类旁通，使本书起到辞典的作用。

题号是按节来编的，比如，10.1.81 表示第 10 章第 1 节第 81 题。插图是随题号编序的。

3. 内容提要　每节开头的内容提要，为解题或证题提供了必要的依据(包括定义、定理、法则、公式等内容)。

4. 概念题与综合题的处理　在每章或每节中均安排有概念题(是非题)，其意义在于从正、反两个方面来理解概念，这是近年来在本科生考试中试题标准化时，经常出现的形式。

在每章最后安排有一节综合题目。它的内容系指在本节以前各章、节出现的，但不涉及以后的内容。在考研究生的试题中这类问题很多。

5. 一题多解　题目一般是一题一解，部分题目有其它较好解法的，则安排一题多解，以启迪解题的思维能力和熟悉各公式的应用。在本书中已收录题目的结论，在其他题目中应用时一般不再重复，只注明“参阅第×××题”。

编　者

1992年4月

目　　录

第八章　重积分

第一章　分　析　引　论

§1　实　　数

内容提要

1.　实数

(1) 等价关系和等价类

如果在集合 S 的元素之间定义了一种关系"～"：对于 S 中的任意两个元素 a、b，或者它们之间有这种关系（记为 $a \sim b$），或者没有这种关系，二者必居且仅居其一，且它还满足下列三条定律：

(i) $a \sim a$（自反律）；

(ii) 若 $a \sim b$，则 $b \sim a$（对称律）；

(iii) 若 $a \sim b, b \sim c$，则 $a \sim c$（传递律）；

那末称上述关系为集合 S 上的一个等价关系.

若在集合 S 上定义了等价关系，则它的元素可以按彼此是否等价进行分类：若 $a \sim b$，则称 a、b 属于同一类，否则就说 a、b 不属于同一类. 凡与 a 属于同一类的一切元素所成的集合称为以 a 为代表的等价类，记为 S_a. 于是按等价关系的三条定律可知：(1) S 中任一元素，必属于某一非空等价类；(2) 任意两个等价类 S_a 和 S_b，当且仅当 $a \sim b$ 时，有 $S_a = S_b$，而且在相反情形下有 $S_a \cap S_b = \varnothing$.

(2) 康托尔的实数定义

基本列　给定序列 $\{x_n\}$，若对任意 $\varepsilon > 0$，皆存在自然数 N，使当 $m, n > N$ 时，有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$，则称序列 $\{x_n\}$ 为基本序列或柯西序列.

记全体有理数基本序列 $\{r_n\}$ 所组成的集合为 M，在 M 上引进如下的等价关系：

设(r_n)和(s_n)是两个有理数基本序列，如果$\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0$，则称$(s_n)$和$(r_n)$是等价的，记作$(r_n) \sim (s_n)$.

容易验证这是一个等价关系，它把集合M分成了若干个等价类.不同等价类里的有理数基本序列是互相不等价的，而在每一个等价类里都可以任选一个有理数基本序列作为代表，它完全确定了该等价类.

有理数基本序列的集合M按上述等价关系"$\sim$"划分的每一个等价类称为一个实数.

记实数全体所成的集合为R.

如果有理数基本序列(r_n)不以有理数为它的极限，就称以它为代表的等价类所确定的实数是无理数.

注1　由上可知，实数是由有理数和无理数两大类组成的.

(3) 戴德金实数的定义

设Q是全体有理数的集合，$\varnothing$是空集合，X是Q的一个子集，若X满足以下三个条件：

(i) $X \neq \varnothing, X \neq Q$;

(ii) 若$r \in X, r' \in Q, r' < r$，则$r' \in X$;

(iii) 若$r \in X$，则必有$r'' \in X$，使$r < r''$，

则称X是一个实数.

注2　按照上述定义，一个实数乃是由有理数组成的一个集合，这个有理数集具备性质：(1) 它既非空集，又非全体有理数的集；(2) 如果一数属于该集，那么一切比这个数小的有理数都属于该集；(3) 这个集合没有最大数.

注3　康托尔的实数定义和戴德金的实数定义是等价的.

(4) 实数的公理化定义

满足域公理、序公理和完备公理的非空集合称为实数集，记作R.实数集中的元素称为实数.

上确界　设$s \subset R, s \neq \varnothing$.若存在$\beta \in R$，满足下列条件：

(i) 对一切$x \in S$，有$x \leqslant \beta$(称β为S的上界)；

(ii) 对s的任一上界β'，都有$\beta' \geqslant \beta$；则称β为S的上确界，记作$\beta = \sup S$.

下述域公理、序公理和完备公理的全体称为实数的一个公理系统.

域公理　R中有加法"+"和乘法"·"运算，且对任意$x, y, z \in R$适

合：

(i) $x+y=y+x,\ x\cdot y=y\cdot x$;

(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z,\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$;

(iii) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$;

(iv) 对任意 $x,y\in R$,存在 $z\in R$,使得 $x+z=y$,记 $z=y-x$,定义 $0=x-x$, $-x=0-x$;

(v) 对任意 $x,y\in R, x\neq 0$,存在 $z\in R$,使得 $x\cdot z=y$,称 $z=\frac{y}{x}$.
记 $\frac{x}{x}=1, \frac{1}{x}=x^{-1}$.

序公理　R 中有关系"$<$",称为序,使对任意 $x,y,z\in R$ 适合

(i) 若 $x>y$,则 $y<x$;

(ii) 若 $x<y$,则对任意 $z\in R$,有 $x+z<y+z$;

(iii) 若 $x>0, y>0$,则 $x\cdot y>0$;

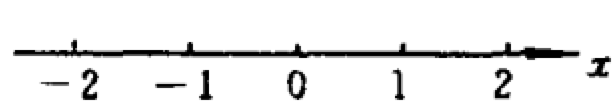
(iv) 若 $x>y, y>z$,则 $x>z$.

完备公理　每个非空的上方有界的实数集必有上确界.

注 4　在同构的意义下,由上述公理系统所确定的实数域是唯一的.

2. 实数集的几何模型——实数轴

选取一条直线,取其上一点 O,记作实数 0,取直线上一段作为单位长度,选定直线向右方向为正向,正方向一个单位长度为 $+1$,负方向一个单位长度为 -1,由于直线有类似于实数域的连续性性质,从而建立起实数集 R 与直线上点的一一对应关系.这样的直线称为实数轴(如图).



3. 数的扩张与分类表

自然数

整　数 $\begin{cases}\text{零}\\ \text{正整数(即自然数)}\\ \text{负整数}\end{cases}$

$$\text{有理数}\left\{\begin{matrix}\text{零}\\ \text{正有理数}\\ \text{负有理数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}$$

(即分数)

$$\text{实　数}\left\{\begin{matrix}\text{有理数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{matrix}\right.$$

$$\text{复　数}\left\{\begin{matrix}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{matrix}\right.$$

4. 邻域、聚点、维尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点原则

(1)δ — 邻域　设 $x_0 \in R, \delta > 0$，称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的 δ — 邻域.

(2) 聚点　$x_0 \in R$ 称为实数集 S 的聚点，若在 x_0 的任意 δ — 邻域中皆含有 S 中异于 x_0 的点，即对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) \cap S \neq \varnothing.$$

(3) 维尔斯特拉斯聚点原则

设 S 是无穷的有界实数集，则 S 至少有一个聚点.

问题与解答

1.1.1　证明 1 是最小的正整数

证　用反证法. 如果 1 不是最小的正整数，则有正整数 S，满足 $0 < s < 1$；显然集 $Z^+ = \{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ 具有域公理中的性质(i) 与 (ii)；又 $\widetilde{Z}^+ = \{s, s+1, \cdots, s+n, \cdots, 1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ 亦具有性质 (i)(ii)；已知正整数集是具有性质(i) 与(ii) 的集合中之最小者，因显然有 $Z^+ \subseteq \widetilde{Z}^+, Z^+ \neq \widetilde{Z}^+$，故 $\widetilde{Z}^+$ 不是正整数集，即 s 不是正整数，矛盾.

1.1.2　证明每个大于 1 的正整数或是素数或是素数之乘积.

证　设 $n = 2$，结论显然成立，设结论对于每个 $k(1 < k < n)$ 皆成立. 若 n 不是素数，就有正整数 $m, 1 < m < n$，使得 $n = c \cdot m, 1 < c < n$，c 是正整数. 由归纳假设，c、m 皆是素数或素数的乘积，故 n 是素数或素数的乘积.

1.1.3　设 $n \in Z^+$，证明在 n 与 $n+1$ 之间没有正整数.

证　用反证法. 若不然，有正整数 k，使 $n < k < n+1$，于是 $k - n$

是正整数，且 $k-n<1$，这与 1 是最小正整数相矛盾.

1.1.4　试证正整数集 Z^+ 是上方无界的.

证　设 Z^+ 有上界，根据完备性公理，Z^+ 就有上确界，设为 a，由上确界定义，存在 $n\in Z^+$，使得 $a-1<n$，于是 $n+1>a$，根据正整数定义，$n+1\in Z^+$，这与"a 是 Z^+ 的上确界"矛盾，从而说明 Z^+ 是上方无界的.

1.1.5　试证(1) 对任意 $x\in R$，存在 $n\in Z^+$，满足 $n>x$；(2) 设 $x>0, y\in R$，则有 $n\in Z^+$，使得 $n\cdot x>y$.

证　(1) 用反证法. 设若不然，那末，存在 $x_0\in R$，对任意 $n\in Z^+$ 有 $x_0\geqslant n$，这与 1.1.4 题矛盾.

(2) 由(1)，存在 $n\in Z^+$，使得 $n>\dfrac{y}{x}$，于是有 $nx>y$.

注　(2) 称为阿基米得性质.

1.1.6　证明非空的下方有界的正整数集有最小正整数.

证　设 S 是非空的下方有界的正整数集，根据确界存在定理，S 就有下确界 $m\subset R$，从而，存在 $n\in S$，使得 $m\leqslant n<m+1$. 可以证明，n 就是 S 的最小正整数. 事实上，若 S 中有小于 n 的正整数，而小于 n 的正整数必不大于 $n-1$，又由上面不等式可知 $n-1<m$，从而该正整数必小于 m，这与 m 是 S 的下确界相矛盾.

1.1.7　设 $x\geqslant 0$，证明对每个正整数 $n\geqslant 1$，存在十进制小数 $r_n=a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$，使得 $r_n\leqslant x<r_n+\dfrac{1}{10^n}$.

证　令 S 表示一切小于等于 x 的非负整数之集，则 S 非空，$0\in S$；又 S 有界，据完备公理，S 有上确界. 令 $a_0=\sup S$，易见，$a_0\in S$，且 a_0 为 x 的整数部分，即 $a_0=[x]$，显然 $a_0\leqslant x<a_0+1$. 令 $a_1=[10x-10a_0]$，因为 $0\leqslant 10x-10a_0=10(x-a_0)<10$，故 $0\leqslant a_1\leqslant 9$，且 $a_1\leqslant 10x-10a_0<a_1+1$，即 a_1 是适合 $a_0+\dfrac{a_1}{10}\leqslant x<a_0+\dfrac{a_1+1}{10}$ 的最大整数.

一般地，若选取 $a_1,\cdots,a_{n-1}$，$0\leqslant a_i\leqslant 9$，$i=1,2,\cdots,n-1$ 令 a_n 是适合 $a_0+\dfrac{a_1}{10}+\cdots+\dfrac{a_n}{10^n}\leqslant x<a_0+\dfrac{a_1}{10}+\cdots+\dfrac{a_{n+1}}{10^n}$ 的最大整数，且 $0\leqslant a_n\leqslant 9$. 因此，就有 $r_n\leqslant x<r_n+\dfrac{1}{10^n}$，其中 $r_n=a_0\cdot a_1\cdots a_n$.

1.1.8　证明不存在最大素数.

证　用反证法. 设 p 是最大素数，那末 $q=1\cdot 3\cdot 5\cdots p$ 就是一切素

数的积. 于是 $q+1$ 不能被这些素数整除，因而 $q+1>p$ 又是一个素数，与假设矛盾.

1.1.9　设 p_n 是按从小到大的顺序排列的素数中的第 n 个素数，证明 $p_n<2^{2^n}$.

证　$n=1$ 时，结论显然成立，设对 $1\leqslant k\leqslant n$，结论成立，则

$p_{n+1}\leqslant p_1\cdot p_2\cdots p_n+1<2^2\cdot 2^{2^2}\cdots 2^{2^n}+1=2^{2+2^2+\cdots+2^n}+1<2^{2^{n+1}}$，

由数学归纳法，问题得证.

1.1.10　对任意 $a,b\in R$，$a<b$，证明存在有理数 r，使得 $a<r<b$.

证　根据阿基米得性质，存在 $n\in Z^+$，使得 $n(b-a)>1$，于是有 $0<\frac{1}{n}<b-a$.

考虑集 $E\{k|k\in Z^+,na<k\}$，它是非空且有下界的正整数集；由 1.1.4 题知，集 E 有最小的正整数 m，即 $m-1\leqslant na<m$，于是 $\frac{m-1}{n}\leqslant a<\frac{m}{n}$，$(m,n\in Z^+)$，这时必有 $\frac{m}{n}<b$，否则，就有不等式

$$\frac{m-1}{n}\leqslant a<b\leqslant\frac{m}{n},$$

从而有 $\frac{m}{n}-\frac{m-1}{n}\geqslant b-a$，或 $\frac{1}{n}\geqslant b-a$，这与前面的不等式相矛盾，所以 $a<\frac{m}{n}<b$，有理数 $r=\frac{m}{n}$ 即为所求.

1.1.11　设实数集 S 中有最大数(或最小数)，证明 S 的最大数(或最小数)是 S 的上确界(或下确界).

证　设 $a\in S$，且 a 是 S 的最大数. 于是，对于任意的 $s\in S$，有 $s\leqslant a$，又对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $s_\varepsilon\leqslant a$，使 $s_\varepsilon\in S$，且 $s_\varepsilon+\varepsilon>a$. 由上确界定义知，$a=\sup S$.

最小数的情形可用类似方法证明.

1.1.12　设 S,T 是两个实数集，且对任意的 $s\in S,t\in T$，有 $t\leqslant s$. 证明 $\sup T\leqslant\inf S$.

证　记 $a=\sup T$，$b=\inf S$. 根据确界的定义，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $t_\varepsilon\in T$，$s_\varepsilon\in S$，使 $a<t_\varepsilon+\varepsilon/2$，$s_\varepsilon<b+\varepsilon/2$，由题设，$t_\varepsilon<s_\varepsilon$，故 $a<t_\varepsilon+\varepsilon/2<s_\varepsilon+\varepsilon/2<b+\varepsilon$，因而有 $a\leqslant b$.

1.1.13 设 $q>1$,证明:对任意 $x\in R(x>0)$,存在唯一的整数 k,使得 $q^{k-1}\leqslant x<q^k$.

证 令 $T=\{q^k|k$ 是自然数$\}$,若 T 有上界,则由确界公理,T 有上确界 μ,因而有自然数 m,使得 $\frac{\mu}{q}<q^m\leqslant\mu$. 这时 $\mu<q^{m+1}$,又 $q^{m+1}\in T$,这与 μ 是 T 的上确界相矛盾,所以 T 是上方无界的.

又因 $q>1$,故当 $0<m<n$ 时有 $q^m<q^n$,所以对任意 $c\in R$,存在自然数 N,使 $n>N$ 时 $c\in q^n$,从而对任意 $\varepsilon>0$,存在 M,使 $m>M$ 时 $\frac{1}{q^m}<\varepsilon$.

事实上,只须令 $c=\frac{1}{\varepsilon}$,$N=M$ 即可,因为当 $m>M$ 时,$\frac{1}{\varepsilon}<q^m$,故 $\frac{1}{q^m}<\varepsilon$. 于是对于 $x>0$,且满足 $x<q^m$ 的整数 m 的集合下方有界,令此下确界为 k,则 k 为所求. 这是因为 $q^{k-1}\leqslant x<q^k$.

最后证明 k 的唯一性. 若存在 $m,n(m\neq n)$,使 $q^{m-1}\leqslant x<q^m$,$q^{n-1}\leqslant x<q^n$,不妨设 $m<n$,于是 $q^{m-1}\leqslant q^{n-1}\leqslant x<q^m<q^n$,从而有 $q^{n-1}<q^m$,但这显然是不可能的,(因为 $n-1\geqslant m$). 这就是说 $m<n$ 不成立.

类似可证 $n<m$ 也不成立,因此只有 $n=m$.

1.1.14 有理数 r 满足不等式 $r^2<2$. 求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 上、下确界分别是 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$. 以下确界为例证明如下:

首先有 $r\geqslant-\sqrt{2}$;因若不然,如果 $r<-\sqrt{2}$,令 $r=-(\sqrt{2}+a)$,$a>0$,则 $r^2=(\sqrt{2}+a)^2>2$,r 不属于所给集合.

其次,对于任意的 $\varepsilon>0$,取 $r=-\sqrt{2}+\frac{\varepsilon}{k}$,则当 k 充分大时必可使 $0<\frac{\varepsilon}{k}<1$,从而有 $r^2=(\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{k})^2<(\sqrt{2})^2=2$,这就是说,存在属于集 $E=\{r|r^2<2\}$ 的元素 r 满足:$r<-\sqrt{2}+\varepsilon$.

1.1.15 设 $S\subseteq R$ 是无穷有界集合,则 S 的聚点中必有最大者和最小者.

证 令 $\hat{S}=\{x|x\in R,S$ 中只有有限个数小于 $x\}$. 显然 S 的下界属于 $\hat{S}$,故 $\hat{S}$ 非空;又 S 是无穷集,故 S 的上界不属于 $\hat{S}$,且是 $\hat{S}$ 的上界,因

而 $\hat{S}$ 是上方有界的非空实数集. 据完备性公理, $\hat{S}$ 有上确界, 令 $x_0 = \sup\hat{S}$.

(1) x_0 是 S 的聚点.

因对任意的 $\varepsilon > 0$, $x_0 + \varepsilon \notin \hat{S}$, 在 S 中有无穷多个数小于 $x_0 + \varepsilon$; 又 $x_0 - \varepsilon$ 非 $\hat{S}$ 的上界, 故有 $y \in \hat{S}$, 使得 $x_0 - \varepsilon < y \leqslant x_0$; S 中小于 y 的数是有限个, 从而 S 中小于 $x_0 - \varepsilon$ 的数也是有限个.

综上可知 x_0 是 S 的聚点.

(2) 由 $\hat{S}$ 及 x_0 的定义易知, 此 x_0 是 S 的最小聚点.

最大聚点的存在性可用类似的方法证明.

1.1.16　设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 $A|B$ 为确定实数 c 的分割, 其中 B 类包含所有满足 $b^2 > c$ 的正有理数 b, 而 A 类包含所有其余的有理数, 求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数,

证　于 A 类中任取一正有理数 a, 则 $a^2 < c$(由于 c 为正整数, 且不为整数的平方, 故 $a^2 \neq c$). 设 $c - a^2 = r$. 现选取正有理数 $x < 1$, 使 $(a + x)^2 < c$. 为此只须

$$c - (a + x)^2 = r - 2ax - x^2 > r - (2a + 1)x > 0,$$

即 $0 < x < \frac{r}{2a + 1}$. 故在 $(0, \delta)$ 中[其中 $\delta = \min(1, \frac{c - a^2}{2a + 1})$] 任取一有理数 x, 都可使 $(a + x)^2 < c$, 即 $a + x$ 属于 A 类且 $a + x > a$, 故 A 类中无最大数.

于 B 类中任取一有理数 b, 设 $s = b^2 - c$. 现选取正有数 $y < b$, 使 $(b - y)^2 > c$. 为此只须 $(b - y)^2 - c = s - 2by + y^2 > s - 2by > 0$, 即 $0 < y < \frac{s}{2b}$. 故在 $(0, \varepsilon)$ 中[其中 $\varepsilon = \min(b, \frac{b^2 - c}{2b})$] 任取一有理数 y, 都可使 $(b - y)^2 > c$, 此即 $b - y$ 属于 B 类且 $b - y < b$, 故 B 类中无最小数.

1.1.17　建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解　设 $A_1|B_1$ 为 $\sqrt{2}$ 的分割. 利用它来作出 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割 $A|B$.

设 b 是正有理数. 若存在正有理数 $b_1 = \frac{b_1'}{b_2'} \in B_1$(其中 b_1', b_2' 为正整数) 使 $2^{b_1'} \leqslant b^{b_2'}$, 则令 $b \in B$.

凡不属于 B 的有理数均属于 A. 由此,

(1) A, B 两类都非空. 例如取 $a = 0$, 则 $a \in A$. 取 $b = 4$, 则于 B_1 类

中存在 $b_1=\frac{3}{2}$，使 $2^3\leqslant 4^2$，故 $b\in B$.

(2) 由 A,B 类之定义可知，每一有理数，不属于 B 类便属于 A 类.

(3) 设 $b\in B,a\in A$，且 $a>0$. 由于 B_1 中存在元素 $b_1=\frac{b_1'}{b_2'}$，使 $b^{b_2'}\geqslant 2^{b_1'}$，而 $a^{b_2'}<2^{b_1'}$，故 $b^{b_2'}>a^{b_2'}$，即 $a<b$，因此 A 类的任一数小于 B 类的任一数.

故 $A|B$ 确定了唯一一个实数，此实数即为$2^{\sqrt{2}}$.

1.1.18 证明一切有理真分式$\frac{m}{n}$(其中 m,n 为自然数，且 $m<n$)的集合无最小的及最大的元素. 并求该集合的上、下确界.

证 设$\frac{m}{n}$为此集合中的任一元素，即假设 m,n 为自然数，且 $m<n$，则$\frac{2m-1}{2n-1}$及$\frac{m+1}{n+1}$显然也属此集，且$\frac{2m-1}{2n-1}<\frac{m}{n}<\frac{m+1}{n+1}$. 可见此集合中无最小元素也无最大元素.

显然，0 及 1 分别为其下确界及上确界

1.1.19 给定有理数序列(r_n)：$r_1=0.1,r_2=0.101,r_3=0.101001,\cdots,r_n=0.101001\cdots01\underbrace{00\cdots01}_{n-1\text{个}},\cdots$

试证：(1) 它是一个有理数基本序列；(2) 它不存在有理数的极限.

证 (1) 因为对任何自然数 n 和 m，当 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 时，都有 $|r_n-r_m|\leqslant\frac{1}{10^N}$，而当 N 充分大时，$\frac{1}{10^N}$可以小于任何预先给定的正有理数 ε. 因此只要取 N 充分大，当 $n,m\geqslant N$ 时，必有 $|r_n-r_m|<\varepsilon$.

(2) 序列(r_n)具有下面两个性质：1) $r_n<r_{n+1}$(对任何自然数 n)；2) 对任何自然数 n 和 m 都有 $r_n<r_m+\frac{2}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}}$.

性质 1) 是显然的. 至于 2)，当 $m\geqslant n$ 时也是显的. 下面假定 $m<n$，

$$\text{由 } r_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{1+2}}+\cdots+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+n}}$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{1+2}}+\cdots+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+m}}+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+(m+1)}}+\cdots+\frac{1}{10^{1+2+\cdots+n}}$$

$$=r_m+\frac{1}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}}\left[1+\frac{1}{10^{m+2}}+\frac{1}{10^{(m+2)+\cdots+n}}\right],$$

及　　$1+\frac{1}{10^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{10^{(m+2)+\cdots+n}}<2$

知性质 2) 当 $m<n$ 时也成立.

如果(r_n)以有理数$\frac{p}{q}$为极限,则由 1),对每一个n,必有$r_n<\frac{p}{q}$,此外,在不等式 2) 中,让m固定而令$n\to\infty$,则得

$$\frac{p}{q}\leqslant r_m+\frac{2}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}},(m=1,2,\cdots),$$

于是对任何自然数m和n便有不等式$r_n<\frac{p}{q}\leqslant r_m+\frac{2}{10^{\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)}}$,特别地,取$n=m=q$,则得$r_q<\frac{p}{q}\leqslant r_q+\frac{2}{10^{\frac{q(q+1)}{2}+(q+1)}}$. 从而推出$0<(p-qr_q)\cdot 10^{\frac{q(q+1)}{2}}\leqslant\frac{2q}{10^{q+1}}<1$,而$(p-qr_q)10^{\frac{q(q+1)}{2}}$是一个整数,因而上述不等式是不可能成立的,这个矛盾说明(r_n)不可能收敛到一个有理数.

1.1.20　证明有理式域Q与实数域R的一个子域$\overline{Q}$序同构,因此实数域是有理数域的扩张.

证　我们以$\overline{Q}$记R中全体有理实数组成的集合,不难验证$\overline{Q}$是R的一个子域.

设r为任一有理数,$\overline{r}$为对应的有理实数,则$\sigma:r\to\overline{r}$就是一个Q到$\overline{Q}$的映射. 下面证明σ是保持顺序不变的同构映射:

(1)σ是同构映射:

显然σ是Q映到$\overline{Q}$上一对一映射,并且保持运算关系

$$\sigma(r_1+r_2)=\overline{r_1+r_2}=\overline{r_1}+\overline{r_2}=\sigma(r_1)+\sigma(r_2),$$

$$\sigma(r_1r_2)=\overline{r_1r_2}=\overline{r_1}\cdot\overline{r_2}=\sigma(r_1)\cdot\sigma(r_2).$$

(2)σ保持顺序关系不变:

如果$r_1<r_2$,则$r_2-r_1>0$,所以

$$\sigma(r_2)-\sigma(r_1)=\sigma(r_2-r_1)=\overline{r_2-r_1}\in R^+.$$

即　　$\sigma(r_2)>\sigma(r_1).$

§2 不 等 式

内容提要

1. 简单不等式

(1) 若 $a>b$,则

$a\pm c>b\pm c$;$c-a<c-b$;

$ac>bc\ (c>0)$;$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}(c>0)$;

$ac<bc\ (c<0)$;$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\ (c<0)$;

$a^n>b^n\ (n>0,b>0,a>0)$;

$a^n<b^n\ (n<0,a>0,b>0)$;

$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ (n 为正整数,$a>0,b>0$).

(2) 若$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,且 b,d 同号,则$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

2. 有关绝对值的不等式

(1) $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$,

$|a\pm b\pm\cdots\pm k|\leqslant|a|+|b|+\cdots+|k|$,

(2) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

(3) 若 $|a|\leqslant b,b>0$,则 $-b\leqslant a\leqslant b$,特别有 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(4) 若 $|a|\geqslant b,b>0$ 则 $a>b,a<-b$.

3. 三角不等式

设 $x,y\in R$,则 $||x|-|y||\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

4. 方幂不等式

设 $x,y\in R$,则有 $2xy\leqslant x^2+y^2$,其中等号当且仅当 $x=y$ 时成立.

问题与解答

1.2.1 证明不等式

(1) $|x-y|\geqslant||x|-|y||$;

(2) $|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$.

证　(1) 在不等式 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ 中，令 $a = x - y, b = y$，得 $|x| \leqslant |x-y| + |y|$，即

$$|x-y| \geqslant |x| - |y| \tag{1}$$

再令 $a = y - x, b = x$，得 $|y| \leqslant |y-x| + |x|$，即

$$|x-y| = |y-x| \geqslant |y| - |x| \tag{2}$$

由(1)、(2) 式可得　$|x-y| \geqslant ||x| - |y||$

(2) 由(1) 得

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| = |x - [-(x_1 + \cdots + x_n)]|$$
$$\geqslant |x| - |-(x_1 + \cdots + x_n)| = |x| - |x_1 + \cdots + x_n| \tag{3}$$

又因 $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2 + \cdots + x_n| \leqslant \cdots \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$，将此代入(3) 式得

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

1.2.2　证明贝努利(J. Bernoulli) 不等式

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证　用数学归纳法.

(1) $n = 1$ 时，不等式显然成立.

(2) 设 $n = k$ 时，不等式成立，即

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_k) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$

则对于 $n = k + 1$，因 $x_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 大于 -1，所以 $1 + x_i > 0$，因而有

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_k)(1 + x_{k+1})$$
$$\geqslant (1 + x_1 + \cdots + x_k)\cdot(1 + x_{k-1})$$
$$= (1 + x_1 + \cdots + x_k + x_{k-1}) + x_{k+1}\cdot(x_1 + \cdots + x_k)$$

由于 $x_ix_j \geqslant 0$，所以

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_{k+1}) \geqslant 1 + x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}.$$

即当 $n = k + 1$ 时，不等式也成立. 因此，对任意自然数 n，贝努利不等式都成立.

1.2.3　证明若 $x > -1$，则不等式 $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx\ (n > 1)$ 为真，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

证　用数学归纳法.

(1) 设 $x > -1$，且 $x \neq 0$，则 $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$，即

当 $n=2$ 时不等式为真.

(2) 设 $n=k(k>2)$ 时不等式为真,因 $1+x>0$,故

$$(1+x)(1+x)^k>(1+x)(1+kx)$$
$$=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x,$$

即当 $n=k+1$ 时不等式也成立.从而,当 $n>1,x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时,有

$$(1+x)^n>1+nx.$$

最后,显然当且仅当 $x=0$ 时,等号成立.

1.2.4 证明不等式 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1)$.

证法 1 用数学归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时,因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$,故不等式成立.

(2) 设 $n=k$ 时不等式成立,即 $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$,则当 $n=k+1$ 时,

有
$$(k+1)!<(\frac{k+1}{2})^k\cdot(k+1)=2\cdot(\frac{k+1}{2})^{k+1}\qquad(*)$$

由 1.2.3 题得 $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\quad(k=1,2,\cdots,n)$

从而有 $(k+1)^{k+1}<\frac{1}{2}(k+2)^{k+1}$,代入(*)式得 $(k+1)!<(\frac{k+2}{2})^{k+1}$.故不等式对大于 1 的一切自然数均成立.

证法 2 当 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$ 时,有 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$,由此得

$$\sqrt{1\cdot n}<\frac{n+1}{2},\ \sqrt{2\cdot(n-1)}<\frac{n+1}{2},\cdots,\ \sqrt{n\cdot 1}<\frac{n+1}{2}$$

两端分别相乘,即得 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

1.2.5 证明不等式

$$2!4!\cdots(2n)!>[(n+1)!]^n\quad(n>1).$$

证 当 $n=2$ 时,因为 $2!4!=48>36=[(2+1)!]^2$.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即 $2!4!\cdots(2k)!>[(k+1)!]^k$,则当 $n=k+1$ 时,有

$$2!4!\cdots(2k+2)!>[(k+1)!]^k(2k+2)!$$
$$=[(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)$$

$$>[(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1}=[(k+2)!]^{k+1}$$

即对 $n=k+1$,不等式也成立.

由数学归纳法可知,不等式对任意大于 1 的自然数 n 均成立.

1.2.6　证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证　当 $n=1$ 时,因 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

则当 $n=k+1$ 时,由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

而 $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$(因 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$),

故有 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对 $n=k+1$,不等式也成立.

由数学归纳法知,不等式对一切自然数 n 均成立.

1.2.7　设 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,而且 $a_1\cdot a_2\cdots a_n=1$,证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n$,且等号仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

证　用数学归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时,由 $a_1\cdot a_2=1, a_1>0$ 知,$a_2=1/a_1$,于是由方幂不等式得 $a_1+a_2=a_1+\frac{1}{a_1}=(\sqrt{a_1})^2+(1/\sqrt{a_1})^2$

$$\geqslant 2\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}=2,$$

(2) 设 $n=k$ 时,不等式成立,证明 $n=k+1$ 时结论仍成立. 分两种情况证明:

1)　$a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$,由此可得 $a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}=1$,因此 $a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}=k+1$.

2)　$a_i(i = 1,2,\cdots,k+1)$ 不全为 1.

这时至少有一个因子大于 1,有一个因子小于 1,不失一般性,可令 $a_1 < 1, a_{k+1} > 1$,于是 $(a_1 \cdot a_{k+1}) \cdot a_2 \cdots a_k = 1$,令 $b_1 = a_1 \cdot a_{k+1}$,则有 $b_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_k = 1$. 根据归纳假设 $b_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant k$,但

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \\ = & (b_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1} - b_1 + a_1 \\ \geqslant & k + a_{k+1} - b_1 + a_1 + 1 - 1 \\ = & (k+1) + a_{k+1} - b_1 + a_1 - 1, \end{aligned}$$

又因 $b_1 = a_1 \cdot a_{k+1}$,所以 $a_{k+1} - b_1 + a_1 - 1 = (a_{k+1} - 1)(1 - a_1) > 0$,从而

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} > k + 1,$$

而且等号仅在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$ 时成立.

1.2.8　证明:(1) $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$,

(2) $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$, $(n = 1,2,\cdots)$.

证　(1) 由 1.2.3 题得

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &\geqslant \left[1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right]\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1. \end{aligned}$$

因此
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(2) 的不等式可用类似方法证明.

1.2.9　证明三角不等式

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

证　由 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$,有

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

即
$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \tag{1}$$

由上面不等式得 $|x|\geqslant|x+y|-|y|$，令 $x=a+b, y=-b$，得
$$|a+b|\geqslant|a|-|b|,$$
在上面不等式中交换 a、b 的位置，得
$$|a+b|\geqslant|b|-|a|=-(|a|-|b|)$$
因此
$$|a+b|\geqslant||a|-|b||. \tag{2}$$

综合(1)、(2) 式即得三角不等式成立.

1.2.10　证明柯西－许瓦尔兹(A. L. Cauchy-H. A. Schwarz) 不等式
$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

证　对于任意 $x\in R$，有 $\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geqslant0$.

令 $A=\sum_{k=1}^{n}a_k^2, B=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k, C=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$，则有 $Ax^2+2Bx+C\geqslant0$，不妨设 $A>0$，令 $x=-\frac{B}{A}$，则有 $B^2-AC\leqslant0$，即柯西－许瓦尔兹不等式成立.

1.2.11　证明闵柯夫斯基(Minkowski) 不等式
$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证　由于 $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k$，

据 1.2.10 题知 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$，

因此
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$
此即闵柯夫斯基不等式.

1.2.12　证明 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，
$$(x_k\geqslant0, k=1,2,\cdots,n),$$

其中等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证 (1) 若有某 $x_k = 0$,则不等式成立.

$$0 \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + 0 + \cdots + x_n),\ (x_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots,n)$$

显然,当且仅当所有 $x_k = 0$ 时等号成立.

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$,用数学归纳法证明如下:

$n = 1$ 时,不等式显然成立.

$n = 2$ 时,$\sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$,且等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2$.

今设 $n = k$ 时,不等式 $\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \leqslant \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$ 成立,且等号成立的充要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$. 现证 $n = k + 1$ 时结论成立.

记 $g = \sqrt[k+1]{x_1\cdots x_kx_{k+1}}$,若 $x_1 = \cdots = x_k = x_{k+1}$,则欲证之不等式显然成立;若诸 x_i 不全相等,则有一个 $x_i > g$,一个 $x_j < g$(不妨设 $i = k, j = k + 1$),考察 $x_1, \cdots, x_{k-1}, \frac{x_kx_{k+1}}{g}$,由归纳假设知

$$\sqrt[k]{x_1\cdots x_{k-1} \cdot \frac{x_kx_{k+1}}{g}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{k-1} + \frac{x_kx_{k+1}}{g}}{k},$$

上式的左方等于 g,而右方小于 $\frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_{k+1}) - \frac{g}{k}$.(由于 $x_k - g > 0, x_{k+1} - g < 0$,故

$$\begin{aligned}\frac{x_kx_{k+1}}{g} &= \frac{1}{g}[g + (x_k - g)][g + (x_{k+1} - g)] \\ &= g + (x_k - g) + (x_{k+1} - g) + \frac{1}{g}(x_k - g)(x_{k+1} - g) \\ &= x_k + x_{k+1} - g + \frac{1}{g}(x_k - g)(x_{k+1} - g) < x_k + x_{k+1} - g.\end{aligned}$$

因而有
$$g < \frac{x_1 + \cdots + x_{k+1}}{k} - \frac{g}{k},$$

即
$$g < \frac{1}{k+1}(x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}).$$

1.2.13 设 $a_i, b_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n), p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,证明赫尔德(Hölder)不等式:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

证　先设 $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1$，则赫尔德不等式为 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$.

可以证明（证略）在题设条件下有不等式 $x \cdot y \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

令 $x = a_i, y = b_i (i = 1,2,\cdots,n)$，则有 $a_i \cdot b_i \leqslant \frac{a_i^p}{p} + \frac{b_i^q}{q}, (i = 1,2,\cdots,n)$.
于是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{p}(\sum_{i=1}^{n} a_i^p) + \frac{1}{q}(\sum_{i=1}^{n} b_i^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

对于一般情况，可令

$$a_i' = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b_i' = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

再利用前面结论即可证之.

1.2.14　设 $a_i, b_i > 0 (i = 1,2.\cdots,n), p > 1$. 证明闵柯夫斯基(Minkowski)不等式

$$[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

证　因为

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1},$$

据赫尔德不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} [\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} [\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}.$$

因此 $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \leqslant [(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}}] \cdot [\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p]^{\frac{1}{q}}$,

（由于 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，故 $p + q = pq, p = (p - 1)q$）所以

$$[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p]^{1-\frac{1}{q}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}},$$

即 $$[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p]^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}b_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2.15 设 $a_i > 0, q_i > 0, q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$，证明不等式

(1) $a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n} \leqslant q_1a_1 + q_2a_2 + \cdots + q_na_n$.

(2) 若 $p_i > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$(a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}} \leqslant \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

证 (1) 用数学归纳法.

$n = 2$ 时，在不等式 $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$（见 1.2.13 题）中，令 $\frac{1}{p} = q_1$，$\frac{1}{q} = q_2, x = a_1^{q_1}, y = a_2^{q_2}$，则有 $a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \leqslant q_1a_1 + q_2a_2$.

对 $n = 3$，仿上作法则有

$$\begin{aligned} a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \cdot a_3^{q_3} &= a_1^{q_1}(a_2^{\frac{q_2}{q_2+q_3}} \cdot a_3^{\frac{q_3}{q_2+q_3}})^{q_2+q_3} \\ &\leqslant q_1a_1 + (q_2+q_3)a_2^{\frac{q_2}{q_2+q_3}} \cdot a_3^{\frac{q_3}{q_2+q_3}} \\ &\leqslant q_1a_1 + (q_2+q_3)(\frac{q_2}{q_2+q_3}a_2 + \frac{q_3}{q_2+q_3}a_3) \\ &= q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3. \end{aligned}$$

设 $n = k$ 时不等式成立，可用类似于上述方法证明 $n = k + 1$ 时不等式也成立.

(2) 令 $q_i = \frac{P_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \ (i = 1,2,\cdots,n)$，则由(1)便知(2)成立.

§3　数列极限

内容提要

1. 数列极限的定义

(1) 有穷极限　设对任意的 $\varepsilon>0$,存在正数 $N(\varepsilon)$,使当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$(a 为有限数),则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 a,称 a 为它的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 无穷极限　若对任意大的数 $E>0$,都存在正数 $N(E)$,使当 $n>N(E)$ 时,有 $|x_n|>E$,则称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限是无穷大,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty.$$

注　我们今后说 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在,仅指有穷极限存在的情况,当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 时,我们不说数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限存在.

(3) 部分极限(聚点)　设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子数列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$,则称数 x_0 为数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分极限或聚点.

一切有界数列至少有一个聚点,若这聚点是唯一的,则它就是已知数列的有穷极限.

(4) 上(下)极限　数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的最大的部分极限(有限或无穷)称为该数列的上极限,记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$,而它的最小部分极限(有限或无穷)称为该数列的下极限,记作 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中若有两个子数列收敛于不同极限,这个数列就不收敛.若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 a,则它的任一子数列都收敛于 a.

2. 极限存在的准则

(1) 设有数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$,若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) 柯西(Cauchy) 准则

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限的充要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$,存在正数 $N(\varepsilon)$,

使当 $n > N(\varepsilon), p > 0$ 时，有 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

(4) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限的充要条件是：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n, \text{且} \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

3. 数列极限的基本公式

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n, \quad (\text{当 } x_n \leqslant y_n \text{ 时}).$$

4. 施笃兹(Stolz) 定理

对于数列 $\{\frac{x_n}{y_n}\}$，若 $n \geqslant N$(N 为某一自然数) 时，$y_{n+1} > y_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$.

5. 常用数列的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a, \quad (a > 0).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n\right] = C = 0.577216\cdots$$

（C 称为欧拉常数）

6. 发散数列的定义

若数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$不以任何实数为极限，则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为发散数列.

注　(1) 数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$常简记作$\{x_n\}$，$\{x_{n_k}\}$.

(2) 数列亦称为序列.

(3) 极限存在准则(1) 常被称为"夹逼定理".

问 题 与 解 答

1. 数列极限的定义

1.3.1　设有数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中$x_n=\frac{100}{1!}+\frac{100^2}{2!}+\cdots+\frac{100^n}{n!}$，试问它是否单调递减并有下界？

解　因$x_n(n=1,2,\cdots)$都是正数，故所给数列有下界，比如0就是它的一个下界.

又因$x_{n+1}=\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{100}{n+1}\cdot x_n$，当$n\geqslant 100$时有$\frac{100}{n+1}<1$，从而$x_{n+1}<x_n$，故数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$自第100项以后为单调递减.

1.3.2　根据定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}=0$.

分析　要使$|(-\frac{1}{2})^{n-1}-0|=\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$，只须$2^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon}$，对这不等式两边取以2为底的对数，得$n-1>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，因此，只要取$N>[\log_2\frac{1}{\varepsilon}+1]$即可.

证　对于任意的$\varepsilon>0$，取$N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]+2$，则当$n>N$时，便有$n>[\log_2\frac{1}{\varepsilon}+2]$，从而$n-1>[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$，于是$2^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon}$，$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$，即

$$|\frac{1}{2^{n-1}}-0|=|(-\frac{1}{2})^{n-1}-0|<\varepsilon,$$

据定义，$\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}=0$.

1.3.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

证 任给 $\varepsilon>0$，解不等式 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，得 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，取 $N\geqslant[\frac{1}{\varepsilon}-1]$. 于是对任意 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N\geqslant[\frac{1}{\varepsilon}-1]$，当 $n>N$，时，有 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

1.3.4 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{1+3n}=\frac{2}{3}$.

证 任给 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{2n}{1+3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-2}{3(1+3n)}\right|=\frac{2}{3(1+3n)}<\varepsilon,$$

注意到 $\frac{2}{3(1+3n)}<\frac{2}{3\cdot 3n}=\frac{2}{9n}$，则满足不等式 $\frac{2}{9n}<\varepsilon$ 的 n 也必然满足不等式 $\frac{2}{3(1+3n)}<\varepsilon$.

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{2}{9\varepsilon}]$，则当 $n\geqslant N$ 时，就有

$$\left|\frac{2n}{1+3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon,\ \text{即}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+3n}=\frac{2}{3}.$$

1.3.5 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$, $(a>1)$.

证 (1) 由于 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}\leqslant\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，因此，任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n!}{n^n}\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

(2) 因 $a>1$，令 $a=1+\lambda\ (\lambda>0)$，则有

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2+\cdots+\lambda^n$$
$$>\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2,$$

从而要使 $\frac{n}{a^n}<\frac{2n}{n(n-1)\lambda^2}=\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\varepsilon$，只须 $n>\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}+1$ 即可，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=[\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}+1]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

1.3.6　证明:(1) 数列$\{\frac{1}{n}\}$的极限不是 1;(2) 数列$\{\frac{n}{n+1}\}$的极限不是 0.

证　(1) 对于常数 1,存在正数 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,使对任给正整数 N(无论怎样大),总有 $n_0=N+1>N$,使得

$$\left|\frac{1}{n_0}-1\right|=\frac{n_0-1}{n_0}=\frac{N}{N+1}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以数列$\{\frac{1}{n}\}$不以 1 为极限.

(2) 对于常数 0,存在正数 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,使对任给正整数 N,总有 $n_0=N+1>N$,使得

$$\left|\frac{n_0}{n_0+1}-0\right|=\frac{N+1}{N+2}>\frac{1}{2},$$

所以数列$\{\frac{n}{n+1}\}$不以 0 为极限.

1.3.7　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}=\frac{5}{2}$.

分析　直接解不等式 $\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}-\frac{5}{2}\right|=\left|\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}\right|<\varepsilon$ 很困难,可先限定 $n\geqslant 7$,这时 $2n+7\leqslant 2n+n$,而

$$2(2n^3-3)=2n^3+2(n^3-3)>2n^3,$$

于是
$$\left|\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}\right|=\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}<\frac{2n+n}{2n^3}<\frac{3}{n^2}.$$

证　首先限定 $n\geqslant 7$,对任意 $\varepsilon>0$,解不等式

$$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}-\frac{5}{2}\right|=\left|\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}\right|=\frac{2n+7}{2(2n^3-3)}<\frac{3n}{2n^3}<\frac{2}{n^2}<\varepsilon,$$

得 $n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$,取 $N\geqslant\max\{[\frac{2}{\varepsilon}],7\}$,于是对任意给定的 $\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon,\ 故\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}=\frac{5}{2}.$$

1.3.8 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中 $|q| < 1$.

证 因 $|q| < 1$,故存在 $a > 0$,使 $|q| = \dfrac{1}{1+a}$,据二项式定理,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+a)^n} = \frac{1}{1 + na + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^2 + \cdots + a^n},$$

因 $\dfrac{1}{1 + na + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^2 + \cdots + a^n} < \dfrac{1}{na}$,故对任意 $\varepsilon > 0$,只须解不等式 $\dfrac{1}{na} < \varepsilon$;由此得 $n > \dfrac{1}{a\varepsilon}$,取 $N = [\dfrac{1}{a\varepsilon}]$,于是当 $n > N$ 时,有 $|q^n - 0| < \varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

1.3.9 证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$,其中 $\alpha > 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3} = 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$,其中 $a_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}, & n \text{ 为偶数}; \\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

证 (1) 对任意的 $\varepsilon > 0$,解不等式 $|\dfrac{1}{n^\alpha} - 0| = \dfrac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$ 或 $n^\alpha > \dfrac{1}{\varepsilon}$,得 $n > (\dfrac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}$;由此可知,对任意的 $\varepsilon > 0$,总存在自然数 $N \geqslant [(\dfrac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha}}]$,使当 $n > N$ 时,有

$$|\frac{1}{n^\alpha} - 0| < \varepsilon, \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

(2) 因为 $|\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}| = \dfrac{n(n+1)}{2n^3} \leqslant \dfrac{n+n}{2n^2} = \dfrac{1}{n}$,所以对于任意的 $\varepsilon > 0$,可取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$,使当 $n > N$ 时,

$$|\frac{1+2+\cdots+n}{n^3} - 0| < \varepsilon, 即 \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^3} = 0.$$

(3) 任给 $\varepsilon > 0$,当 n 为奇数时,要使

$$|a_n - 1| = \left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1\right| = \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{1}{2n} < \varepsilon,$$

只须取 $N_1 = [\frac{1}{2\varepsilon}]$;

当 n 为偶数时,要使　$|a_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$,

只须取 $N_2 = [\frac{1}{\varepsilon}]$.

因而当 $n > N = \max\{N_1, N_2\} = [\frac{1}{\varepsilon}]$ 时,就有

$$|a_n - 1| < \varepsilon, \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

1.3.10　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0)$.

证法1　(用定义)(1) 当 $a > 1$ 时,$\sqrt[n]{a} > 1$. 对任意 $\varepsilon > 0$,解不等式 $|\sqrt[n]{a} - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$ 或 $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ 两边取对数,得 $\frac{1}{n}\ln a < \ln(1+\varepsilon)$,从而有 $n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$. 于是,对任意 $\varepsilon > 0$,总存在自然数 $N \geqslant [\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}]$,使当 $n > N$ 时,有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 1).$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,令 $\frac{1}{a} = b > 1$,有

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{b}} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}}\right| \leqslant |\sqrt[n]{b} - 1|.$$

已知 $\sqrt[n]{b} > 1$,则由 1) 知对任意 $\varepsilon > 0$,总存在自然数 N,使当 $n > N$ 时,有 $|\sqrt[n]{b} - 1| < \varepsilon$. 于是就有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ (0 < a < 1).$$

(3) 当 $a = 1$ 时,则对任意 n,都有 $\sqrt[n]{a} = 1$,从而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ (a = 1).$$

综合(1)、(2)、(3) 知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$(a>0)$.

证法 2 当 $a=1$ 时等式显然成立.

当 $a>1$ 时，令 $\sqrt[n]{a}=1+h_n\ (h_n>0)$，则

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>nh_n,$$

故 $0<h_n<\frac{a}{n}$，取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1$.

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$.

综上所述，当 $a>0$ 时有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

1.3.11 证明数列$\{(-1)^n\}$发散.

证 只须证明，任意实数 a 都不是此数列的极限.

事实上，存在 $\varepsilon_0=1$，若 $a\geqslant 0$，则对任意自然数 N，总有奇数 $n_0>N$，使 $|(-1)^{n_0}-a|=|-1-a|=1+a\geqslant 1=\varepsilon_0$；

若 $a<0$，则对任意自然数 N，总有偶数 $n_0>N$，使 $|(-1)^{n_0}-a|=|1-a|>1=\varepsilon_0$，从而任意实数 a 都不是数列$\{(-1)^n\}$的极限，所以数列$\{(-1)^n\}$发散.

1.3.12 证明数列 $x_n=n^{(-1)^n}$，$(n=1,2,\cdots)$ 无界，但当 $n\to\infty$ 时，它并不成为无穷大.

证 因对无论多么大的数 $M>0$，总有数 $N=[\frac{M}{2}]$，使当 $n>N$ 时 $|x_{2n}|=|2n^{(-1)^{2n}}|=2n>M$，故$\{x_n\}$无界.

但是，对于$\{x_n\}$的奇数项$x_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$，显然当 $n\to\infty$ 时并不无限增大，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\infty$.

1.3.13 设 (1) $x_n=\frac{1}{n!}$，(2) $x_n=(-1)^n\cdot(0.999)^n$；证明 $x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 为无穷小量(即 x_n 以 0 为极限).

证 (1) 由于 $n!=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1\geqslant2\cdot2\cdot\cdots2\cdot1=2^{n-1}$，故 $|x_n-0|=\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$，要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只须$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$，解此不等式

得 $n > 1 + \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

因此,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $N = 1 + [\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}]$,使当 $n > N$ 时,有 $|x_n - 0| < \varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(2) 要使 $|x_n - 0| = |(-1)^n \cdot (0.999)^n - 0| = (0.999)^n < \varepsilon$,只须 $n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{-\ln 0.999}$. 因此,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $N = [-\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 0.999}]$,使当 $n > N$ 时,有 $|x_n - 0| = |(-1)^n \cdot (0.999)^n| < \varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

1.3.14　设(1) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$,(2) $x_n = \ln(\ln n)(n \geqslant 2)$,证明 x_n 有无穷极限.

证　(1) 任意给定 $M > 0$,要使 $|x_n| = 2^{\sqrt{n}} > M$,只须 $n > (\frac{\ln M}{\ln 2})^2$. 所以,对任意 $M > 0$,存在 $N = [(\frac{\ln M}{\ln 2})^2]$,使当 $n > N$ 时,有 $|x_n| > M$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(2) 要使 $|x_n| = \ln(\ln n) > M$,只须 $n > e^{e^M}$. 从而,对任意的 $M > 0$,存在 $N = [e^{e^M}]$,使当 $n > N$ 时,有 $|x_n| > M$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

1.3.15　证明数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充要条件是 $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ 与 $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于相同的极限.

证　必要性　设 $\{a_n\}$ 收敛,记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,使当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 于是,当 $2k - 1 > N$,即 $k > M_1 = [\frac{1}{2}(N+1)]$ 时 $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$,且当 $2k > N$,即 $k > M_2 = [\frac{N}{2}]$ 时 $|a_{2k} - a| < \varepsilon$,即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$.

充分性　设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$,则对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $M_1, M_2 > 0$,使当 $k > M_1$ 时,有 $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$,当 $k > M_2$ 时有 $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. 取 $M = \max\{M_1, M_2\}$,则当 $k > M$ 时有 $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$、$|a_{2k} - a| < \varepsilon$ 同时成立. 由于 $k > M$ 相当于 $2k - 1 > 2M - 1$,$2k > 2M$,因此可取 $N = 2M$,则当 $n > N$ 时恒有 $|a_n - a| < \varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1.3.16　证明:若数列 $x_n(n = 1,2,\cdots)$ 无界,则存在子数列 $x_{p_n}(n = 1,2,\cdots)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty$.

证 因 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 无界，故存在某一项 x_{p_1} 满足 $|x_{p_1}|>1$. 由于数列 $x_n(n=p_1+1,p_1+2\cdots)$ 也无界，故又存在某一项 $x_{p_2}(p_2>p_1)$，使得 $|x_{p_2}|>2$；一般地，若已选出某一项 x_{p_k} 满足 $|x_{p_k}|>k$，则据数列 $x_n(n=p_{k+1},p_{k+2},\cdots)$ 是无界的，故可选出某一项 $x_{p_{k+1}}(p_{k+1}>p_k)$ 满足 $|x_{p_{k+1}}|>k+1$；于是，我们得到 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{p_n}\}$ 满足 $|x_{p_n}|>n$ $(n=1,2,\cdots)$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\infty$.

1.3.17 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a\neq b$，证明数列：$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots$ 不收敛.

证 记 $C_n=\begin{cases}a_k,n=2k-1,\\ b_k,n=2k,\end{cases}(k=1,2,\cdots)$，若数列 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，则存在极限（设为 c），于是，对任给的 $\varepsilon>0$，必存在 N，使当 $n>N$ 时，有 $|c_n-c|<\varepsilon$. 于是，当 $2k>2k-1>N$，即 $k>M=\left[\dfrac{N+1}{2}\right]$ 时，$|a_k-c|<\varepsilon$，$|b_k-c|<\varepsilon$，这表明 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=c$，此与 $a\neq b$ 矛盾.

1.3.18 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之是否成立？

证 对任意的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以存在 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 又由 $||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$，得

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$$

反之不真. 例如 $a_n=(-1)^n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但 $\{(-1)^n\}$ 并无极限.

1.3.19 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a<b$，证明：存在自然数 $N>0$，使当 $n>N$ 时 $a_n<b_n$.

证 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(b-a)>0$，则由题设知，存在自然数 N_1 和 N_2，使当 $n>N_1$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$，从而有 $a_n<a+\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(a+b)$；当 $n>N_2$ 时 $|b_n-b|<\varepsilon_0$，从而有 $b_n>b-\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(a+b)$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有 $a_n<\dfrac{1}{2}(a+b)<b_n$.

1.3.20 若 $\{a_n\}$ 收敛，则它的任何子数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 都收敛，反之也

成立.

证　(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N>0$,使当$n>N$时$|a_n-a|<\varepsilon$. 任意给出数列$\{a_n\}$的一个子列$\{a_{n_k}\}$(由$\{a_n\}$中选出无穷多个无素,按它们在原数列中的先后顺序排列成一个新的数列;n_k是子列中的元素a_{n_k}在原数列$\{a_n\}$中的位数,k是a_{n_k}在子列$\{a_{n_k}\}$中的位数,因此恒有$k\leqslant n_k$). 若令$M=N$. 则当$k>M$时,由于$n_k>n_M=n_N\geqslant N$,所以也满足$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 综上所述,任给$\varepsilon>0$,存在$M(=N)$,使当$k>M$时$|a_{n_k}-a|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$. 也就是说收敛数列的一切子列都收敛于原数列的极限.

(2) 反之,若已知任何子列$\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$都收敛,则它们必有相同的极限,否则将两个收敛于不同极限的子列逐项交错排列所得的子列将不再收敛. 特别地,其子数列$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$当然也都收敛于同一极限,因而据 1.3.15 题知数列$\{a_n\}$必收敛.

1.3.21　设序列$\{x_n\}$收敛,试证其算术平均值的序列$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$也收敛,且有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,但反之结论不真,举例说明之.

证　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$n_0$,使当$n>n_0$时,$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由此,当$n>n_0$时,有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n_0}+x_{n_0+1}+\cdots+x_n}{n}-a\right|$$

$$=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n_0}+x_{n_0+1}+\cdots+x_n-na}{n}\right|$$

$$=\left|\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{n_0}-a)+(x_{n_0+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_0}|x_i-a|}{n}+\frac{(n-n_0)\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}\frac{|x_i-a|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

当n_0取定后,$\sum\limits_{i=1}^{n_0}|x_i-a|$为定数,故有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_0}|x_i-a|}{n}=0$. 从而对上面

同一个 $\varepsilon>0$,存在N,使当$n>N$时,$0<\sum_{i=1}^{n_0}\frac{|x_i-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 取$N>n_0$,于是当$n>N$时,$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,证毕.

下面的例子说明逆命题不成立.

设 $x_n=\sin nx$, 则当 $x\neq 2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,有

$$\frac{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}{n}=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x\cdot\sin\frac{1}{2}nx}{n\sin\frac{1}{2}x}\to 0(n\to\infty)$$

当 $x=2k\pi$ 时,当然也有$\frac{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}{n}\to 0$,而当$x\neq\pi$的整数倍时,极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$ 不存在.

注 当 $a=+\infty$ 或 $-\infty$ 时,本题结论仍成立;但 $a=\infty$ 时,结论不成立.

实际上,本题结论是施笃兹定理的特例.

1.3.22 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{3a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)a}{n^2}\right]$.

解 记 $A_n=\sin\frac{a}{n^2}+\sin\frac{3a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)a}{n^2}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2},$$

(1) 设 $a=0$,则 $A_n=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$.

(2) 设$a>0$,因$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$,故对任意给定的$\varepsilon>0$,总有$\delta>0$,使得$0<|x|<\delta$时,有$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{\varepsilon}{a}$,于是,当$n>\frac{2a}{\delta}$ $(\delta>\frac{2a}{n})$时,有$\frac{a}{n^2}<\frac{3a}{n^2}<\cdots<\frac{(2n-1)a}{n^2}<\frac{2n}{n^2}a=\frac{2a}{n}<\delta$,故

$$\left|\frac{\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}}{\frac{(2k-1)a}{n^2}}-1\right|<\frac{\varepsilon}{a},$$

即
$$\left|\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}-\frac{(2k-1)a}{n^2}\right|<\frac{2k-1}{n^2}\cdot\varepsilon;$$

所以$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}-\frac{(2k-1)a}{n^2}\right)\right|$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}-\frac{(2k-1)a}{n^2}\right|<\varepsilon\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n^2}$$

$$=\varepsilon\cdot\frac{1}{n^2}[1+3+\cdots+(2n-1)]$$

$$=\varepsilon\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n^2=\varepsilon.$$

又　$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)a}{n^2}=a$. 从而有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}-a\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=a.$$

(3) 设 $a<0$, $C_n=\sin\frac{-a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{-(2n-1)a}{n^2}$,

$$A_n=\sin\frac{a}{n^2}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)a}{n^2},$$

则 $A_n=-C_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-C_n)$. 于是,由(2)得,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=-\lim_{n\to\infty}(C_n)=-(-a)=a.$$

综上所述,得$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=a$.

1.3.23　设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$, $n=1,2,3,\cdots$,证明此数列有极限,并求其极限值.

解　若该数列的极限存在,设为 l,则由递推式知 $l=\frac{3(1+l)}{3+l}$,解之得 $l=\pm\sqrt{3}$. 而 $x_n>0$,故 $l=\sqrt{3}$. 现证 $\sqrt{3}$ 确是$\{x_n\}$的极限. 由

$$|x_n-\sqrt{3}|=\left|\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}-\frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}\right|$$

$$=\left|\frac{3(3+\sqrt{3})(1+x_{n-1})-3(1+\sqrt{3})(3+x_{n-1})}{(3+x_{n-1})(3+\sqrt{3})}\right|$$

$$=\left|\frac{(3-\sqrt{3})(x_{n-1}-\sqrt{3})}{3+x_{n-1}}\right|\leqslant\frac{3-\sqrt{3}}{3}|x_{n-1}-\sqrt{3}|.$$

依次类推，有 $|x_n-\sqrt{3}|\leqslant(\frac{3-\sqrt{3}}{3})^{n-1}|x_1-\sqrt{3}|$，再据 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}<1$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{3})=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

注　也可用单调有界原理证明 $\{x_n\}$ 极限的存在性.

1.3.24　证明下述结论：

(1) 设数列 $\{x_n\}$ 是有界的，则它收敛的充要条件是：集合 $\{x_n\}$ 有唯一聚点；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 是单调的，则它收敛的充要条件是：$\{x_n\}$ 存在一个收敛的子数列.

证　(1) 必要性显然.

充分性　设 $\{x_n\}$ 有唯一聚点 a，若它不收敛于 a，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及无穷子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $|x_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0(k=1,2,\cdots)$，又由维尔斯特拉斯聚点原则知 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 亦有聚点 b，由上面不等式知 $b\neq a$，与假设矛盾，故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 a.

(2) 必要性显然.

充分性　不失一般性，设 $\{x_n\}$ 单调上升. 若它不收敛，则必有子数列 $\{x'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}x'_{n_k}=\infty$. 再设 $\{x_n\}$ 有收敛子数列为 $\{x''_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 由(1)式知，对于任意自然数 N，必定存在 $x'_{n_{k_N}}$ 使 $x'_{n_{k_N}}\geqslant N$，又由单调上升性可知：总存在 $x''_{n_{k_N}}\in\{x''_{n_k}\}$ 满足：$x''_{n_{k_N}}\geqslant x'_{n_{k_N}}$，即对上述的 N，有 $x''_{n_{k_N}}$ 使 $x''_{n_{k_N}}\geqslant N$，这与数列 $\{x''_{n_k}\}$ 收敛矛盾.

因此，若所论数列 $\{x_n\}$ 不收敛，那么它就没有收敛子列.

1.3.25　若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证　(1) 设 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\to+\infty$，由定义知必存在 $N>0$，使当 $n>N$ 时，有 $\frac{x_2x_3\cdots x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}}\geqslant\frac{1}{x_1}$ 及 $\frac{x_n}{x_{n-1}}\geqslant M^2$. 于是 $\frac{x_n}{x_1}=\frac{x_2x_3\cdots x_n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\geqslant\frac{1}{x_1}M^{2(n-N)}$，即 $x_n\geqslant M^{2(n-N)}$.

故当 $n>2N$ 时，$x_n>M^n$，即 $\sqrt[n]{x_n}>M$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=+\infty$.

(2) 设$\frac{x_{n+1}}{x_n}\to 0$,令$y_n=\frac{1}{x_n}$,则$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{x_n}{x_{n+1}}\to+\infty$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=+\infty$,故得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y_n}}=0$.

(3) 设$\frac{x_{n+1}}{x_n}\to a>0$,则当$n>N$时,有$a-\varepsilon<\frac{x_n}{x_{n-1}}<a+\varepsilon$,故

$$a-\varepsilon<\frac{x_{N+1}}{x_N}<a+\varepsilon,\cdots,a-\varepsilon<\frac{x_n}{x_{n-1}}<a+\varepsilon.$$

由此得 $(a-\varepsilon)^{n-N}\cdot x_N<x_n<(a+\varepsilon)^{n-N}\cdot x_N$,

$$\left[\frac{x_N}{(a-\varepsilon)^N}\right]^{\frac{1}{n}}(a-\varepsilon)<\sqrt[n]{x_n}<\left[\frac{x_N}{(a+\varepsilon)^N}\right]^{\frac{1}{n}}(a+\varepsilon),$$

取定ε及N,且让$n\to\infty$,得$a-\varepsilon\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant a+\varepsilon$.因$\varepsilon$为任意正数,故得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

注 本命题的逆命题不真.例如$x_{2n-1}=\alpha,x_{2n}=\beta(n=1,2,\cdots)$,$\alpha\neq\beta$都是正数,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$存在,而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$不存在.

2. 柯西准则

1.3.26 应用柯西准则,证明以下数列收敛:

(1) $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, $n=1,2,\cdots$.

证 (1) 利用基本极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$知,对任给的$\varepsilon>0$,必存在$N$,使当$n>N$时有$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,因而当$n>N$时,对一切$p=1,2,\cdots$均有

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$
$$<\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

则由柯西准则知$\{a_n\}$收敛.

(2) 任给$\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$m>n>N$时有

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)}$$
$$= (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) + \cdots + (\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1})$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

由柯西准则知$\{a_n\}$收敛.

1.3.27 设$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $n = 1,2,\cdots$,应用柯西准则证明数列$\{x_n\}$收敛.

证 对任意给定的$\varepsilon > 0$,取$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$,使当$m > n > N$时,恒有

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}$$
$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m}$$
$$= (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \cdots + (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m})$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

则由柯西准则知数列$\{x_n\}$收敛.

1.3.28 若有常数M及数列$\{a_n\}$,对一切n有$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| \leqslant M$证明:(1)数列$\{A_n\}$收敛;(2)数列$\{a_n\}$收敛.

证 (1)因为$A_{n+1} - A_n = |a_{n+1} - a_n| \geqslant 0$, $A_n \leqslant M$, $n = 1,2,\cdots$,所以$\{A_n\}$是单调递增且有上界的数列,故收敛.

(2)由于$\{A_n\}$收敛,因此对任给的$\varepsilon > 0$,必存在$N > 0$,使当$m > n > N$时$|A_m - A_n| < \varepsilon$,从而有

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - \cdots + a_{n+1} - a_n|$$
$$\leqslant |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|$$
$$= A_m - A_n = |A_m - A_n| < \varepsilon,$$

即$\{a_n\}$满足柯西条件,因而收敛.

1.3.29 应用柯西准则证明以下数列不收敛:(1) $a_n = (-1)^n n$;

(2) $a^n=\sin\frac{n\pi}{2}$；(3) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证　(1) 对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ 及任意大的自然数 N，当取 n 为大于 N 的任意值(例如 $n=N+1$)，且 $m=n+1$ 时，有

$$|a_m-a_n|=|(-1)^{n+1}(n+1)-(-1)^n n|=1>\varepsilon_0,$$

所以数列 $\{(-1)^n n\}$ 不收敛.

(2) 对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ 及任意大的自然数 N，当 $n=2N>N,m=2N+1>N$ 时，有

$$|a_m-a_n|=\left|\sin\frac{(2N+1)\pi}{2}-\sin\frac{2N\pi}{2}\right|$$
$$=|(-1)^N-0|=1>\varepsilon_0,$$

所以数列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ 不收敛.

(3) 存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对于任意大的自然数 N，当取 n 为大于 N 的任意数(例如 $n=N+1$)，且 $m=2n$ 时，总有

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

故 $\{a_n\}$ 不收敛.

1.3.30　已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

证　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，故对于任意给定的 $\frac{\varepsilon}{2}$，存在正整数 $N>2$，使当 $n\geqslant N$ 时，有 $|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是对于任意正整数 p，有

$$|x_{N+p}-x_{N+(p-1)}|=|x_{N+p}-x_{N+p-2}+x_{N+p-2}-x_{N+p-1}|$$
$$\leqslant|x_{N+p}-x_{N+p-2}|+|x_{N+p-2}-x_{N+p-1}|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-1}-x_{n+p-3}|+|x_{n+p-3}-x_{n+p-2}|$$
$$\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-2}-x_{N+p-3}|\leqslant\cdots$$
$$\leqslant p\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-p}-x_{N+p-p+1}|=p\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|x_N-x_{N-1}|.$$

选取 p,使 $N+p>\dfrac{2|x_N-x_{N-1}|}{\varepsilon}$,则当 $n\geqslant N+p$ 时,有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|\leqslant\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|x_N-x_{N-1}|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$

1.3.31 设当 $n\geqslant 1$ 时,$|x_{n+2}-x_{n+1}|<k|x_{n+1}-x_n|$,这里 $0<k<1$,证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证 令 $b_n=|x_{n+1}-x_n|$,于是 $0\leqslant b_{n+1}\leqslant kb_n(n=1,2,\cdots)$,依次类推可得 $b_{n+1}\leqslant k^nb_1,(n=1,2,\cdots)$,故对任意 $m>n$,当 $n\to\infty$ 时有

$$|x_m-x_n|=\left|\sum_{i=n}^{m-1}(x_{i+1}-x_i)\right|\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}|x_{i+1}-x_i|=\sum_{i=n}^{m-1}b_i$$

$$\leqslant b_n(1+k+\cdots+k^{m-n-1})<\frac{1}{1-k}b_n\leqslant\frac{1}{1-k}\cdot k^{n-1}b_1\to 0.$$

即 $\{x_n\}$ 是柯西数列,故收敛.

注 已知数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在自然数 $N_\varepsilon>0$,当 $m,n>N_\varepsilon$ 时,有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$,则数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为柯西数列.

1.3.32 设 $x_n=\dfrac{\cos1!}{1\cdot2}+\dfrac{\cos2!}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证 因 $|x_{n+p}-x_n|\leqslant\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\dfrac{1}{(n+p)(n+p-1)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+p-1}<\dfrac{1}{n+1}$,故当 $n>N$ 时,对于任意正整数 p,都有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$,因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

1.3.33 若存在常数 c,使 $|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c(n=2,3,\cdots)$ 则称数列 $\{x_n\}$ 有有界变差. 证明:凡有有界变差的数列皆收敛.

举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

证 令 $s_n=|x_1|+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|$,易知 s_n 单调递增且有上界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在.

据柯西判别法知,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,对 $p=1,2,\cdots$,有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$. 于是

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+1}-x_n|+|x_{n+2}-x_{n+1}|+\cdots+|x_{n+p}-x_{n+p-1}|$$

$$= S_{n+p} - S_n < \varepsilon,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

例子：令$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$，则因 $|x_{n+p} - x_n|$

$$= |(-1)^n[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}]|$$

$$= \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) - (\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}) - \cdots$$

$$< \frac{1}{n+1}.$$

据柯西准则知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，然而$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty$，即$\{x_n\}$不是有界变差数列.

3. 夹逼定理

1. 3. 34　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n} p!}{n!}$.

解　(1) 由于$0 < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，因此，由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}] = 0.$$

(2) 由于$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(3) 由于
$$0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\cdot5}}\cdots\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$

(4) 因为
$$n!<\sum_{p=1}^{n}p!=1+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!+n!,$$
$$<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!$$

所以
$$1<\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}<\frac{2(n-1)!}{n!}+1,\text{而}\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)!}{n!}+1=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}=1.$$

1.3.35 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{2}}{n}=1.$

证 因为
$$\frac{1+1+\cdots+1}{n}\leqslant\frac{1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$$
$$\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n},$$

故
$$1 \leqslant \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} \leqslant \sqrt[n]{n},$$
又 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$，所以由夹逼定理知
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

1.3.36　证明：若 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = d > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证　由题设有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{d} = p < 1$，令 $q = \dfrac{1}{2}(p+1)$，则 $p < q < 1$. 由极限的性质知，必存在正整数 N，使当 $n \geqslant N$ 时，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$，因而 $a_{N+1} < qa_N$，$a_{N+2} < qa_{N+1} < q^2a_N, \cdots, a_n < q^{n-N}a_N$，又 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-N}a_N = a_N \cdot \lim\limits_{n\to\infty} q^{n-N} = 0$（因 $0 < q < 1$），故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.3.37　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0\ (a > 0)$.

证法1　存在自然数 k，$k \geqslant a$，使 $1 > \dfrac{a}{k+1} > \dfrac{a}{k+2} > \dfrac{a}{k+3} > \cdots$，当 $n > k$ 时，有
$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{k} \frac{a}{k+1} \frac{a}{k+2} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}$$
$$< \frac{a^k}{k!} \frac{a}{n} = \frac{a^{k+1}}{k!} \frac{1}{n},$$
即当 $n > k$ 时，有 $0 < \dfrac{a^n}{n!} < \dfrac{a^{k+1}}{k!} \cdot \dfrac{1}{n}$. 已知 $\dfrac{a^{k+1}}{k!}$ 是常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$，因而由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

证法2　存在自然数 N，$N > a$. 于是当 $n > N$ 时，$\dfrac{a}{n} < \dfrac{a}{N} < 1$，且 $b_n = \dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} \dfrac{a}{n} < \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} = b_{n-1}$，由此可知所论数列从 N 项以后是单调递减的，又由 $b_n > 0$ 知此数列有下界；所以数列 $\{b_n\}$ 有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，对递推公式 $b_n = \dfrac{a}{n} b_{n-1}$ 两边分别取极限，得 $b = 0 \cdot b = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0\ (a > 0)$.

注　当 $a \leqslant 0$ 时上述结论仍然成立.

1.3.38 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 因为$\sqrt[n]{n}\geqslant 1$,故令$\sqrt[n]{n}-1=a_n$,则$n=(1+a_n)^n$,且对任意自然数n,有$a_n\geqslant 0$.于是,由二项式定理得

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2!}a_n^2+\cdots+a_n^n>\frac{n(n-1)}{2!}a_n^2.$$

当$n>2$时,因$2n<4(n-1)$,$\frac{2}{n-1}<\frac{4}{n}$,故有

$$0\leqslant a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

即$0\leqslant\sqrt[n]{n}-1\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}$.由1.3.9题知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0$,则据夹逼定理有$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

1.3.39 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

证 设$k\geqslant 1$,当$n\geqslant k$,即$n-k\geqslant 0$时,有$k(n-k)\geqslant n-k$,因而有$k(n-k+1)\geqslant n$.故

$$1\cdot n\geqslant n,2(n-1)\geqslant n,3(n-2)\geqslant n,\cdots,n\cdot 1\geqslant n.$$

将各式两边分别相乘,得$(n!)^2\geqslant n^n$.即$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$.取极限,即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

1.3.40 求$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$,$(0<k<1)$.

解 因$0<[(n+1)^k-n^k]=n^k[(1+\frac{1}{n})^k-1]$

$$<n^k[(1+\frac{1}{n})-1]=\frac{1}{n^{1-k}}.$$

而当$n\to\infty$时,$\frac{1}{n^{1-k}}\to 0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$,$(0<k<1)$.

1.3.41 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$,其中$a>0$.

解 由1.3.10题可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$.

(1) 设 $0 < a \leqslant 1$,则 $1 < (1+a^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{2}$,从而

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(2) 设 $a > 1$,则 $(a^n)^{\frac{1}{n}} < (1+a^n)^{\frac{1}{n}} < (2a^n)^{\frac{1}{n}}$,即

$$a < (1+a^n)^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{2}\cdot a.$$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}} = a$.

1.3.42　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}) = 0$.

证　由 1.2.6 题知 $0 < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$,故由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}) = 0.$$

1.3.43　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n) = s$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n) = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = 0, (a_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n)$.

证　(1) 令 $s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n = s$,而

$$\begin{aligned}&a_1+2a_2+\cdots+na_n\\ =\ &s_1+2(s_2-s_1)+3(s_3-s_2)+\cdots+n(s_n-s_{n-1})\\ =\ &ns_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}).\end{aligned}$$

据题 1.3.21 知当 $n\to\infty$ 时,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)\\ =\ &s_n-\frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\to s-s\cdot 1,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n) = 0$.

(2) 因 $0 \leqslant (n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1\cdot 2a_2\cdot\cdots\cdot na_n}$

$$\leqslant \frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n),$$

则由(1)及夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0.$$

1.3.44 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}(a>1)$.

解 (1) 当$k=1$时,先证一辅助不等式

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{4}{(a-1)^2n}\ (n>2). \tag{1}$$

因$a>1$,可令$a=1+\lambda(\lambda>0)$,由二项式定理得

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2,$$

当$n>2$时,显然有$n-1>\dfrac{n}{2}$,从而$a^n>\dfrac{n^2}{4}(a-1)^2$,由此即得不等式(1).由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{(a-1)^2n}=0$,则由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

(2) 当$k>1$时,因为$a^{1/k}>1$,故于(1)式中以$a^{1/k}$代a得

$$0<\frac{n}{(a^{1/k})^n}<\frac{4}{(a^{1/k}-1)^2n},$$

又$n>\dfrac{4}{(a^{1/k}-1)^2}$时,有$1>\dfrac{4}{(a^{1/k}-1)^2n}$,从而得

$$0<\frac{n}{(a^{1/k})^n}<\frac{4}{(a^{1/k}-1)^2\cdot n}<1,$$

于是有 $$0<\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{1/k})^n}\right]^k<\frac{n}{(a^{1/k})^n};$$

由(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(a^{1/k})^n}=0$,故有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ (k>1)$.

(3) 当$k<1$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{k-1}\cdot n}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{1-k}}=0$.

综合(1),(2),(3)得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$.

注 由此题可得一重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^k}=\infty\ (a>1)$.

1.3.45 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n}$,此处$[nx]$表示$nx$的整数部分;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^3}+\dfrac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^3}\right]$.

解　(1) 因 $nx-1<[nx]\leqslant nx$，即 $x-\frac{1}{n}<\frac{[nx]}{n}\leqslant x$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(x-\frac{1}{n})=x$，则由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n}=x$.

(2) 由 $\frac{n}{(2n)^3}<\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3}<\frac{n}{(n+1)^3}$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(2n)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^3}=0$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{1}{(2n)^3}\right]=0.$$

1.3.46　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$.

解　由于 $\frac{1}{n^2}(\ln n!)=\frac{1}{n^2}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right],$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$，则由 1.3.21 题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right]=0,$$

故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\ln n!)=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}1/n^2\ln n!}=e^0=1.$$

1.3.47　给定 m 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，记 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$.

证　因 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，所以

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\leqslant\overbrace{A^n+A^n+\cdots+A^n}^{m项}=mA^n.$$

另一方面，$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\geqslant A^n$，从而 $A^n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\leqslant mA^n$，

即　　$A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant A\cdot\sqrt[n]{m}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}A\cdot\sqrt[n]{m}=A$，则据夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A.$$

1.3.48　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]$.

解　令 $y=(n^x+1)^{-\frac{1}{x}}$，则 $\ln y=-\dfrac{1}{x}\ln(n^x+1)$，求导数得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\frac{n^x}{n^x+1}\ln n,$$

由
$$\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1)-\frac{1}{x}\frac{n^x}{n^x+1}\ln n>\frac{1}{x^2}\ln n^x-\frac{1}{x}\ln n=0$$

及 $y>0$ 知，$y'>0$，故 y 是关于 x 的单增函数，故

$$\frac{n}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}<\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}},$$

当 $n\to\infty$ 时，不等式两端的极限是 1，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

同理有
$$\frac{n}{(n^2-1)^{\frac{1}{2}}}<\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}<\frac{n}{n-1},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}=1,$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}+(n^k-1)^{-\frac{1}{k}}\right]=2.$$

4. 单调有界数列的极限

1.3.49　证明：若 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，$\{b_n\}$ 是单调递减数列，且 $a_n<b_n$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证　由题设知 $a_n<b_1, b_n>a_1(n=1,2,\cdots)$，故 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 单调有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

1.3.50　判断下面数列的收敛性：

(1) $x_n=p_0+p_1/10+\cdots+p_n/10^n\ (n=1,2,\cdots)$，式中 $p_i(i=0,1,2,\cdots)$ 是非负整数，从 p_1 起不大于 9；

(2) $x_n=10/1\cdot 11/3\cdot\cdots\cdot(n+9)/(2n-1),(n=1,2,\cdots)$，

(3) $x_n=(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{4})\cdot\cdots\cdot(1-\dfrac{1}{2^n}),(n=1,2,\cdots)$，

(4) $x_n=(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{4})\cdots(1+\dfrac{1}{2^n}),(n=1,2,\cdots)$.

解　(1)$x_{n+1}=x_n+p_{n+1}/10^{n+1}$，由于 $p_{n+1}>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$，即数

列$\{x_n\}$是单调增加的，又由于

$$0 < x_n < p_0 + 9(1/10 + \cdots + 1/10^n) < p_0 + 1,$$

所以数列$\{x_n\}$是有界的，从而该数列收敛.

(2) 当$n > 10$时，由$(n+9)/(2n-1) < 1$知，该数列单调递减且显然有下界$(x_n > 0)$，从而该数列收敛.

(3) 显然，$0 < x_n < 1$，又$x_{n+1} = x_n(1 - 1/2^{n+1}) < x_n$，从而$\{x_n\}$单调递减且有界，故该数列收敛.

1.3.51　定义数列x_n为：$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1), \cdots, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}), \cdots$，试证$\{x_n\}$的极限存在($a, b$是常实数).

证　不妨假定$a \leqslant b$，即$x_0 \leqslant x_1$. 由$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$得$x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_1$；由$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$得$x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_1$，于是有

$$a = x_0 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{2n} \leqslant x_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant x_3 \leqslant x_1 = b,$$

从而数列$\{x_{2n}\}$单调递增且有上界，数列$\{x_{2n+1}\}$单调递减且有下界，故$\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}$都收敛. 又由$x_{2n+1} - x_{2n} = \frac{1}{2}(x_{2n} - x_{2n-2})$，因$\{x_{2n}\}$收敛，故$x_{2n} - x_{2n-2} \to 0\ (n \to \infty)$，从而$x_{2n+1} - x_{2n} \to 0\ (n \to \infty)$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$. 于是，根据1.3.15题知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

1.3.52　给定两个正数a_1与$b_1(a_1 > b_1)$，作出其等差中项$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$与等比中项$b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$，一般地，令$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$存在且相等.

证　由于$\sqrt{a_n b_n} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + b_n)$，故$b_{n+1} \leqslant a_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$. 从而

$$b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n = \sqrt{b_n^2} \leqslant \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1} \leqslant a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \leqslant \cdots \leqslant a_1,$$

即$\{a_n\}$是单调递减数列，且以b_1为下界；$\{b_n\}$是单调递增数列，且以a_1为上界，故它们都收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，对$2a_{n+1} = a_n + b_n$两边分别取极限，得$2a = a + b$，所以$a = b$.

1.3.53 证明数列

$$\sqrt{a},\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}},\cdots(a>0)$$

收敛，并求它的极限.

证 令 $s_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}$（$n$ 个根号），则有 $s_{n+1}=\sqrt{a+s_n}$，首先证明数列 $\{s_n\}$ 单调递增且有上界. 显然，$s_1<s_2$；设 $s_k<s_{k+1}$（k 是自然数），则 $a+s_k<a+s_{k+1}$，$\sqrt{a+s_k}<\sqrt{a+s_{k+1}}$，即 $s_{k+1}<s_{k+2}$，则由数学归纳法知所论数列是单调增加的. 又当 $n=1$ 时，有 $s_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$，设 $n=k$ 时，有 $s_k<\sqrt{a}+1$，则当 $n=k+1$ 时，也有

$$\begin{aligned}s_{k+1}=\sqrt{a+s_k}&<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}\\&<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1,\end{aligned}$$

故由数学归纳法知该数列有上界.

综上所述，数列 $\{s_n\}$ 的极限存在.

下面我们来求它的极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=l$，已知 $s_{n+1}^2=a+s_n$，于是 $l^2=a+l$，解方程得

$$l=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4a}).$$

根据极限的保号性知，l 不能是负数，因而数列 $\{s_n\}$ 的极限是

$$\lim_{n\to\infty}s_n=l=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}).$$

1.3.54 证明数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，$(n=1,2,\cdots)$ 单调递增且有上界，而数列 $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 单调递减且有下界. 由此证明它们有相同的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$.

证 欲证 $x_{n+1}<x_n$，即 $(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}<(1+\frac{1}{n})^n$，亦即

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}<\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n, \text{或 } 1-\frac{1}{n}<\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n=(1-\frac{1}{n^2})^n.$$

由题 1.2.3 可得上面不等式，从而知数列$\{x_n\}$是单调递增的.

欲证 $y_{n-1}>y_n$，即$(1+\frac{n}{n-1})^n>(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，只须证

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n>1+\frac{1}{n} \text{ 或}(\frac{n^2}{n^2-1})^n=(1+\frac{1}{n^2-1})^n>1+\frac{1}{n},$$

由 1.2.3 题可得$(1+\frac{1}{n^2-1})^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n}$，故数列$\{y_n\}$是单调递减的.

下面证明这两个数列都是有界的：

显然有 $y_n>1$，故$\{y_n\}$有下界. 又因 $x_n<y_n$，故 $x_n<y_n<y_{n-1}<\cdots<y_1$，即$\{x_n\}$有上界.

综上所述，极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在.

又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，即它们有相同的极限，记作 e. 由于 $1\leqslant e\leqslant y_n$，故取 $n=5$ 得 $1\leqslant e<(\frac{6}{5})^6<3$.

1.3.55　利用$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1})}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$

$$= e \cdot 1 = e$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$

$$= \sqrt{e}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{0\cdot\ln e} = e^0 = 1.$$

1.3.56 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{n^2}{m^2})^m$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot(\frac{\lambda}{n})^k\cdot(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$，其中 λ,k 是常数.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{m\to\infty}\{[1-(\frac{n}{m})^2]^{-(\frac{m}{n})^2}\}^{-\frac{n^2}{m}} = e^0 = 1.$

(2) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2})^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}]^{-n\cdot\frac{2nx+x^2}{2n^2}} = e^{-x}.$

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdot\cdots(1-\frac{k-1}{n})\cdot\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{1^k} = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.$$

1.3.57 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^n$.

解 记 $a_n = (\frac{n+1}{n-1})^n = (1+\frac{2}{n-1})^n$，则有

$$a_{2k-1} = (1+\frac{2}{2k-2})^{2k-1} = [(1+\frac{1}{k-1})^{k-1}]^2\cdot(1+\frac{1}{k-1}),$$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1} = e^2$. 又 $a_{2k} = (1+\frac{2}{2k-1})^{2k}$，所以

$$(1+\frac{2}{2k})^{2k}<a_{2k}<(1+\frac{2}{2k-2})^{2k},$$

然而 $\lim\limits_{k\to\infty}(1+\frac{2}{2k})^{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}[(1+\frac{1}{k})^k]^2=e^2$,

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{2}{2k-2})^{2k}=\lim_{k\to\infty}[(1+\frac{1}{k-1})^{k-1}]^2\cdot(1+\frac{1}{k-1})^2=e^2,$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=e^2$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^n=e^2$.

1.3.58　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$.

解　因为 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}<\frac{n+1}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}$,所以

$$(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n<(1+\frac{1}{n-1})^n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1})$

$$=e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n,$$

故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=e$.

1.3.59　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e$,并由此证明公式 $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}),(0<\theta_n<1)$.

证　因

$$(1+\frac{1}{n})^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

故

$$(1+\frac{1}{n})^n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{1}$$

又若 k 是任意给定的自然数,则当 $n>k$ 时有

$$(1+\frac{1}{n})^n>1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

令 $n\to\infty$,由 1.3.54 题即得

$$e \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!},$$

其中 k 为任意自然数. 若将 k 改作 n，并注意(1) 式，则得

$$e \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} > (1 + \frac{1}{n})^n.$$

再取极限，则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = e.$

又由 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots)$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

可知，存在 θ_n 满足 $0 < \theta_n < 1$，使

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}.$$

1.3.60 证明 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$，并用此不等式证明：$\{c_n\} = \{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\}$ 为单调递减的收敛数列.

证 由 1.3.54 题知，$\{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}\}$ 是单调递减数列，$\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 是单调递增数列，它们都以 e 为极限，因此有

$$1 < (1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

取自然对数得 $0 < n\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 < (n+1)\ln(1 + \frac{1}{n})$，

因而有 $\ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 和 $\ln(1 + \frac{1}{n}) > \frac{1}{n+1}$.

上面不等式等价于 $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$，由右边不等式可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}[\ln(k+1) - \ln k] < \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，即

$$\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是 $c_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0$,

即数列 $\{c_n\}$ 有下界.

再利用左边不等式可得

$$\begin{aligned}c_n-c_{n+1}&=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}\\&=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}>0.\end{aligned}$$

这表明数列 $\{c_n\}$ 是单调递减的.

综上可知，数列 $\{c_n\}$ 有极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$.

注　$c=0.5772156649\cdots$ 称为欧拉常数.

1.3.61　证明以下两数列都以 ln2 为极限：

(1) $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$;

(2) $b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

证　由 1.3.60 题知

$$\begin{aligned}a_n&=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\\&=(c+\ln 2n+\varepsilon_{2n})-(c+\ln n+\varepsilon_n)=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n,\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln 2$.

(2) 令 $H_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}=c+\ln k+\varepsilon_k$，其中 c 是欧拉常数，$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$. 则有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_k,$$

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k;$$

$$\begin{aligned}b_{2k}&=(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k})\\&=H_{2k}-H_k\\&=(c+\ln 2k+\varepsilon_{2k})-(c+\ln k+\varepsilon_k)=\ln 2+\varepsilon_{2k}-\varepsilon_k,\end{aligned}$$

$$b_{2k-1}=b_{2k}+\frac{1}{2k}.$$

从而有$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=\ln 2$，故$\lim\limits_{k\to\infty}b_n=\ln 2$.

1.3.62 证明数列

$$x_1=1,x_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\cdots,x_n=\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\frac{1}{1}}}}\Bigg\}n\text{重},\cdots$$

有极限，并求该极限.

证 显然，$0<x_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$，且$x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}$，设$x_0=0$，则有$x_{n+2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}=\frac{1+x_n}{2+x_n}$，$n=0,1,2,\cdots$，由此容易推得数列$\{x_{2n}\}$是单调递增的，故数列$\{x_{2n}\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\alpha$.

类似地，可证$\{x_{2n-1}\}$有极限，记$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\beta$. 由$x_{2n}=\frac{1}{1+x_{2n-1}}$知，$\alpha=\frac{1}{1+\beta}$，由$x_{2n+1}=\frac{1}{1+x_{2n}}$知，$\beta=\frac{1}{1+\alpha}$，解之得$\alpha=\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1.3.63 设连续函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是正的、单调递减的，且$\delta_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$，证明：数列$\{\delta_n\}$是收敛的.

证 由于$f(x)$在$[1,+\infty$上是正的、单调递减的，故由积分中值定理得

$$\delta_n-\delta_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx-\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\int_1^{n-1}f(x)dx$$
$$=f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)dx=f(n)-f(\xi)\leqslant 0,$$

这理ξ满足$n-1\leqslant\xi\leqslant n$.

又
$$\delta_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^2 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx-\cdots-\int_{n-1}^{n}f(x)dx$$
$$=f(1)-f(\xi_1)+f(2)+f(\xi_2)+\cdots+f(n-1)$$

$$-f(\xi_{n-1})+f(n)\geqslant f(n)>0.$$

其中 $i\leqslant\xi_i\leqslant i+1, i=1,2,\cdots,n-1$.

故数列 $\{\delta_n\}$ 单调递减且有下界,从而收敛.

1.3.64　已知 $F(x,y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$, $F(1,y)=\frac{y^2}{2}-y+5$,任选 $x_0>0$,作 $x_1=F(x_0,2x_0)$, $x_2=F(x_1,2x_1)$, $\cdots$, $x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$, $\cdots$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

证　因 $F(x,y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$,则 $F(1,y)=\frac{1}{2}f(y-1)$,又已知

$$F(1,y)=\frac{y^2}{2}-y+5=\frac{1}{2}[(y-1)^2+9],$$

故
$$f(y-1)=(y-1)^2+9,$$

从而 $f(y-x)=(y-x)^2+9$, $F(x,y)=\frac{1}{2x}[(y-x)^2+9]$.

对任选的 $x_0>0$,得数列

$$x_1=F(x_0,2x_0)=\frac{1}{2x_0}(x_0+9),$$

$$x_2=F(x_1,2x_1)=\frac{1}{2x_1}(x_1^2+9),$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n+1}=F(x_n,2x_n)=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9),\cdots$$

因为 $x_0>0$,故此数列是一正项数列.

由 $x_n=\frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1}^2+9)=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}})$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}(x_n^2+9)=\frac{1}{4}(x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}})+\frac{9}{x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}}},$$

可得
$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{4}(x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}})+\frac{9}{x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}}}-\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}})$$

$$=\frac{9}{x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}}}-\frac{1}{4}(x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}})$$

$$=\frac{1}{x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}}}[9-\frac{1}{4}(x_{n-1}+\frac{9}{x_{n-1}})^2]$$

$$= \frac{-\left(x_{n-1} - \frac{9}{x_{n-1}}\right)^2}{x_{n-1} + \frac{9}{x_{n-1}}} \leqslant 0.$$

即 $x_{n+1} \leqslant x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的.

又因数列 $\{x_n\}$ 是正项数列，故 0 必是其下界. 或由

$$x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 9) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 3^2) \geqslant \frac{1}{2x_n} \cdot 2x_n \cdot 3 = 3$$

知 3 也是单减数列 $\{x_n\}$ 的下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，则 $l \geqslant 3$.

对 $x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 + 9)$ 两边取极限，得 $l = \frac{1}{2l}(l^2 + 9)$，解方程，得 $l = \pm 3$. 由 $l \geqslant 3$ 知 $l = 3$，即 $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

1.3.65　设 $u_1 \geqslant 0$，$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$，$(n = 1,2,\cdots)$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解　当 $u_1 \leqslant 1$ 时，由数学归纳法易知 $u_n \leqslant 1$，且 $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 \geqslant 0$，$(n = 1,2,\cdots)$，故 $\{u_n\}$ 是单调有界数列，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在. 在 $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ 两端取极限，易解得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

当 $u_1 > 1$ 时，可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$，证明如下：

由上已知 u_n 单调递增，故 $u_n \geqslant u_1 > 1(n = 1,2,\cdots)$，再由

$$u_2 - 1 = u_1^2 - u_1 = u_1(u_1 - 1),$$
$$u_3 - 1 = u_2^2 - u_2 = u_2(u_2 - 1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{n+1} - 1 = u_n^2 - u_n = u_n(u_n - 1),$$

诸式两端分别相乘，并约去非零因子，得

$$u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \cdots u_n (u_1 - 1) > u_1^n (u_1 - 1),$$

而当 $n \to \infty$ 时，$u_1^n(u_1 - 1) \to +\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_1 \leqslant 1; \\ +\infty, & \text{当 } u_1 > 1. \end{cases}$

1.3.66　设 $x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$，$(n = 1,2,\cdots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

证　由 $x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ 知，必有 $x_n > 0$，$(n = 1,2,\cdots)$，

且　$x_{n+1}=\frac{1}{2}[(\sqrt{x_n}-\sqrt{\frac{2}{x_n}})^2+2\sqrt{2}]\geqslant\sqrt{2},(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x_n^2})\leqslant\frac{1}{2}(1+\frac{2}{2})=1,(n=1,2,\cdots),$$

所以$\{x_n\}$是单调递减且有下界的数列，从而$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$A>0$，对$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$两边分别取极限，得$A=\frac{1}{2}(A+\frac{2}{A})$，即$A^2=2$，从而有$A=\sqrt{2}$（因$A>0$，故$A=-\sqrt{2}$舍去）. 由此证得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

1.3.67　设数列$\{x_n\}$由递推式

$$x_{n+1}=\frac{1}{5}(2x_n+3),n=1,2,3,\cdots \tag{1}$$

确定，其中$x_1>0$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限.

解　当$x_1\leqslant 1$时，用归纳法可以证明该数列的所有项均不超过1. 事实上，若$x_n\leqslant 1$，则$x_{n+1}=\frac{1}{5}(2x_n+3)\leqslant\frac{1}{5}(2\times 1+3)=1$.

其次，由$x_n\leqslant 1$易知$x_{n+1}\geqslant\frac{1}{5}(2x_n+3x_n)=x_n$，即数列$\{x_n\}$单调递增且有上界.

当$x_1\geqslant 1$时，类似地可证$\{x_n\}$是单调递减数列，且有下界1.

综上所述，当$x_1>0$时，$\{x_n\}$是单调有界数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$l$. 在(1)式两边对$n$取极限，得$l=\frac{1}{5}(2l+3)$，解此方程可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l=1.$$

1.3.68　已知数列x_n定义为

$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}),n=1,2,\cdots, \tag{1}$$

其中a为正常数，x_0是任意正数，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　因$a>0$，$x_0>0$，由x_n的递推式知$x_n>0$. 又由算术平均值不小于几何平均值知

$$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}})\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a},n=1,2,\cdots,$$

再由$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_{n-1}^2})\leqslant 1$，$n=2,3,\cdots$，知$\{x_n\}$单调递减且有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$l$.

在(1)式两边关于n求极限，得$l=\frac{1}{2}(l+\frac{a}{l})$，又据$l>0$可解得$l=\sqrt{a}$.

1.3.69 已知$a_0\geqslant b_0>0$，作如下两个数列$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，$n=0,1,2,\cdots$，$b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，$n=0,1,2,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

解 由数学归纳法及a_{n+1}和b_{n+1}的递推式可知，a_{n+1}与b_{n+1}都在a_n与b_n在之间，且$a_n\geqslant b_n$，$n=0,1,2,\cdots$. 于是有

$$a_0\geqslant a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant b_{n+1}\geqslant b_n\geqslant\cdots\geqslant b_1\geqslant b_0,$$

故两个数列a_n和b_n都是单调有界的，从而极限存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$. 由于

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}\leqslant\frac{1}{2}(a_n-b_n),n=0,1,2,\cdots,$$

则当$n\to\infty$时有，$a_{n+1}-b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}(a_0-b_0)\to 0$，从而知$A=B$.

易知$a_nb_n=a_0b_0$，$(n=1,2,\cdots)$，从而$A^2=a_0b_0$，故有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=A=\sqrt{a_0b_0}.$$

1.3.70 已知$x_1=1$，$x_2=1+\frac{x_1}{x_1+1}$，$\cdots$，$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 显然，$x_n>0(n=1,2,\cdots)$，又

$$x_2-x_1=1+\frac{x_1}{1+x_1}-x_1=\frac{1}{2}>0,$$

假设$x_k-x_{k-1}>0$，则

$$x_{k+1}-x_k=(1+\frac{x_k}{1+x_k})-(1+\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}})$$

$$=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0,$$

即$x_{k+1}>x_k$，，故由数学归纳法知$\{x_n\}$单调递增.

又 $x_n = 2 - \dfrac{1}{1 + x_{n-1}} < 2$，即$\{x_n\}$有上界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $a \geqslant 0$，对 $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ 两边取极限，得 $a = 1 + \dfrac{a}{1 + a}$，据 $a \geqslant 0$ 解此方程得 $a = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

1.3.71　设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln(x_0 - x_k)$，$n = 2,3,4,\cdots$，其中 $x_0 > 0$，$x_1 = \ln x_0$. 试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求该极限.

解　由于当 $x > 0$ 时，不等式 $\ln x \leqslant x - 1$ 成立，所以 $x_0 - x_1 = x_0 - \ln x_0 \geqslant 1$，一般地，设对 k 有 $x_0 - x_k \geqslant 1$，则 $x_{k+1} - x_k = \ln(x_0 - x_k) \leqslant x_0 - x_{k-1}$，即 $x_0 - x_{k+1} \geqslant 1$，故由数学归纳法知 $x_0 - x_n \geqslant 1$，$n = 1,2,3,\cdots$. 由此可见，对于一切 n，x_n 都有定义，并且 x_n 是单调递增且有界的数列. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为 l.

由 $x_{n+1} = x_n + \ln(x_0 - x_n)$ 及函数 $\ln x$ 的连续性知

$$l = l + \ln(x_0 - l),$$

由此解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l = x_0 - 1$.

1.3.72　设 $p_n(n = 1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列，$q_n(n = 1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列，求证

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{p_n})^{p_n} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{q_n})^{q_n} = e.$$

证　令 $k_n = [p_n]$，即 k_n 表示 p_n 的整数部分，则 $k_n \leqslant p_n \leqslant k_{n+1}$.

由于 $p_n \to +\infty$，故 $k_n \to +\infty$，从而$(1 + \dfrac{1}{k_n})^{k_n} \to e$. 因$\dfrac{1}{k_n} \geqslant \dfrac{1}{p_n} \geqslant \dfrac{1}{k_n + 1}$，故$(1 + \dfrac{1}{k_n})^{k_n+1} > (1 + \dfrac{1}{p_n})^{p_n} > (1 + \dfrac{1}{k_n + 1})^{k_n}$而易知

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{k_n})^{k_n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{k_n + 1})^{k_n} = e,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{p_n})^{p_n} = e$.

其次，因 $q_n \to -\infty$，令 $p_n = -q_n$，则 $p_n \to +\infty$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{q_n})^{q_n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{p_n})^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{p_n}{p_n-1})^{p_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{p_n-1})^{p_n-1}\cdot(1+\frac{1}{p_n-1})=e,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{p_n})^{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{q_n})^{q_n}=e.$

1.3.73 设 $g_1,g_2,g_3,\cdots$ 是使下列不等式 $0<g_n<1,(1-g_n)g_{n+1}>\frac{1}{4},(n=1,2,3\cdots)$ 成立的任何数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=\frac{1}{2}$.

证 因对任何实数 x，有 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$，因此 $(1-g_n)g_n<(1-g_n)g_{n+1}$，又由 $g_n<1$ 知 $1-g_n>0$，所以 $g_n<g_{n+1}$，即数列 $\{g_n\}$ 单调递增且有上界 1，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=l$，则由 $(1-g_n)g_{n+1}>\frac{1}{4}$ 知，l 必满足 $(1-l)l\geqslant\frac{1}{4}$，于是必有 $l=\frac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=\frac{1}{2}$.

1.3.74 数列 $\{u_n\}$ 由递推公式 $u_1=b,\ u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2\ (n\geqslant1)$ 所确定，当 a 与 b 为何值时数列 $\{u_n\}$ 收敛？收敛时求其极限.

解 由 $u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$ 知，如果 $\{u_n\}$ 的极限为 A，则

$$A=A^2+(1-2a)A+a^2，即\ A=a.$$

另由递推式 $u_{n+1}=u_n^2+(1-2a)u_n+a^2$ 得 $u_{n+1}=u_n+(u_n-a)^2$，故 $u_{n+1}\geqslant u_n$.

若对所有的 n，都有 $u_n\leqslant a$，则 $\{u_n\}$ 单调递增且有界，从而 $\{u_n\}$ 有极限. 而若对某一个 i 有 $u_i>a$，则存在正数 $r>0$ 使 $u_i>a+r$，故对一切 $j>i$ 有 $u_j>a+r$，这说明 $\{u_n\}$ 不可能有极限 a，从而极限不存在. 因此，$\{u_n\}$ 的极限存在的充分必要条件是对一切 n，都有 $u_n\leqslant a$.

若 $b>a$，则 $u_1>a$，从而 $\{u_n\}$ 不收敛.

若 $b<a-1$，则 $a-b>1$，所以

$$u_2=u_1+(u_1-a)^2=b+(a-b)^2>b+a-b=a,$$

故 $\{u_n\}$ 仍不收敛.

若 $a-1\leqslant b\leqslant a$，则易知 $a-1\leqslant u_2\leqslant a$，利用数学归纳法易得

$a-1\leqslant u_n\leqslant a$，此时$\{u_n\}$收敛，并且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

综上所述，当且仅当时$a-1\leqslant b\leqslant a$时，$\{u_n\}$有极限，且为$a$.

1.3.75　设$x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a},a>0\ (n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限.

证　因$x_n>0$，且函数$\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$是单调增加的，故若$0<x_1<\sqrt{a}$，则$0<x_2<\dfrac{\sqrt{a}\,(a+3a)}{3a+a}=\sqrt{a},\cdots,0<x_{n+1}<\sqrt{a}$，又此时$x_{n+1}-x_n=\dfrac{2x_n(a-x_n^2)}{3x_n^2+a}>0$，因此$\{x_n\}$是单调递增且有上界的数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$l$.

又由$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$知$l=\dfrac{l(l^2+3a)}{3l^2+a}$. 解此方程得$l=\sqrt{a}$.

若$\sqrt{a}\leqslant x_1$，则$\sqrt{a}<x_n,x_{n+1}-x_n\leqslant 0$，即$\{x_n\}$是单调递减且有下界的数列，故此时$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$也存在，同理可求得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

5. 施笃兹定理和托普利兹定理

1.3.76　证明：若$y_{n+1}>y_n\ (n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在，则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

证　假定$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=A$. 由此并注意到$y_n\to+\infty$可知，对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使当$n>N$时，恒有$y_N>0$，且$\left|\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$从而$A-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{x_{N+i+1}-x_{N+i}}{y_{N+i+1}-y_{N+i}}<A+\dfrac{\varepsilon}{2},i=1,2,\cdots$.

因为$y_{n+1}>y_n$，所以，这些分数的分母都是正数，于是得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+i+1}-y_{N+i})<x_{N+i+1}-x_{N+i}$$
$$<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+i+1}-y_{N+i}),\quad i=1,2,3,\cdots,$$

所以，当$n>N$时有

$$\sum_{i=1}^{n-N}(A-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+i+1}-y_{N+i})<\sum_{i=1}^{n-N}(x_{N+i+1}-x_{N+i})$$
$$<\sum_{i=1}^{n-N}(A+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+i+1}-y_{N+i}),$$

即 $(A-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1})<x_{n+1}-x_{N+1}<(A+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1})$

则当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 另外,我们有

$$\frac{x_n}{y_n}-A=\frac{x_{N+1}-Ay_{N+1}}{y_n}+(1-\frac{y_{N+1}}{y_N})(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-A).$$

注意到 $y_n\to+\infty$,可以取正整数 $N'>N$,使当 $n>N'$ 时,有

$$\left|\frac{x_{N+1}-Ay_{N+1}}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是由 $y_N>0$ 及上述推证知,当 $n>N'$ 时,恒有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-A\right|<\varepsilon,\text{即}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

注 本题称作施笃兹(stolz)定理.

1.3.77 若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛,且 $x_n>0$,证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,故 $a\geqslant 0$. 先设 $a>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$. 于是,由施笃兹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

若 $a=0$,设 $y_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,有 $0<x_n<\frac{\varepsilon}{4}$,从而

$$0<y_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_N\cdot x_{N+1}\cdots x_n}<\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_N}\cdot(\frac{\varepsilon}{4})^{\frac{n-N}{n}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_N}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\varepsilon}{4})^{\frac{n-N}{n}}=\frac{\varepsilon}{4}$,故必存在 N',使当 $n>N'$ 时

$$0<\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_N}<2,\ \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{n-N}{n}}<\frac{\varepsilon}{2},$$

所以，当 $n>N'$ 时，有 $0<y_n<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

注　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则本题结论仍然成立.

1.3.78　计算下列数列的极限

(1) $a_n=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；

(2) $b_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2^{1+2+\cdots+n}}}$.

解　(1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，则据施笃兹定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 由于 $b_n=\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdots\frac{1}{2^n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，则由 1.3.77 题知，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

1.3.79　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}$，其中 a 是任意实数.

解法 1　因为 $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}=\dfrac{\dfrac{1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{n^{a+2}}}{\dfrac{1^a+2^a+\cdots+n^a}{n^{a+1}}}$，故可用施笃兹定理来计算.

设 $x_n=1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}$，$y_n=n^{a+2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{n^{a+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}}{n^{a+2}-(n-1)^{a+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}}{n^{a+2}-\left[n^{a+2}-(a+2)n^{a+1}+\frac{(a+2)(a+1)}{2!}n^a-\cdots\right]}$$

$$=\frac{1}{a+2},$$

同理可求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^a+2^a+\cdots+n^a}{n^{a+1}}=\dfrac{1}{a+1}$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}=\dfrac{\dfrac{1}{a+2}}{\dfrac{1}{a+1}}=\dfrac{a+1}{a+2}$.

解法 2 因为 $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}=\dfrac{\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{n})^{a+1}}{\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{n})^{a}}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{a+1}=\int_0^1 x^{a+1}dx=\frac{1}{a+2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{a}=\int_0^1 x^{a}dx=\frac{1}{a+1},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}=\dfrac{a+1}{a+2}$.

1.3.80 设 $a_0=0$, $a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)$, $n=0,1,2,\cdots$, 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_k}{n}$.

解 令 $b_n=a_n-1, n=0,1,2,\cdots$,则由 $a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)$ 可得:

$$b_{n+1}=\sin b_n\quad(n=0,1,2,\cdots).\tag{1}$$

因为 $a_0=0$,故有 $b_0=-1$,从而 $b_1=\sin(-1)<0$,由此推知 $b_n<0$. 又当 $x<0$ 时,恒有 $x<\sin x$,故 $b_n<\sin b_n=b_{n+1}$, $n=0,1,2,\cdots$,即 $\{b_n\}$ 是单调递增且有上界的数列,故极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$,则由正弦函数的连续性及(1)式得 $l=\sin l$,解得 $l=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

再据施笃兹定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1.$

1.3.81　已知 $\sin_1 x=\sin x,\sin_n x=\sin(\sin_{n-1}x)$，$n=1,2,3,\cdots$，若 $\sin x>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}\sin_n x=1.$

证　取定 x，显然当 $n\to+\infty$ 时，$\sin_n x$ 单调递减且趋于零，于是由施笃兹定理有

$$\lim_{n\to\infty}n\sin_n^2 x=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{\sin_n^2 x}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{\sin_{n+1}^2 x}-\dfrac{1}{\sin_n^2 x}},$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin_{n+1}^2 x}-\dfrac{1}{\sin_n^2 x}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin^2(\sin_n x)}-\dfrac{1}{\sin_n^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}}=3.$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}\cdot\sin_n x=\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}n\sin_n^2 x}{3}}=1.$

1.3.82　设 $p_k>0$，$k=1,2,\cdots$，定义数列 $\{q_n\}$ 如下：$q_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$，$n=1,2,\cdots$，并设 $\{q_n\}$ 发散，但 $\lim\limits_{n\to\infty}p_nq_n^{-1}=0$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1q_1^{-1}+p_2q_2^{-1}+\cdots+p_nq_n^{-1}}{\ln q_n}=1.$$

证　因 $\{p_k\}$ 为一正项数列，且 $\{q_n\}$ 发散，故 $\{q_n\}$ 必单调递增至 $+\infty$，从而 $\{\ln q_n\}$ 也单调递增趋于 $+\infty$，根据施笃兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1q_1^{-1}+p_2q_2^{-1}+\cdots+p_nq_n^{-1}}{\ln q_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_nq_n^{-1}}{\ln q_n-\ln q_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p_nq_n^{-1}}{\ln\dfrac{q_n}{p_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_nq_n^{-1}}{\ln\dfrac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p_nq_n^{-1}}{-\ln(1-p_nq_n^{-1})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-\ln(1-x)}=1.$$

这里用到题设条件 $\lim\limits_{n\to\infty}p_nq_n^{-1}=0$.

1.3.83　设 $p_{n0}+p_{n1}+\cdots+p_{nn}=1\ (n=0,1,2,\cdots)$，又设

$$y_n=p_{n0}x_0+p_{n1}x_1+p_{n2}x_2+\cdots+p_{nn}x_n\ (n=0,1,2,\cdots),$$

且 $p_{ij} \geqslant 0\ (i,j=0,1,2,\cdots)$，证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 推出 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nm} = 0\ (m=1,2,\cdots)$.

证　充分性　由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 知，存在 $M>0$，使 $|x_n - a| < M\ (n=0,1,2,\cdots)$. 又对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N^*，使当 $n>N^*$ 时 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ni} = 0\ (i=0,1,2,\cdots,N^*)$ 知，存在 $N_i > N^*$，使当 $n > N_i$ 时，有 $0 \leqslant p_{ni} < \frac{\varepsilon}{2N^* M}\ (i=0,1,2,\cdots,N^*)$.

令 $N = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant N^*} \{N_i\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$|y_n - a| = \left|\sum_{i=0}^{n} p_{ni}x_i - \sum_{i=0}^{n} p_{ni}a\right| \leqslant \sum_{i=0}^{N^*} p_{ni}|x_i - a| + \sum_{i=N^*+1}^{n} p_{ni}|x_i - a|$$

$$< N^* \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2N^* M} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=N^*+1}^{n} p_{ni} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

必要性　对任意 m，当 $n \geqslant m$ 时，定义

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ 1, & n = m, \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots,m,m+1,\cdots)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，此时 $y_n = p_{nm}, n \geqslant m$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_{nm} = 0$.

注　本题结论称作托普利兹(Toeplitz)定理.

1.3.84　已知两个正项数列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$，它们分别满足条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{q_0 + q_1 + \cdots + q_n} = 0,$$

定义一个新的数列

$$r_n = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots + p_n q_0,\ n = 0,1,2,\cdots,$$

证明 $\{r_n\}$ 也满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_0 + r_1 + \cdots + r_n} = 0$.

证　令 $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$，$Q_n = q_0 + q_1 + \cdots + q_n$，$R_n = r_0 + r_1 + \cdots + r_n, n = 0,1,2,\cdots$，又令

$$P_{nm} = \frac{p_{n-m}Q_m}{p_0 Q_n + p_1 Q_{n-1} + \cdots + p_n Q_0}, m < n,$$

显然 $P_{nm} \leqslant \dfrac{p_{n-m}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-m}} \to 0\ (n \to \infty)$，所以对任一固定的 m，有

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{nm} = 0, \sum\limits_{m=0}^{n} P_{nm} = 1$. 又因

$$\frac{r_n}{R_n} = \frac{p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots + p_n q_0}{p_0 Q_n + p_1 Q_{n-1} + \cdots + p_n Q_0} = P_{n0}\frac{q_0}{Q_0} + P_{n1}\frac{q_1}{Q_1} + + P_{nn}\frac{q_n}{Q_n},$$

故据托普利兹定理有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{r_0 + r_1 + \cdots + r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n}{Q_n} = 0$.

1.3.85　设 $p_k > 0\ (k = 0,1,2,\cdots)$，又设

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = 0$,　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + \cdots + s_n p_0}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = s$.

证　令 $p_{nm} = \dfrac{p_{n-m}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n}\ (m = 0,1,2,\cdots,n = 1,2,\cdots)$. 因为 $0 < p_{nm} \leqslant \dfrac{p_{n-m}}{p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-m}}$，故据假设知，对任意固定的 m，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0, 且 \sum_{m=0}^{n} p_{nm} = 1,$$

又 $y_n = \dfrac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + \cdots + s_n p_0}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = \sum\limits_{m=0}^{n} p_{nm} s_n$，因此由托普利兹定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

6. 综合问题

1.3.86　求下列各极限：

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}\right)$；

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin a + \sin(a + \frac{b}{n}) + \cdots + \sin(a + \frac{n-1}{n}b)}{n}$；

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2 + 1^2} + \dfrac{1}{n^2 + 2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 + n^2}\right)$；

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}\right)$；

(5)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$；

(6)　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

(7)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$；

(8)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+e^{\frac{2\pi}{n}}+e^{\frac{4\pi}{n}}+\cdots+e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$.

解　(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right]$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

(2) 当 $b=0$ 时，原式 $=\sin a$，

当 $b\neq 0$ 时，

原 式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(a+\dfrac{k}{n}b)\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\sin(a+bx)dx=\frac{1}{b}[\cos a-\cos(a+b)].$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

(4) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^2}$

$$=-\left[\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\dfrac{2}{3}$.

(6) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n} = \int_0^1\dfrac{dx}{1+x} = \ln 2.$

(7) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n})^p\cdot\dfrac{1}{n} = \int_0^1 x^p dx = \dfrac{1}{1+p}.$

(8) 原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i-1}{n}\cdot 2\pi}\cdot\dfrac{1}{n} = \int_0^1 e^{2\pi x}dx = \dfrac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1).$

1.3.87 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1^x+2^x+\cdots+n^x)^{y+1}}{(1^y+2^y+\cdots+n^y)^{x+1}}.$

解 (1) 设 $x\neq -1, y\neq -1$，则

$$原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{\{\frac{1}{n}\cdot n^{x+1}[(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n}{n})^x]\}^{y+1}}{\{\frac{1}{n}\cdot n^{y+1}[(\frac{1}{n})^y+(\frac{2}{n})^y+\cdots+(\frac{n}{n})^y]\}^{x+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^x\cdot\frac{1}{n}]^{y+1}}{[\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^y\cdot\frac{1}{n}]^{x+1}} = \frac{\left[\int_0^1 u^x du\right]^{y+1}}{\left[\int_0^1 v^y dv\right]^{x+1}} = \frac{(y+1)^{x+1}}{(x+1)^{y+1}}.$$

(2) 设 $x=-1, y=-1$，显然原式 $=1$.

(3) 设 $x=-1, y\neq -1$，则

$$原式 = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{y+1} = \begin{cases}+\infty, & 当\ y>-1\ 时;\\ 0, & 当\ y<-1\ 时,\end{cases}$$

(4) 设 $x\neq -1, y=-1$，则

$$原式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{x+1}} = \begin{cases}0, & 当\ x>-1\ 时;\\ +\infty, & 当\ x<-1\ 时.\end{cases}$$

1.3.88 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ ($x\neq 0$ 是实数).

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}}=\cdots\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cos\dfrac{x}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x}{2^n}}{x\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\sin x=\frac{\sin x}{x}.$$

1.3.89　求下列各极限：

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n^2}\sin n!}{n+1}$；

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,|b|<1)$；

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2})$；

(5)　$\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n}|$；

(6)　$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}]$；

(7)　$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}]$；

(8)　$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}]$；

(9)　$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]$；

(10)　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_{m-1}n+b_m}$，其中 k,m 都是自然数，且 $k\leqslant m$；a_i，$b_j(i=0,1,\cdots,k;\ j=0,1,\cdots,m)$ 都是与 n 无关的常数，且 $a_0\neq0,b_0\neq0$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}=\dfrac{\dfrac{1}{n^{1/3}}(\sin n!)}{1+\dfrac{1}{n}}=0$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\dfrac{2}{3})^n+1}{(-2)(-\dfrac{2}{3})^n+3}=\dfrac{1}{3}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a^{n+1})/(1-a)}{(1-b^{n+1})/(1-b)}=\dfrac{1-b}{1-a}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$.

(5) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{1}{2}[n+\dfrac{1-(-1)^n}{2}]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}[1+\dfrac{1-(-1)^n}{2n}]=\dfrac{1}{2}$.

(6) 由于 $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$,故

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{1}{n})(1-\dfrac{1}{2n})=\dfrac{1}{3}$.

(7) 设 $s_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$,则

$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=S_{2n}-4S_n$

$=\dfrac{1}{6}[2n(2n+1)(4n+1)-4n(n+1)(2n+1)]$

$=\dfrac{1}{6}(2n+1)(4n^2+2n)=\dfrac{1}{6}(2n-1)2n(2n+1)$,

故原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{3n^2}=\dfrac{4}{3}$.

(8) 设 $s_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}++\dfrac{2n-1}{2^n}$,则

$2s_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1}}$,

两式相减，得 $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n}$

$$= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n},$$

故　原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 3.$

(9) 原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

(10) 原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[2^n]{2}} = 2.$$

(11) 因 $\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1} + \cdots + a_k}{b_0n^m + b_1n^{m-1} + \cdots + b_m} = n^{k-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_m}{n^m}},$

又　$\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-m} = \begin{cases}0, & \text{当 } k < m \text{ 时};\\ 1, & \text{当 } k = m \text{ 时},\end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_m}{n^m}} = \frac{a_0}{b_0},$

因此，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} n^{k-m}\cdot\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_m}{n_m}} = \begin{cases}0, & \text{当 } k < m \text{ 时};\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } k = m \text{ 时}.\end{cases}$

(12) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ 知，

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]}{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right]} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right]}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right]} = \frac{1}{3}.$$

1.3.90　判断下面数列是否收敛：

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty},$

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \cdots, n, \frac{1}{n+1}, \cdots\right\},$

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{0,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\cdots\right\}$,

(4) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(5) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{(-2)^n+(-3)^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

解　(1) 由于$a_{2k-1}=-\frac{2k-1}{2k}=-1+\frac{1}{2k}\to-1(k\to\infty)$,

$$a_{2k}=\frac{2k}{2k+1}=1-\frac{1}{2k+1}\to1,(k\to\infty).$$

故由 1.3.15 题知所给数列发散.

(2) 由于 $a_{2k-1}=k\to\infty\ (k\to\infty)$,而 $a_{2k}=\frac{1}{k+1}\to0\ (k\to\infty)$,故由 1.3.15 题知所给数列发散.

(3) 因为 $a_{2k-1}=\frac{k-1}{k}\to1\ (k\to\infty)$,$a_{2k}=\frac{k+1}{k}\to1(k\to\infty)$,据 1.3.15 题知所给数列收敛.

(4) 因为$\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}=\{\sin\frac{k\pi}{2}\}_{k=1}^{\infty}=\{1,0,-1,0,1,-1,\cdots\}$显然是一发散数列,据 1.3.15 题知所给数列发散.

(5) 由于 $k\to\infty$ 时 $a_{2k}=\frac{2^{2k}+3^{2k}}{2^{2k+1}+3^{2k+1}}=\frac{\frac{1}{3}[(\frac{2}{3})^{2k}+1]}{(\frac{2}{3})^{2k+1}+1}\to\frac{1}{3}$,

$$a_{2k-1}=-\frac{2^{2k-1}+3^{2k-1}}{2^{2k}+3^{2k}}=-\frac{(\frac{2}{3})^{2k-1}+1}{(\frac{2}{3})^{2k-1}+3}\to-\frac{1}{3},$$

据 1.3.15 题知所给数列发散.

1.3.91　求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{n^2})$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3})$.

解 (1) 因 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,故

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+N}$$

$$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{N+1}\right).$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=2.$

(2) 因 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\frac{(2+1)(2-1)}{2^2}\cdot\frac{(3+1)(3-1)}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$

(3) 因 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{6n}(n+1)(2n+1)-\frac{n}{3}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{6}=\frac{1}{2}.$$

1.3.92 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right].$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(n-1)x + \frac{a+2a+\cdots+(n-1)a}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(n-1)x + \frac{(n-1)a}{2}\right] = x + \frac{a}{2}.$$

1.3.93 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$

证 设 $x_n = \dfrac{n^n}{n!}(n=1,2,\cdots)$，则因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e.$

据 1.3.25 题得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = e.$

1.3.94 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n, (a,b,c>0).$

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)}{\dfrac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{3}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{3}(a^{\frac{1}{x}}\ln a + b^{\frac{1}{x}}\ln b + c^{\frac{1}{x}}\ln c)/\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\ln(abc),$$

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x\ln\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(abc)} = \sqrt[3]{abc},$

所以原式 $= \sqrt[3]{abc}.$

1.3.95 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} - 1\right].$

解 设 $y = (1+\dfrac{1}{x})^x$，则 $\ln y = x\ln(1+\dfrac{1}{x})$，两边求导数，得

$$y' = y\left[\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right]$$

$$= y\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots - \frac{1}{1+x}\right)\ (|x|>1)$$

$$= (1+\frac{1}{x})^x[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots] \ (|x| > 1)$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e-y}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-y'}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x[\frac{x^2}{x(1+x)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{4x^2} + \cdots]$$

$$= \frac{e}{2},$$

于是

$$\lim_{x\to\infty} x[\frac{e}{(1+\frac{1}{x})^x} - 1] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}\cdot\frac{e-y}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}\cdot\frac{e}{2} = \frac{1}{2},$$

从而原式 $= \dfrac{1}{2}$.

1.3.96 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{n} - \operatorname{arctg}\dfrac{a}{n+1})$，$(a \neq 0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\dfrac{\theta}{n})^n$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{x} - \operatorname{arctg}\dfrac{a}{x+1})$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-\frac{a}{x^2}}{1+(\frac{a}{x})^2} - \dfrac{-\frac{a}{(x+1)^2}}{1+(\frac{a}{x+1})^2}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{2}\cdot\frac{2x^4+x^3}{(x^2+a^2)[(x+1)^2+a^2]}$$

$$= \frac{a}{2}\cdot 2 = a.$$

故原式 $= a$.

(2) 设 $y=(\cos\frac{\theta}{x})^x$，则 $\ln y = x\ln\cos\frac{\theta}{x}$，因

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\cos\frac{\theta}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\operatorname{tg}\frac{\theta}{x}\cdot(-\frac{\theta}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

故原式 $=e^0=1$.

1.3.97　计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\alpha+\frac{\beta}{n})+(\alpha+\frac{2\beta}{n})+\cdots+(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{n})].$$

解　原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n-1)\alpha+\frac{\beta+2\beta+\cdots+(n-1)\beta}{n}]$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{n-1}{n}\alpha+\frac{n-1}{2n}\beta]=\alpha+\frac{\beta}{2}.$$

1.3.98　设 $|x|<1$，求

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}).$$

解　原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^4)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\ (|x|<1),$$

$$=\frac{1}{1-x}.$$

1.3.99　求下列各极限：

(1) $\lim_{x\to\infty}\operatorname{tg}^x(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})$；　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

解　(1) 设 $y=\operatorname{tg}^x(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})$，则

$$\ln y = x\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\ (x>\frac{4}{\pi}),$$

因　$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\cdot\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=2.$$

故原式 $=e^2$.

(2) 因 $\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=1-\frac{2}{1+e^{nx}}$,故

$$原式=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

1.3.100 回答以下问题：

(1) 当 $\{a_{2k-1}\}$,$\{a_{2k}\}$ 都收敛时,$\{a_n\}$ 是否必收敛?

(2) 当 $\{a_{2k-1}\}$,$\{a_{2k}\}$,$\{a_{3k}\}$ 都收敛时,$\{a_n\}$ 是否必收敛?

(3) 若 $\{a_n\}$ 是单调数列,且数列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 中至少有一个收敛,这时能否保证 $\{a_n\}$ 必定收敛?

解 (1) $\{a_n\}$ 不一定收敛.

例如,数列 $a_n=(-1)^n$,$n=1,2,\cdots$ 不收敛.但 $a_{2k-1}=1$,$a_{2k}=1$,$(k=1,2,\cdots)$ 都收敛.

(2) 设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=a$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=b$,$\lim\limits_{k\to\infty}a_{3k}=c$,则 $\{a_{3k}\}$ 的偶数项子列为 $\{a_{6k}\}\subset\{a_{3k}\}$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{6k}=c$.同时 $\{a_{6k}\}$ 也是 $\{a_{2k}\}$ 的一个子列,即 $\{a_{6k}\}\subset\{a_{2k}\}$,因此又有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{6k}=\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=b$,故 $b=c$.

完全类似地,$\{a_{3k}\}$ 的奇数项子列 $\{a_{6k-3}\}$ 也以 C 为极限,但它又是 $\{a_{2k-1}\}$ 的子列,于是又有 $a=c$.

综上所述,$a=b$,因而数列 $\{a_n\}$ 必收敛.

(3) 设 $\{a_n\}$ 单调递增,且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=a$,由于 $a_{2k-1}\leqslant a_{2k}\leqslant a_{2k+1}$,且 $a_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,$a_{2k+1}\to a(k\to\infty)$,故据夹逼定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

1.3.101 已知数列

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},\ n=1,2,\cdots,$$

求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$.

$$\text{证}\quad \frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right]}$$

$$=\frac{2\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{(1+\sqrt{5})\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right]},$$

因$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}=0,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$

1.3.102　证明

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=d$;

(2) 若$a_n>0,(n=0,1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=d$,则必有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=d;$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$

证　(1) 令$b_n=a_n-a_{n-1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=d$,且

$$\frac{a_n}{n}=\frac{(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_1-a_0)+a_0}{n}$$

$$=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}+\frac{a_0}{n},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=d$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0}{n}=0$，因而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=d$.

(2) 令 $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=d$，且

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_0\cdot\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\sqrt[n]{a_0}\cdot\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=d$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_0}=1$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=d$.

(3) 令 $a_n=\frac{n^n}{n!}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e,$$

由(2)可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=e$.

1.3.103 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\sigma_n=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，$\lambda_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 则，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=a,$$

(这是算术平均值极限的推广，称为加权平均值的极限.)

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故任给$\varepsilon>0$，存在正整数 N_1，使当 $n>N_1$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon/2$，于是当 $n>N_1$ 时，

$$\left|\frac{\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n}{\sigma_n}-a\right|=\left|\frac{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n-\sigma_na}{\sigma_n}\right|$$

$$=\frac{|\lambda_1(a_1-a)+\cdots+\lambda_n(a_n-a)|}{\sigma_n}$$

$$\leqslant\frac{\lambda_1|a_1-a|+\cdots+\lambda_{N_1}|a_{N_1}-a|}{\sigma_n}+\frac{\lambda_{N_1+1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+\lambda_n|a_n-a|}{\sigma_n}$$

$$\leqslant\frac{A}{\sigma_n}+\frac{\lambda_{N_1+1}+\cdots+\lambda_n}{\sigma_n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\frac{A}{\sigma_n}+\frac{\sigma_N-\sigma_{N_1}}{\sigma_n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{A}{\sigma_n}+\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $A = \lambda_1|a_1 - a| + \cdots + \lambda_{N_1}|a_{N_1} - a|$ 是一个定数，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = +\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{\sigma_n} = 0$，故存在 N_2，使当 $n > N_2$ 时，有 $\left|\dfrac{A}{\sigma_n}\right| = \dfrac{A}{\sigma_n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_na_n}{\sigma_n} - a\right| < \frac{A}{\sigma_n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sigma_n}(\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_na_n) = a$.

1.3.104　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个单调递增的正项数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，对 a_n 的每一固定项，总有 b_n 的项大于它；同样，对于 b_n 的每一固定项，总有 a_n 的项大于它. 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$；若 $a < b$，则由极限的定义，对于 $b - a > 0$，存在 $N > 0$，使当 $n \geqslant N$ 时，有 $|b_n - b| < b - a$，因 b_n 递增，即当 $n \geqslant N$ 时有 $b_n > a$，又 a_n 是递增正数列，对任意 m 有 $a_m < a$，故 $a_m < a < b_n$，此与题设矛盾，因此必须 $a \geqslant b$.

类似地，可得 $b \geqslant a$，于是 $a = b$.

1.3.105　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

解　令 $p_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$　$(n = 1, 2, \cdots)$，则 $p_n > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = \infty.$$

再令 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则 $p_na_n = \dfrac{1}{n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.

$$\text{因为}\frac{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

则由 1.3.103 题知，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.

1.3.106　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - \dfrac{1}{p+1}\right]n$，其中 p 为正整

数.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}}{(p+1)\cdot n^p}$,

取 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}, y_n=(p+1)n^p$,则

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=(p+1)(n+1)^p-[(n+1)^{p+1}-n^{p+1}]\\&=(p+1)[n^p+pn^{p-1}+\cdots+1]\\&\quad-\left[(p+1)n^p+\frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}+\cdots+1\right]\\&=\frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}+\varphi(n),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(n)$ 是关于 n 的次数低于 $p-1$ 的多项式.

$$y_{n+1}-y_n=(p+1)[(n+1)^p-n^p]=(p+1)pn^{p-1}+\psi(n).$$

其中 $\psi(n)$ 是次数低于 $p-1$ 的多项式.

于是,据施笃兹定理,有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}p(p+1)n^{p-1}+\varphi(n)}{p(p+1)n^{p-1}+\psi(n)}=\frac{1}{2}.$$

1.3.107 已知 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}&6\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$,

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 因 $\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}&1\\-3&5\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}A^{-1}$,其中

$$A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}$$

故

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}&6\\-3&5\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\left[A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}A^{-1}\right]^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\\&=A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}^nA^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n}&0\\0&1\end{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2^n}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16+\frac{21}{2^n}\\-12+\frac{14}{2^n}\end{pmatrix}.$$

即 $x_n=-16+\frac{21}{2^n}, y_n=-12+\frac{14}{2^n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-16, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=-12.$

1.3.108　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解　因 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}$，而利用幂级数展开式知

$2^{\frac{1}{n}}\geqslant 1+\frac{\ln 2}{n}$，故当 $n\geqslant i$ 时，有

$$\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}=2^{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}\geqslant 2^{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{ni}}>2^{\frac{i-1}{n}},$$

即 $2^{\frac{i-1}{n}}<\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}<2^{\frac{i}{n}}$，所以，由连续函数的介值定理及函数 2^x 的连续性知，存在 $\xi_i\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$，使得 $\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}=2^{\xi_i}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot 2^{\xi_i}=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}.$$

1.3.109　设 $0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$，$(m,n=1,2,\cdots)$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在.

证　由题设知 $0\leqslant x_2\leqslant 2x_1$，$0\leqslant x_3\leqslant 3x_1$，一般地，有 $0\leqslant x_n\leqslant nx_1$，故 $0\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant x_1$，于是 $a=\inf\limits_{n\geqslant 1}\{\frac{x_n}{n}\}\geqslant 0$.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，由下确界的定义知，存在正整数 m，使 $a\leqslant\frac{x_m}{n}$

$\leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}$. 而任意正整数 n 都可写为 $n=qm+r, 0\leqslant r\leqslant m-1$. 于是

$$x_n=x_{qm+r}\leqslant qx_m+x_r, \frac{x_n}{n}=\frac{x_{qm+r}}{n}\leqslant\frac{x_m}{m}\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n},$$

那么 $\quad a\leqslant\frac{x_n}{n}\leqslant\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n}\leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_r}{n},$

又因为 $0\leqslant r\leqslant m-1$，所以 $|x_r|\leqslant M$，这里 M 是常数.

因此当 $n>\frac{2M}{\varepsilon}$ 时，有 $a\leqslant\frac{x_n}{n}<a+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=a+\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\inf_{n\geqslant 1}\left\{\frac{x_n}{n}\right\}.$$

1.3.110 设函数 $f(x)$ 满足条件

(1) $-\infty<a\leqslant f(x)\leqslant b<+\infty, x\in[a,b]$;

(2) $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|, 0<k<1, x,y\in[a,b]$.

证明：存在唯一的 $\xi\in[a,b]$ 满足方程 $\xi=f(\xi)$.

证 设 $x_1\in[a,b]$，并令 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$，则当 $n\geqslant 1$ 时，有 $|x_{n+2}-x_{n+1}|<k|x_{n+1}-x_n|$. 故由 1.3.31 题知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，而由条件(2)知，$f(x)$ 是连续函数，则由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 知 $\xi=f(\xi)$.

设又有 $\xi_1\in[a,b]$，满足 $\xi_1=f(\xi_1)$，则 $|\xi-\xi_1|=|f(\xi)-f(\xi_1)|\leqslant k|\xi-\xi_1|$，故必有 $\xi=\xi_1$，即满足方程的 ξ 是唯一的.

1.3.111 设数列 $\{x_m\}$ 满足 $x_m>0, \lim\limits_{m\to\infty}x_m=0$. 试证有无穷多个下标 n，使得 $x_n>x_{n+k}, k=1,2,\cdots$.

证 因 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=0$，则对于 $x_1>0$，存在正整数 N_1，使当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $x_1>x_n$. 记 $x_{n_1}=\max\limits_{1\leqslant n}\{x_n\}$，我们来证明 x_{n_1} 是存在的. 事实上，对于 $x_{N_1}>0$，存在一个 $m_1>N_1$，使当 $n\geqslant m_1$ 时，有 $x_n<x_{N_1}$，取 $c=\max\{x_{N_1}, x_{N_1+1},\cdots,x_{m_1-1}\}$，再取 $n_1=\max\{n|x_n=c, N_1\leqslant n\leqslant m_1-1\}$ 即可. 故得 $x_{n_1}>x_{n_1+k}, k=1,2,\cdots$.

再让 x_{n_1} 取代 x_1 的位置，从 x_{n_1} 以后重复上述讨论，可以找出 x_{n_2} 满足 $x_{n_2}>x_{n_2+k}, k=1,2,\cdots$，如此下去，即得无穷多个下标 n，满足 $x_n>x_{n+k}$，$k=1,2,3\cdots$.

1.3.112　设数列$\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_m}{m},\cdots$,趋于$+\infty$,并设$A$大于其中最小的一项(显然最小项是存在的)试证有一个(或几个)下标$n,n\geqslant 1$,使得$\frac{x_n-x_{n-1}}{1},\frac{x_n-x_{n-2}}{2},\cdots,\frac{x_n}{x}$小于或等于$A$,且有无穷多个商$\frac{x_{n+1}-x_n}{1}$,$\frac{x_{n+2}-x_n}{2},\cdots$都大于或等于$A$.

证　因为$\lim\limits_{m\to\infty}(\frac{x_m}{m}-A)=+\infty$,所以有$\lim\limits_{m\to\infty}(x_m-mA)=+\infty$,故序列$\{x_m-mA\}$中必有最小数,设$x_n-nA=\min\{x_m-mA;m=0,1,2,\cdots\}$,其中$x_0$规定为0,显然

$$x_{n-\mu}-(n-\mu)A\geqslant x_n-nA,\ \mu=1,2,\cdots,n,\tag{1}$$

$$x_{n-v}-(n+v)A\geqslant x_n-nA,v=1,2,\cdots,\tag{2}$$

由(1)及(2)式即知$\frac{x_n-x_{n-\mu}}{\mu}\leqslant A,\ \mu=1,2,\cdots,n$

$$\frac{x_{n+v}-x_n}{v}\geqslant A,\ v=1,2,\cdots.$$

且由A的假设知,$\min\{x_m-mA;m=0,1,2,\cdots\}<0$,故$n\neq 0$,即$n\geqslant 1$.

1.3.113　证明数列$2,2+\frac{1}{2},2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\cdots$,有极限,并求此极限.

解　记数列的首项为a_0,第$n+1$项为$a_n,n=1,2,\cdots$,则有递推关系$a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n},n=0,1,2,\cdots$.由此知,若$\{a_n\}$的极限存在,设为$A$,则有$A=2+\frac{1}{A}$,由$a_n>0$知$A\geqslant 0$,则解方程得$A=1+\sqrt{2}$,现证$1+\sqrt{2}$确是数列$\{a_n\}$的极限.

由$a_n=2+\frac{1}{a_{n-1}},n=1,2,3,\cdots$,得

$$|a_n-(1+\sqrt{2})|=|2+\frac{1}{a_{n-1}}-(2+\frac{1}{1+\sqrt{2}})|$$

$$=\frac{|a_{n-1}-(1+\sqrt{2})|}{a_{n-1}\cdot(1+\sqrt{2})},$$

而 $a_{n-1} \geqslant 2, 1+\sqrt{2} \geqslant 2$，故

$$|a_n-(1+\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2^2}|a_{n-1}-(1+\sqrt{2})|,$$

类推地，

$$|a_n-(1+\sqrt{2})| \leqslant \frac{1}{2^{2n}}|a_0-(1+\sqrt{2})| = \frac{1}{2^{2n}}(\sqrt{2}-1),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$.

1.3.114 设 $a_1=1$, $a_k=k(a_{k-1}+1)$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k})$.

解 由已知的递推关系可得出

$$a_2 = 2+2\cdot(2-1),$$
$$a_3 = 3+3(3-1)+3(3-1)(3-2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n = n+n(n-1)+\cdots+n(n-1)(n-2)\cdots 2+n!,$$

而 $$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+1}{a_k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!},$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k}) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = e.$$

1.3.115 设 $a_1=1, a_2=2, 3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0\ (n\geqslant 1)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 递推公式化为

$$3(a_{n+2}-a_{n+1}) = a_{n+1}-a_n \tag{1}$$

设 $b_n = a_{n+1}-a_n (n\geqslant 1)$，那么(1)式变为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{3}$，即 $\{b_n\}$ 为等比数列，首项 $b_1=a_2-a_1=1$，公比 $q=\frac{1}{3}$. 于是 $b_n=b_1q^{n-1}=\frac{1}{3^{n-1}}$，故

$$a_n = (a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$
$$= b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_1+a_1$$
$$= \frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{3}+1+1$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}{1 - \frac{1}{3}} + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-2}},$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$.

1.3.116 设 $a > 0$,取 x_1 与 x_2 使

$$\sqrt{a} < x_1 < 2\sqrt{a}, \sqrt{a} < x_2 < 2\sqrt{a}, \quad (1)$$

证明按二阶非线性递推式 $x_n = \frac{x_{n-1}x_{n-2} + a}{x_{n-1} + x_{n-2}}$, $n = 3,4,\cdots$ 所确定的数列 $\{x_n\}$ 收敛到 $\sqrt{a}$.

证 由递推式易知

$$x_n - \sqrt{a} = \frac{x_{n-1}x_{n-2} + a}{x_{n-1} + x_{n-2}} - \sqrt{a} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})(x_{n-2} - \sqrt{a})}{x_{n-1} + x_{n-2}}. \quad (2)$$

上式说明,当 $x_{n-1} > \sqrt{a}$,$x_{n-2} > \sqrt{a}$ 时,有 $x_n > \sqrt{a}$. 由(1)式及数学归纳法知 $x_n > \sqrt{a}$ $(n = 3,4,\cdots)$.

另一方面,

$$x_n - \sqrt{a} < \frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{a})(2\sqrt{a} - \sqrt{a})}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{a},$$

从而 $x_n < \sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a} < 2\sqrt{a}$,故全部 x_n 均满足 $\sqrt{a} < x_n < 2\sqrt{a}$,再由(2)式得

$$x_n - \sqrt{a} = \frac{x_{n-2} - \sqrt{a}}{x_{n-1} + x_{n-2}} \cdot (x_{n-1} - \sqrt{a})$$

$$< \frac{2\sqrt{a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} \cdot (x_{n-1} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2}(x_{n-1} - \sqrt{a}).$$

类似地,$x_{n-1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(x_{n-2} - \sqrt{a})$,

……

$$x_3 - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(x_2 - \sqrt{a}),$$

所以 $x_n - \sqrt{a} < \frac{1}{2^{n-2}}(x_2 - \sqrt{a})$，由 $x_n - \sqrt{a} > 0$ 可知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

1.3.117 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是不小于 2 的互不相等的自然数序列，证明：从 $\{a_n\}$ 中可选出子序列 $a_{i_1}, a_{i_2}\cdots$，满足关系 $a_{i_k} > i_k$.

证 显然，只要证明满足 $a_i > i$ 的 i 是无限的，否则就从某一个 N 开始 $a_i \leqslant i$ 得以满足.

设 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(a_i) = M$，研究数 $a_1, a_2, \cdots, a_{\max(M,N)}$，这些数中任一个数都不超过 $\max(M,N)$，这些数互异且每一个数都大于 1. 由此引出矛盾.

1.3.118 设 a_1, a_2 为任意取定的实数，且 $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$，定义

$$a_{n+1} = ka_n + la_{n-1}, \tag{1}$$

其中 k, l 为正常数，$n = 1, 2, \cdots$，试求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解 令 $\alpha = (k + \sqrt{k^2 + 4l})/2$，$\beta = (k - \sqrt{k^2 + 4l})/2$ 是方程 $x^2 = kx + l$ 的两个实数根，则 $\alpha + \beta = k$，$\alpha\beta = -l$，$|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$，把它们代入(1) 式可得

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1}),\ n = 2, 3, \cdots, \tag{2}$$

或
$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha(a_n - \beta a_{n-1}),\ n = 2, 3, \cdots, \tag{3}$$

反复利用(2) 或(3) 式可推得

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)\ n = 2, 3, \cdots \tag{4}$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1),\ n = 2, 3, \cdots \tag{5}$$

由(4)、(5) 式可得

$$a_{n+1} = \frac{\alpha^n(a_2 - \beta a_1) - \beta^n(a_2 - \alpha a_1)}{\alpha - \beta},\ n = 2, 3, \cdots, \tag{6}$$

当 $a_2 = \beta a_1$ 时，就有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta, n = 1, 2, \cdots$，因此

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4l}}{2},$$

当 $a_2 \neq \beta a_1$ 时，可取 n 充分大，使得 $|\frac{\alpha}{\beta}|^{n-1} > |\frac{a_2 - \alpha a_1}{a_2 - \beta a_1}|$. 由(6) 可推知此时 $a_n \neq 0$，于是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\alpha^n(a_2-\beta a_1)-\beta^n(a_2-\alpha a_1)}{\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)},$$

利用 $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$,可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4l}}{2}.$$

注 在题中若设 $k+l=1$,则 $\alpha=1,\beta=-l$,所以

$$a_n=\frac{a_2+la_1-(-l)^{n-1}(a_2-\alpha a_1)}{1+l},$$

由 $0<l<1$,可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{a_2+la_1}{1+l}$.

1.3.119 设 $0<x_1<1$,且 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $n=1,2,\cdots$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

证 $x_{n+1}-x_n=x_n-x_n^2-x_n=-x_n^2<0$, 又 $x_2=x_1(1-x_1)>0$, $x_2<1$;$0<x_3<1$,则由数学归纳法易证明 $0<x_n<1$,故数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 两边取极限,得 $a=a-a^2$,从而 $a=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

由施笃兹定理有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\cdot x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}(1-x_{n-1})}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n-1})=1.$$

1.3.120 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\cdot(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}$,证明:数列 $\{x_n\}$ 不收敛.

证 当 $n=8m$ 及 $8m-4$ 时 $\sin\frac{n\pi}{4}=0$;

当 $n=8m-1$ 及 $8m-3$ 时,$\sin\frac{n\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$;

当 $n=8m-2$ 时,$\sin\frac{n\pi}{4}=-1$;

当 $n = 8m - 5$ 及 $8m - 7$ 时，$\sin\frac{n\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$；

当 $n = 8m - 6$ 时，$\sin\frac{n\pi}{4} = 1$.

故 $\lim\limits_{m\to\infty} x_{8m} = \lim\limits_{m\to\infty} x_{8m-4} = e$，

$$\lim_{m\to\infty} x_{8m-1} = \lim_{m\to\infty} x_{8m-3} = -e - \frac{1}{\sqrt{2}};\quad \lim_{m\to\infty} x_{8m-2} = e - 1,$$

$$\lim_{m\to\infty} x_{8m-5} = \lim_{m\to\infty} x_{8m-7} = -e + \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \lim_{m\to\infty} x_{8m-6} = e + 1.$$

因而 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -e - \frac{1}{\sqrt{2}}$；$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = e + 1$，即 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$，故数列 $\{x_n\}$ 不收敛.

1.3.121　试举出以已知数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p$ 作为聚点的数列的例子.

解　显然数列 $a_1 + \frac{1}{1}, a_2 + \frac{1}{2}, a_3 + \frac{1}{3}, \cdots, a_p + \frac{1}{p}; a_1 + \frac{1}{p+1}, a_2 + \frac{1}{p+2}, a_3 + \frac{1}{p+3}, \cdots, a_p + \frac{1}{2p}; a_1 + \frac{1}{2p+1}, a_2 + \frac{1}{2p+2}, a_3 + \frac{1}{2p+3}, \cdots, a_p + \frac{1}{3p}; \cdots\cdots$，以已知数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p$ 为其聚点.

1.3.122　举出具有下面性质的数列的例子：

(1) 没有有限的聚点；

(2) 有唯一有限的聚点，但非收敛者；

(3) 有无穷多的聚点；

(4) 以每一实数作为聚点.

解　(1) $x_n = (-1)^n n, (n = 1, 2, \cdots,)$，没有有限聚点.

(2) $x_n = \frac{n + (-1)^n n}{2} + \frac{1}{n}, (n = 1, 2, \cdots)$，以零为其聚点，它还有另一聚点 $x = +\infty$.

(3) 数列 $1, 1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{4}, 4 + \frac{1}{4}, \cdots$；显见所有正整数都是这数列的聚点.

(4) 取 $x_0=0, x_n=\frac{P}{Q}, |P|+Q=N$，其中 $N=1,2,\cdots$，而 P 为非零整数，Q 为正整数；具体地表出这数列为：

$$0,1,-1,\frac{2}{1},\frac{1}{2},-\frac{2}{1},-\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},-\frac{3}{1},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},$$
$$\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},-\frac{4}{1},-\frac{3}{2},-\frac{2}{3},-\frac{1}{4},\cdots,$$

每个实数都是这数列的聚点.

1.3.123　证明数列 x_n 和 $y_n=x_n\sqrt[n]{n}\ (n=1,2,\cdots)$ 有相同的聚点.

证　设 a 是 $\{x_n\}$ 的任一聚点.

(1) 当 $a=0$ 时，据定义，对任意的 $\varepsilon>0$，必有无穷多个 $n, n=n_1, n_2,\cdots$，使得 $|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故当 n 充分大时，$\sqrt[n]{n}<2$，于是，当 $n=n_p, n_{p+1}, n_{p+2},\cdots$，时，$|y_n|=|\sqrt[n]{n}\,x_n|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，这表明 0 也是 $\{y_n\}$ 的聚点.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，据定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，必有无穷多个 $n, n=n_1, n_2,\cdots$ 使得 $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，又当 n 充分大时 $|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{\varepsilon}{4|a|}$，因此，当 $n=n_p, n_{p+1}, n_{p+2},\cdots$，时有

$$\begin{aligned}|y_n-a|&=|x_n\sqrt[n]{n}-x_n+x_n-a|\\&\leqslant|x_n|(\sqrt[n]{n}-1)+|x_n-a|<2|a|\cdot\frac{\varepsilon}{4|a|}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 a 是 $\{y_n\}$ 的聚点.

再设 b 是 $\{y_n\}$ 的任一聚点，则因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故

$$|x_n-b|=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}|y_n-b\sqrt[n]{n}|\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\{|y_n-b|+b|\sqrt[n]{n}-1|\}$$

于是仿上推证可知，b 也是 $\{x_n\}$ 的聚点.

第二章　函数与极限

§1　函数及其图象

内 容 提 要

1. 函数概念

在某一变化过程中，有两个变量x和y，如果对于变量x的变化范围内的每一个值，变量y按照一定的规律有确定的值与它对应，则称y是x的函数，一般用符号$y=f(x)$表示．其中x叫自变量，y叫因变量．自变量的取值范围，叫做函数的定义域；因变量相应的取值范围，叫做函数的值域．

对于x所取的某个定值x_0，y所取的相应的确定值$y_0=f(x_0)$叫函数在$x=x_0$处的函数值．

2. 函数的特性

(1) 有界性

设函数$y=f(x)$在X上有定义（X可以是函数$f(x)$的整个定义域，也可以只是其定义域的一部分）．如果存在一个正数M，使得当x取X内的任一值时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在X内是有界的，否则称为无界函数．

(2) 奇偶性

在函数$y=f(x)$的对称定义域$(-a,a)$内，如果有$f(-x)=-f(x)$成立，则称$f(x)$为奇函数；如果在对称定义域$(-a,a)$内有$f(-x)=f(x)$成立，则称$f(x)$为偶函数．

(3) 周期性

对于函数$y=f(x)$，如果存在一个正数T，使得关系式$f(x\pm T)=$

$f(x)$ 对于定义域内的任何 x 都成立，则称 $f(x)$ 是以 T(T 是满足这种关系的最小正数) 为周期的周期函数.

(4) 单调性

如果函数 $y = f(x)$ 对于区间 $[a,b]$ 内的任意两点 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 内是单调递增(或递减) 函数.

3. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y. 如果对于 Y 中的任一 y，由函数式 $y = f(x)$ 能在 X 中确定唯一的 x 与它对应：$x = \varphi(y)$，那么，函数 $x = \varphi(y)$ 就叫做 $y = f(x)$ 的反函数. 它的定义域是 Y. $y = f(x)$ 的反函数也常记作 $x = f^{-1}(y)$.

4. 复合函数

设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，且当 x 在某一范围内取值时，相应的 u 值可使 $f(x)$ 有意义，则称 y 是 x 的复合函数，记为 $y = f[\varphi(x)]$. 其中 u 叫中间变量.

注意，在进行函数复合时，函数 $\varphi(x)$ 的值不能超出函数 $y = f(u)$ 的定义域.

5. 初等函数

(1) 基本初等函数

1) 幂函数　函数 $y = x^\mu$(μ 是实数) 叫做幂函数. 它的定义域随不同的 μ 而异，但不论 μ 为何值，在区间 $(0, +\infty)$ 内幂函数总是有定义的.

2) 指数函数　函数 $y = a^x(a \neq 1, a > 0)$ 叫做指数函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$.

当 $a = e = 2.718281828\cdots$ 时，函数 $y = e^x$ 特别有用.

3) 对数函数　$y = \log_a x(a \neq 1, a > 0)$ 叫做对数函数. 它的定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $a = e$ 时，用 $\ln x$ 表示 $\log_e x$，并称为自然对数.

4) 三角函数　正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1,1]$.

正切函数 $y = \mathrm{tg} x$ 的定义域是 $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$，余切函数 $y = \mathrm{ctg} x$ 的定义域是 $(x \neq k\pi)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 它们的值域均为 $(-\infty,$

$+\infty)$.

5) 反三角函数　反正弦函数 $y=\arcsin x$ 与反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$,值域分别为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$与$[0,\pi]$. 反正切函数 $y=\operatorname{arctg} x$ 与反余切函数 $y=\operatorname{arcctg} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域分别为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$与$(0,\pi)$.

(2) 初等函数

由常数、基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数,叫做初等函数.

6. 凸函数

设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数. 如果对任意的 x_1、$x_2\in I$ 及满足 $0<\lambda<1$ 的任意的 λ,都有 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 为 I 上的凸函数.

7. 有界变差函数

设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的函数,如果对$[a,b]$的任意分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,及 $\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$ $(k=1,2,\cdots,n)$,存在常数 $M>0$,使得 $\sum_{k=1}^{n}|\triangle f_k|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 为$[a,b]$上的有界变差函数. 称 $\gamma_f[a,b]=\sup\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的全变差.

问 题 与 解 答

1. 求函数的定义域、值域

2.1.1　求函数 $f(x)=\log_3\log_4\log_5 x$ 的定义域.

解　要使 $\log_4\log_5 x>0$. 必须有 $\log_5 x>1$. 从而得 $x>5$. 所以,函数的定义域是$(5,+\infty)$.

2.1.2　求函数 $f(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\frac{3x-1}{2}$ 的定义域.

解　由不等式 $\begin{cases}1-2x\geqslant 0,\\ -1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2},\\ -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$

所以函数的定义域为$[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

2.1.3　求函数 $y=\arcsin(1-x)+\lg\lg x$ 的定义域.

解　由不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant 1-x\leqslant 1,\\ \lg x>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>1.\end{cases}$

所以,函数的定义域为$(1,2]$.

2.1.4　求函数 $y=\arccos(2^x-3)$ 与 $y=\lg\lg x$ 的定义域.

解　由不等式 $|2^x-3|\leqslant 1$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 2$. 所以,函数 $y=\arccos(2^x-3)$ 的定义域为$[1,2]$.

又由不等式 $\lg x>0$ 解得 $x>1$. 所以,函数 $y=\lg\lg x$ 的定义域为$[1,+\infty)$.

2.1.5　求函数 $y=(2x)!$的定义域.

解　因当 $2x=n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 时,函数 y 有意义,所以,函数的定义域应为集合$\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\cdots,\frac{n}{2},\cdots\}$.

2.1.6　已知 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,试求 $f[f(x)]$ 的定义域.

解　由 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 得

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2},$$

故所求定义域为 $x\neq-1,x\neq-2$ 的全体实数.

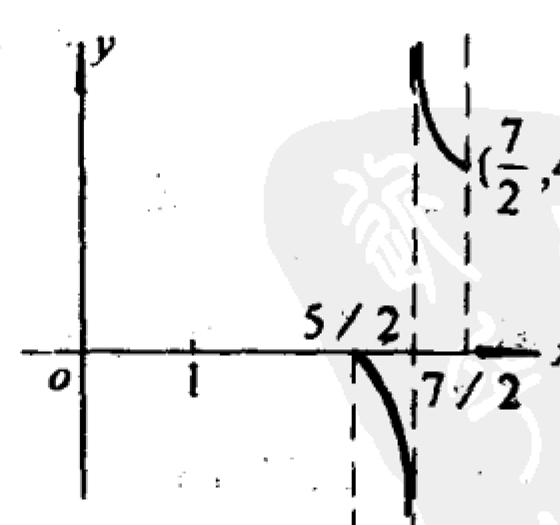
2.1.7　若已知函数 $y=\frac{2x-5}{x-3}$ 的值域是 $y\leqslant 0,y\geqslant 4$,试求函数 y 的定义域,并描绘此函数的图形.

解　由不等式$\frac{2x-5}{x-3}\geqslant 4$ 解得

$$3<x\leqslant\frac{7}{2}.$$

再由不等式$\frac{2x-5}{x-3}\leqslant 0$ 解得

$$\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 3,$$



2.1.7 题图

从而,所求的定义域为$[\frac{5}{2},3)\cup(3,\frac{7}{2}]$.

2.1.8　设 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,问

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a),(a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a),(a>0)$

的定义域各是什么?

解　(1) 使 $f(x^2)$ 有意义的 x 应满足 $0\leqslant x^2\leqslant 1$,从中解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以,$f(x^2)$ 的定义域是$[-1,1]$.

(2) 使 $f(\sin x)$ 有意义的 x 应满足 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,从中解得,$2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$,所以,$f(\sin x)$ 的定义域是$[2n\pi,(2n+1)\pi]$.$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

(3) 使 $f(x+a)$ 有意义的 x 应满足 $0\leqslant x+a\leqslant 1$,从中解得,$-a\leqslant x\leqslant 1-a$,所以,$f(x+a)$ 的定义域是$[-a,1-a]$.

(4) 使 $f(x+a)+f(x-a)$ 有意义的应满足不等式组:

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a, & ①\\a\leqslant x\leqslant 1+a, & ②\end{cases}$$

由题设 $a>0$,此外,为使函数有意义,① 与 ② 应有公共部分.为此,须 $1-a\geqslant a$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$.所以,当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,函数的定义域是$[a,1-a]$.

2.1.9　求函数 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ 的定义域.

解　由不等式 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$,得 $2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi,(k=0,1,2,\cdots)$;即 $4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2$,故所求定义域为$\{x\mid 4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2,k$ 为正整数$\}$.

2.1.10　求函数 $y=\lg(\sin\frac{\pi}{x})$ 的定义域.

解　由不等式 $\sin\frac{\pi}{x}>0$ 解得 $2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$,即$\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ $(k\neq 0)$ 或 $1<x<+\infty$,所以,该函数的定义域为$\{x\mid 1<x<+\infty$ 或 $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k},k=\pm 1,\pm 2,\cdots\}$.

2.1.11　求函数 $y=\lg[\cos(\lg x)]$ 的定义域.

解　解不等式 $\cos(\lg x)>0$,得

$(2k-\frac{1}{2})\pi < \lg x < (2k+\frac{1}{2})\pi$，$(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$，

即　$10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2+\frac{1}{2})\pi}$，从而所求的定义域为$\{x \mid 10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}, k$ 为整数$\}$.

2.1.12　求函数 $y=\arcsin\frac{2x}{1+x}$ 的定义域.

解　由不等式 $\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1$ 得 $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$，从而，所求的定义域为$[-\frac{1}{3},1]$.

2.1.13　求函数 $y=\ln\frac{a+bx}{a-bx}$　$(a\neq 0, b\neq 0)$ 的定义域.

解　解不等式 $\frac{a+bx}{a-bx}>0$. 当 a、b 同号时，$\frac{a+bx}{a-bx}>0$ 的解为 $|x|<\frac{a}{b}$；当 a、b 异号时，$\frac{a+bx}{a-bx}$的解为 $|x|<-\frac{a}{b}$. 故所求的定义域为 $|x|<\left|\frac{a}{b}\right|$.

2.1.14　求函数 $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$ 的定义域和值域.

解　由于$(1-|x|)^2\geqslant 0$，故对一切 x 皆有 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 1$. 所以，函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

显然，其值域（主值范围）为$[0,\pi]$.

2.1.15　求函数 $y=\arcsin(\lg\frac{x}{10})$ 的定义域和值域.

解　由不等式 $-1\leqslant \lg\frac{x}{10}\leqslant 1$ 得 $1\leqslant x\leqslant 100$，故所求的定义域为$[1,100]$.

易见，值域（主值范围）为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

2.1.16　求函数 $y=(-1)^x$ 的定义域和值域.

解　定义域为$\left\{x \mid x=\frac{q}{2p+1}, p, q \text{ 为整数}\right\}$值域为$\{1,-1\}$.

2.1.17　求函数 $y=\sqrt{2+x-x^2}$ 的定义域和值域.

解　解不等式 $2+x-x^2\geqslant 0$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以函数的定义域为$[-1,1]$.

由于 $f(x)=2+x-x^2=\frac{9}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2$，易见 $f(x)$ 的最大值是 $\frac{9}{4}$. 又因为 $2+x-x^2=0$ 有解，所以，y 的最小值是 0.

由此可见，函数的值域是 $[0,\frac{3}{2}]$.

2.1.18 求函数 $y=\lg(1-2\cos x)$ 的定义域和值域.

解 由不等式 $1-2\cos x>0$ 解得函数的定义域为 $(2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3})$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

因为 $\max(1-2\cos x)=1-(-2)=3$，所以，其值域是 $(-\infty,\lg3]$.

2.1.19 求下列函数的值域

(1) $f(x)=x^2-6x+5$；

(2) $f(x)=2+3\sin x$.

解 (1) 因为 $f(x)=x^2-6x+5=(x-3)^2-4\geqslant-4$，所以，该函数的值域是 $[-4,+\infty)$.

(2) 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以，有 $-3\leqslant3\sin x\leqslant3$，从而，有 $-1\leqslant2+3\sin x\leqslant5$，所以，该函数的值域是 $[-1,5]$.

2. 求函数值、建立函数关系式

2.1.20 设 $f(x)=x^2$，求 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

解 该函数在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的值分别为：$f(a)=a^2$，$f(b)=b^2$，所以，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$.

2.1.21 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)\neq0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$. 试求 $f(1985)$.

解 令 $x=1985$，$y=0$，则 $f(0)=f(1985)\cdot f(0)$，因为 $f(0)\neq0$，所以 $f(1985)=1$.

2.1.22 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0;\\ 2, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant3.\end{cases}$

求 $f(-0.5)$，$f(0)$，$f(2)$，$f(0.5)$.

解　根据 x 所在的不同区间，而采用相应的算式.

因为 $-0.5\in(-1,0)$，所以 $f(-0.5)=2^{-0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

因为 $0\in[0,1)$，所以 $f(0)=2$；

因为 $2\in[1,3]$，所以 $f(2)=2-1=1$；

因为 $0.5\in[0,1)$，所以 $f(0.5)=2$.

2.1.23　设定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数 $f(x)$ 严格递增，且有 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$，求 $f(x)$.

解　设 x_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任一点，

(1) 如果 $f(x_0)>x_0$，则

$$f[f(x_0)]>f(x_0),\ f\{f[f(x_0)]\}>f[f(x_0)]>f(x_0),$$

这与 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$ 矛盾.

(2) 如果 $f(x_0)<x_0$，则

$$f[f(x_0)]<f(x_0), f\{f[f(x_0)]\}<f[f(x_0)]<f(x_0),$$

这也与 $f\{f[f(x)]\}=f(x)$ 矛盾.

由(1)、(2)得　$f(x_0)=x_0$.

由于 x_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意一点，所以，$f(x)=x$.

2.1.24　已知 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

解　由 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$ 可得，

$$f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

2.1.25　已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，试求 $f(x)$.

解　由 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$ 可得

$$f(x)=x^2-2.$$

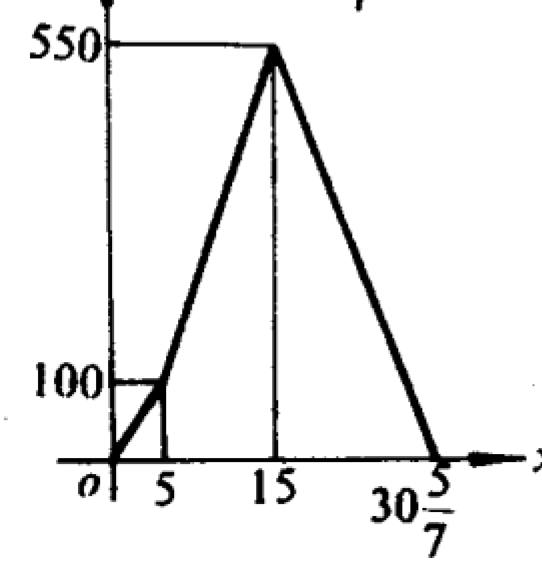
2.1.26　容器中装有 A、B、C 三个活栓，在每分钟内，A、B 分别流入 20 升、25 升水，C 流出 80 升水. 若 A 开放 5 分钟后开放 B，B 开放 10 分钟后开放 C. 求容器中水量与时间的函数关系，并绘出它的图象.

解　设活栓 A 开放 t 分钟末时容器中的水量为 y 升，则得

$$y=\begin{cases}20t, & 0\leqslant t<5;\\ 20\times 5+(20+25)(t-5), & 5\leqslant t<15;\\ 100+45\times 10+(45-80)(t-15), & 15\leqslant t<30\frac{5}{7};\\ 0, & t\geqslant 30\frac{5}{7}.\end{cases}$$

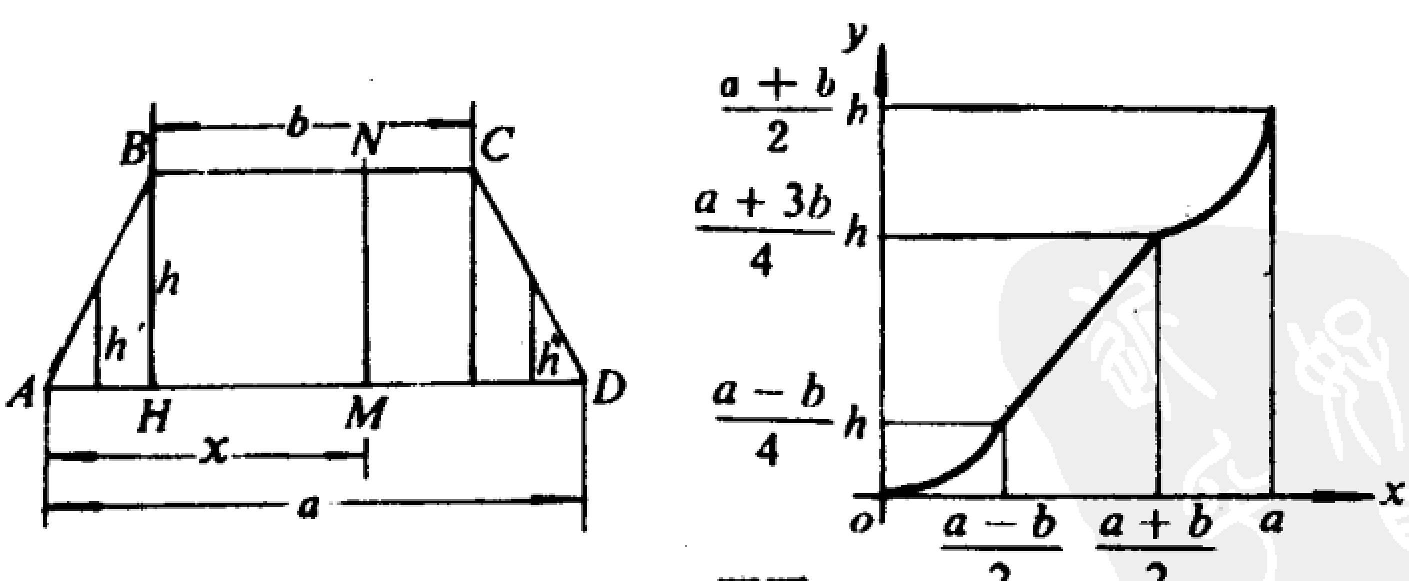
即

$$y=\begin{cases}20t, & 0\leqslant t<5;\\ 45t-125, & 5\leqslant t<15;\\ -35t+1075, & 15\leqslant t<30\frac{5}{7};\\ 0, & t\geqslant 30\frac{5}{7}.\end{cases}$$



2.1.26 题图

2.1.27 在如图所示的等腰梯形 $ABCD$ 中，设 $AD=a$，$BC=b$ $(a>b)$，高 $HB=h$，引直线 MN 平行 HB，MN 与顶点 A 相距 $AM=x$，把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示成变量 x 的函数 $s=s(x)$，并作出函数的图象.



2.1.27 题图

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$ 时，$s_1(x)=\frac{1}{2}xh'$. 由于 $h':h=x:\frac{a-b}{2}$，

从而得 $h' = \frac{2hx}{a-b}$,所以 $s_1(x) = \frac{h}{a-b}x^2$.

(2) 当$\frac{a-b}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2}$时,有

$$s_2(x) = s_1(x) + h(x - \frac{a-b}{2}) = \frac{1}{4}h(a-b) + h(x - \frac{a-b}{2})$$
$$= h(x - \frac{a-b}{4}).$$

(3) 当 $\frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant a$ 时,有

$$s_3(x) = \frac{1}{2}(a+b)h - \frac{1}{2}h''(a-x),$$

由于 $h'' : h = (a-x) : \frac{a-b}{2}$,从而可得 $h'' = \frac{2h(a-x)}{a-b}$,所以

$$s_3(x) = h[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}].$$

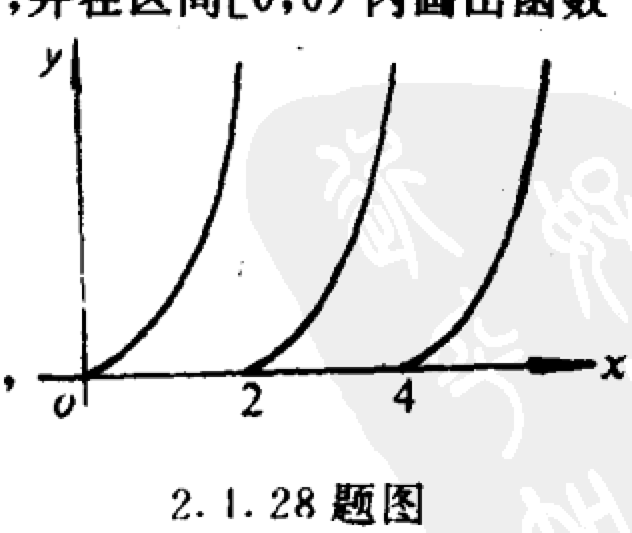
综合(1)、(2)、(3) 得函数:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{h}{a-b}x^2, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{a-b}{2}; \\ h(x - \frac{a-b}{4}), & \frac{a-b}{2} < x \leqslant \frac{a+b}{2}; \\ h[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}], & \frac{a+b}{2} < x \leqslant a. \end{cases}$$

2.1.28 已知函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数,且在区间[0,2) 内 $f(x) = x^2$,求该函数在[4,6) 内的表达式,并在区间[0,6) 内画出函数 $y = f(x)$ 的图象.

解 显然

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < 2; \\ (x-2)^2, & 2 \leqslant x \leqslant 4; \\ (x-4)^2, & 4 \leqslant x < 6. \end{cases}$$



2.1.28 题图

2.1.29 设 $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$, 求形如 $f(x) = a + bc^x$ 的函数.

解 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$,代入 $f(x) = a + bc^x$ 得

$$\begin{cases} a + bc^0 = 15, \\ a + bc^2 = 30, \\ a + bc^4 = 90. \end{cases}$$

解之得 $a = 10$, $b = 5$, $c = \pm 2$,（舍去负值）故所求函数为

$$f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x.$$

2.1.30　设 $Z = x + y + f(x - y)$,若当 $y = 0$ 时,$Z = x^2$,求函数 f 及 Z.

解　由 $y = 0$ 时,$Z = x^2$ 得 $f(x) = x^2 - x$.因此

$$f(x - y) = (x - y)^2 - (x - y),$$

所以　$Z = (x + y) + (x - y)^2 - (x - y) = (x - y)^2 + 2y$.

2.1.31　设 $Z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$,并且当 $y = 1$ 时有 $Z = x$,试求函数 $f(x)$ 及 Z 的解析表达式.

解　以 $y = 1$ 时 $Z = x$ 代入 Z 的表达式,得

$$x - 1 = f(\sqrt[3]{x} - 1).$$

设 $\sqrt[3]{x} - 1 = t$,则 $x = (1 + t)^3$,代入上式得

$$f(t) = (1 + t)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t,$$

所以 $f(x)$ 及 Z 的解析表达式分别为:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x;\quad Z = \sqrt{y} + x - 1.$$

2.1.32　设 $|a| \neq 1$,$\varphi(x)$ 是在 $x \neq 1$ 时有意义的已知函数,试求函数 $f(x)$,使它在 $x \neq 1$ 时有意义,而且满足等式

$$f\left(\frac{x}{x - 1}\right) = af(x) + \varphi(x).$$

解　在等式 $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x)$ 中把 x 换成 $\frac{x}{x-1}$,得

$$f(x) = af\left(\frac{x}{x - 1}\right) + \varphi\left(\frac{x}{x - 1}\right),$$

因此 $f(x) = a(a \cdot f(x) + \varphi(x)) + \varphi\left(\frac{x}{x - 1}\right)$,从而有

$$f(x) = \frac{1}{1 - a^2}\left[a\varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{x - 1}\right)\right].$$

3. 函数的运算(四则运算、复合、求反函数)

2.1.33　已知:$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0,1]; \\ x + 1, & x \in [-1,0], \end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-\frac{1}{2},0];\\ \sin x, & x\in[0,2],\end{cases}$$

求 $f(x)+g(x)$.

解

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}e^x+x^2, & x\in[0,1]\cap[-\frac{1}{2},0];\\ e^x+\sin x, & x\in[0,1]\cap[0,2];\\ x+1+x^2, & x\in[-1,0]\cap[-\frac{1}{2},0];\\ x+1+\sin x, & x\in[-1,0]\cap[0,2]\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x=0;\\ e^x+\sin x, & x\in[0,1];\\ x+1+x^2, & x\in[-\frac{1}{2},0]\end{cases}=\begin{cases}e^x+\sin x, & x\in[0,1];\\ x^2+x+1, & x\in[-\frac{1}{2},0].\end{cases}$$

2.1.34　设 $f(\sin x)=\sin x+\sin 5x$,求证

$$[f(\sin x)]^2+[f(\cos x)]^2=4\cos^2 2x.$$

证　作变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$,并令 $t=x$,便可得

$$f(\cos x)=\cos x+\cos 5x$$

于是　$[f(\sin x)]^2+[f(\cos x)]^2=[\sin x+\sin 5x]^2+[\cos x+\cos 5x]^2$

$$=2(\sin x\cdot\sin 5x+\cos x\cdot\cos 5x)+2=2\cos(5x-x)+2$$

$$=2\cos 4x+2=2\cdot 2\cos\frac{4x}{2}=4\cos^2 2x.$$

2.1.35　已知 $f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0;\\ e^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$

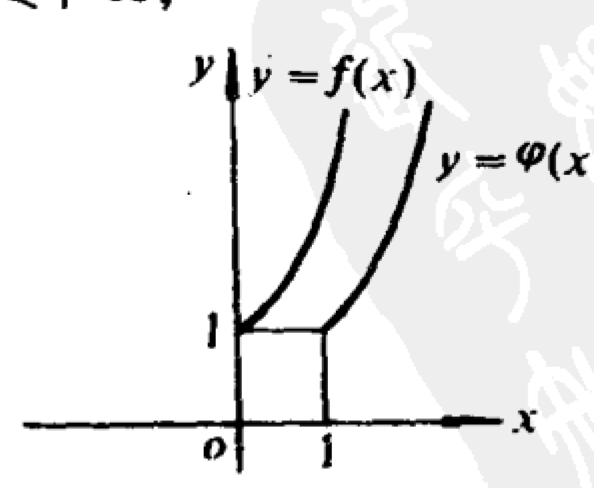
及　　$\varphi(x)=f(x-1)$,

求函数 $\varphi(x)$ 的表达式,并在同一坐标系内画出 $y=f(x)$ 及 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi(x)=f(x-1)$

$$=\begin{cases}0, & -\infty<x-1\leqslant 0;\\ e^{x-1}, & 0<x-1<+\infty.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant 1;\\ e^{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$



2.1.35 题图

2.1.36　下列函数能否复合成函

数 $f(g(x))$?若能,写出该复合函数的表达式、定义域及值域.

(1) $f(u)=\sqrt{u}$, $g(x)=x-x^2$;

(2) $f(u)=\ln u$, $g(x)=\sin x-1$;

(3) $f(u)=u^2+u^3$, $g(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数};\\ -1, & x\text{是无理数}.\end{cases}$

解 (1) $f(g(x))=\sqrt{x-x^2}$,其定义域为$[0,1]$,值域为$[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

(2) 不能.

(3) $f(g(x))=\begin{cases}2, & x\text{为有理数};\\ 0; & x\text{为无理数}.\end{cases}$ 其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,2\}$.

2.1.37 已知 $y=\begin{cases}2u, & u\leqslant 0;\\ 0, & u>0,\end{cases}$ $u=x^2-1$,试将 y 表示为 x 的函数.

解 $y=\begin{cases}2(x^2-1), & |x|\leqslant 1;\\ 0; & |x|>1.\end{cases}$

2.1.38 若$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+a}$, $\varphi(x)=\dfrac{lx+m}{nx+l}$,其中 m、n、a、b、c、l 皆为常数,且 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$,试求 c、b 与 m、n 间应满足的关系式.

解 $$f[\varphi(x)]=\frac{a\cdot\dfrac{lx+m}{nx+l}+b}{c\cdot\dfrac{lx+m}{nx+l}+a}=\frac{(al+bn)x+am+bl}{(cl+an)x+cm+al},$$

$$\varphi[f(x)]=\frac{l\cdot\dfrac{ax+b}{c+a}+m}{n\cdot\dfrac{ax+b}{cx+a}+l}=\frac{(al+cm)x+am+bl}{(cl+an)x+nb+al},$$

可见,若 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$,则必有 $bn=cm$.

2.1.39 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.

解 当 $n=2$ 时,$f_2(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

设 $n=k$ 时，有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，则当 $n=k+1$ 时有，

$$f_{k+1}(x)=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而，由数学归纳法知，对于任何自然数 n，有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

2.1.40　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试求 $f[f(f\{f(x)\})]$ 及 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$，若记 $\underbrace{f[f(f\cdots\cdots f(x))]}_{n次}=f_n(x)$ 试求 $f_{2n}(x)$ 与 $f_{2n+1}(x)$.

解　因为 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}(x\neq 0,x\neq 1)$，从而，

有
$$\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x},$$

于是
$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}-1}=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x,$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}$$

$$=\frac{1}{1-(1-\dfrac{1}{x})}=x,$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}},$$

$$f_4(x)=f[f_3(x)]=f[f(x)]=f_2(x)=x.$$

依次类推（亦可用归纳法）即可得知

$$f_{2n}(x)=x,\qquad f_{2n+1}(x)=\frac{x}{x-1}.$$

2.1.41　设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$\psi(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

求 $y=\varphi[\psi(x)]$.

解 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

故 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

2.1.42 设 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x, & x>0.\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

求 $\varphi[\varphi(x)]$、$\psi[\psi(x)]$、$\varphi[\psi(x)]$、$\psi[\varphi(x)]$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & \varphi(x)\leqslant 0;\\ \varphi(x), & \varphi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x, & x>0\end{cases}=\varphi(x).$

$\psi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & \psi(x)\leqslant 0;\\ -\psi^2(x), & \psi(x)>0\end{cases}=0.$(因为对一切 x,$\psi(x)\leqslant 0$)

$\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}0, & \psi(x)\leqslant 0;\\ \psi(x), & \psi(x)>0\end{cases}=0.$(理由同上)

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & \varphi(x)\leqslant 0;\\ -\varphi^2(x), & \varphi(x)>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x^2, & x>0\end{cases}=\psi(x).$$

2.1.43 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$,

$0<x<+\infty$. 求 $f[g(x)]$.

解 因为 $B_1=\{x|0\leqslant \ln x\leqslant 1\}=[1,e]$,

$B_2=\{x|1<\ln x\leqslant 2\}=(e,e^2]$,

所以,$f[g(x)]=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,e]\cap(0,+\infty);\\ \ln^2 x, & x\in(e,e^2]\cap(0,+\infty)\end{cases}$

$$=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,e];\\ \ln^2 x, & x\in(e,e^2].\end{cases}$$

2.1.44 求出下列函数的反函数 $y=\varphi(x)$ 的显式:

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$; (2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$;

(3) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数由 $x=\dfrac{2^y}{2^y+1}$ 确定,从而可解得

$$x\cdot(2^y+1)=2^y \quad 或 \quad 2^y(1-x)=x,$$

因为 $x=\dfrac{2^y}{2^y+1}$,所以 $0<x<1$,从而有 $1-x\neq 0$,$\dfrac{x}{1-x}>0$,

于是得 $2^y=\dfrac{x}{1-x}$，故可得其反函数的显式为：$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(2) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数由 $x=1+2\sin\dfrac{y-1}{y+1}$ 确定，从而可以解得 $\dfrac{x-1}{2}=\sin\dfrac{y-1}{y+1}$，因为 $\dfrac{y-1}{y+1}=\text{Arcsin}\,\dfrac{x-1}{2}$，

或 $\quad y\left[1-\text{Arcsin}\,\dfrac{x-1}{2}\right]=1+\text{Arcsin}\,\dfrac{x-1}{2}$，

故可得其反函数的显式为：$y=\dfrac{1+\text{Arcsin}\,\dfrac{x-1}{2}}{1-\text{Arcsin}\,\dfrac{x-1}{2}}$.

(3) 函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数由 $x=\sqrt[3]{y+\sqrt{1+y^2}}+\sqrt[3]{y-\sqrt{1+y^2}}$ 确定，在上式中令

$$\sqrt[3]{y+\sqrt{1+y^2}}=u,\ \sqrt[3]{y-\sqrt{1+y^2}}=v,$$

便有

$$\begin{aligned}x^3&=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=u^3+v^3+3uvx\\&=(y+\sqrt{1+y^2})+(y-\sqrt{1+y^2})\\&\qquad+3x\cdot\sqrt[3]{(y+\sqrt{1+y^2})\cdot(y-\sqrt{1+y^2})}\\&=2y+3x\cdot\sqrt[3]{-1}=2y-3x.\end{aligned}$$

故可得其反函数的显式为 $y=\dfrac{1}{2}(x^3+3x)$.

2.1.45　求函数 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1;\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4;\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.

解　由 $y=x$，$-\infty<x<1$，得 $x=y$，$-\infty<y<1$，

由 $y=x^2$，$1\leqslant x\leqslant 4$，得 $x=\sqrt{y}$，$1\leqslant y\leqslant 16$，

由 $y=2^x$，$4<x<+\infty$，得 $x=\log_2 y$，$16<y<+\infty$.

综上所述，得其反函数为

$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1;\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16;\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty.\end{cases}$$

2.1.46 讨论函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,在什么条件下,其反函数就是它本身.

解法1 (1) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb=0$ 时,$y=A$ 为常数,故无反函数.

(2) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ 时,

(i) 若 $c=0,b\neq 0$,则 $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ 是不过原点的一条直线,要反函数为其自身,该直线应与直线 $y=x$ 垂直. 所以,$\frac{a}{d}=-1,d=-a$,即 $y=-x-\frac{b}{a}$.

(ii) 若 $c=0,b=0$,则 $y=\frac{a}{d}x$,要反函数为其自身,$a=\pm d$ 均可,即 $y=x$, $y=-x$.

(iii) 若 $c\neq 0,y=\frac{ax+b}{cx+d}$,对 $x\neq -\frac{d}{c}$,$f(x)$ 都有意义,从而有 $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx+d}$. 故当 $d=-a$ 时,$f(x)=f^{-1}(x)$.

解法2 对任意的 $x(x\neq -\frac{d}{c})$,当 $f(f(x))=x$ 时,反函数就是它本身.

由 $$\frac{a\cdot\frac{ax+b}{cx+d}+b}{c\cdot\frac{ax+b}{cx+d}+d}=x.$$

或 $$(ac+cd)x^2+(a^2-d^2)x-(ab+bd)\equiv 0,$$

有 $$ac=-cd,a^2=d^2,ab=-bd.$$

(1) 当 $c=0,b\neq 0$ 时,$a=-d$,从而有 $y=-x-\frac{b}{a}$;

(2) 当 $c=0,b=0$ 时,$a=\pm d$,从而有 $y=x$ 或 $y=-x$;

(3) 当 $c\neq 0$ 时,$a=-d$,从而有 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

2.1.47 求函数 $y=\text{th}x$ $(\text{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}})$, $-\infty<x<+\infty$,的反函数和它的定义域.

解　因 $y=\text{th}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调递增，故它的反函数存在，且是严格单调递增的.

令 $e^x=t$，则 $y=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}}{t+\dfrac{1}{t}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=1-\dfrac{2}{t^2+1}$. 于是有

$$t^2+1=\frac{2}{1-y}, \text{即}\ t^2=\frac{2}{1-y}-1=\frac{1+y}{1-y}$$

所以 $e^x=t=\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$，从而得 $x=\text{arcth}y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$.

这个函数的定义域为 $-1<y<1$.

2.1.48　设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调函数，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数；又设 $G(x)$ 是 $F(x)=mf(kx+b)+a$ 的反函数 $(m,k\neq 0)$，试用 $g(x)$ 表示 $G(x)$.

解　令 $y=G(x)$，由反函数的定义得 $x=F(y)=mf(ky+b)+a$，于是 $\dfrac{x-a}{m}=f(ky+b)$，因此 $ky+b=g(\dfrac{x-a}{m})$，即

$$G(x)=\frac{1}{k[g(\frac{x-a}{m})-b]}.$$

4. 判断单调性

2.1.49　证明 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增函数.

证　设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$　则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)\\&=(x_2-x_1)[(x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}x_2^2+1]>0,\end{aligned}$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调递增函数.

2.1.50　证明下列各函数在所示区间内是单调递增函数.

(1) $f(x)=x^2$, $(0\leqslant x<+\infty)$；

(2) $f(x)=\sin x$, $(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2})$.

证　(1) 当 $x_2>x_1\geqslant 0$ 时，

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0.$$

于是 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调递增函数.

(2) 当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

所以 $\cos\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ 及 $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. 又因为

$$f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0.$$

所以 $f(x) = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内是单调递增函数.

2.1.51　证明下列函数在所示区间内为单调递减函数.

(1) $f(x) = x^2, (-\infty < x \leqslant 0)$;

(2) $f(x) = \mathrm{ctg}x, (0 < x < \pi)$.

证　(1) 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0,$$

所以 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 内是单调递减函数.

(2) 当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$ 时,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} = \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \cdot \sin x_2}$$

$$= \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} < 0,$$

所以 $f(x) = \mathrm{ctg}x$ 在 $(0, \pi)$ 内是单调递减函数.

2.1.52　证明:$f(x) = 2x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格单调递增.

证　设 $x_1 > x_2$ 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 2(x_1 - x_2) + \sin x_1 - \sin x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2) + 2\cos\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin\frac{x_1 - x_2}{2} \\ &\geqslant 2(x_1 - x_2) - 2\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \\ &\geqslant 2(x_1 - x_2) - 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \\ &\geqslant 2(x_1 - x_2) - 2\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right| = x_1 - x_2 > 0. \end{aligned}$$

故函数 $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格单调递增.

5. 判断有界性

2.1.53　证明 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.

证　因为对于任意实数 x,都有

$$0\leqslant\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.

2.1.54　试证 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无界.

证法 1　对任意的 $M>2$ 欲使 $\mathrm{tg}^2x=\sec^2x-1\geqslant M^2-1$,只要

$$\sec x^2=\frac{1}{\cos x}\geqslant M^2,即\ \cos x\leqslant\frac{1}{M}.$$

注意到 $\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是递减的,故取 $\arccos\frac{1}{M}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,就有 $\mathrm{tg}^2x\geqslant M^2-1$,即对任意的 $\sqrt{M^2-1}>0$,存在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使 $|\mathrm{tg}x|>\sqrt{M^2-1}$,所以,$\mathrm{tg}x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无界.

证法 2　注意到当 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$\sin x>\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. 故此时,对任意的 $M>1$ 欲使 $|\mathrm{tg}x|=\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|>\frac{1}{2\cos x}>M$,只要 $\cos x<\frac{1}{2M}$. 取 x,使 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 且 $\arccos\frac{1}{2M}<x$,就有 $|\mathrm{tg}x|>\frac{1}{2\cos x}>M$,即 $\mathrm{tg}x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无界.

2.1.55　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的任意邻域内是无界的,但是在 $x\to0$ 时它不趋于无穷大.

证　对 $x=0$ 的任何邻域 $[-\delta,\delta]$,$\delta>0$,对任意给定的正数 M,都存在自然 n,使 $x_0=\frac{1}{2n\pi}\in[-\delta,\delta]$,$2n\pi>M$. 从而

$$|f(x_0)|=|2n\pi\cos2n\pi|=2n\pi>M.$$

这表明 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上无界.

由于 $f(x_n)=f\left(\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=0$,所以 $f(x)$ 不趋近于无穷大.

2.1.56　设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数,证明:

(1) $\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}[f(x)+g(x)]\geqslant \inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)+\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)$;

(2) $\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}[f(x)+g(x)]\leqslant \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)+\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)$.

证 (1) 由题设知,对任意 $x\in[a,b]$ 皆有

$$\inf_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)+\inf_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)\leqslant f(x)+g(x),$$

这表明 $f(x)+g(x)$ 是下方有界的函数,并且 $\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)+\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)$ 是它的一个下界. 根据下确界定义,则得

$$\inf_{a\leqslant x\leqslant b}[f(x)+g(x)]\geqslant \inf_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)+\inf_{a\leqslant x\leqslant b}g(x)$$

(2) 可用类似(1)的方法证明之.

6. 判断周期性

2.1.57 求函数 $f(x)=A\cdot\sin(ax+b)$ 的最小正周期.

解 设 $f(x)$ 的周期为 ω,则 $f(x+\omega)=f(x)$,即

$$A\cdot\sin(ax+b)=A\cdot\sin[a(x+\omega)+b].$$

亦即
$$\sin(ax+b)-\sin[a(x+\omega)+b]$$
$$=-2\cos\left[ax+b+\frac{a\omega}{2}\right]\cdot\sin\frac{a\omega}{2}\equiv 0.$$

从而 $\sin\frac{a\omega}{2}=0$. 由此推出 $\frac{a\omega}{2}=k\pi$, $(k=0,1,2,\cdots)$. 最小正周期应取 $k=1$,于是 $\omega=\frac{2\pi}{|a|}$.

2.1.58 试证:函数 $f(x)=x-[x]\quad x\in(-\infty,+\infty)$ 的最小正周期是 1.

证 首先证明任何整数 k 都是它的周期.

$$f(x+k)=x+k-[x+k]=x+k-k-[x]=x-[x],$$

即 $f(x)=f(x+k)$,故 1 是函数 $f(x)$ 的正周期.

下面证明 1 是它的最小正周期. 对任何 $0<l<1$,取 $x=0$,有

$$f(0+l)=l-[l]=l\neq 0=0-[0]=f(0).$$

这就是说,任何 $0<l<1$ 都不是 f 的周期,故 1 是它的最小正周期.

2.1.59 求下列函数的最小正周期:

(1) $f(x)=\cos^4x+\sin^4x$;

(2) $f(x)=1+5\operatorname{tg}\frac{x}{5}+3\cos\frac{x}{3}$.

解 (1) $f(x)=\cos^4x+\sin^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2\cos^2x$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{5}$ 和 $\cos\frac{x}{3}$ 的周期各为 5π 和 6π,故 $f(x)$ 的最小正周期为 $\omega = 30\pi$.

2.1.60　证明 $f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

证　若存在与 x 无关的正数 ω,使 $\sin x^2 = \sin(x+\omega)^2$,则当 $x = 0$ 时,有 $0 = \sin\omega^2$,故 $\omega^2 = n\pi, \omega = \sqrt{n\pi}$ (n 为正整数). 从而

$$\sin x^2 = \sin(x + \sqrt{n\pi})^2 = \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi).$$

今取 $x \neq \frac{2k\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$ (k 为正整数). 则 $2x\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2k\pi$.

因此,$\sin x^2 \neq \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi)$. 故 $f(x) = \sin x^2$ 不是周期函数.

2.1.61　设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的函数,而且

$$f(x+T) = kf(x),\quad k, T > 0.$$

证明:$f(x) = a^x \cdot \varphi(x)$,($a$ 为常数),$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的函数.

证　若 $f(x) \equiv 0$,结论显然成立. 不妨设 $f(x) \not\equiv 0$,则存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$,使 $f(x_0) \neq 0$,并且由题设知 $f(x_0 + T) = kf(x_0)$,故有 $k = f(x_0+T)/f(x_0) > 0$,令 $a = [f(x_0+T)/f(x_0)]^{\frac{1}{T}} > 0$, $\varphi(x) = [f(x_0+T)/f(x_0)]^{-\frac{x}{T}} \cdot f(x)$ 则

$$f(x) = [f(x_0+T)/f(x_0)]^{\frac{x}{T}} \cdot \varphi(x) = a^x \cdot \varphi(x).$$

而且
$$\begin{aligned}\varphi(x+T) &= [f(x_0+T)/f(x_0)]^{-\frac{x+T}{T}} \cdot f(x+T) \\ &= [f(x_0+T)/f(x_0)]^{-\frac{x}{T}-1} \cdot kf(x) \\ &= [f(x_0+T)/f(x_0)]^{-\frac{x}{T}} \cdot f(x) = \varphi(x).\end{aligned}$$

2.1.62　设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的周期函数,周期分别为 T_f, T_g,而且 $T = (T_f, T_g) > 0$. 证明 $f(x)\cdot g(x)$ 也是周期函数,其中 $T = (T_f, T_g)$ 表示 T_f, T_g 的最小公倍数.

证　设 $T = nT_f = mT_g$,则

$$f(x+T)\cdot g(x+T) = f(x+nT_f)\cdot g(x+mT_g) = f(x)\cdot g(x)$$

即 $f(x)\cdot g(x)$ 也是周期函数.

2.1.63 证明多项式不是周期函数.

证 用归纳法证之.

设 n 为多项式的次数. $n=1$ 时,一次多项式 $y=ax+b$ 不是周期函数. 因为,否则必存在一实数 $w\neq 0$,使 $a(x+w)+b=ax+b$ 对一切 x 均成立,但这是不可能的.

当 $n=k$ 时,k 次多项式 $f_k(x)$ 不是周期函数,证明 $k+1$ 次多项式 $f_{k+1}(x)$ 也不是周期函数. 采用反证法.

若 $f_{k+1}(x)$ 是周期函数,以 w 为周期,任取一实数 $a\neq w$,作函数 $g(x)=f_{k+1}(x+a)-f_{k+1}(x)$,则 $g(x)$ 是 k 次多项式,它是以 w 为周期的函数,与假设矛盾. 证毕.

2.1.64 证明:若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$ 对称,则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 由于函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称,因此,对于任意的 x 皆有

$$f(x)=f[a+(a-x)]=f(2a-x). \tag{1}$$

又因为函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $x=b$ 对称,因此有

$$f(2a-x)=f[b+(b-2a+x)]=f[x+2(b-a)]. \tag{2}$$

由(1)和(2)可知,对任意的 x 皆有

$$f(x)=f[x+2(b-a)],$$

即 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的函数.

2.1.65 证明:若函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两点 $A(a,y_0)$ 和 $B(b,y_1)(b>a)$ 对称,则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别地,若 $y_0=y_1$ 时,则 $f(x)$ 是周期函数.

证 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,由于 $f(x)$ 的图形关于点 $A(a,y_0)$ 对称,所以

$$f(2a-x)=2y_0-f(x). \tag{1}$$

又由于 $f(x)$ 的图形关于 $B(b,y_1)$ 对称,则由点 $(2a-x,2y_0-f(x))$ 及(1)式推知

$$f(x+2(b-a))=2y_1-[2y_0-f(x)]. \tag{2}$$

设 $f(x)=g(x)+\frac{y_1-y_0}{b-a}x$,下面证明 $g(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的函数.

因为 $g(x)=f(x)-\frac{y_1-y_0}{b-a}x$,根据(2)式得

$$g[x+2(b-a)]=f[x+2(b-a)]-\frac{y_1-y_0}{b-a}[x+2(b-a)]$$

$$=2y_1-2y_0+f(x)-\frac{y_1-y_0}{b-a}x-2(y_1-y_0)$$

$$=f(x)-\frac{y_1-y_0}{b-a}x=g(x).$$

由此可见 $g(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数,从而,根据(3)即知 $f(x)$ 是周期函数与线性函数 $h(x)=\frac{y_1-y_0}{b-a}x$ 的和.

特别当 $y_1=y_0$ 时,$h(x)=0$,从而恒有 $f(x)=g(x)$.

因 $g(x)$ 为周期函数,故 $f(x)$ 为周期函数.

2.1.66　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数,$f(1)=a$,且对任意的 x 值均有

$$f(x+2)-f(x)=f(2). \qquad (*)$$

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 和 $f(5)$;

(2) 问 a 取何值时,$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解　(1) 在(*)式中,

令 $x=-1$,得 $f(2)=2f(1)=2a$,

令 $x=1$,得 $f(3)=f(1)+f(2)=3a$,

令 $x=3$,得 $f(5)=f(3)+f(2)=5a$.

(2) 由(1)知当且仅当 $a=0$ 时,$f(2)=0$. 再由(*)式,这时 $f(x+2)=f(x)$. 即 $a=0$ 时,$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

2.1.67　已知定义在 $[0,4]$ 上的函数 $f(x)=3^x$,先把它延拓到 $[-4,0]$ 上,使它成为偶函数,然后再把已延拓到 $[-4,4]$ 上的函数延拓到整个实轴上,使函数成为以 8 为周期的函数.

解　依据条件 $f(-x)=f(x)=3^x$ 可知,延拓到 $[-4,4]$ 上的偶函数是

$$f_1(x)=\begin{cases}3^x, & 0\leqslant x\leqslant 4;\\ 3^{-x}, & -4\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

其次,因周期 $\omega=8$,故由条件 $f_1(x)=f_1(x-8k)$ (k 为整数)知,当 $8k\leqslant x\leqslant 8k+4$,即 $0\leqslant x-8k\leqslant 4$ 时有

$$f_2(x)=f_1(x-8k)=3^{x-8k},$$

而当 $8k-4\leqslant x\leqslant 8k$,即 $-4\leqslant x-8k\leqslant 0$ 时有,

$$f_2(x)=f_1(x-8k)=3^{-(x-8k)}.$$

因此,延拓到整个实轴上的周期为 8 的偶函数是:

$$f_2(x)=\begin{cases}3^{x-8k}, & 8k\leqslant x\leqslant 8k+4;\\ 3^{8k-x}, & 8k-4\leqslant x\leqslant 8k.\end{cases}$$

7. 判断奇偶性

2.1.68 如果 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 内的任意函数,试证

(1) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数;

(2) $f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

证 (1) 设 $g(x)=f(x)+f(-x)$,由于

$$g(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(x)+f(-x)=g(x),$$

所以,$f(x)+f(-x)$ 是偶函数.

(2) 设 $\varphi(x)=f(x)-f(-x)$,由于

$$\varphi(-x)=f(-x)-f[-(x)]=-[f(x)-f(-x)]=-\varphi(x),$$

所以,$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

2.1.69 证明除 0 以外,没有既是奇函数又是偶函数的函数存在.

证 设 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数,则有

$$f(-x)=-f(x),\qquad f(-x)=f(x).$$

于是 $f(x)=-f(x)$. 即 $f(x)=0$.

2.1.70 检验下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}+2\sin x$; (2) $f(x)=2^x+2^{-x}$;

(3) $f(x)=|x|-5e^{x^2}$; (4) $f(x)=x^2+5x$;

(5) $f(x)=\lg\dfrac{x+3}{x-3}$.

解 各小题中函数的定义域都关于原点 O 对称,前 4 个小题的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,而第 5 小题的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

(1) 因为 $f(-x)=(-x)^2\cdot\sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)$

$$=-x^2\cdot\sqrt[3]{x}-2\sin x=-f(x).$$

所以该函数是奇函数.

(2) $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x)$,所以该函数是偶函

数.

(3) $f(-x)=|-x|-5e^{(-x)^2}=|x|-5e^{x^2}=f(x)$,所以该函数是偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x$,由于$f(-x)\neq f(x)$且$f(-x)\neq -f(x)$,所以该函数既不是奇函数,也不是偶函数.

(5) $$f(-x)=\lg\frac{-x+3}{-x-3}=\lg\frac{x-3}{x+3}=\lg(\frac{x+3}{x-3})^{-1}$$
$$=-\lg\frac{x+3}{x-3}=-f(x).$$

所以该函数为奇函数.

2.1.71　已知函数 $f(x)$ 满足

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x},a,b,c\text{ 为常数},|a|\neq|b|,$$

试证明 $f(x)$ 是奇函数.

证　在所给的关系式中,用$\frac{1}{x}$代替 x,得

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=c(x).$$

解方程组

$$\begin{cases}af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x};\\ af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx,\end{cases}$$

得　$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ca}{x}-bcx),\quad(a^2-b^2\neq 0)$$

由 $f(-x)=\frac{-1}{a^2-b^2}(\frac{ca}{x}-bcx)=-f(x)$ 知,$f(x)$ 是奇函数.

2.1.72　把函数 $f(x)=4x^5+x^2-6\sin x\ (x\geqslant 0)$ 延拓到整个实轴上,使它成为奇函数.

解　设 $x<0$,则

$$f(-x)=4(-x)^5+(-x)^2-6\sin(-x)$$
$$=-4x^5+x^2+6\sin x.$$

由条件 $f(x)=-f(-x)$ 知,$x<0$ 时应有

$$f(x)=-(-4x^5+x^2+6\sin x)=4x^5-x^2-6\sin x.$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}4x^5+x^2-6\sin x, & x\geqslant 0;\\ 4x^5-x^2-6\sin x, & x<0.\end{cases}$$

这就是所求的奇函数.

2.1.73 证明:定义在对称区间$(-l,l)$内的任何函数$f(x)$必可表示成偶函数$H(x)$与奇函数$G(x)$之和的形式,且这种表示形式是唯一的.

证 令$H(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

则$H(x)$与$G(x)$分别为定义在$(-l,l)$上的偶函数与奇函数,且

$$f(x)=H(x)+G(x).$$

如果还存在偶函数$H_1(x)$与奇函数$G_1(x)$,使

$$f(x)=H_1(x)+G_1(x),$$

则有
$$H(x)+G(x)=H_1(x)+G_1(x),$$
从而
$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x). \tag{1}$$
以$-x$代入(1)式得
$$H(-x)-H_1(-x)=G_1(-x)-G(-x)$$
即
$$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x) \tag{2}$$
由(1)+(2)得$2H(x)-2H_1(x)=0$,即$H(x)=H_1(x)$.
于是由(1)式得$G(x)=G_1(x)$.唯一性得证.

8.函数作图

2.1.74 已知函数$y=f(x)$和$y=\varphi(x)$的图象,说明怎样用几何作图法,绘制$f(x)$与$\varphi(x)$的和、差、积、商的图象.

解 因为函数$y=f(x)$与$y=\varphi(x)$的图象已知,所以对于给定的x,线段$f(x)$与$\varphi(x)$的长便已知,这时根据几何作图法,便可求出以上二线段的和、差、积、商为长度的线段.其中$y=f(x)\cdot\varphi(x)$与$y=f(x)/\varphi(x)$的情形,可分别写成$\dfrac{y}{f(x)}=\dfrac{\varphi(x)}{1}$与$\dfrac{y}{1}=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$的形式,然后用求第四比例项的几何作图法便可得到$y$的线段长.

既然对于给定的x能求出对应的y的线段长,那么可以恰当的选取足够多的x点,进一步用描点作图法得到所求函数的图象.

2.1.75 已知函数$y=f(x)$的图形,试作下列函数的图形.

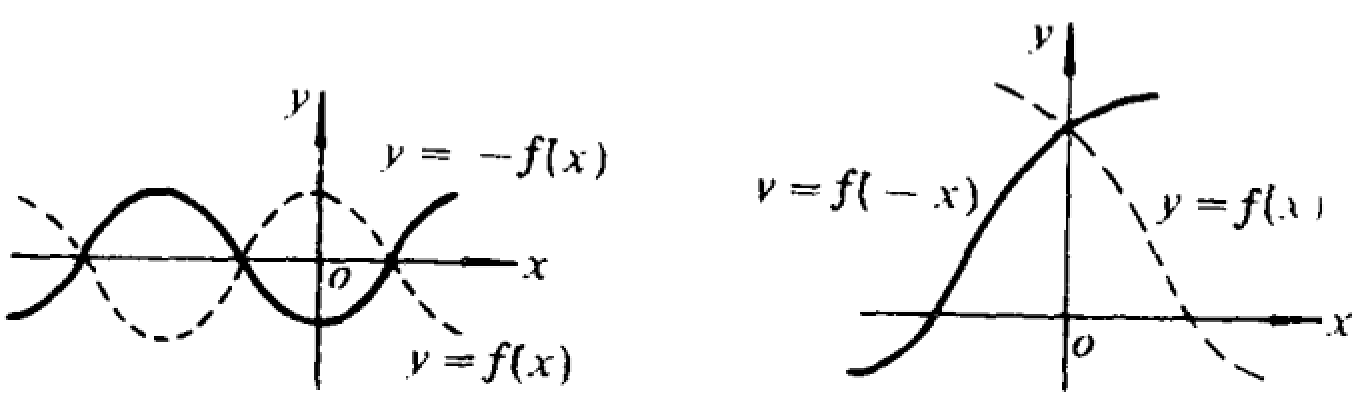
(1) $y=-f(x)$; (2) $y=f(-x)$;

(3) $y=-f(-x)$; (4) $y=|f(x)|$;

(5) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$;　(6) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

解　(1) $y=-f(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称. 如图(1).

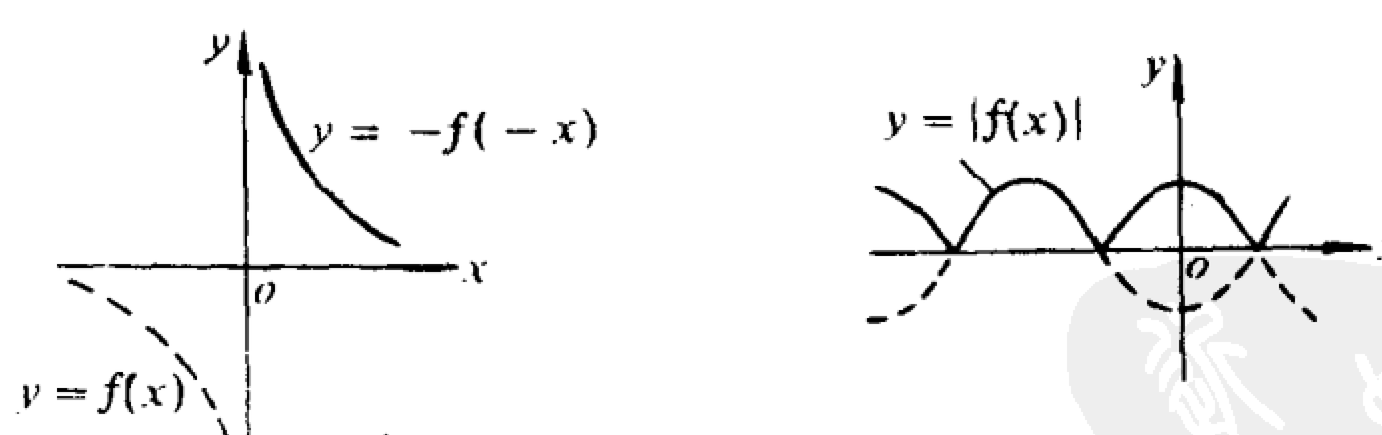
(2) $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图形关于 y 轴对称. 如图(2).



(1)　　　　2.1.75 题图　　　　(2)

(3) $y=-f(-x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称. 如图(3).

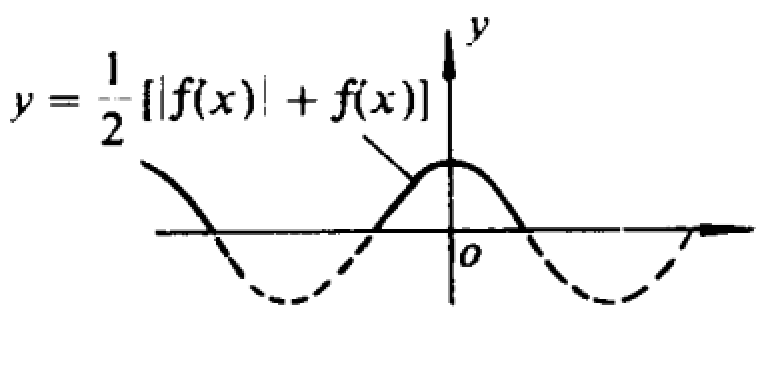
(4) $y=|f(x)|$ 的图形,当 $f(x)\geqslant 0$ 时,与 $y=f(x)$ 的图形相同;当 $f(x)<0$ 时,与 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称. 如图(4).



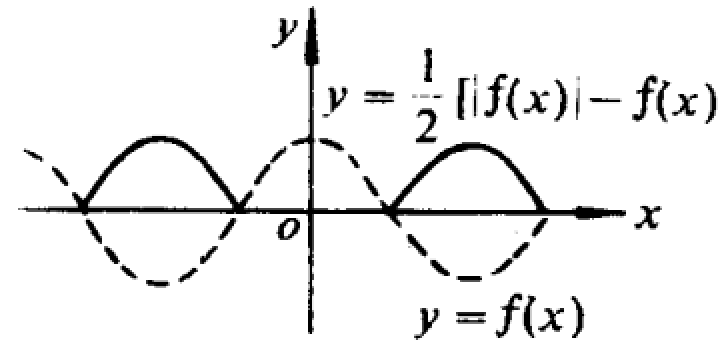
(3)　　　　(4)

(5) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$ 的图形,当 $f(x)>0$ 时,与 $f(x)$ 的图形相同;当 $f(x)\leqslant 0$ 时,它恒取零值,如图(5).

(6) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$ 的图形,当 $f(x)<0$ 时,它的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称;当 $f(x)\geqslant 0$ 时,它恒取零值. 如图(6).



(5)



(6)

2.1.76　确定下列函数图形的对称中心.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$;

(2) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

解　欲证函数以某一点为对称中心,只须证该函数在坐标变换下,它是新坐标系中的奇函数.

(1) 作如下坐标变换　$\begin{cases} y'=y, \\ x'=x-2. \end{cases}$

则在新坐标系 $x'o'y'$ 中,原函数表达式为

$$y'=f(x')=\frac{1}{x'+1}+\frac{1}{x'}+\frac{1}{x'-1},$$

且有

$$f(-x')=\frac{1}{-x'+1}+\frac{1}{-x'}+\frac{1}{-x'-1}$$

$$=-\left(\frac{1}{x'-1}+\frac{1}{x'}+\frac{1}{x'+1}\right)=-f(x').$$

由此可知,函数 $f(x')$ 关于新坐标系的原点对称.从而在原坐标系 xoy 中,函数 $y=f(x)$ 的图形的对称中心是点(2,0).

(2) 由 $y=f(x)=1+\sqrt[3]{x-2}$ 有,$(y-1)^3=x-2$.作坐标变换

$$\begin{cases} y'=y-1, \\ x'=x-2. \end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在新坐标系 $x'o'y'$ 中的表达式为 $y'^3=x'$.易见这是一个奇函数,从而可知在 xoy 坐标系中,函数 $f(x)$ 的对称中心是点(2,1).

2.1.77　确定下列函数的图形关于什么样的垂直轴对称.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$;

(2) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$, $(0<a<b)$.

解　(1) 显然,数轴上的两点 $a+\varepsilon$ 和 $a-\varepsilon$ 关于点 a 是对称的.

如记 $x=a+\varepsilon$,则 $a-\varepsilon=2a-x$;

如记 $x=a-\varepsilon$,则 $a+\varepsilon=2a-x$.

可见,数轴上的两点 x 和 $2a-x$ 关于点 a 是对称的,不管 x 在 a 的左边还是右边.

据上可知,$f(x)$ 的图形如有垂直对称轴 $x=a$,则 $f(x)=f(2a-x)$ 对于 $f(x)$ 的定义域内的一切 x 成立.

根据这个方程解出与 x 有关的 a,就能求出对称轴了.但往往不易做到,须另谋他策.对此,在这里不作一般性的议论,仅对本题给出解法如下.

易见 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)$,$(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$.如果 $f(x)$ 的图形有垂直对称轴 $x=a$,则

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{(2a-x)^2}+\frac{1}{(2a-x-1)^2}$$

应对其定义域上的一切 x 成立.

今取 $x=2$,相应的就有

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{(2-1)^2}=\frac{1}{(2a-2)^2}+\frac{1}{(2a-2-1)^2}. \tag{1}$$

这是 a 必然满足的方程,即 $f(x)$ 有垂直对称轴 $x=a$ 的必要条件,当然不是充分条件.

整理方程(1)得

$$20a^4-100a^3+177a^2-130a+32=0,$$

因式分解,得

$$(a-2)(2a-1)(10a^2-25a+16)=0.$$

由此可见,方程(1)只有两个实根 $a=2, a=\frac{1}{2}$.

如上所述,这只是必要条件,而非充分条件,因此,直线 $x=2$ 和 $x=\frac{1}{2}$ 是不是垂直对称轴,尚须验证.

当 $a=2$ 时,

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{(2\cdot 2-x)^2}+\frac{1}{(2\cdot 2-x-1)^2}$$

不是恒等式.所以,$x=2$ 不是 $f(x)$ 的图形的垂直对称轴.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{\left(2\cdot\frac{1}{2}-x\right)^2}+\frac{1}{\left(2\cdot\frac{1}{2}-x-1\right)^2}.$$

这是关于 x 的恒等式. 所以，$x=\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的图形的垂直对称轴.

(2) 据(1)中所述可知，若 $x=c$ 为 $f(x)$ 的图形的垂直对称轴，则应有 $f(x)=f(2c-x)$，即

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+2c-x}+\sqrt{b-2c+x}$$

对定义域中的一切 x 均成立.

今取 $x=0$，则由上式有

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+2c}+\sqrt{b-2c}. \tag{2}$$

这是 $f(x)$ 有垂直对称轴 $x=c$ 的必要条件，但非充分条件.

整理方程(1)，可化为等价方程

$$(a+2c)(b-2c)=ab,\ 或\ c(2b-2a-4c)=0.$$

由此可见，$c=0$ 和 $c=\frac{b-a}{2}$ 是方程(2)的两个实数根. 容易验证，当 $c=0$ 时，

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+2\cdot 0-x}+\sqrt{b-2\cdot 0+x}$$
$$=\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}.$$

这不是关于 x 的恒等式，故 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的图形的对称轴.

当 $c=\frac{b-a}{2}$ 时，

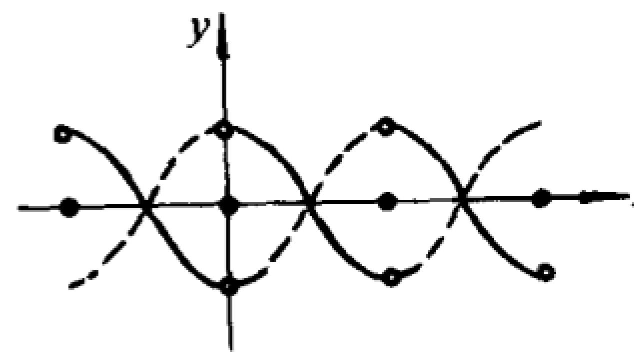
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$$
$$=\sqrt{a+2\cdot\frac{b-a}{2}-x}+\sqrt{b-2\cdot\frac{b-a}{2}+x}$$
$$=\sqrt{b-x}+\sqrt{a+x}.$$

这是一个关于 x 的恒等式，所以 $x=\frac{b-a}{2}\ (b>a)$ 是 $f(x)$ 的图形的垂直对称轴.

2.1.78 绘制函数 $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$ 的图形.

解 由题设可知

$$y=\begin{cases}\cos x, & 当\ \sin x>0;\\ 0, & 当\ \sin x>0;\\ -\cos x, & 当\ \sin<0.\end{cases}$$



2.1.78 题图

即 $y=$

$$\begin{cases}\cos x, & 2k\pi<x<(2k+1)\pi;\\ 0, & x=k\pi;\\ -\cos x, & (2k+1)\pi<x\\ & <2(k+1)\pi.\end{cases}$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

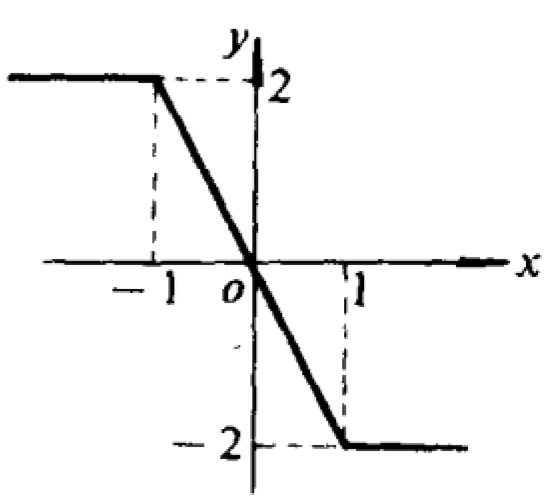
图形为图中的实线部分.

2.1.79　绘函数 $y=|1-x|-|1+x|$ 的图形.

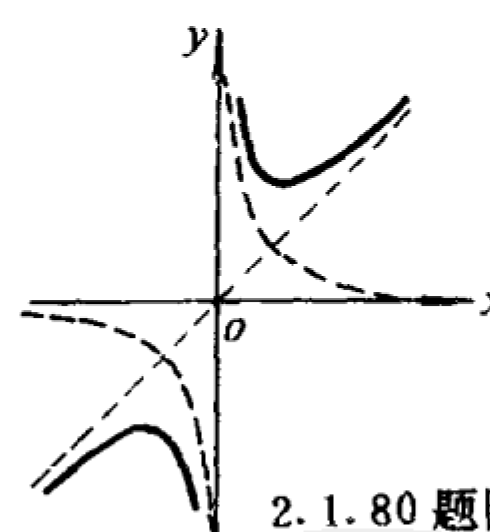
解

$$y=\begin{cases}2, & 当\ x<-1;\\ -2x, & 当\ -1\leqslant x\leqslant 1;\\ -2, & 当\ x>1.\end{cases}$$

其图形如下.



2.1.79 题图



2.1.80 题图

2.1.80　绘函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图形.

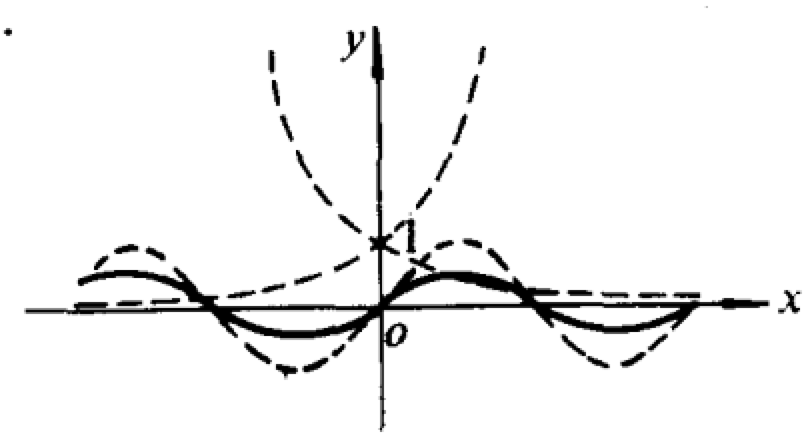
解　此题可以利用图形的加法绘制.

首先绘制 $y_1=x, y_2=\dfrac{1}{x}$ 的图形,然后做图形的加法即可得所求图形如上图中的实线部分.

2.1.81　作函数 $y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 的图形.

解　此函数图形可由 $y_1=\sin x$ 和 $y_2=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的图形按图形乘法

求之.其中 $y_2=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的图形可由抛物线 $y_3=1+x^2$ 的图形按倒数的图形作法得到.下图中的实线部分即为所求的图形.



2.1.81 题图

2.1.82　作函数 $y=|x-a|+\dfrac{1}{2}|x-b|.(a<b)$ 的图形.

解　当 $x=a$ 时,

$y=\dfrac{1}{2}(b-a)$;

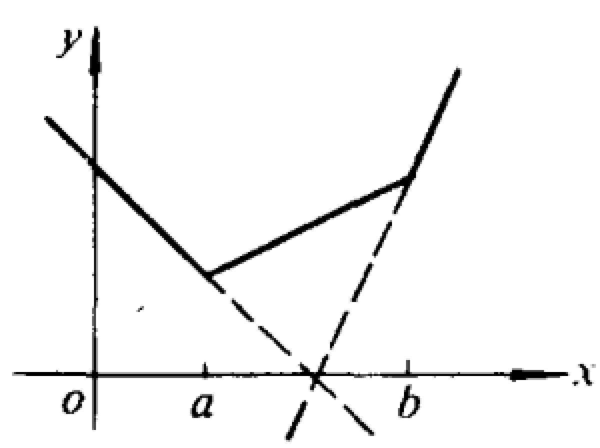
当 $x=b$ 时,$y=b-a$;

当 $x>b$ 时,$y=(x-a)+\dfrac{1}{2}(x-b)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}(2a+b)$;

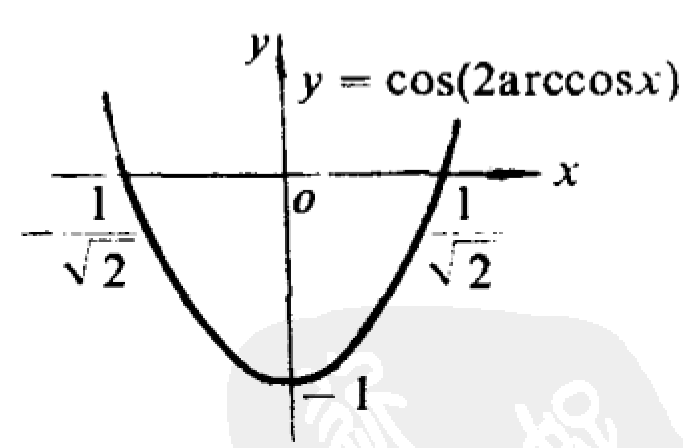
当 $a<x<b$ 时,$y=(x-a)+\dfrac{1}{2}(b-x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}(2a-b)$;

当 $x<a$ 时,$y=(a-x)+\dfrac{1}{2}(b-x)=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}(2a+b)$.

故函数的图形是一条折线.如图中的实线部分.



2.1.82 题图



2.1.83 题图

2.1.83　作函数 $y=\cos(2\arccos x)$ 的图形.

解　$y=\cos(2\arccos x)$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$,对一切 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有 $y=\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$.
故其图形如上.

2.1.84　描绘函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图形.

解　在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上有

$$\sin y=\sin x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

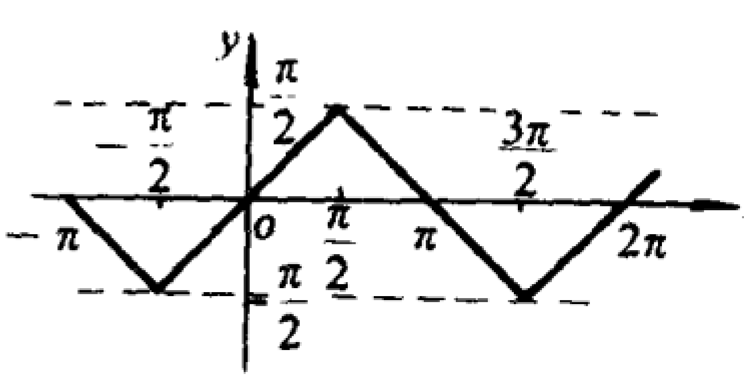
所以，$y=x,\ (-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$.

若在区间$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$上考虑，则

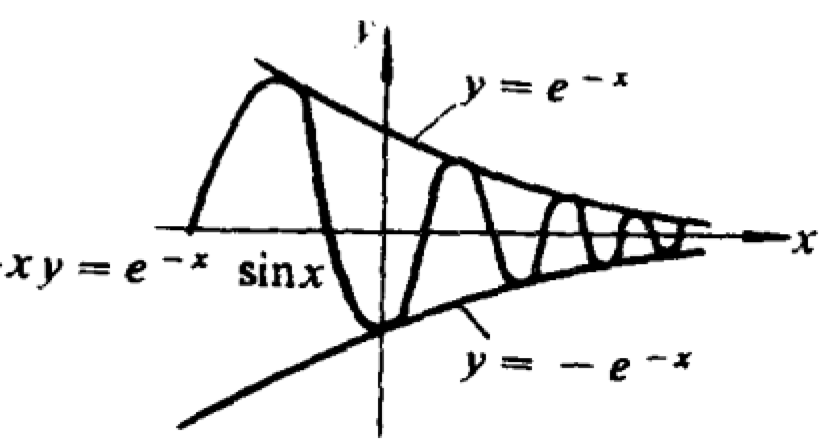
$$\sin y=\sin x,\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

所以，$y=\pi-x,\ (\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2})$.

因为$y=\arcsin(\sin x)$是以2π为周期的周期函数，所以沿x轴的正负方向，每隔2π平行移动$[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$上的图形. 就会得到其全部图形.



2.1.84 题图



2.1.85 题图

2.1.85　画出函数$y=e^{-x}\cdot\sin x$的图形.

解　此函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 由于

$$|e^{-x}\cdot\sin x|\leqslant|\sin x|\cdot e^{-x}\leqslant e^{-x},$$

即$-e^{-x}<e^{-x}\sin x<e^{-x}$. 因此，函数$y=e^{-x}\cdot\sin x$的图形介于$y=e^{-x}$与$y=-e^{-x}$的图形之间. 又由于

$$\sin k\pi=0,\quad \sin(2k\pm\frac{1}{2})\pi=\pm 1.\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

故$y=e^{-x}\cdot\sin x$的图形与x轴的交点为$(k\pi,0)$，并通过点$((2k+\frac{1}{2})\pi,e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi})$与点$((2k-\frac{1}{2})\pi,-e^{-(2k-\frac{1}{2})\pi})$.

再考虑正弦曲线的特征，以及$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\cdot\sin x=\infty$. 最后将上述各点

用光滑的曲线连接起来，即可得出 $y = e^{-x} \cdot \sin x$ 的图象如上.

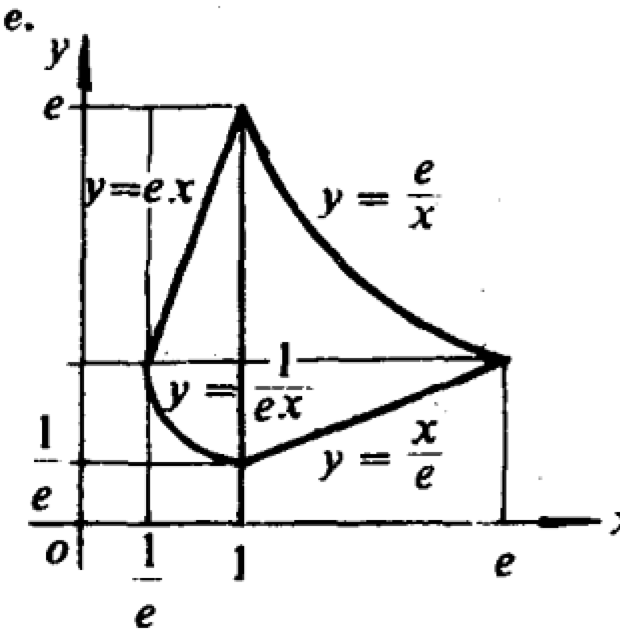
2.1.86 作出函数 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 的图形.

解 由 $\begin{cases} |\ln x| \leqslant 1, \\ |\ln y| \leqslant 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \dfrac{1}{e} \leqslant x \leqslant e, \\ \dfrac{1}{e} \leqslant y \leqslant e. \end{cases}$

当 $\frac{1}{e} \leqslant x < 1, \frac{1}{e} \leqslant y \leqslant 1$ 时，有 $-\ln x - \ln y = 1$，从而，$y = \frac{1}{ex}$；

当 $\frac{1}{e} \leqslant x < 1, 1 \leqslant y \leqslant e$ 时，有 $-\ln x + \ln y = 1$，从而，$y = ex$；

当 $1 \leqslant x \leqslant e, \frac{1}{e} \leqslant y \leqslant 1$ 时，有 $\ln x - \ln y = 1$，从而有，$y = \frac{x}{e}$.



2.1.86 题图

当 $1 \leqslant x \leqslant e, 1 \leqslant y \leqslant e$ 时，有 $\ln x + \ln y = 1$，从而有 $y = \frac{e}{x}$.

综上所述，可作出 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 的图形.

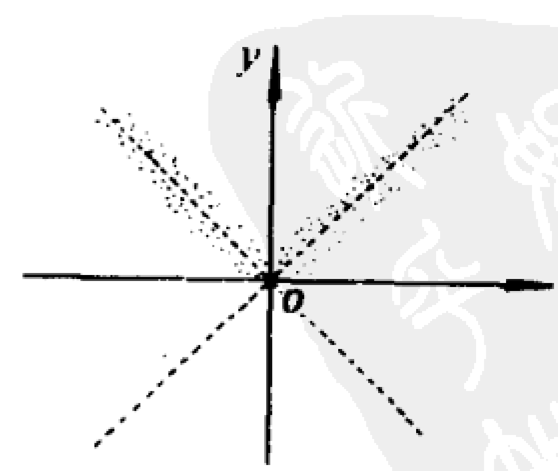
2.1.87 作出函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为无理数；} \\ 0, & \text{当 } x = 0\text{；} \\ \sqrt{\dfrac{1+p^2}{1+q^2}} & \text{当 } x = \dfrac{p}{q}, (p,q) = 1 \end{cases}$$

的图形.

解 当 x 为无理数时，点 $[x, f(x)]$ 在直线 $y = x$ 上，点 $(0,0)$，即原点也在直线 $y = x$ 上.

当且仅当 $p = q$ 时，$\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} = \frac{p}{q}$ 成立. 此时 $f(1) = 1$，点 $(1,1)$ 也在直线 $y = x$ 上.



2.1.87 题图

容易证明，若 $p < q$，则

$\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}>\frac{p}{q}$,

若 $p>q$,则$\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}<\frac{p}{q}$.

因此,设 x 为有理点,则当 $0<x<1$ 时,点在$[x,f(x)]$在直线 $y=x$ 之上方;当 $x>1$ 时,点$[x,f(x)]$在直线 $y=x$ 之下方.

特别地,当 p、q 很大时,$\sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}}$接近$\frac{p}{q}$,因此在直线$y=x$ $(x\geqslant 0)$的近旁密集着成堆的函数图形的孤立点.

值得注意的是,若 r 为有理数,则 $x=r$ 与 $x=-r$ 时,函数值相同,故在有理点集上,函数的图形关于 y 轴对称.据上述分析可绘出此函数的简图.

2.1.88　设当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x(1-x)$;又函数以关系式 $f(x+1)=2f(x)$ 向$[0,1]$外延拓,求作 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图形.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x(1-x)=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2$,要使 $f(x+1)=2f(x)=\frac{2}{4}-2(\frac{1}{2}-x)^2$, $x\in[0,1]$,作变换,令 $x+1=t$,得到 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时,有

$$f(t)=\frac{2}{4}-2(\frac{3}{2}-t)^2.$$

仍记 t 为 x,于是 $1\leqslant x\leqslant 2$,函数表达式为

$$f(x)=\frac{2}{4}-2(\frac{3}{2}-x)^2.$$

要使 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,有

$$f(x+1)=2f(x)=\frac{2^2}{4}-2^2(\frac{3}{2}-x)^2.$$

同上作变换,可得 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,函数表达式为

$$f(x)=\frac{2^2}{4}-2^2(\frac{5}{2}-x)^2.$$

如此继续下去,向右延拓可得,$n-1\leqslant x\leqslant n$ (n 为自然数)时,函数表达式为

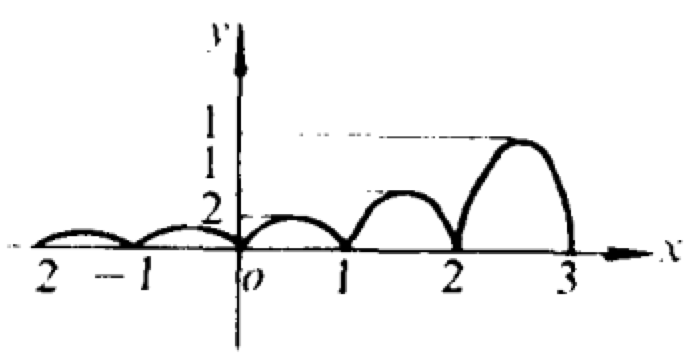
$$f(x)=\frac{2^{n-1}}{4}-2^{n-1}(\frac{2n-1}{2}-x)^2.$$

容易证明，函数向区间[0,1]左方延拓时，这个表达式也是成立的，只是式中的 n 值取 0 和负整数罢了.

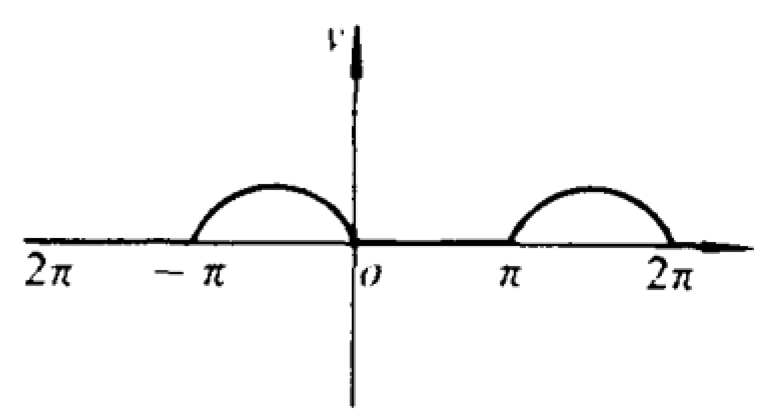
综上所述，得到函数在整个数轴上的表达式为

$$f(x) = 2^{n-3} - 2^{n-1}\left(\frac{2n-1}{2} - x\right)^2,\ n-1 \leqslant x \leqslant n, n \text{ 为整数}.$$

在每一个区间[$n-1,n$]上，图形是一段向下张口的抛物线，以直线 $x = \frac{2n-1}{2}$ 为对称轴，以 $\left(\frac{2n-1}{2}, 2^{n-3}\right)$ 为顶点. 交 x 轴于 $(n-1,0)$ 和 $(n,0)$ 两点. 每段抛物线顶点的纵坐标等于其左邻区间上抛物线顶点纵坐标的二倍. 由此可画出 $f(x)$ 的图形如下.



2.1.88 题图



2.1.89 题图

2.1.89　设当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$f(x) = 0$，函数以关系式 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$ 向区间[$0,\pi$]外延拓，求作函数 $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 的图形.

解　当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$f(x) = 0$. 由题设应有

$$f(x+\pi) = f(x) + \sin x = 0 + \sin x = \sin x.$$

作变换 $x + \pi = t$，得到 $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$，这时有 $f(t) = -\sin t$.

仍记 t 为 x，于是 $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时，函数表达式为 $f(x) = -\sin x$.

仍由题设，$\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时，

$$f(x+\pi) = f(x) + \sin x = -\sin x + \sin x = 0.$$

同上作变换，得到 $2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ 时，函数表达式为 $f(x) = 0$.

综上所述，可推知函数在全数轴上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi; \\ -\sin x, & (2n-1)\pi \leqslant x \leqslant 2n\pi. \end{cases} (n \text{ 为整数})$$

由此可画出函数的图象.

2.1.90　作出下列用参数方程表示的函数的图形.

(1) $x = t + \frac{1}{t}$,　$y = t + \frac{1}{t^2}$;

(2) $x = \sin t$,　$y = \frac{\sin t}{2 + \cos t}$;

(3) $x = a \cdot \cos^3\theta$,　$y = a \cdot \sin^3\theta$.

解　(1) 易见 x 与 y 都既无上界又无下界. 并且由于 $t^2 + 1 \geqslant 2|t|$, 所以有

$$|x| = |t + \frac{1}{t}| = \frac{t^2 + 1}{|t|} \geqslant 2.$$

由此可知在二直线 $x = -2$ 和 $x = 2$ 之间无图形. 又因为

$$y = t + \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 + 1}{t^2} = \frac{(t+1)(t^2 - t + 1)}{t^2}$$

$$= \frac{(t+1)[(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]}{t^2},$$

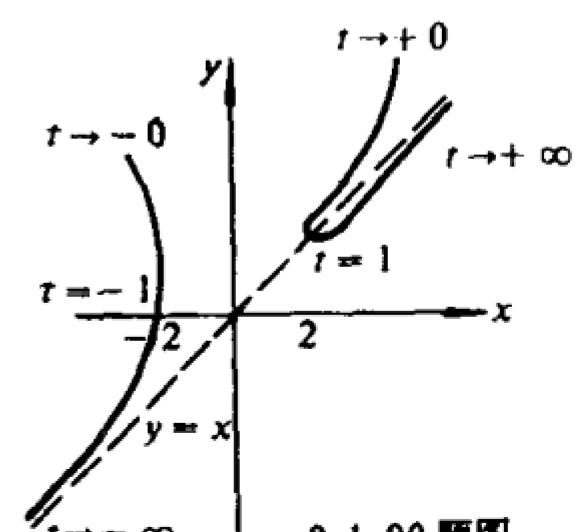
所以 y 与 $t + 1$ 同号:

$t + 1 > 0$ 即 $t > -1$ 时, $y > 0$;

$t + 1 = 0$ 即 $t = -1$ 时, $y = 0$;

$t + 1 < 0$ 即 $t < -1$ 时, $y < 0$.

描点绘图得图(1).



2.1.90 题图

(1)

(2) 易见 x 和 y 都是 t 的以 2π 为周期的函数, 且 x、y 都是关于 t 的奇函数, 因此只要看 t 从 0 到 π 的变化即可.

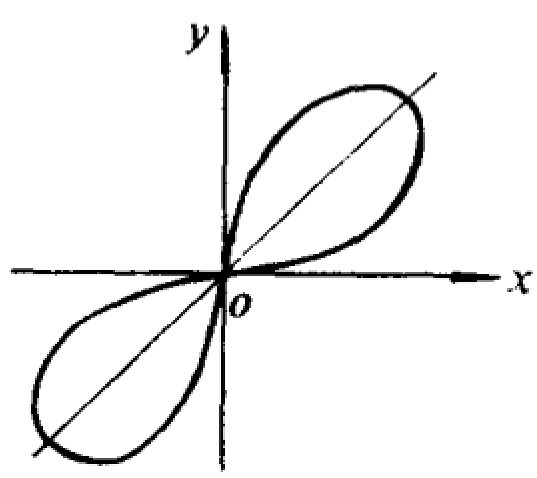
据三角函数的性质可知, 当 t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, x 单调增加; t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 π 时, x 单调减小, 这时 x 的最大值为 1, 最小值为 0. 当 t 从 0 变到 $\frac{2\pi}{3}$ 时, y 单调增加; t 从 $\frac{2\pi}{3}$ 变到 π 时, y 单调减小, 这时 y 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 最小值为 0.

描点绘图得图(2).

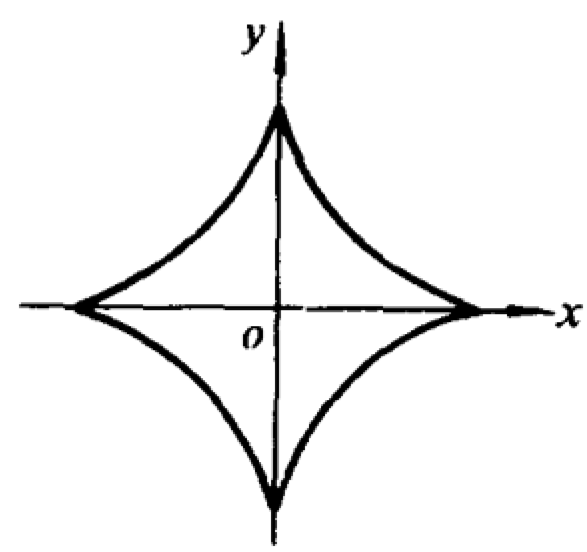
(3) 消去方程组 $x = a \cdot \cos^3\theta$, $y = a \cdot \sin^2\theta$ 中的参数 θ, 得到隐式方程 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, 由此方程可见, 函数的图形是关于坐标轴和原点对

称的. x、y 都是以 2π 为周期的函数. 故只需考察 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时情况即可.

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, 图形在第一象限; 当 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$、$\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时, 图形依次在第二、三、四象限. 用描点法及其对称性得到其图形如图(3).



(2)



(3)

2.1.91 作出下列用极坐标表示的 $r=r(\varphi)$ 的图形.

(1) $r=\varphi$ (阿基米德螺线);

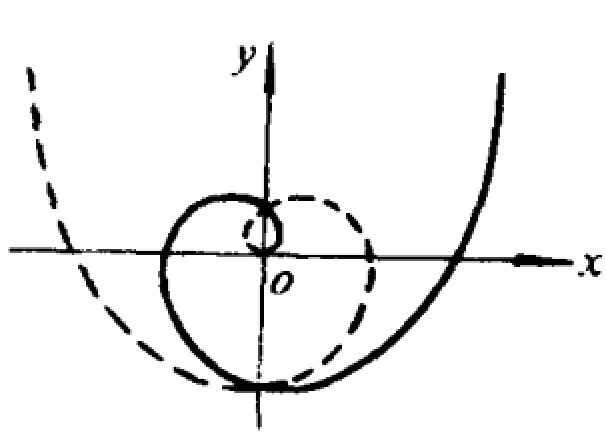
(2) $r=a(1+\cos\varphi)$ (心脏线);

(3) $r^2=36\cos 2\varphi$ (贝努利双纽线);

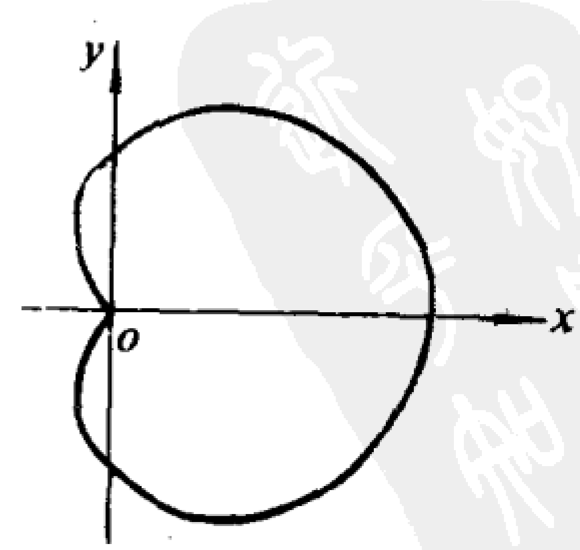
(4) $r=2\sin\varphi$ (四叶玫瑰线);

(5) $r=2\sin 3\varphi$ (三叶玫瑰线).

解 其图形分别为图(1)、图(2)、图(3)、图(4)、图(5).

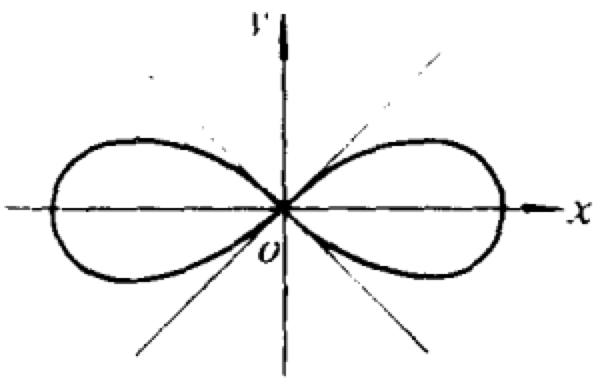


(1)

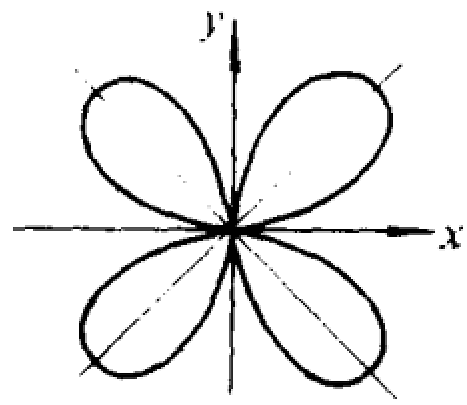


(2)

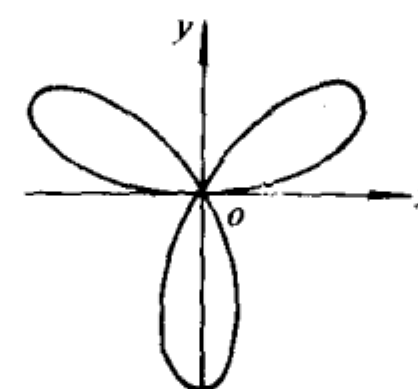
2.1.91 题图



(3)



(4)

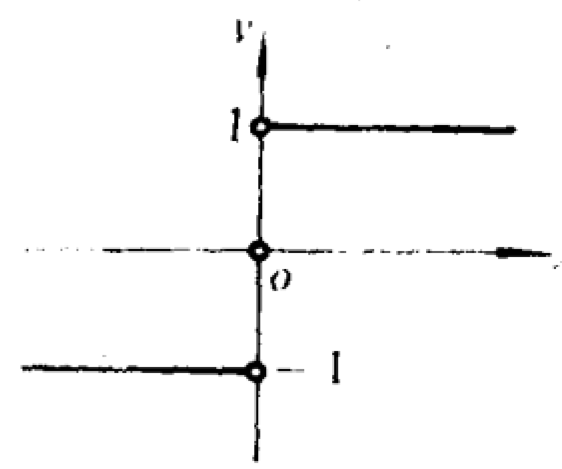


(5)

2.1.92　函数 $y = \text{sgn}x$ 由下述法则定义

$$\text{sng}x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时}; \\ 0 & \text{当 } x = 0 \text{ 时}; \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

试作出这个函数的图形，并证明 $|x| = x \cdot \text{sng}x$



2.1.92 题图

解　此函数图形如图右.

按照函数相乘规则有

$$x \cdot \text{sng}x = \begin{cases} x \cdot 1 = x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时}; \\ x \cdot 0 = 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时}; \\ x \cdot (-1) = -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

因此有 $|x| = x \cdot \text{sgn}x$.

9. 有界变差函数、凸函数

2.1.93　设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数，如果对任意的 x_1、$x_2 \in I$，$0 < \lambda < 1$，有 $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$，则 $f(x)$ 称为凸函数. 试证：对 I 上的凸函数 $f(x)$，恒有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, (x_1 < x_2 < x_3, x_i \in I, i = 1,2,3)$$

证　令 $\lambda = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$，$0 < \lambda < 1$，则

$$1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3,$$

$$f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3),$$

故　　$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant (1-\lambda)f(x_3) - (1-\lambda)f(x_1).$$

即 $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

2.1.94　设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，证明 $f(x)$ 在 I 的任意闭子区间上有界，但在 I 上不一定有界.

证　设 $[a,b]\subseteq I$，对任意的 $x\in[a,b]$，存在 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，使

$$x=\lambda a+(1-\lambda)b.$$

据凸函数定义得

$$f(x)=f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$
$$\leqslant\max\{f(a),f(b)\}.$$

故 $f(x)$ 于$[a,b]$上有上界，，设 M 为其上界.

令 $x\in[a,b]$，$t=x-\frac{1}{2}(a+b)$，$x=\frac{1}{2}(a+b)+t$，

$\frac{1}{2}(a+b)-t=a+b-x$，$a\leqslant a+b-x\leqslant b$，

$\frac{1}{2}(a+b)-t\in[a,b]$，

因此 $$f(\frac{a+b}{2})=f[\frac{1}{2}(\frac{a+b}{2}+t)+\frac{1}{2}(\frac{a+b}{2}-t)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[f(\frac{a+b}{2}+t)+f(\frac{a+b}{2}-t)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(f(x)+M).$$

从而 $2f(\frac{a+b}{2})-M\leqslant f(x)\leqslant M$，即 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

例如，$f(x)=\frac{1}{x}$，$I=(0,+\infty)$，$f(x)$ 在 I 上为凸函数，但 $f(x)$ 于 $(0,+\infty)$ 上无界.

2.1.95　设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的函数，如果对$[a,b]$上的任意分点：$a=x_0<x_1<\cdots x_{n-1}<x_n=b$，$\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$，$(k=1,2,\cdots,n)$ 存在常数 $M>0$，使得 $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为$[a,b]$上的有界变差函数. 称 $v_f[a,b]=\sup\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的全变差，证明：

(1) 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的单调函数，则 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数，且 $v_f[a,b]=|f(a)-f(b)|$；

(2) 有界变差函数是有界函数.

证　(1) 不妨设 $f(x)$ 不减，于是 $\Delta f_k \geqslant 0$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n}\Delta f_k = f(b) - f(a),$$

$$v_f[a,b] = |f(a) - f(b)|.$$

(2) 取 $x \in [a,b]$，作分点 $\{a,x,b\}$，则

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant M,$$

因此，$|f(x)| \leqslant |f(a)| + M$.

2.1.96　设 $f(x)$ 是$[a,b]$上有界变差函数，又 $a < c < b$. 证明 $f(x)$ 是$[a,c]$和$[c,b]$上有界变差函数，而且

$$v_f[a,b] = v_f[a,c] + v_f[c,b].$$

证　令两组分点为

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = c,$$

$$c = x_{m+1} < x_{m+2} < \cdots < x_{m+n} = b.$$

于是对$[a,b]$有分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < c = x_m = x_{m+1} < \cdots < x_{m+n} = b.$$

注意　$$\sum_{k=1}^{m}|\Delta f_k| + \sum_{k=m+1}^{m+n}|\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{m+n}|\Delta f_k| \leqslant v_f[a,b],$$

故　$$v_f[a,c] + v_f[b,c] \leqslant v_f[a,b].$$

另一方面，对$[a,b]$的分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 添加分点 c，不妨设 $x_{k-1} < c < x_k$，$1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$|\Delta f_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

于是　$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta f_i| \leqslant [\sum_{i=1}^{k-1}|\Delta f_i| + |f(x_{k-1}) - f(c)|]$$

$$+ [|f(c) - f(x_k)| + \sum_{i=k+1}^{n}|\Delta f_i|]$$

$$\leqslant v_f[a,c] + v_f[c,b].$$

2.1.97　设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数，令 $x \in [a,b]$，$v_{f(x)} = v_f[a,x]$，$v_f(a) = 0$，证明

(1) $v_{f(x)}$ 是$[a,b]$上的不减函数.

(2) $v_{f(x)} - f(x)$ 是$[a,b]$上的不减函数.

证　(1) 设 $a < x < y < b$，于是

$$v_f[a,y] = v_f[a,x] + v_f[x,y],\ v_{f(y)} - v_{f(x)} = v_f[x,y] \geqslant 0.$$

(2) 令 $D_{f(x)} = v_{f(x)} - f(x)$，则

$$D_{f(y)} - D_{f(x)} = v_{f(y)} - v_{f(x)} - [f(y) - f(x)]$$
$$= v_f[x,y] - [f(y) - f(x)].$$

一般地，有 $f(y) - f(x) \leqslant v_f[x,y]$，故

$$v_{f(x)} - f(x) \leqslant v_{f(y)} - f(y).$$

2.1.98　设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的不减函数 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，$x_n = f(x_{n-1})(n = 1,2,\cdots)$，又设 $x_0 = a$ 时，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，证明 $\min\{a, f(a)\} \leqslant x_0 \leqslant \max\{a, f(a)\}$ 时，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也收敛.

证　记 $x_0^{(a)} = a$，$x_n^{(a)} = f(x_{n-1}^{(a)})$，$(n = 1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(a)} = A$，不妨设 $a < f(a)$，已知 $x_0 = a$ 时，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，故考虑 $a < x_0 < f(a)$. 又 $f(x)$ 为不减函数，$x_1^{(a)} = f(a) > a$. 故

$$a < x_0 \leqslant f(a) = x_1^{(a)}, x_1^{(a)} < x_1 = f(x_0) \leqslant f(x_1^a) = x_2^{(a)}.$$

依此作下去，一般有

$$x_{n+1}^{(a)} \leqslant x_{n+1} \leqslant x_{n+2}^{(a)},\ (n = 1,2,\cdots).$$

于是，根据极限比较准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$.

10. 综合问题

2.1.99　下列函数是否相同.

(1) $y_1 = 2\lg x$ 与 $y_2 = \lg x^2$；

(2) $y_1 = a^{\log_a x}$ 与 $y_2 = x$；

(3) $y_1 = \sqrt{x^2}$ 与 $y_2 = x$.

解　(1) 因为函数 y_1 的定义域为 $X_1 = \{x | x > 0\}$；函数 y_2 的定义域为 $X_2 = \{x | x \neq 0\}$. 可见两函数的定义域不同. 所以，y_1 与 y_2 是不同的函数.

(2) y_1 与 y_2 是不同的函数.（理由同(1)）

(3) 函数 y_1 与 y_2 的定义域相同，但两个函数的对应规律不同. 因此，是不同的函数.

2.1.100　讨论狄利克莱(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时；} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

的特性.

解　(1) 显然 $D(x)$ 是单值函数.

(2) $D(x)$ 是偶函数.

事实上，当x为有理数时，$-x$也是有理数，所以$f(-x)=f(x)=1$；当x为无理数时，$-x$也是无理数，所以$f(-x)=f(x)=0$.

(3) 显然，$D(x)$不是单调函数.

(4) 由$|D(x)|\leqslant 1$，所以$D(x)$为有界函数.

事实上，对任何有理数r，若x是有理数，则$x+r$也是有理数，即有

$$f(x)=f(x+r)=1;$$

若x是无理数，则$x+r$也是无理数，从而有

$$f(x)=f(x+r)=0.$$

综上所述，所有有理数都是$D(x)$的周期，$D(x)$无最小正周期.

2.1.101　已知$f(x)=x+1,\varphi(x)=x-2$，试解方程

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$$

解　当且仅当$\alpha\cdot\beta\geqslant 0$时，不等式$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$中的等号成立.从而本题之解应为

$$(x+1)(x-2)\geqslant 0,$$

即　$x\geqslant 2$或$x\leqslant -1$.

2.1.102　已知$f(x)=x-3,\varphi(x)=4-x$，解不等式

$$|f(x)+\varphi(x)|<|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

解　当且仅当$\alpha\cdot\beta<0$时，不等式$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$中的"<"号成立，从而知本题之解应为

$$(x-3)\cdot(4-x)<0.$$

解之得，$x<3$或$x>4$.

2.1.103　若已知$f(x)=x^2-x+3$，试求方程$f(x)=f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)$的所有实根.

解　由$f(x)=f\left(\dfrac{x+8}{x-1}\right)$有

$$x^2-x+3=\left(\frac{x+8}{x-1}\right)^2-\frac{x+8}{x-1}+3.$$

整理后得　$x^4-3x^3+3x^2-10-72=0$,

即　$(x-4)(x+2)(x^2-x+4)=0.$

解之得，其根为$x=4,x=-2$.

2.1.104　若$f(x+y)=f(x)+f(y)$，试证明

(1) $f(0)=0$;

(2) $p \cdot f(x) = f(px)$,(p 为任意正整数).

证　(1) 在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中,取 $x = y = 0$,则有 $f(0) = 2f(0)$,即可得知必有 $f(0) = 0$.

(2) 在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中取 $x = y$,则有 $2f(x) = f(2x)$ 用归纳法,设对正整数 k 有 $k \cdot f(x) = f(kx)$ 于是有

$$f(x + kx) = f(x) + f(kx) = f(x) + kf(x),$$

即　　$$f[(k+1)x] = (k+1) \cdot f(x).$$

亦即(2) 得证.

2.1.105　设 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$,若自变量 $x = x_n (n = 1,2,\cdots)$ 的值组成一个等差数列.试证:对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1,2,\cdots)$ 组成一个等比数列.

证　因为 $\{x_n\}$ 组成一个等差数列,即 $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$,所以

$$a^{x_{n+2} - x_{n+1}} = a^{x_{n+1} - x_n},$$

即 $\frac{a^{x_{n+2}}}{a^{x_{n+1}}} = \frac{a^{x_{n+1}}}{a^{x_n}}$,亦即 $\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} = \frac{y_{n+1}}{n}$, $(n = 1,2,\cdots)$,所以,$y_n = f(x_n)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 组成等比数列.

2.1.106　设 $f(x)$ 是一多项式,并且有性质:

$$f(0) = 0, \quad f(x^2 + 1) = [f(x)]^2 + 1,$$

证明这个多项式 $f(x)$ 必恒等于 x.

证　由 $f(0) = 0$ 知,把 $x = 0$ 代入 $f(x^2+1) = [f(x)]^2 + 1$ 得

$$f(1) = 0^2 + 1 = 1.$$

再把 $x = 1$ 代入 $f(x^2+1) = [f(x)]^2 + 1$ 得

$$f(2) = 1^2 + 1 = 2.$$

再把 $x = 2$ 代入 $f(x^2+1) = [f(x)]^2 + 1$ 得

$$f(5) = 2^2 + 1 = 5.$$

记 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, \cdots$,一般地 $a_{n+1} = a_n^2 + 1, (n = 1,2,\cdots)$.用归纳法,设 $f(a_k) = a_k$,把 $x = a_k$ 代入 $f(x^2+1) = [f(x)]^2 + 1$ 得

$$f(a_k^2 + 1) = [f(a_k)]^2 + 1 = a_k^2 + 1.$$

因 $a_{k+1} = a_k^2 + 1$,故得 $f(a_{k+1}) = a_{k+1}$.于是 $f(x) = x$ 对 $x = a_1, a_2, a_3, \cdots$ 都成立.

因 $f(x)$ 是多项式,可设它的次数为 m(m 为正整数).因为 $f(x) = x$ 对于 $m+1$ 个不同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{m+1}$ 都成立.于是 m 次多项式 $f(x)$

$-x$ 有 $m+1$ 个不同的根. 从而 $f(x)-x$ 必恒等于零,即 $f(x)\equiv x$.

2.1.107　证明任何函数 $f(x)(x\in R)$ 都可表示成两个非负函数之差.

证　令 $\varphi(x)=\dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$, $\psi(x)=\dfrac{|f(x)|-f(x)}{2}$. 显然, $\varphi(x)\geqslant 0,\psi(x)\geqslant 0$,且

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}-\frac{|f(x)|-f(x)}{2}=f(x).$$

2.1.108　证明 $\cos x$ 和 $\sin x$ 不是有理函数.

证　首先就 $\sin x$ 采用反证法证之.

设 $y=\sin x$ 是有理数,则它可以表示为 $y=\dfrac{p(x)}{q(x)}$,其中 $p(x)$、$q(x)$ 皆为 x 的多项式. 因为当 $x_n=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 时,总有 $y_n=\sin x_n=1$,所以,由假设有 $p(x_n)-q(x_n)=0$,这说明代数方程 $p(x)-q(x)=0$ 有无穷多个根.

又因为函数 y 不是对一切 x 恒等于 1,所以代数方程 $p(x)-q(x)\not\equiv 0$,根据代数学定理,方程根的个数不能超过方程的次数;一个代数方程只有有限个根. 因此,$y=\sin x$ 不是有理函数.

同理可证 $y=\cos x$ 也不是有理函数.

2.1.109　证明 $\sin x$ 不是代数函数.

证　用反证法若 $y=\sin x$ 是代数函数,则它满足代数方程

$$p(x,y)=p_0(x)y^n+p_1(x)y^{n-1}+\cdots+p_n(x)y+p_n(x)=0 \quad (1)$$

其中 n 为正整数. $p_0(x)\neq 0,p_1(x)$、$p_2(x)$、$\cdots$、$p_n(x)$ 都是 x 的多项式.

因为 $y=\sin x$,所以存在无穷多个 x 值. $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=1,2,\cdots)$,使 $y=1$,因此,代数方程 $p(x,1)=0$ 有无穷多个根 $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$. 但方程(1) 不是关于 x 的恒等式.

所以,代数方程(1) 只能有有限个根. 与假设矛盾.

注　一般地,用类似的方法可证不等于常数的周期函数不是代数函数.

§2 函数的极限

内 容 提 要

1. 基本概念

(1) $x \to x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限的定义：

如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在着一个 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

(2) $x \to \infty$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限的定义：

如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在着一个 $N = N(\varepsilon) > 0$，使当 $|x| > N$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

(3) 左、右极限的定义：

如果对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使当 $0 < x_0 - x < \delta$ $(0 < x - x_0 < \delta)$ 时有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左(右)极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A = f(x_0 - 0)$ $(\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A = f(x_0 + 0))$.

(4) 上、下极限的定义：

称 $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = \inf\limits_{\delta > 0} \sup\limits_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x)$ $(\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = \sup\limits_{\delta > 0} \inf\limits_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x))$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的上(下)极限.

(5) 无穷大量与无穷小量的定义：

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$，

1) 当 $A = 0$ 时，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小量.

2) 当 $A=\infty$ 时,则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大量.

2. 函数极限存在准则

(1) 柯西准则

函数 $f(x)$ 在 x_0 的极限存在的充要条件是对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得只要

$$0<|x'-x_0|<\delta,\quad 0<|x''-x_0|<\delta,$$

就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立.

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极限的充要条件是对任意的序列 $\{x_n\}$(其中 $x_n\neq x_0$),当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极限的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限存在且相等.

(4) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极限的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处的上、下极限存在且相等.

(5) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,而且 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

3. 函数极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=AB$;

(3) 若还有 $B\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sim}x}{x}=1$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

5. 无穷小的比较

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}g(x)=0$.

(1) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k(0<|k|<+\infty)$,则称当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小,记为 $f(x)=O(g(x))$.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记为 $f(x)\sim g(x)$.

例如，当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x\sim x;\quad \ln(1+x)\sim x;\quad \operatorname{tg}x\sim x.$$

(3) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$（或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$），则称当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 比 $g(x)$ 是较高阶的无穷小，或者说 $g(x)$ 是关于 $f(x)$ 的低阶无穷小，记为 $f(x)=o(g(x))$.

问 题 与 解 答

1. 用定义证极限

2. 2. 1　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证　当 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\sin x|\leqslant|x|\leqslant|\operatorname{tg}x|$，于是

$$|\cos x-1|=\left|-2\sin^2\frac{x}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x}{2}\right|^2\leqslant\frac{1}{2}|x|^2.$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，

$$|\cos x-1|\leqslant\frac{1}{2}|x|^2<\varepsilon.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

2. 2. 2　证明 $\lim\limits_{x\to\xi}\sqrt{x}=\sqrt{\xi}$（$\xi$ 是 $\geqslant 0$ 的实数）.

证　若 $\xi>0$，由 $|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|=\dfrac{|x-\xi|}{\sqrt{x}-\sqrt{\xi}}<\dfrac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}}$ 知，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\xi}\cdot\varepsilon$，则当 $0<|x-\xi|<\delta$ 时，

$$|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|<\varepsilon$$

成立，所以，$\lim\limits_{x\to\xi}\sqrt{x}=\sqrt{\xi}$.

若 $\xi=0$，由 $|\sqrt{x}-0|=\sqrt{x}$ 知，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2$，则当 $0<|x-\xi|<\delta$ 时，$|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|<\varepsilon$ 成立，

所以，$\lim\limits_{x \to \xi} \sqrt{x} = 0$.

2.2.3　用 $\varepsilon - \delta$ 定义证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{x \to 3} x^3 = 27$；

(2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x + 3} = \dfrac{5}{6}$；

(3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2}{x + 4} = 1$.

证　(1) 因为 $x \to 3$，故只需考虑 $x = 3$ 近傍的 x 值. 不妨令 $|x - 3| < 1$，即有 $2 < x < 4$，于是

$$|x^3 - 27| = |x - 3| \cdot |x^2 + 3x + 9| < 37|x - 3|$$

因此，对任意的 $\varepsilon > 0$，要使 $|x^2 - 27| < \varepsilon$，只要 $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{37}$ 即可. 从而，取 $\delta = \min(1, \dfrac{\varepsilon}{37})$，则当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时，有 $|x^3 - 27| < \varepsilon$ 成立. 所以，$\lim\limits_{x \to 3} x^3 = 27$.

(2) 因为 $\left| \dfrac{x^2 - 4}{x + 3} - \dfrac{5}{6} \right| = \left| \dfrac{(x - 3)(6x + 13)}{6(x + 3)} \right|$，

若令 $|x - 3| < 1$，则有 $2 < x < 4$，从而

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 3} - \frac{5}{6} \right| < \frac{37}{30} |x - 3|.$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，只要取 $\delta = \min(1, \dfrac{30}{37}\varepsilon)$，则当 $0 < |x - 3| < \varepsilon$ 时，恒有 $\left| \dfrac{x^2 - 4}{x + 3} - \dfrac{5}{6} \right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x + 3} = \dfrac{5}{6}$.

(3) 因为 $x \to -2$，可先设 $|x + 2| < 1$，于是

$$|x + 2|^2 < |x + 2|，即\ 1 < x + 4 < 3，$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，由

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - 2}{x + 4} - 1 \right| &= \left| \frac{x^2 - x - 6}{x + 4} \right| < |x^2 + 4x + 4 - 5x - 6 - 4| \\ &= |(x + 2)^2 - 5(x + 2)| \\ &\leqslant |x + 2|^2 + 5|x + 2| < 6|x + 2| < \varepsilon \end{aligned}$$

知，只要取 $\delta = \min(1, \dfrac{\varepsilon}{6})$，则当 $0 < |x + 2| < \delta$ 时，有

$$\left| \frac{x^2 - 2}{x + 4} - 1 \right| < \varepsilon，即\ \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 2}{x + 4} = 1.$$

2.2.4 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0,(a>1,n>0)$.

证 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{a^n}=0\ (a>1)$，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in Z^+$，当 $n>N$ 时，

$$0<\frac{n+1}{a^n}<\varepsilon.$$

取 $X>N$，从而当 $x>X$ 时，$[x]>N$，$[x]\leqslant x<[x]+1$，因此，

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{[x]+1}{a^{[x]}}<\varepsilon<1.$$

即
$$0<\frac{x^n}{a^x}=\left[\frac{x}{(\sqrt[n]{a})^x}\right]^n<\left[\frac{[x]+1}{(\sqrt[n]{a})^{[x]}}\right]^n=\frac{([x]+1)^n}{a^{[x]}}<\varepsilon,$$

故
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0.$$

2.2.5 证明下列极限等式

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x}=+\infty,(a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^k}=+\infty,(a>1,k>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{\alpha x}}{x^k}=+\infty,(a>1,k>0,\alpha>0)$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^a x}{x^\varepsilon}=0,(a>1,\varepsilon>0)$;

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^a\cdot\ln^k x=0,(a>0,k$ 为自然数).

证 (1) 由数列极限知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^n}{n}=+\infty\ (a>1)$，同时有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^n}{n+1}=+\infty\ (a>1)$，即对任意的 $M>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{a^n}{n+1}>M$，令 $[x]=n$，则有 $n\leqslant x<n+1$，且 $\dfrac{a^x}{x}>\dfrac{a^n}{n+1}$.

取 $G=N+1$，则当 $x>G$ 时，有 $n>N$，于是，$\dfrac{a^x}{x}>M$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty.$$

(2) 对任意的 $a>1,k>0$，恒有 $a^{\frac{1}{k}}>1$. 由(1) 的结果有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x}=+\infty,$$

因此，当 $k>1$ 时，对充分大的 x 有 $\frac{a^x}{x^k}=[\frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x}]^k>\frac{(a^{\frac{1}{k}})^x}{x}$，
由此可知，当 $k>1$ 时有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty.$$

当 $0<k\leqslant 1$ 时，显然有 $\frac{a^x}{x^k}\geqslant\frac{a^x}{x}(x>1)$，此时有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty.$$

(3) 令 $y=\alpha x$，则当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\alpha x}}{x^k}=\alpha^k\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{a^y}{y^k}\ (a>1,k>0),$$

从而根据(2)的结果有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\alpha x}}{x^k}=+\infty.$$

(4) 令 $y=\ln x$，即 $x=e^y$，则当 $x\to+\infty$ 时，有 $y\to+\infty$，

从而有 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\varepsilon}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^\alpha}{e^{\varepsilon y}}\ (\alpha>0,\varepsilon>0),$$

由(3)的结果可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\varepsilon}=0\quad(\alpha>0,\varepsilon>0).$$

(5) 令 $y=\frac{1}{x}$，则有 $x\to0^+$ 时，$y\to+\infty$. 由于

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln^k x=(-1)^k\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln^k y}{y^\alpha},$$

从而，根据(4)的结果即可得

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\cdot\ln^k x=0,\ (\alpha>0,k>0).$$

2.2.6　试用 $\varepsilon-\delta$ 方法证明

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则在 x_0 的邻域内，$f(x)$ 必有界.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB$.

证　(1) 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 知，对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $0<$

$|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，故 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有界.

(2) 由题设及(1)的结果，在 x_0 的邻域(即 $0<|x-x_0|<\bar{\delta}$) 内，有 $|g(x)|<M$，并且，对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\delta_1>0$ 与 $\delta_2>0$，使得

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{M+|A|}$；

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{M+|A|}$.

取 $\delta=\min(\bar{\delta},\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，上述两个不等式同时成立，故有

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB| &= |(f(x)g(x)-Ag(x))+(Ag(x)-AB)| \\ &\leqslant |g(x)|\cdot|f(x)-A|+|A||g(x)-B| \\ &< (M+|A|)\frac{\varepsilon}{M+|A|}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB$.

2. 极限的计算

(1) 求左、右、上、下极限

2.2.7 设 $f(x)=x+[x^2]$， 求 $f(1)$、$f(1-0)$、$f(1+0)$.

解 $f(1)=2$；

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}(x+[x^2])=1+0=1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}(x+[x^2])=1+1=2.$$

2.2.8 设 $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$，试求 $f(x)$ 在 n 处的左、右极限与上、下极限.

解 由定义，有

$$f(n-0)=\lim_{x\to n^-}f(x)=\operatorname{sgn}(-1)^{n+1}=(-1)^{n+1};$$

$$f(n+0)=\lim_{x\to n^+}f(x)=\operatorname{sgn}(-1)^{n}=(-1)^{n};$$

$$\overline{\lim_{x\to n}}f(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<|x-n|<\delta}f(x)=1;$$

$$\underline{\lim_{x\to n}}f(x)=\sup_{\delta>0}\inf_{0<|x-n|<\delta}f(x)=-1.$$

2.2.9 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 在点 $x=\dfrac{1}{n}$ (n 为自然数) 的左、

右极限.

解　考察 $x=\frac{1}{n}$ 近旁的情况：

当 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$ 时，$n+1>\frac{1}{x}>n$,这时有

$$[\frac{1}{x}]=n,\ f(x)=\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}]=\frac{1}{x}-n.$$

用 $n-1$ 代替 n,得到

$$\text{当}\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}\text{时},f(x)=\frac{1}{x}-(n-1).$$

从而
$$\lim_{x\to\frac{1}{n}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{n}-0}(\frac{1}{x}-n)=0;$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}[\frac{1}{x}-(n-1)]=1.$$

注意:此处用到极限的另一种记号

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

2.2.10　当 $x\to 3$ 时,求函数 $f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ 的左、右极限.

解　当 $x\to 3-0$ 时,有 $\frac{1}{x-3}\to-\infty$, $2^{\frac{1}{x-3}}\to 0$, 从而,

$$\lim_{x\to 3-0}f(x)=\frac{1}{3};$$

当 $x\to 3+0$ 时,有 $\frac{1}{x-3}\to+\infty$, $2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty$,从而,

$$\lim_{x\to 3+0}f(x)=0.$$

(2) 有理式的极限

一般公式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{p_n(x)}{p_m(x)}=\begin{cases}\frac{p_n(x_0)}{p_m(x_0)}, & p_m(x_0)\neq 0;\\ \infty, & p_m(x_0)=0,p_n(x_0)\neq 0.\end{cases}$$

$p_n(x)$、$p_m(x)$ 分别为 n、m 次多项式.

2.2.11 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$,($m,n$ 都是正整数).

解 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\frac{1+1+\cdots+1(m\text{ 项})}{1+1+\cdots+1(n\text{ 项})}=\frac{m}{n}.$$

2.2.12 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{p/q}-1}{x^{r/s}-1}$($p$、$q$、$r$、$s$ 都是正整数).

解 用代换 $x=t^{q\cdot s}$ 以及题 2.2.11 的结果,则可得
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{p/q}-1}{x^{r/s}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^{ps}-1}{t^{qr}-1}=\frac{ps}{qr}.$$

2.2.13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^{n/2}+1]^{n+1}}$.

解 只需求出其首项,即
$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1+2+\cdots+n}+\cdots}{(nx)^{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots}=n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

2.2.14 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}}=(\frac{3}{2})^{30}.$$

2.2.15 设 $|x|<1$,求
$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}).$$

解 $$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=\cdots\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n+1}})$$

$$= \frac{1}{1-x}, (|x| < 1).$$

2.2.16　求下列各式的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$，($m,n$ 为自然数)；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$，($m,n$ 为自然数)。

解　(1)

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big[1+\frac{n}{1!}(mx)+\frac{n(n-1)}{2!}(mx)^2+\cdots+(mx)^n$$

$$-1-\frac{m}{1!}(nx)-\frac{m(m-1)}{2!}(nx)^2-\cdots-(nx)^m\Big]$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}m^2-\frac{m(m-1)}{2}n^2=\frac{mn}{2}(n-m).$$

令 $x = 1 + y$，则

$$\text{原式} = \lim_{y\to 0}\left[\frac{m}{1-(1+y)^m}-\frac{n}{1-(1+y)^n}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0}\Big[\frac{m}{1-1-c_m^1y-c_m^2y^2-\cdots c_m^my^m}$$

$$-\frac{n}{1-1-c_n^1y-c_n^2y^2-\cdots-c_n^ny^n}\Big]$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{n}{c_n^1y+c_n^2y^2+\cdots+c_n^ny^n}-\frac{m}{c_m^1y+c_m^2y+\cdots+c_m^my^m}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{nc_m^1-mc_n^1+(nc_m^2-mc_n^2)y+(nc_m^3-mc_n^3)y^2+\cdots}{(c_n^1+c_n^2y+\cdots+y^{n-1})\cdot(c_m^1+c_m^2y+\cdots+y^{m-1})}$$

$$=\frac{nc_m^2-mc_n^2}{c_n^1\cdot c_m^1}=\frac{m-n}{2}.$$

2.2.17　试证：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{n}{m}}-1}{x-1}=\dfrac{n}{m}$.

证　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=m$.

(2) 令 $x=y^m$，当 $x\to 1$ 时，$y\to 1$，于是由(1)有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{n}{m}}-1}{x-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^n-1}{y^m-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y^n-1)/(y-1)}{(y^m-1)/(y-1)}=\frac{n}{m}.$$

2.2.18　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$（见 2.2.17 题）.

（3）无理式的极限

2.2.19　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{2}.$$

2.2.20　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/3}\cdot[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}[(x+1)^2-(x-1)^2]}{[(x+1^2)]^{2/3}+[(x^2-1)^2]^{1/3}+[(x-1)^2]^{2/3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^{4/3}}{(x+1)^{4/3}+(x^2-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{(1+\dfrac{1}{x})^{4/3}+(1-\dfrac{1}{x^2})^{2/3}+(1-\dfrac{1}{x})^{4/3}}=\frac{4}{3}.$$

2.2.21　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1.$

2.2.22　求下列各式的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$=1$.

2.2.23 求极限 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解 $$\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\frac{(\sqrt{1-x})^2-3^2}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=\frac{-(x+8)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=\frac{-[4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{\sqrt{1-x}+3},$$

从而，原式 $=\lim\limits_{x\to-8}\frac{-[4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{\sqrt{1-x}+3}=-2.$

2.2.24 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$，($n$ 为自然数).

解 令 $y=\sqrt[n]{1+x}-1$，则有 $x=(1+y)^n-1$，且当 $x\to0$ 时，$y\to0$. 于是

$$\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}=\frac{y}{(1+y)^n-1}=\frac{1}{c_n^1+c_n^2y+\cdots+c_n^ny^{n-1}},$$

从而，原式 $=\lim\limits_{y\to0}\frac{1}{c_n^1+c_n^2y+\cdots+c_n^ny^{n-1}}=\frac{1}{n}.$

2.2.25 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}$，($r$ 为有理数).

解 当 $r=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^0-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0}{x}=0$，

当 $r=\frac{m}{n}>0,(m,n)=1$ 时，作变换 $(1+x)^{\frac{m}{n}}=(1+y)^{\frac{1}{n}}$，则 $x=(1+y)^{\frac{1}{m}}-1$，且当 $x\to0$ 时，$y\to0$. 由于

$$\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-1}{x}=\frac{(1+y)^{\frac{1}{n}}-1}{(1+y^{\frac{1}{m}})-1}=\frac{(1+y)^{\frac{1}{n}}-1}{y}\cdot\frac{y}{(1+y)^{\frac{1}{m}}-1},$$

由题 2.2.24 的结果知，

$$\text{原式}=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{n}}-1}{y}\cdot\frac{y}{(1+y)^{\frac{1}{m}}-1}=\frac{m}{n}=r.$$

当 $r<0$ 时，$-r>0$，由于

$$\frac{(1+x)^r-1}{x}=\frac{(1+x)^r-1}{x}\cdot\frac{(1+x)^{-r}}{(1+x)^{-r}}$$

$$= (-1)\frac{(1+x)^{-r}-1}{x}\cdot\frac{1}{(1+x)^{-r}},$$

从而，原式$=\lim\limits_{x\to 0}(-1)\frac{(1+x)^{-r}-1}{x}\cdot\frac{1}{(1+x)^{-r}}$

$$=(-1)\cdot(-r)\cdot 1=r.$$

综上所述，对一切有理数 r 恒有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{r}-1}{x}=r.$$

2.2.26　求极限 $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

解　由

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\frac{(\sqrt{x+2}-3)-(\sqrt[3]{x+20}-3)}{\sqrt[4]{x+9}-2},$$

注意到　$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{x+2-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}=\frac{1}{27},\quad \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\frac{1}{32}.$$

$$\text{故原式}=\lim_{x\to 7}\frac{\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}-\frac{\sqrt[3]{x+20}-3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{32}}=4\frac{4}{27}.$$

2.2.27　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

解　$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$

$$= \left[\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{x} - \frac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}-1}{x}\right] \cdot \frac{x}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$$

$$= (I_1 - I_2) \cdot I_3.$$

据因式分解可得，

$$I_1 = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{x}{3})^{\frac{1}{3}} + 1};$$

$$I_2 = \frac{\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}}-1}{x}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x}{4})^{\frac{3}{4}} + (1+\frac{x}{4})^{\frac{2}{4}} + (1+\frac{x}{4})^{\frac{1}{4}} + 1};$$

$$I_3 = \frac{x}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}} = 2(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}).$$

故原式 $= \lim\limits_{x\to 0}(I_1 - I_2)I_3 = (\frac{1}{9} - \frac{1}{16}) \cdot 4 = \frac{7}{36}.$

2.2.28 设 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$（$n$ 为正整数），求证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x} = \frac{a_1}{m}.$

证

$$\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x} = \frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{p(x)} \cdot \frac{p(x)}{x}, \qquad (1)$$

设 $f(u) = \frac{\sqrt[m]{1+u}-1}{u}$，$u = p(x)$，则有 $\lim\limits_{x\to 0}u = 0$. 由 2.2.25 题知

$$\lim_{u\to 0}f(u) = \frac{1}{m}.$$

从而得，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{p(x)} = \lim\limits_{x\to 0}f[p(x)] = \frac{1}{m}. \qquad (2)$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{p(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1x + a_2x + \cdots + a_nx^n}{x} = a_1. \qquad (3)$

由(1)、(2)、(3)即知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}.$$

2.2.29　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$（$m$、$n$为非零整数）.

解　由于

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$=\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x},$$

从而，根据极限运算规律和2.2.28题的结论得

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\right]$$

$$=\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}.$$

2.2.30　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-\sqrt[m]{1+\beta x}}{x}$.

解　$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+\alpha x}-1)-(\sqrt[m]{1+\beta x}-1)}{x}$$

$$=\alpha\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}-\beta\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{\beta x}$$

$$=\frac{\alpha}{n}-\frac{\beta}{m}.$$

2.2.31　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解　$x^{\frac{3}{2}}\cdot(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

$$=x^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$$

$$=x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}.$$

从而，原式

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

2.2.32 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$

（n 为自然数）.

解 由 $|x| = x\operatorname{sgn}x$，作恒等变形

$$\varphi(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$$

$$= \frac{(x-\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n+(x+\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n}{x^n}$$

$$= \left(1-\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n+\left(1+\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n$$

$$= \left(1-\operatorname{sgn}x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n+\left(1+\operatorname{sgn}x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n.$$

如果 $x\to+\infty$，则从某时刻起，x 恒取正值，即有 $\operatorname{sgn}x = 1$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n+(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})^n\right]$$
$$= 0^n+2^n = 2^n.$$

这就是说，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $M>0$，使 $x>M$ 时有

$$|\varphi(x)-2^n|<\varepsilon. \tag{1}$$

同理可证，$x<-M$ 时，

$$|\varphi(x)-2^n|<\varepsilon,$$

合并(1)和(2)，当 $|x|>M$ 时，有 $|\varphi(x)-2^n|<\varepsilon$ 即

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 2^n.$$

2.2.33 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$，$(x>0)$.

解　$n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=n^2x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$

$$=x^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\frac{n}{n+1},$$

据数列极限和函数极限的关系有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}=\ln x$，

从而，　$\lim\limits_{x\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\ln x\cdot 1=\ln x.$

2.2.34　求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}.$$

解　由 2.2.28 题的结果知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+mx}-1}{x}=\frac{m}{n},$$

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}+\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}-\frac{\sqrt[7]{1+x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[4]{1+2x}-1}{x}+1-\frac{\sqrt[6]{1+x}-1}{x}}$

$$=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}{\frac{2}{4}+1-\frac{1}{6}}=\frac{313}{280}.$$

2.2.35　求极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$，$(a>0)$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to a^+}\left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]$

$$=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{(x+a)(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x+a)(x-a)}}\right]$$

$$= \lim_{x\to a^+}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]$$

$$= 0+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

2.2.36 求极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 令 $\sqrt{x}=y$，则

$$原式=\lim_{y\to 2}\frac{\sqrt{1+2y^2}-3}{y-2}=\lim_{y\to 2}\frac{1+2y^2-9}{(y-2)\cdot(\sqrt{1+2y^2}+3)}$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{2(y+2)}{\sqrt{1+2y^2}+3}=\frac{4}{3}.$$

2.2.37 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

解 $原式=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{2x(\sqrt{x^2+2x}-x-1)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+2x})\cdot(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

2.2.38 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

解 $原式=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x^2})\cdots(1+\frac{1}{x^n})}{(n^n+\frac{1}{x^n})^{\frac{n+1}{2}}\cdot x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x^2})\cdots(1+\frac{1}{x^n})}{(n^n+\frac{1}{x^n})^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{(n+1)n}{2}}}.$$

(4) 幂指函数的极限

2.2.39　(1) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，这里$a$为有限数或无穷大；令$\varphi(x)=f(x)^{g(x)}$，试证明$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A^B$.

(2) 问$\lim\limits_{x\to 3}(5-3x)^{1-x}=(-4)^{-2}=\frac{1}{16}$，对否？

解　(1) 首先注意到，论及$x\to a$时，函数$f(x)$的极限是指$f(x)$在a点近旁的函数值的变化趋势. 由题意设$A>0$，据极限性质，当x充分接近a时，有$f(x)>0$，从而$\varphi(x)=f(x)^{g(x)}$是有意义的，且显然$\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)$存在. 因此，

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)}=e^{B\cdot\ln A}=A^B$$

(2) 据函数极限的定义，所谓$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=L$，意指对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$0<|x-a|<\delta$时

$$|\varphi(x)-L|<\varepsilon.$$

这表示$\varphi(x)$在a点的邻域有定义，是研究$\varphi(x)$在$x\to a$时有无极限的前提. 本题的$\varphi(x)$仅在$x=3$的任一邻域中的某些点有定义，而在其中无穷多个点无定义，例如，设a为接近于3的无理数，则$5-3a$是负无理数，$1-a$是负无理数，这样，$(5-3a)^{1-a}$便没有意义. 既然$\varphi(x)$不是在$x=3$的任一邻域的每点有定义，当然就谈不到取极限了. 据此，本题应予判错.

2.2.40　计算

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\mathrm{tg}2x}$；(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) 因$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+x}{2+x}=\frac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=1^0=1$.

(4) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}=-\infty$,所以

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{2x+1})^{x^2}=0.$$

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}+x)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}>\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\operatorname{tg}2x=-\infty,$$

从而有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}[\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}+x)]=-\infty$.

因此有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}[\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}+x)]^{\operatorname{tg}2x}=0$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}]^{-2}=e^{-2}$.

2.2.41 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}=(1+\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sin x}}$,

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x}=0$,

$$\lim_{x\to0}(1+\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}}=e,$$

从而,原式 $=\lim\limits_{x\to0}[(1+\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1+\sin x}{\operatorname{tg}x-\sin x}}]^{\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sin x}}=e^0=1$.

2.2.42 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$.

解 $(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=e^{x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)\cdot\frac{\ln[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}$,由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty} x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=1+0=1,$$

从而，$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=e^{1\cdot 1}=e.$

2.2.43　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$，$(a,b,c>0)$

解　令 $\varphi(x)=\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1$，　$g(x)=\frac{\ln[1+\varphi(x)]}{\varphi(x)}$，则有

$$(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\cdot g(x)\cdot\varphi(x)},$$

由于　$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1)=0,$

因此　$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1.$

又由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x})$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc},$$

从而，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\cdot g(x)\cdot\varphi(x)}=e^{1\cdot\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.$

2.2.44　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

解　$(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}=e^{\frac{x^2+1}{x}\ln(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)}$，并且

$$\frac{x^2+1}{x}\ln(2e^{\frac{x}{x+1}}-1)=\frac{x^2+1}{x}\ln[2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)+1]$$

$$=\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{\ln[1+2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)]}{2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}\cdot 2(e^{\frac{x}{1+x}}-1).$$

由于　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)]}{2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{\frac{x}{1+x}}-1)}{\frac{x}{1+x}}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{x^2+1}{x}=2.$$

从而，$\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{1+x^2}{x}}=e^2$.

2.2.45 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x^2-2})^{x^2}$,

令$\frac{2}{x^2-2}=\frac{1}{u}$，$x^2=2u+2$，当$x\to\infty$时，$u\to+\infty$，所以，

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x^2-2})^{x^2}=\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{2u+2}$$

$$=\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\cdot\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\cdot\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^2=e^2.$$

2.2.46 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解 $\frac{(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

$$=(1-\frac{b}{x+a+b})^{x+a}\cdot(1-\frac{a}{x+a+b})^{x+b},$$

由于$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{b}{x+a+b})^{x+a}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{b}{x+a+b})^{x+a+b}\cdot(1-\frac{b}{x+a+b})^{-b}$$

$$=e^{-b}\cdot 1=e^{-b},$$

同理有 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x+a+b})^{x+b}=e^{-a}$.

从而，原式$=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{b}{x+a+b})^{x+a}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x+a+b})^{x+b}$

$$=e^{-(a+b)}.$$

2.2.47 求极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$.

解 作代换$x=\frac{\pi}{4}+y$，当$x\to\frac{\pi}{4}$时，$y\to 0$.

$$原式=\lim_{y\to 0}[\text{tg}(\frac{\pi}{4}+y)]^{\text{tg}(\frac{\pi}{2}+2y)}=\lim_{y\to 0}\left[\frac{\text{tg}\frac{\pi}{4}+\text{tg}y}{1-\text{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\text{tg}y}\right]^{-\text{ctg}2y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[1+\frac{2\text{tg}y}{1-\text{tg}y}\right]^{-\frac{1-\text{tg}^2 y}{2\text{tg}y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[(1+\frac{2\text{tg}y}{1-\text{tg}y})^{\frac{1-\text{tg}y}{2\text{tg}y}}\right]^{-(1+\text{tg}y)}=e^{-1}.$$

2.2.48　求极限 $\lim\limits_{y\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}$.

解　$原式=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}=e.$

2.2.49　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^2}$.

解　因当 $x\to 0$ 时，$\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$ 或 $x^2\sim 4\sin^2\frac{x}{2}$，所以，

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{4\sin^2\frac{2x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\{[1+(-2\sin^2\frac{x}{2})]^{-2\sin^2\frac{2x}{2}}\}^{-2}=e^{-2}.$$

或

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-2\sin^2\frac{x}{2})^{x^2}=\lim_{x\to 0}(1-2\cdot\frac{x^2}{4})^{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\{[1+(-\frac{x^2}{2})]^{-\frac{x^2}{2}}\}^{-2}=e^{-2}.$$

2.2.50　求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}$,

而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2})$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\ln\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}}}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{2(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

2.2.51　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}),(a_1>0,a_2>0)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{a_1}{a_2})^x\cdot(\frac{x+c_1}{x+c_2})^x$，其中 $c_1=\frac{b_1}{a_1},c_2=\frac{b_2}{a_2}$.

而
$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+c_1}{x+c_2})^x=\lim_{x\to+\infty}[(1+\frac{c_1-c_2}{x+c_2})^{\frac{x+c_2}{c_1-c_2}}]^{\frac{x(c_1-c_2)}{x+c_2}}=e^{c_1-c_2},$$

又
$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{a_1}{a_2})^x=\begin{cases}0, & \text{当 } a_1<a_2;\\ 1, & \text{当 } a_1=a_2;\\ +\infty, & \text{当 } a_1>a_2.\end{cases}$$

$$\text{故原式}=\begin{cases}0, & \text{当 } a_1<a_2;\\ e^{c_1-c_2}=e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}, & \text{当 } a_1=a_2;\\ +\infty, & \text{当 } a_1>a_2.\end{cases}$$

2.2.52　求极限 $\lim\limits_{x\to+\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解　令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则

$$\text{原式}=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{\cos y}{\sin y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}\{[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{\cos y-1}}\}^{\frac{\cos y-1}{\sin y}\cdot\cos y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\{[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{\cos y-1}}\}^{-\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}\cos y}=e^0=1.$$

2.2.53　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1+ax)^{\frac{1}{ax}}]^a=e^a.$$

2.2.54　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt[x]{x}-1)}{\ln x}$.

解　由 $\sqrt[x]{x}=e^{\frac{1}{x}\ln x}=1+\dfrac{1}{x}\ln x+o(\dfrac{\ln x}{x})$

$$x(\sqrt[x]{x}-1)=\ln x+o(\ln x),$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+o(\ln x)}{\ln x}=1$.

2.2.55　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^x-\cos\dfrac{x}{3}}{(\sin x-\sin\dfrac{x}{2})(e^x-1)}$

解　因 $(1+x)^x=e^{x\ln(1+x)}=e^{x\cdot[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]}=e^{x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}$

$$=1+x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3);$$

$$\cos\frac{x}{3}=1-\frac{1}{2!}(\frac{x}{3})^2+o(x^3)=1-\frac{1}{18}x^2+o(x^3);$$

$$\sin x-\sin\frac{x}{2}=x-\frac{x}{2}+o(x^2)=\frac{x}{2}+o(x^2);$$

$$e^x-1=x+o(x),$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2-\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)-1+\dfrac{1}{18}x^3+o(x^3)}{[\dfrac{x}{2}+o(x^2)]\cdot[x+o(x)]}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{19}{18}x^2+o(x^2)}{\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{19}{9}.$$

2.2.56　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^k+1}{x^k-1})^{x^k}$, $(k=1,2,3\cdots)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^k+1)^{x^k}}{(x^k-1)^{x^k}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\dfrac{1}{x^k})^{x^k}}{(1-\dfrac{1}{x^k})^{x^k}}=e^2$.

2.2.57　求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos)^{\frac{1}{\sin^2x}}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}(\cos^2x)^{\frac{1}{2\sin^2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}[(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

2.2.58　计算$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1})^{x+1}\cdot a(1+\frac{b}{100x})^x$.

解　因$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1})^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\{[1-\frac{1}{(x-1)^2}]^{-(x-1)^2}\}^{\frac{-1}{x-1}}$

$$=e^0=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{b}{100x})^x=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{100}{b}x})^{\frac{100}{b}x}]^{\frac{b}{100}}=e^{\frac{b}{100}},$$

故原式$=a\cdot e^{\frac{b}{100}}$.

2.2.59　求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2^x+3^x}{3})^{\frac{1}{x}}$.

解　当$x>0$时，$\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$，

$$0\leqslant(\frac{2^x+3^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{3^x(\frac{2^x}{3^x}+1)}{3}\right]^{\frac{1}{x}}<3\cdot(\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}},$$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{x}}=0$，故$\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{2^x+3^x}{3})^{\frac{1}{x}}=0$.

(5) 三角函数有理式或无理式的极限

2.2.60　求极限$\lim\limits_{x\to 2}[x^2\cdot(x-1)^{\frac{1}{8}}+\frac{\sin 2x}{x}]$.

解　原式$=(\lim\limits_{x\to 2}x^2)\cdot(\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[8]{x-1})+\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 2x}{x}$

$$=2^2\cdot 1+\frac{\lim\limits_{x\to 2}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 2}x}=4+\frac{\sin 4}{2}\approx 3.6216.$$

2.2.61　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$

解　$\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}=e^{n\cdot\ln(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})}=e^{n\cdot(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)\cdot\frac{\ln[1+(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)]}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln[1+(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)]}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}=1$，

$$\lim_{n\to\infty}n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}{(\frac{x}{\sqrt{n}})^2}x^2=-\frac{x^2}{2},$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2.2.62 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$.

解法 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-1\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{n}}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}})^{\frac{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{2n\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}}$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}})^{\frac{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}}$$

$$\overset{①}{=}e^{\frac{2\lim\limits_{n\to\infty}n\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\mathrm{tg}\frac{1}{n})}}=e^{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}\overset{②}{=}e^2.$$

注 ① 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}\dfrac{1}{n}=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{1}{n}}{1-\mathrm{tg}\frac{1}{n}}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{2\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}=e.$$

② 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sec^2\dfrac{1}{x}=1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$.

解法 2 当 $n\to\infty$ 时，$\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2.$$

2.2.63 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[n\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

解 令 $\varphi(n)=\dfrac{1}{n(x^2+1)+x}$, $g(n)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)-1$,

则有 $$n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n(x^2+1)+x}\cdot\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n}\right)$$

$$=n\cdot\varphi(n)\cdot\frac{\operatorname{arctg}\varphi(n)}{\varphi(n)}\cdot e^{\frac{n\ln[1+g(n)]}{g(n)}\cdot g(n)}.$$

由于 $$\lim_{n\to\infty}n\varphi(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(x^2+1)+x}=\frac{1}{x^2+1},\tag{1}$$

于是，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=0$ 可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\varphi(n)}{\varphi(n)}=1,\tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[1+g(n)]}{g(n)}=1.\tag{3}$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot g(n)=\lim\limits_{n\to\infty} n[\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})-1]$

$$=\lim_{n\to\infty} n[\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}]$$

$$=\lim_{n\to\infty} n[\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})\cos\frac{\pi}{4}}]$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})\cdot\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} x\cdot\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2n})\cdot\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=x\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=x.$$

综合(1)、(2)、(3)、(4)得，原式$=\frac{1}{x^2+1}\cdot 1\cdot e^{1\cdot x}=\frac{e^x}{1+x^2}$.

2.2.64　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

2.2.65　求极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}2x\cdot\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)$.

解　令$x=\frac{\pi}{4}-u$，则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}2x\cdot\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x)=\lim_{u\to 0}\mathrm{ctg}2u\cdot\mathrm{tg}u=\lim_{u\to 0}\frac{2u}{\mathrm{tg}2u}\cdot\frac{\mathrm{tg}u}{2u}=\frac{1}{2}.$$

2.2.66　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2},$$

因为
$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}=0,$$
$$\left|\cos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1,$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})=0.$

2.2.67 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

解 由于
$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\frac{\sin x+2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin px+2\sin^2\frac{px}{2}}$$
$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})}{2\sin\frac{px}{2}(\cos\frac{px}{2}+\sin\frac{px}{2})},$$

从而可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})}{\frac{\sin\frac{px}{2}}{\frac{px}{2}}\cdot(\cos\frac{px}{2}+\sin\frac{px}{2})\cdot p}=\frac{1\cdot(1+0)}{1\cdot p(1+0)}=\frac{1}{p}.$$

2.2.68 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}(x\cdot\frac{x}{\sin 2x}\cdot\sin\frac{1}{x})=0.$$

2.2.69　求极限$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{2}x$.

解　设$1-x=u$，则

$$原式=\lim_{u\to 0}u\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}(1-u)=\lim_{u\to 0}u\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}u$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}\cdot\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}u\right]=\frac{2}{\pi}.$$

2.2.70　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(a+x)\mathrm{tg}(a-x)-\mathrm{tg}^2a}{x^2}$.

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{tg}^2a-\mathrm{tg}^2x}{1-\mathrm{tg}^2a\,\mathrm{tg}^2x}-\mathrm{tg}^2a\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}^2x}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{tg}^4a-1}{1-\mathrm{tg}^2a\,\mathrm{tg}^2x}\right)=\mathrm{tg}^4a-1.$$

2.2.71　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(a+2x)-2\mathrm{tg}(a+2x)+\mathrm{tg}a}{x^2}$.

解

$$\mathrm{tg}(a+2x)-2\mathrm{tg}(a+x)+\mathrm{tg}a$$

$$=[\mathrm{tg}(a+2x)-\mathrm{tg}(a+x)]-[\mathrm{tg}(a+x)-\mathrm{tg}a],$$

而

$$\mathrm{tg}(a+2x)-\mathrm{tg}(a+x)=\frac{\sin(a+2x)}{\cos(a+2x)}-\frac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)}$$

$$=\frac{\sin[(a+2x)-(a+x)]}{\cos(a+2x)\cdot\cos(a+x)}=\frac{\sin x}{\cos(a+2x)\cdot\cos(a+x)},$$

类似地有

$$\mathrm{tg}(a+x)-\mathrm{tg}a=\frac{\sin x}{\cos(a+x)\cos a},$$

从而得到

$$\mathrm{tg}(a+2x)-2\mathrm{tg}(a+x)+\mathrm{tg}a$$

$$=\frac{\sin x[\cos a-\cos(a+2x)]}{\cos(a+2x)\cdot\cos(a+x)\cdot\cos a}$$

$$=\frac{\sin x[-2\sin(a+x)\cdot\sin(-x)]}{\cos(a+2x)\cdot\cos(a+x)\cdot\cos a}$$

$$=\frac{2\sin^2x\cdot\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cdot\cos(a+x)\cdot\cos a},$$

$$故原式=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2x}{x^2}\cdot\frac{\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cdot\cos(a+x)\cdot\cos a}=\frac{2\sin a}{\cos^3a}.$$

2.2.72　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\cdot\sin(a+2x)-\sin^2a}{x}$.

解　由于

$$\sin(a+x)\cdot\sin(a+2x)-\sin^2 a$$
$$=\sin(a+x)[\sin(a+2x)-\sin a]-\sin a[\sin a-\sin(a+x)]$$
$$=2\cos(a+x)\cdot\sin x\cdot\sin(a+x)+2\sin a\cdot\cos(a+\frac{x}{2})\sin\frac{x}{2},$$

从而，原式$=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}2\cdot\cos(a+x)\sin(a+x)$

$$+\sin a\cdot\cos(a+\frac{x}{2})\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}]$$

$$=1\cdot 2\cos a\cdot\sin a+\sin a\cdot\cos a\cdot 1=\frac{3}{2}\sin 2a.$$

2.2.73 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$.

解 令 $y=x-\frac{\pi}{3}$，则当 $x\to\frac{\pi}{3}$ 时，$y\to 0$. 于是，

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\frac{\sin y}{1-2\cos(y+\frac{\pi}{3})}$$
$$=\frac{\sin y}{1-2(\cos\frac{\pi}{3}\cos y-\sin\frac{\pi}{3}\sin y)}$$
$$=\frac{\sin y}{1-\cos y+\sqrt{3}\sin y}=\frac{1}{\frac{1-\cos y}{\sin y}+\sqrt{3}},$$

因此，原式$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\frac{1-\cos y}{\sin y}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{0+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2.74 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{tg}^3x-3\mathrm{tg}x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$.

解 $$\frac{\mathrm{tg}^3x-3\mathrm{tg}x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}x+\sqrt{3})\cdot\frac{\mathrm{tg}x-\sqrt{3}}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} \quad (1)$$

而 $\dfrac{\mathrm{tg}x-\sqrt{3}}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos x}=\dfrac{2(\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x-\cos\frac{\pi}{6}\cos x)}{\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos x}$

$$=\frac{-2\cos(x+\frac{\pi}{6})}{\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos x}=-\frac{2}{\cos x}. \qquad (2)$$

由(1)、(2) 得原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}x+\sqrt{3})\cdot\dfrac{-2}{\cos x}$

$$=\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})\cdot\frac{-2}{\frac{1}{2}}=-24..$$

2.2.75　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

解　$\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}, \qquad (1)$$

而 $\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2. \qquad (2)$$

由(1)、(2) 可得

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{1}{4}$.

2.2.76　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 $$\frac{x^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\cdot\sin x}{x^2}},$$

所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{x\cdot\sin x}{x^2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}+1}=\frac{4}{3}.$

2.2.77 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

解 在点 $x=0$ 的近旁，

$$\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x},$$

从而，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot 1=\sqrt{2}.$

2.2.78 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

解 $$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sqrt{\cos x})\cdot 2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=0,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=0.$$

2.2.79 讨论极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}$, $(0<|a|<\pi)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}}$,

当 $0<a<\pi$ 时,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{ax}{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{ax}{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{ax}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{ax}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{a};$$

当 $-\pi<a<0$ 时,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{ax}{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{ax}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{ax}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{ax}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{a}.$$

由于左、右极限不相等,故原极限不存在.

2.2.80　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}}x$.

解　记 $y_1=\sin x$,　$y_2=\sin\sin x$,　$y_3=\sin\sin\sin x,\cdots$,

$$y_n=\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{个}}x,\text{则}$$

$$y_2=\sin y_1,\quad y_3=\sin y_2,\quad \cdots,y_n=\sin y_{n-1}.$$

由于
$$-\frac{\pi}{2}<-1\leqslant\sin x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}.$$

因此,如果 $y_1=\sin x$ 为正,则 $y_n(n\geqslant 2)$ 均为正;如果 $y_1=\sin x$ 为负,则 $y_n(n\geqslant 2)$ 均为负;如果 $y_1=\sin x=0$(即 $x=k\pi,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)则一切 y_n 均为零,此时极限为零.

不失一般性,可假定 $y_1=\sin x>0$,当 $y_1=\sin x<0$ 时,可设 $y_n=-(-y_n)$,考察 $-y_n$ 的极限即可.

当 $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ 时,有 $\sin a<a$. 因此,当 $0<\sin x\leqslant 1<\dfrac{\pi}{2}$ 时,

$\sin\sin x < \sin x$，即 $y_1 > y_2$，同理可推得

$$y_2 > y_3 > \cdots > y_{n-1} > y_n > \cdots,$$

即 y_n 单调递减，且有下界零，故 y_n 有极限，设为 A，即有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x = A$$

由 $|\sin x - \sin A| \leqslant |x - A|$ 知 $\lim\limits_{x\to A}\sin x = \sin A$. 根据函数极限与数列极限的关系，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin y_n = \sin A$，于是对关系式 $y_{n+1} = \sin y_n$ 取极限即得，$A = \sin A$，解这个方程得 $A = 0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n个} x = 0$.

2.2.81 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

解 (1) 因 $1 - x > 0$，所以 $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x} > 0$，从而有

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 因 $1 - x < 0$，所以 $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x} < 0$，从而有

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

2.2.82 求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 $$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

2.2.83 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$.

解 $$原式 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

2.2.84　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}+\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\cdot\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right]=\frac{3}{2}.$$

2.2.85　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解法 1　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}\cdot(\dfrac{x}{2})^2\cdot 2}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot x^2}=\frac{1}{2}.$$

解法 2　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{\sin^2 x\cdot(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

2.2.86　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^4}{x^4\cdot\sin x^4}$.

解法 1　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^4}{2}}{x^4\cdot 2\sin\dfrac{x^4}{2}\cdot\cos\dfrac{x^4}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\dfrac{x^4}{2}}{x^4}\cdot\dfrac{1}{\cos\dfrac{x^4}{2}}\right]$

$$=\frac{1}{2}.$$

解法 2　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1-\cos x^4]\cdot[1+\cos x^4]}{x^4\cdot\sin x^4\cdot[1+\cos x^4]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{x^4[1+\cos x^4]}=\frac{1}{2}.$$

2.2.87　求极限$\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x^2}}$.

解 因 $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leqslant 1$，所以 $\left|\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}\right| \leqslant 1$（有界），而 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}} = 0$.

2.2.88 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

解法 1

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x\cos 3x)}{1-\cos x}\\
&= 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}\\
&= 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+\cos 2x(1-\cos 3x)}{1-\cos x}\\
&= 1+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos x}\\
&= 1+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = 14.
\end{aligned}$$

解法 2 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2} = 1$ 知，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$，于是有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1-\cos x)\cos 2x\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}+\frac{1-\cos 2x\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{x^2}{2}\cos 2x\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}+\frac{(1-\cos 2x)\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}+\frac{1-\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x^2}{2}\cos 3x}{\frac{x^2}{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$= 1 + 4 + 9 = 14.$$

解法 3　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1}{1-\cos x}[1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x) + \cos x\cos 2x(1-\cos 3x)]\right\}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left\{[1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x) + \cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)]\cdot\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+4\cos x\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} + 9\cos x\cos 2x\cdot\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\right]\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$= (\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+9\frac{1}{2})\cdot 2 = 14.$$

2.2.89　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解法 1　注意到 $\sin^2 x\sim x^2,(x\to 0)$,

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{\cos x}-1)-(\sqrt[3]{\cos x}-1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}\cdot\frac{\cos -1}{x^2}$$

$$= (\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{12}.$$

解法 2　原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1+1-\sqrt[3]{\cos x}}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\cos x-1}-\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\cos x-1})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}.$$

2.2.90 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x}}\right)$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}}$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x\cdot\sin x}{x^2\cdot(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+1)}+\dfrac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}\right]}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

2.2.91 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)$.

解 设 $\operatorname{arctg}x=y$，则 $x=\operatorname{tg}y$，当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\dfrac{\pi}{2}$，于是，

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}x\right)=\lim_{y\to-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\operatorname{tg}y$$

$$= \lim_{y\to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2}+y)\cdot \sin y}{\cos y} = \lim_{y\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}+y}{\sin(\frac{\pi}{2}+y)} \cdot \lim_{y\to -\frac{\pi}{2}} \sin y$$

$$= 1\cdot(-1) = -1.$$

(6) 含有指数函数、对数函数的极限

2.2.92　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$$

当 $a=e$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2.2.93　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解　令 $a^x-1=t$，则当 $x\to 0$ 时，由指数函数的连续性，有 $t\to 0$，而 $x=\log_a(1+t)$，故得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

特别地，若取 $x=\dfrac{1}{n}$（n 是自然数），则得

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a.$$

2.2.94　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{2x}-3e^{-x}}{2e^{2x}+e^{-x}}$.

解　原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-3e^{-3x}}{2+e^{-3x}} = 2$.

2.2.95　求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{Ae^{nx}+B}{e^{nx}+1}$（$A$、$B$ 是常数）.

解
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{Ae^{nx}+B}{e^{nx}+1} = \begin{cases} A, & x>0; \\ \frac{1}{2}(A+B), & x=0; \\ B, & x<0. \end{cases}$$

2.2.96　求极限 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{e^x}-e^{x^e}}{e^x-x^e}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{x^e}(e^{e^x-x^e}-1)}{e^x-x^e}=\lim\limits_{x\to e}e^{x^e}\cdot\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{e^x-x^e}-1}{e^x-x^e}$,

而 $\lim\limits_{x\to e}e^{x^e}=e^{e^e}$；对于 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{e^x-x^e}-1}{e^x-x^e}$，令 $e^x-x^e=u$，当 $x\to e$ 时，$u\to 0$；且 $u\to 0$ 时，$e^u-1\sim u$. 所以，

$$\lim_{x\to e}\frac{e^{e^x-x^e}-1}{e^x-x^e}=\lim_{x\to e}\frac{e^u-1}{u}=1,$$

故原式 $=e^{e^e}\cdot 1=e^{e^e}$.

2.2.97 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$，$(a>0)$.

解 令 $x-a=t$，则当 $x\to a$ 时，$t\to 0$.

$$\frac{x^x-a^a}{x-a}=\frac{(a+t)^{a+t}-a^a}{t}=\frac{a^a[a^{(a+t)\log_a(a+t)-a}-1]}{t}$$

$$=a^a\cdot\frac{a^{(a+t)\log_a(a+t)-a}-1}{(a+t)\log_a(a+t)-a}\cdot\frac{(a+t)\log_a(a+t)-a}{t}.$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0}(a+t)\log_a(a+t)-a=0$，故有，

$$\lim_{t\to 0}\frac{a^{(a+t)\log_a(a+t)-a}-1}{(a+t)\log_a(a+t)-a}=\ln a. \tag{1}$$

又因

$$\lim_{t\to 0}\frac{(a+t)\log_a(a+t)-a}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{a[\log_a(a+t)-\log_a a]}{t}+\log_a(a+t)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\log_a(1+\frac{t}{a})}{\frac{t}{a}}+\log_a(a+t)\right]$$

$$=\log_a e+\log_a a=\log_a(ae). \tag{2}$$

故由(1)、(2)得，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\ln a\log_a(ae)=a^a\ln(ae)$.

2.2.98 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$，$(a>0)$.

解 令 $t=x-a$，则 $x=t+a$，且 $x\to a$ 时，$t\to 0$.

故
$$\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\frac{(t+a)^\alpha-a^\alpha}{(t+a)^\beta-a^\beta}=\frac{a^\alpha[(1+\frac{t}{a})^\alpha-1]}{a^\beta[(1+\frac{t}{a})^\beta-1]},$$

由此，据 2.2.25 题有

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(1+\frac{t}{a})^{\alpha}-1}{\frac{t}{a}}}{\dfrac{(1+\frac{t}{a})^{\beta}-1}{\frac{t}{a}}}=\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}.$$

2.2.99　求极限 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b},(a>0)$.

解　令 $t=x-b$，则 $x=b+t$，且当 $x\to b$ 时，$t\to 0$ 所以，

$$\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}=\lim_{t\to 0}\frac{a^{t+b}-a^b}{t}=a^b\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=a^b\ln a.$$

2.2.100　求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a},(a>0)$.

解　$$\frac{a^x-x^a}{x-a}=\frac{a^a[a^{x-a}-(\frac{x}{a})^a]}{x-a}=a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{(\frac{x}{a})^a-1}{x-a}$$

$$=a^a\cdot\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{a\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a},$$

当 $x\to a$ 时，等式第一项趋于 $a^a\ln a$，而第二项趋于 $a^a\cdot 1\cdot 1=a^a$，所以，

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

2.2.101　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

解　$(1-x)\log_x 2=(1-x)\dfrac{\ln 2}{\ln x}$. 令 $t=1-x$，则 $x=1-t$，且当 $x\to 1$ 时，$t\to 0$，从而有，

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\log_2 x=\lim_{t\to 0}t\frac{\ln 2}{\ln(1-t)}$$

$$=\ln 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1-t)}=-\ln 2.$$

2.2.102　求

$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\dfrac{(x+2)^{x+2}}{(x+1)^{x+1}}-\ln\dfrac{(x+1)^{x+1}}{x^x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(1+\dfrac{1}{x+1})^{x+1}+\ln(x+2)\right.$

$\left.-\ln(1+\dfrac{1}{x})^x-\ln(x+1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(1+\dfrac{1}{x+1})^{x+1}+\ln\dfrac{x+2}{x+1}-\ln(1+\dfrac{1}{x})^x\right]$

$=\ln e+\ln 1-\ln e=0.$

2.2.103　求 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right],(a>1)$.

解　$\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)=(\ln x+\ln\ln a)\cdot\ln\left(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)$

$=(\ln x+\ln\ln a)\cdot\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\cdot\dfrac{\ln(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a})}{\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}},$

由于　$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x+\ln\ln a}{\ln x-\ln a}=1,\quad\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a})}{\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a}}=1,$

故　$\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]=2\ln a.$

2.2.104　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\cdot\cos\dfrac{\ln(1+x)+\ln x}{2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x}}{2}\cdot\cos\dfrac{\ln x(x+1)}{2}.$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\ln\frac{x+1}{x}}{2}=0$，$\left|\cos\dfrac{\ln x(x+1)}{2}\right|\leqslant 1$，根据有界函数与无穷小之积仍为无穷小的结论，原式 $=0$.

2.2.105　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\dfrac{3}{x})$.

解　$\ln(1+2^x)\cdot\ln(1+\dfrac{3}{x})=\dfrac{x\ln2+\ln(1+\frac{1}{2^x})}{x}\cdot\dfrac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}\cdot 3$

由于
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}=3,\tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln2+\ln(1+\frac{1}{2^x})}{x}=\ln2,\tag{2}$$

由(1)、(2) 即得

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}\cdot\frac{x\ln2+\ln(1+\frac{1}{2^x})}{x}=3\cdot\ln2=\ln8.$$

2.2.106　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

解　$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}e^x=1.$$

2.2.107　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}$.

解　$$\frac{\mathrm{sh}^2x}{\ln(\mathrm{ch}3x)}=\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}3x-1}\cdot\frac{\mathrm{ch}3x-1}{\ln[1+(\mathrm{ch}3x-1)]},$$

因为
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\mathrm{ch}3x-1)]}{\mathrm{ch}3x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}^2x-1}{4\mathrm{ch}^3x-3\mathrm{ch}x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{ch}x-1)(\mathrm{ch}x+1)}{(\mathrm{ch}x-1)(4\mathrm{ch}^2x+4\mathrm{ch}x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}x+1}{4\mathrm{ch}^2x+4\mathrm{ch}x+1}=\frac{2}{9},$$

故原式 $=\frac{2}{9}$.

2.2.108　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解　$$\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\frac{\ln(1-2\sin^2\frac{ax}{2})}{-2\sin^2\frac{ax}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{bx}{2}}{\ln(1-2\sin\frac{bx}{2})}\cdot\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\sin\frac{bx}{2}}\right)^2,$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\frac{a^2}{b^2}$.

2.2.109　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$

解　$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln(1+\frac{2}{e^{3x}})}{\ln e^{2x}+\ln(1+\frac{3}{e^{2x}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\ln(1+\frac{2}{e^{3x}})}{2x+\ln(1+\frac{3}{e^{2x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{2}{e^{3x}})}{2+\frac{1}{x}\ln(1+\frac{3}{e^{2x}})}=\frac{3}{2}.$$

2.2.110　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{\mathrm{tg}x}-e^x)(1-\cos 3x)}{(\mathrm{tg}x-x)\ln(1+x)\sin 2x}$.

解　当 $x\to 0$ 时，有 $\mathrm{tg}x-x\sim e^{\mathrm{tg}x-x}-1$,

$\ln(1+x)\sim x,\sin 2x\sim 2x,1-\cos 3x\sim\frac{1}{2}(3x)^2$,

故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^x\cdot\frac{e^{\mathrm{tg}x-x}-1}{\mathrm{tg}x-x}\cdot\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x\cdot 2x}=1\cdot 1\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$.

(7) 极限方程

2.2.111　由条件 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=0$ 求常数 a 和 b.

解　因 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=0$,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b}{x}=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+1}{x(x^2+1)}-a-\frac{b}{x}\right]=0.$

从而,$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+1}{x(x^2+1)}-a\right]=0$,故 $a=1$.

将 $a=1$ 代入 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b\right)=0$ 中,得 $b=0$.

2.2.112　由条件

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$$

和

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$$

求常数 a_i 和 b_i $(i=1,2)$.

解　$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1$

$$=\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1},$$

上式的极限为零的必要条件是

$$1-a_1^2=0\quad 及\quad 1+2a_1b_1=0,$$

解之得 $a_1=\pm 1$,　$b_1=\mp\frac{1}{2}$;

同理可得 $a_2=\pm 1$,　$b_2=\mp\frac{1}{2}$.

2.2.113　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+6x+c}-\alpha x-\beta)=0$,($a,b,c$ 为常数,$a>0$),试求参数 α,β 之值.

解　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+6x+c}-\alpha x-\beta)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+c-\alpha^2x-2\alpha\beta x-\beta^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-\alpha^2)x^2+(b-2\alpha\beta)x+c-\beta^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta}=0$$

知 $a-\alpha^2=0$,从而得 $\alpha=\pm a$.

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(b-2\alpha\beta)x+c-\beta^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta}=0$ 及 $\alpha=\pm\sqrt{a}$ 得

$$b-2\alpha\beta=0,\quad \beta=\frac{b}{2\alpha}=\pm\frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

故
$$\begin{cases}\alpha=\sqrt{a},\\ \beta=\dfrac{b}{2\sqrt{a}},\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha=-\sqrt{a},\\ \beta=-\dfrac{b}{2\sqrt{a}}.\end{cases}$$

3. 综合问题

2.2.114　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x$,试作出该函数的图形.

解　当 $|x|<1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=-x;$$

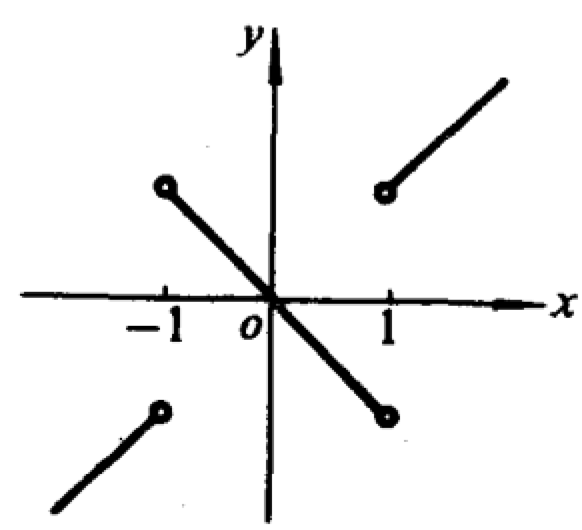
当 $|x|=1$ 时,$f(x)=0$;

当 $|x|>1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=x.$$

故 $f(x)=\begin{cases}-x, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ x, & |x|>1.\end{cases}$

由此即可画出其图形如右.



2.2.114 题图

2.2.115　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$,($n$ 为正整数),试作出函数 $y=f(x)$ 在$[-1,1]$上的图形.

解　由于当 $-1<x<0$ 时,有 $0<1+\sin\pi x<1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=0,$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}=\sin\pi x.$$

由于当 $0<x<1$ 时,有 $1+\sin\pi x>1$,所以

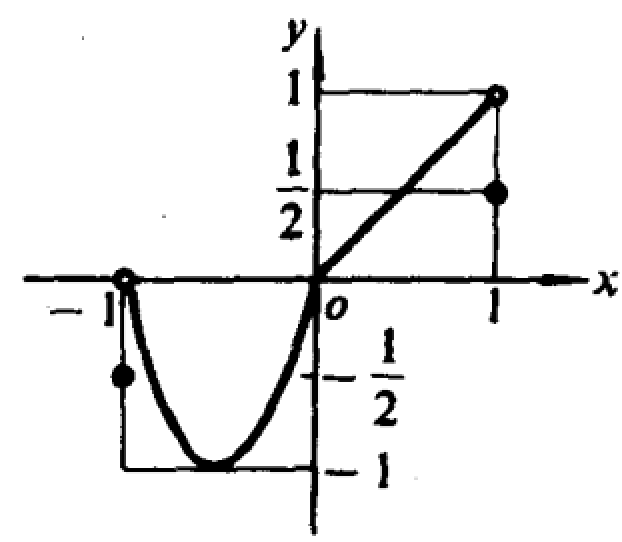
$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=\infty,$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n}}{1+\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^n}}=x.$$

又 $f(0)=0$，$f(-1)=-\frac{1}{2}$，$f(1)=\frac{1}{2}$，故所给函数 $f(x)$ 可由如下分段函数表示：

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & x=-1;\\ \sin\pi x, & -1<x<0;\\ 0, & x=0;\\ x, & 0<x<1;\\ \frac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

其图形如右.



2.1.115 题图

2.2.116　作出下列函数的图形

(1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$;

(2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $(x\geqslant 0)$.

解　(1) $y=(x-1)\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n$.

设 $|x|<1$，则因 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，故 $y=0$；

设 $x=1$，则因此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n=\frac{\pi}{4}$ 存在，故 $y=0$；

设 $x\leqslant -1$，则由 x^n 的出现而知 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n$ 不存在，故此时 y 无意义.

设 $x>1$，则 $x^n\to+\infty$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x^n=\frac{\pi}{2}$，故

$$y=\frac{\pi}{2}(x-1).$$

因此得

$$y=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 1;\\ \frac{\pi}{2}(x-1), & x>1.\end{cases}$$

其图形如图(1).

(2) 设 $0\leqslant x\leqslant 1$，则因 $1\leqslant 1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n<3$，故

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} > \sqrt[n]{3},$$

取极限，得

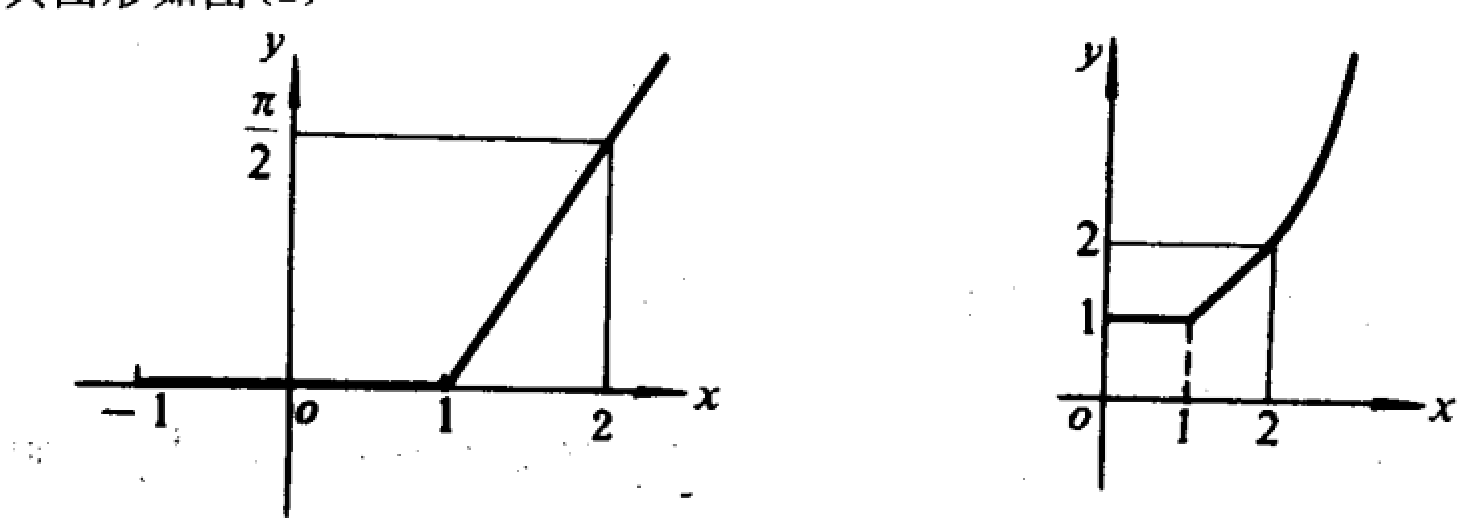
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=1.$$

设 $1<x\leqslant 2$，则 $y=x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x$，

设 $x>2$，则 $y=\frac{x^2}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}=\frac{x^2}{2}$.

故 $$y=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & 1<x\leqslant 2;\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

其图形如图(2)



(1) 2.2.116 题图 (2)

2.2.117 已知当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，$g(x)$ 的极限不存在，试讨论当 $x\to x_0$ 时，$f(x)+g(x)$ 与 $f(x)\cdot g(x)$ 的极限存在情况，并说明理由.

解 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 发散，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 必定发散，否则若

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=B,$$

则得， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)+f(x)-f(x)]=B-A.$

这与假设矛盾.

(2) 当 $A\neq 0$ 时,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ 必定发散,否则若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=B,$$

则得
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)\cdot f(x)}{f(x)}=\frac{B}{A}.$$

这与假设矛盾.

当 $A=0$ 而 $g(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 上有界,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=0$$

这是因为无穷小量与有界量之积仍为无穷小量.

当 $A=0,g(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 上无界,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ 可能发散也可能收敛.

2.2.118　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的邻域内是无界的,但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

证　对于无论多大的正数 M,总有充分接近于 $x=0$ 的点,使 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>M$ 成立. 例如取 $x=\frac{1}{n\pi}$ 时,则 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|=n\pi$,故若 $n>\frac{M}{\pi}$,则当 $x=\frac{1}{n\pi}$ 时,恒有 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>M$. 即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的.

其次,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 并不趋于无穷大. 因若取 $x=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ 则当 $n\to\infty$ 时,$x\to 0$,而这时$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\to 0$,故函数并不趋于无穷大.

2.2.119　证明:当 $x\to 0$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$ 的极限不存在.

证法 1　取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\to 0,(n\to\infty)$.

$$f(x_n)=\frac{1}{x_n}\cos\frac{1}{x_n}=(2n\pi+\frac{\pi}{4})\cos(2n\pi+\frac{\pi}{4})$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(2n\pi+\frac{\pi}{4})\to+\infty,(n\to\infty).$$

根据海涅定理知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

证法2 取 $x'_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x''_k=\frac{1}{2k\pi}$，对任意的 $\delta>0$，总可选取 k，使得 $0<|x'_k-0|<\delta$，$0<|x''_k-0|<\delta$，但对 $\varepsilon_0=1$，有

$$\left|\frac{1}{x'_k}\cos\frac{1}{x'_k}-\frac{1}{x''_k}\cos\frac{1}{x''_k}\right|$$
$$=\left|(2k\pi+\frac{\pi}{2})\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})-2k\pi\cos 2k\pi\right|=|2k\pi\geqslant\varepsilon_0.$$

根据哥西准则知，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

2.2.120 设 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 上定义，且在 x_0 的任何空心邻域内无界，但当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不是无穷大量，则一定存在收敛于 x_0 的两个数列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$，使 $\{f(x_n)\}$ 是无穷大量，而 $\{f(y_n\}$ 是收敛数列.

证 由于 f 在 x_0 的任何空心邻域无界，即对任意的 $M>0$ 与 $\delta>0$，存在 $x_\delta\in U^0(x_0,\delta)$，使 $|f(x_\delta)|>M$.

依次取 $M_n=1,2,\cdots,n,\cdots$ 及 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，对每个自然数 n，都存在 $x_n\in U^0(x_0,\frac{1}{n})$，使

$$|f(x_n)|>M_n=n,n=1,2,\cdots$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

另一方面，因为当 $x\to x_0$ 时函数 f 不是无穷大量，即存在 $M_0>0$，对任意的 $\delta>0$，都存在 $Z_\delta\in U^0(x_0,\delta)$ 使得 $|f(Z_\delta)|\leqslant M_0$，取 $\delta=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，则有 $Z_n\in U^0(x_0,\frac{1}{n})$，使 $|f(Z_n)|\leqslant M_0$，$n=1,2,\cdots$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}Z_n=x_0$.

又因为数列 $\{f(Z_n))|$ 有界，由列紧性定理，它必含有收敛子列 $\{f(Z_{n_k})\}$，令 $y_k=Z_{n_k}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=x_0$，且 $\{f(y_k)\}$ 是收敛的.

2.2.121 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增，$a\leqslant x_n\leqslant b$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 用反证法. 若结论不真，必有 $c>a$，对任意的 $k>0$，存在 $x_{n_k}\geqslant c$，于是

$$f(x_{n_k}) \geqslant f(c) > f(a), k = 1,2,\cdots.$$

这与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$矛盾.

2.2.122　设$f(x) = \sin\frac{1}{x}$,证明对于满足条件$-1 \leqslant a \leqslant 1$的任何$a$,皆可造出序列$x_n \to 0(n = 1,2,\cdots)$,使

$$\lim_{n\to 0} f(x_n) = a.$$

证　设a为$[-1,1]$上的任一个实数.

令$x_0 = \arcsin a, -\frac{\pi}{2} \leqslant x_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$,即有$\sin x_0 = a$令$x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$ $(n = 1,2,\cdots)$,显然有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi + x_0} = 0, \qquad (1)$$

并且　$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \sin x_0 = a.$$

因此有　$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a. \qquad (2)$$

根据(1)与(2),本题得证.

2.2.123　证明$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$的充要条件是对任何数列$\{x_n\}$,且$x_n > x_0, x_n \to x_0(n \to \infty)$,都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

证　必要性:设$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$,即对任意的$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,当$0 < x - x_0 < \delta$时,有

$$|f(x)| > M \qquad (1)$$

又设$\{x_n\}$是任一数列,且$x_n > x_0, x_n \to x_0(n \to \infty)$,则对上述$\delta > 0$,存在$N > 0$,当$n > N$时,有$0 < |x_n - x_0| < \delta$.由(1)式有$|f(x_n)| > M$,即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

充分性:设$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \infty$,即存在$M > 0$,对任意的$\delta > 0$,存在$x_\delta$,虽然$0 < x_\delta - x_0 < \delta$,但$|f(x_\delta)| \leqslant M$.

令$\delta = \frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots$,得数列$\{x_n\}$,且$0 < x_n - x_0 < \frac{1}{n}, n = 1,2,\cdots$,但$|f(x_n)| \leqslant M$,　$n = 1,2,\cdots$

显然$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \infty$与已知矛盾,所以

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty.$$

2.2.124 设 $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{当 } x \leqslant 1; \\ 3+x, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$

及 $g(x) = \begin{cases} x^3, & \text{当 } x \leqslant 1; \\ 2x-1, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$

试讨论当 $x \to 1$ 时 $f[g(x)]$ 的极限.

解 $f[g(x)] = \begin{cases} -x^3, & \text{当 } x \leqslant 1; \\ 3+(2x-1), & \text{当 } x > 1. \end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f[g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x^3) = -1,$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f[g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+2) = 4,$

所以 $f[g(x)]$ 当 $x \to 1$ 时无极限.

2.2.125 设 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$,试证:$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k} = 0.$

证 由 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$ 可得,$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x} = \sqrt{x}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0,$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k} - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k(\sqrt{x+k} - \sqrt{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\sqrt{x+k} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k \cdot k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[ka_k \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{k}{x}}+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} ka_k \cdot 0 = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0.$$

2.2.126 已知 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$,$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$,证明:

$$\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)] = \infty.$$

证 因 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$,即对任意的 $M > 0$,存在 $\delta_1 > 0$,当 $0 < |x-1| < \delta_1$ 时,$|f(x)| > M + 3$.

又因 $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$,即对任意的 $0 < \varepsilon < 1$,存在 $\delta_2 > 0$,

当 $0<|x-1|<\delta_2$ 时，$|g(x)-2|<\varepsilon$，即有

$$1<2-\varepsilon<g(x)<2+\varepsilon<3.$$

因此，对任意的 $M>0$，令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|f(x)+g(x)|\geqslant|f(x)|-|g(x)|>M$$

成立. 即 $\lim\limits_{x\to1}[f(x)+g(x)]=\infty$.

2.2.127　设曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点 $(0,0)$，在 $0<x<\varepsilon$ 时，该曲线完全位于由直线 $y=-kx$ 及 $y=kx(k\neq\infty)$ 构成的锐角内，证明

$$\lim_{x\to0^+}x^{f(x)}=1.$$

证　因 $0<x<\varepsilon<1$，对 $k>0$，由 $-kx<f(x)<kx$ 可得

$$x^{kx}<x^{f(x)}<x^{-kx},$$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{kx}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{-kx}=1$，故根据极限的比较法则，有

$$\lim_{x\to0^+}x^{f(x)}=1.$$

2.2.128　证明：若(1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x>a$ 内；
(2) 在每一个有限的域 $a<x<b$ 内 $f(x)$ 有界；
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$（或 $-\infty$），

则
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\ (\text{或}-\infty).$$

证　只对 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ 的情形给以证明（对 $-\infty$ 的情形，只须考虑函数 $-f(x)$ 即可归为 $+\infty$ 的情形）. 对任意的 $G>0$，必存在正数 $x_0>a$，使当 $x\geqslant x_0$ 时，恒有

$$f(x+1)-f(x)>4G.$$

现设 $x>2(x_0+1)$. 于是，恰有一个正整数 n（依赖于 x），满足 $n\leqslant x-x_0<n+1$.

令 $\tau=x-x_0-n$，则 $0\leqslant\tau<1$，$x=x_0+\tau+n$.

由于 $n+1>x-x_0>x_0+2$，故 $n>x_0+1>x_0+\tau$，从而 $2n>x$，即 $\dfrac{n}{x}>\dfrac{1}{2}$.

又由 $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{n}{x}\cdot\dfrac{f(x)-f(x_0+\tau)}{n}+\dfrac{f(x_0+\tau)}{x}$，显然有

$$\frac{f(x)-f(x_0+\tau)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_0+\tau+k)-f(x_0+\tau+k-1)]$$

$$>\frac{1}{n}\cdot 4nG=4G,$$

故
$$\frac{n}{x}\cdot\frac{f(x)-f(x_0+\tau)}{n}>2G.$$

由假定，$f(x)$ 在 $x_0\leqslant x<x_0+1$ 上有界，故存在正数 x_1，使当 $x>x_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(x_0+\tau)}{x}\right|<G.$$

令 $X=\max\{2(x_0+1),x_1\}$，则当 $x>X$ 时，恒有$\frac{f(x)}{x}>G$，由此可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

2.2.129 设(1)函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义；(2)$f(x)$ 在每一个有限区间上有界；(3)存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=l$，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l$.

证 据题设，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正数 G，使当 $x\geqslant G$ 时，

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<f(x+1)-f(x)<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $x-1\geqslant G$ 时，

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)-f(x-1)<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $x-2\geqslant G$ 时，

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<f(x-1)-f(x-2)<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

……………

当 $x-n\geqslant G$ 时，

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<f(x-n+1)-f(x-n)<l+\frac{\varepsilon}{2}.$$

当 $x-n\geqslant G$ 时，即 $x\geqslant G+n$ 时，这 n 个不等式均成立，将它们边边相加，并以 n 除之，便得到

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x-n)}{n}<l+\frac{\varepsilon}{2},$$

或
$$\left|\frac{f(x)-f(x-n)}{n}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
取 $n=[x-G]$，则 $x-[x-G]\geqslant G$，于是 $x\geqslant G+1$ 时，有
$$\left|\frac{f(x)-f(x-[x-G])}{[x-G]}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$
由直接验算可知：
$$\frac{f(x)}{x}-l=\frac{f(x-[x-G]-l(x-[x-G])}{x}$$
$$+\frac{[x-G]}{x}\left(\frac{f(x)-f(x-[x-G])}{[x-G]}-l\right) \tag{2}$$
是恒等式．由 $[x-G]+1>x-G\geqslant[x-G]$ 可得，$G+1>x-[x-G]\geqslant G$，这表示 $x-[x-G]$ 是一有界量，又由题设知，$f(x)$ 在有限区间 $[G,G+1]$ 上有界，故 $f(x-[x-G])$ 也是有界量．从而
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x-[x-G])-l(x-[x-G])}{x}=0,$$
或者说，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $G'>0$，使当 $x>G'$ 时，
$$\left|\frac{f(x-[x-G])-l(x-[x-G])}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$
当 $x>G+1$ 时，
$$0<\frac{x-G-1}{x}<\frac{[x-G]}{x}<\frac{x-G}{x}<1. \tag{4}$$
在(1)、(2)、(3)、(4) 中取 $G'>G+1$，于是当 $x>G'$ 时，有
$$\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|\leqslant\left|\frac{f(x-[x-G]-l(x-[x-G])}{x}\right|$$
$$+\left|\frac{[x-G]}{x}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x-[x-G])}{[x-G]}-l\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+1\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2.2.130　证明：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$.

证　显然，$x\to0$，当且仅当 $x^3\to0$.

先设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$，则对于任给 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使当 $0<|x|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，故当 $0<|x|<\min(1,\delta)$ 时，就更有 $0<|x|^3<\delta$，使 $|f(x^3)-A|<\varepsilon$，此即 $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$.

再设 $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$，则对任何 $\varepsilon>0$，都有正数 δ，使当 $0<|x|<\delta$ 时，$|f(x^3)-A|<\varepsilon$，故当 $0<|x|<\delta^3$ 时，就有 $0<\sqrt[3]{|x|}<\delta$，使

$|f([\sqrt[3]{x}]^3)-A|<\varepsilon$,即 $|f(x)-A|<\varepsilon$,亦即$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$. 故

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x^3).$$

2.2.131 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}$, $(a>1,k>0)$.

解 由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n^k}=0$;又当 $x\geqslant 1$ 时,有$[x]\leqslant x\leqslant [x]+1$,于是

$$[x]^k\leqslant x^k<([x]+1)^k,$$

从而,$\dfrac{\log_a[x]}{2^k[x]^k}<\dfrac{\log_a[x]}{([x]+1)^k}<\dfrac{\log_a x}{x^k}<\dfrac{\log_a([x]+1)}{[x]^k}<\dfrac{\log_a 2[x]}{[x]^k}$.

令 $x\to+\infty$,两边取极限有$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=0$.

2.2.132 试证:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$; (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$.

证 (1) 对任意的 $x\geqslant 1$,存在自然数 n,使 $n\leqslant x\leqslant n+1$,从而有

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n},\ \sqrt[n+1]{n}\leqslant x^{\frac{1}{x}}\leqslant\sqrt[n]{n+1}.$$

当 $x\to+\infty$ 时,$n\to\infty$,在上式中令 $x\to+\infty$,取极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

(2) 令 $y=\dfrac{1}{x}$,当 $x\to 0^+$ 时,$y\to+\infty$,由(1)有

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{y^{\frac{1}{y}}}=1.$$

2.2.133 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]$.

解法1 因$\dfrac{1}{x}-1<[\dfrac{1}{x}]\leqslant\dfrac{1}{x}$,故当 $x>0$ 时,有

$$1-x<x[\frac{1}{x}]\leqslant 1,$$

当 $x<0$ 时,有 $1-x>x[\dfrac{1}{x}]\geqslant 1$,令 $x\to 0^+$,$x\to 0^-$,分别对上两式取极限得

$$\lim_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1,\quad \lim_{x\to 0^-}x[\frac{1}{x}]=1.$$

故 $$\lim_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=1.$$

解法 2 因 $x\left[\frac{1}{x}\right]=x\{\frac{1}{x}-(\frac{1}{x})\}$，其中$(\frac{1}{x})$为$\frac{1}{x}$的小数部分，因 $|(\frac{1}{x})|\leqslant 1$，故$\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to 0}\{1-x(\frac{1}{x})\}=1$.

2.2.134 证明当 x 充分大时，下面的不等式成立

(1) $x^2+10x+100<0.001x^3$;

(2) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$.

证 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+10x+100}{0.001x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{100}{x^3}}{0.001}=0$,

故当 x 充分大时，$x^2+10x+100<0.001x^3$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2000}}}\right)^{1000}=0$,

故当 x 充分大时，$\ln^{1000}x<\sqrt{x}$.

2.2.135 试证：若 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)<\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<a-x<\delta$，$0<y-a<\delta$ 时，有 $f(x)<f(y)$.

证 设 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=B$，$A<B$，则 $A<\dfrac{A+B}{2}<B$，

取 $\varepsilon=\dfrac{A+B}{2}-A$，则分别存在 $\delta_1>0$，$\delta_2>0$，使得当 $0<a-x<\delta_1$ 时，有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon=\frac{A+B}{2},\tag{1}$$

当 $0<y-a<\delta_2$ 时，有

$$\frac{A+B}{2}=B-\varepsilon<f(y)<B+\varepsilon,\tag{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $a-\delta<x<a<y<a+\delta$ 时，(1) 与(2) 两式同时成立，即 $f(x)<\dfrac{A+B}{2}<f(y)$.

2.2.136 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，并且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆为常数，求证

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

证 由 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$ 有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$，$x\neq 0$. 即

$$\left|a_1\frac{\sin x}{x}+a_2\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+a_n\frac{\sin nx}{x}\right|\leqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|,$$

从而，根据$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$得

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

2.2.137　设$x\to+\infty$，选出下列函数的形如$c(\frac{1}{x})^n$的主部，并求其对于无穷小$\frac{1}{x}$的阶：

(1) $\frac{x+1}{x^4+1}$；　(2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$；

(3) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$；　(4) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

解　(1) 因为$\dfrac{\frac{x+1}{x^4+1}}{(\frac{1}{x})^3}=\dfrac{x^3(x+1)}{x^4}\to 1\ (x\to+\infty)$，故其主部为$(\frac{1}{x})^3$，它对于无穷小$\frac{1}{x}$是3阶的.

(2) 因为$\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 1\ (x\to+\infty)$，

故其主部为$\frac{1}{2}(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$，它对于无穷小$\frac{1}{x}$是$\frac{1}{2}$阶的.

(3) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$$=\frac{2\sqrt{x(x+2)}-2(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)}+x+1)},$$

于是得

$$\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{8}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}})(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})}$$

$\to 1\ (x \to +\infty)$,

故其主部为 $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{3}{2}$ 阶的.

(4) 因为 $\dfrac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to 1, (x \to +\infty)$,

故其主部为 $(\frac{1}{x})^2$，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 为 2 阶的.

2.2.138　确定 a,b 使当 $x \to 0$ 时，$x-(a+b\cos x)\sin x$ 为 x 的 5 阶无穷小.

解　$x-(a+b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x$

$$= x - a(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots) - \frac{b}{2}(2x - \frac{1}{3!}8x^3 + \frac{1}{5!}32x^5 - \frac{1}{7!}2^7x^7 + \cdots)$$

$$= (1-a-b)x + (\frac{a}{6} + \frac{8}{12}b)x^3 - \frac{1}{5!}(16b+a)x^5 + kx^7 + \cdots,$$

当 $x \to 0$ 时，欲使上式为 x 的 5 阶无穷小，则须取

$$\begin{cases} 1-a-b=0 \\ \frac{a}{6}+\frac{2}{3}b=0, \end{cases} \text{即 } a=\frac{4}{3}, b=-\frac{1}{3},$$

这时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{30}+kx^2+\cdots) = \frac{1}{30}$.

2.2.139　设 $x \to +\infty$ 和 $f_n(x) = x^n\ (n=1,2,\cdots)$，试证：

(1) $f_n(x)$ 中的每一个函数都比前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得快；

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个都增加得快；

证　(1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x \to +\infty$，所以，$f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得快.

(2) 因 $\frac{e^x}{x^n} \to +\infty(x \to +\infty$，$n$ 为任一固定的自然数)，所以 e^x 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得快.

§ 3　函数的连续性

内 容 提 要

1. 基本概念

(1) 函数连续的定义

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在 x_0 取得一个增量 Δx，对应的函数取得增量 Δy，如果当 Δx 趋于零时，Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点是连续的.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的.

(2) 函数连续的条件

1) 函数在 x_0 的某个邻域内有定义；

2) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$；

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(3) 左连续与右连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.

(4) 函数在闭区间上连续

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每点都连续，并且 $f(x)$ 在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(5) 函数的间断点

若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，则称点 x_0

是 $f(x)$ 的第一类间断点. 非第一类间断点统称为第二类间断点.

(6) 上半、下半连续

若 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)\leqslant f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 处上半连续；若 $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)\geqslant f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 处下半连续.

(7) 一致连续

设 $f(x)$ 在区间 I(开、闭、半开均可) 上有定义，若对任意的正数 ε，总存在某一正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对于区间 I 内的任意两点 x',x''，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，就有 $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

2. 连续函数的运算

(1) 四则运算法则

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则下列函数也在 x_0 处连续.

1) $f(x)\pm g(x)$；

2) $f(x)g(x)$；

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$(g(x_0)\neq 0)$.

(2) 复合函数的连续性

若函数 $z=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，函数 $y=f(z)$ 在 $z_0=\varphi(x_0)$ 点连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续.

(3) 反函数的连续性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调且连续，又 $f(a)=\alpha,f(b)=\beta$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上也单调且连续.

3. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则下列结论均成立：

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值；

(3) 对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意实数 μ，至少存在一点 $\xi(\xi\in(a,b))$，使 $f(\xi)=\mu$.

(4) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

4. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数(幂函数、三角函数、指数函数、对数函数和反三角函数) 在其定义区间内是连续的.

(2) 一切初等函数在其定义区间内是连续的.

(3) 如果将上面的结论(2)改写成：一切初等函数在其定义域内是连续的. 这种结论是错误的. 例如函数 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 是一个初等函数，它的定义域是由一列孤立点 $x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$ 所组成. 显然，此函数在这些孤立点上不连续. 又如初等函数 $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 在其定义域内也不连续.

5. 一致连续函数的性质和运算

(1) 在有限区间 (a,b) 上一致连续函数必为有界函数.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)$，$f(b-0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=M$（有限数），则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(4) 在区间 (a,b) 上两个一致连续函数之和仍在 (a,b) 上一致连续.

问题与解答

1. 证明连续

2.3.1 证明函数 $y=|x-2|$ 在点 $x=2$ 处连续.

证 因
$$\lim_{x\to2^+}y=\lim_{x\to2^+}|x-2|=\lim_{x\to2^+}(x-2)=0,$$
$$\lim_{x\to2^-}y=\lim_{x\to2^-}|x-2|=\lim_{x\to2^-}(2-x)=0,$$
又 $y(2)=|2-2|=0$，故 y 在 $x=2$ 处连续.

2.3.2 利用 $\varepsilon-\delta$ 论证法证明下列函数的连续性：

(1) $ax+b$； (2) x^2； (3) x^3； (4) $\sqrt{x}$；

(5) $\sqrt[3]{x}$； (6) $\sin x$；(7) $\cos x$；(8) $\operatorname{arctg}x$.

证 (1) 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$. 对任意的 $\varepsilon>0$，要
$$|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon,$$
只要
$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{|a|},\ (a\neq0).$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有.
$$|(ax+b)-(ax_0+b)|<\varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性，所以，$f(x)=ax+b$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

(2) $|x^2-x_0^2|=|x+x_0|\cdot|x-x_0|$

$$\leqslant |x-x_0|\cdot(|x-x_0|+2|x_0|).$$

对任意的 $\varepsilon>0$，要 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$，只要

$$|x-x_0|^2+2|x_0||x-x_0|-\varepsilon<0.$$

即只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0^2+\varepsilon}-|x_0|$.

取 $\delta=\sqrt{x_0^2+\varepsilon}-|x_0|>0$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$，故 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(3) 由于 $|x^3-x_0^3|=|x-x_0|\cdot|x^2+x_0x+x_0^2|$

$$\leqslant |x-x_0|(|x^2|+|x||x_0|+|x_0|^2),$$

不妨设 $|x-x_0|<1$，则有 $|x|<1+|x_0|$ 及

$$|x^3-x_0^3|<|x-x_0|\cdot(1+3|x_0|+3x_0^2).$$

对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(1,\dfrac{\varepsilon}{1+3|x_0|+3x_0^2})$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|x^3-x_0^3|<\varepsilon$.

由 x_0 的任意性，即可得出 x^3 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性.

(4) 由于 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$

$$<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}\ (x_0>0),$$

对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$，即可得证. 若 $x_0=0$，则取 $\delta=\varepsilon^2$.

(5) 由于 $|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{|x^{\frac{2}{3}}+(x-x_0)^{\frac{1}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}|}$

$$<\frac{|x-x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|},\ (x_0\neq 0, xx_0>0),$$

取 $\delta=\min\{|x_0|,\varepsilon\cdot\sqrt[3]{x_0^2}\}$ 即可得证.

若 $x_0=0$，则取 $\delta=\varepsilon^3$.

(6) 由于 $|\sin x-\sin x_0|=2|\sin\dfrac{x-x_0}{2}||\cos\dfrac{x+x_0}{2}|\leqslant|x-x_0|$，

取 $\varepsilon=\delta$，即可得证.

(7) 由于 $|\cos x-\cos x_0|=2|\sin\dfrac{x-x_0}{2}||\cos\dfrac{x+x_0}{2}|\leqslant|x-x_0|$，

取 $\varepsilon=\delta$，即可得证.

(8) 由于 $|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}x_0|=|\mathrm{arctg}\frac{x-x_0}{1+xx_0}|$，又因 $|y|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$|y|\leqslant|\mathrm{tg}y|$，所以有

$$|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}x_0|\leqslant|\frac{x-x_0}{1+xx_0}|.$$

当 $x_0>0$ 时，不妨就 $|x-x_0|<|x_0|=x_0$ 进行讨论，此时，$|1+xx_0|>1$，故

$$|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}x_0|\leqslant|x-x_0|.$$

当 $x_0<0$ 时，可用同样的方法讨论.

所以取 $\delta=\min(\varepsilon,|x_0|)$，($x=0$ 时，取 $\delta=\varepsilon$). 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}x_0|<\varepsilon$.

由于 x_0 的任意性，所以 $\mathrm{arctg}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

2.3.3 证明指数函数和对数函数的连续性.

证 设 $a>1$，我们先来证明 a^x 在点 0 处的连续性，分两步进行.

(1) 设 $0<x<\frac{1}{n}$，n 为某个正整数，因 $a>1$，故

$$0<a^x-1<a^{\frac{1}{n}}-1.$$

又因 $a^{\frac{1}{n}}\to1\ (n\to\infty)$，故 $\lim\limits_{x\to+0}a^x=1=a^0$.

所以 a^x 在 0 点右连续.

(2) 再证 a^x 在 0 点左连续. 设 $x=-y$，那么 $a^x=\frac{1}{a^y}$ 且 $y>0$，由(1)知 $\lim\limits_{x\to-0}a^x=\lim\limits_{y\to+0}\frac{1}{a^y}=1=a^0$，所以 a^x 在 0 点左连续.

由(1)和(2)知，a^x 在 0 点连续.

下面再证明 $a^x(a>1)$ 在任何一点 x_0 连续，因

$$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|,$$

由 a^x 在 0 点的连续性知：当 $x\to x_0$ 时，$a^{x-x_0}\to1$. 所以，当 $x\to x_0$ 时，$|a^x-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{x-x_0}-1|\to0$.

故 $a^x(a>1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

最后考察当 $0<a<1$ 时 a^x 的连续性，令 $a=\frac{1}{b}$，那么 $b>1$，$a^x=\frac{1}{b^x}$，由于 b^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，由连续函数的运算法则便得到 a^x 亦

在$(-\infty,+\infty)$内连续.

由a^x的连续性及反函数的连续性可得,对数函数$\log_a x(a>0,a\neq 1)$在$(0,+\infty)$内连续.

2.3.4　设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且恒大于零,试用ε—δ方法证明$1/f(x)$在$[a,b]$上连续.

证　由$f(x)$在$[a,b]$上连续且恒大于零,故$f(x)$在$[a,b]$上有最小值$m>0$.且于$[a,b]$上任一点x_0及任意给定的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,对满足$|x-x_0|<\delta$的x,有

$$|f(x)-f(x_0)|<m^2\varepsilon,$$

而
$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x_0)}\right|=\frac{|f(x_0)-f(x)|}{|f(x)f(x_0)|}\leqslant\frac{|f(x)-f(x_0)|}{m^2}<\varepsilon,$$

由x_0的任意性,即知$1/f(x)$在$[a,b]$上连续.

2.3.5　设函数$f(x)$对于包含a点的某一区间内的一切x,都存在正数M,使得不等式

$$|f(x)-f(a)|\leqslant M|x-a|$$

恒成立.证明$f(x)$在a点处连续.

证　对任意给定的$\varepsilon>0$,命$\delta=\varepsilon/M$.当$|x-a|<\delta$时,

$$|f(x)-f(a)|\leqslant M|x-a|<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon$$

成立,故$f(x)$在点a处连续.

2.3.6　证明:若$f(x)$具有下列诸性质:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义且单调,(2)取介于$f(a)$和$f(b)$之间一切数作为其函数值,则此函数在$[a,b]$上连续.

证　用反证法,不妨设单调函数$f(x)$为递增的且在x_0间断($x_0\in[a,b]$),由单调有界函数的一切间断点皆为第一类的间断点可知,x_0只能是第一类间断点,则$f(x_0)-f(x_0-0)$及$f(x_0+0)-f(x_0)$中至少有一个大于零,例如$f(x_0)-f(x_0-0)>0$.于是,由函数$f(x)$的单调性知,$f(x)$无法取到$f(x_0-0)$和$f(x_0)$之间的数值.

这与题设函数$f(x)$的性质(2)矛盾,从而$f(x)$在$[a,b]$上连续.

2.求间断点

2.3.7　讨论函数$f(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$的间断点.

解　显然,当$x=0$和$x=1$时,$f(x)$无定义,故$x=0$和$x=1$是

$f(x)$ 的两个间断点.

对 $x=1$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\infty$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

对 $x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}=0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

2.3.8　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1;\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$ 的间断点.

解　先分段检查. $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 在 $|x|\leqslant 1$ 上无间断点；$|x-1|$ 在 $|x|\geqslant 1$ 上也无间断点. $f(x)$ 有两个分界点：$x=1$ 和 $x=-1$.

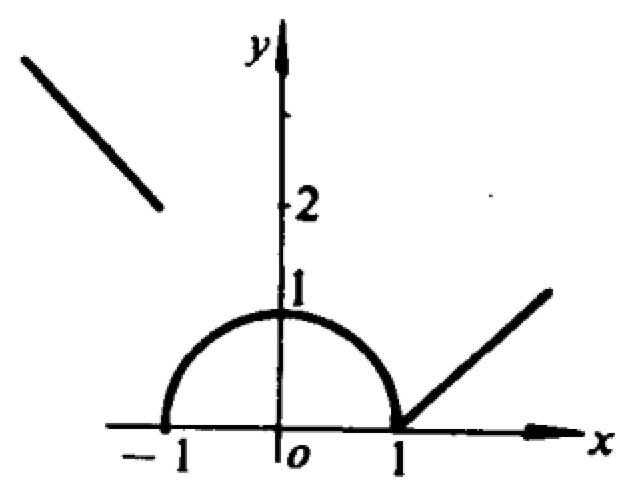
当 $x=1$ 时，

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}|x-1|=0,$$

由定义，$f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

所以，$f(1-0)=f(1+0)=f(1)$.



2.3.8 题图

故 $x=1$ 不是间断点.

当 $x=-1$ 时，

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}|x-1|=2,\quad \lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0,$$

故 $x=-1$ 是跳跃间断点.

2.3.9　求出下列函数的间断点并指出其类型.

(1) $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$；　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$；　(4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

解　(1) 因 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+x}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$，故 $x=-1$ 是可去间断点.

(2) 由于$\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$,故$x=1$及$x=-2$均为无穷间断点.

(3) 因$\lim\limits_{x\to 0}y$不存在(左、右极限均不存在)故$x=0$为第二类间断点.

(4) 因$\lim\limits_{x\to+0}\text{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-0}\text{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$,故$x=0$为第一类间断点.

2.3.10　求出下列函数的间断点,并指出其类型.

(1) $y=\frac{x}{\sin x}$;　(2) $y=\sqrt{\frac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

解　(1) 因$\lim\limits_{x\to 0}y=1$及$\lim\limits_{x\to k\pi}y=\infty$ (k为不等于零的整数),所以,$x=0$是可去间断点,而$x=k\pi(k=\pm 1\pm 2,\cdots)$为无穷间断点.

(2) 因$\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\frac{2\pi\sin\frac{2\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x)\cdot 2\cdot(2+x)}}=0$,

同理$\lim\limits_{x\to-2}y=0$,故$x=2$及$x=-2$为可去间断点.

2.3.11　指出$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}}$的间断点的类型.

解　令$g(x)=1-e^{\frac{x}{x-1}}$,则$f(x)=\frac{1}{g(x)}$.显然使$g(x)=0$的点和$g(x)$的间断点均为$f(x)$的间断点.

令$g(x)=0$,得$x=0$,则$x=0$是$f(x)$的无穷间断点.

又$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty$,所以,

$$\lim_{x\to 1^+}g(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}g(x)=1,$$

从而可得$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$,故$x=1$是$f(x)$的跳跃间断点.

2.3.12　设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\cdot x$,指出函数的间断点及其类型.

解　由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\cdot x=\begin{cases}x, & |x|>1;\\ 0, & |x|=1;\\ -x, & |x|<1.\end{cases}$

即 $$f(x)=\begin{cases} x, & |x|>1; \\ 0, & |x|=1; \\ -x, & |x|<1. \end{cases}$$
故 $x=\pm 1$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2.3.13 试求函数 $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}$ 的间断点,并说明这些点是哪一类间断点.如果有可去的,问如何补充函数定义使函数在该点连续.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2x}=2$,故 $x=0$ 是此函数的第一类间断点,且是可去间断点,若作如下补充定义

$$y=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}, & x\neq 0; \\ 2 & x=0. \end{cases}$$

则函数 y 在 $x=0$ 处连续.

此外,$x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为函数的无穷间断点.

2.3.14 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$ 的间断点,并判别间断点的类型.

解 $f(x)$ 是初等函数,在其定义域内是连续的,故只须讨论使分母为零及 $\operatorname{tg}x$ 无意义的点.

因为当 $x=n\pi(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时,$\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=\infty$,所以 $x=n\pi$ $(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为第二类断间断点.

因为当 $x=0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=1$,所以 $x=0$ 为第一类间断点(可去间断点).又因为当 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时,$\lim\limits_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=0$,所以 $x=n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为第一类间断点(可去间断点).

2.3.15 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(1+x)}{\sin\frac{\pi}{2}x}, & x>0; \\ \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{x}{x^2-1}, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 的间断点,并讨论 $f(x)$ 的连续性.

解　先讨论分界点 $x=0$,

$$f(0)=\frac{2}{\pi},$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{x^2-1}=\frac{2}{\pi},$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1+x)}{\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi},$$

因为 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$,所以 $x=0$ 是该函数的连续点.

为了找出 $f(x)$ 的全部间断点,还应对各段的函数进行检查.

当 $x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{x(1+x)}{\sin\frac{\pi}{2}x}$, $(x>0)$.

当 $x=0,\pm 2,\pm 4,\cdots,\pm 2n,\cdots$ 时, $\sin\frac{\pi}{2}x=0$,但只有 $x=2n(n=1,2,\cdots)$ 属于 $x>0$ 的范围, 且当 $x=2n$ $(n=1,2,\cdots)$ 时, $x(1+x)>0$,故 $\lim\limits_{x\to 2n}\dfrac{x(1+x)}{\sin\frac{\pi}{2}x}=\infty$. 所以,$x=2n$ $(n=1,2,\cdots)$ 是无穷间断点.

当 $x<0$ 时,$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{x}{x^2-1}$,$(x\leqslant 0)$.

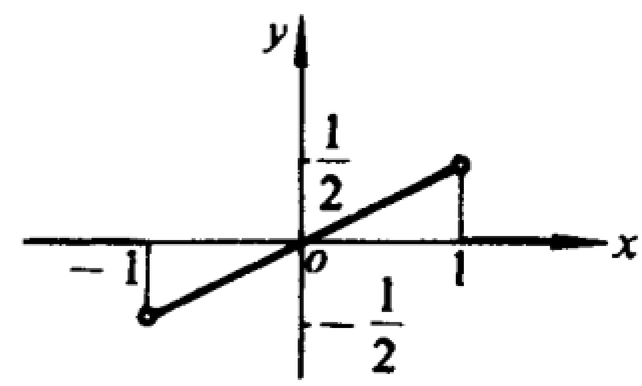
函数 $\cos\dfrac{x}{x^2-1}$ 在 $x=\pm 1$ 时无定义,但只有 $x=-1$ 属 $x<0$ 的范围, $\lim\limits_{x\to -1}\cos\dfrac{x}{x^2-1}$ 是振荡的. 所以 $x=-1$ 是振荡间断点.

综上所述,函数 $f(x)$ 在除去 $x=2n$ $(n=1,2,\cdots)$,$x=-1$ 外的所有点处是连续的. $x=2n$ $(n=1,2,\cdots)$ 为无穷间断点,$x=-1$ 是振荡间断点.

2.3.16　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\sin[\frac{\pi}{3}(x^{2n}+\frac{1}{2})]}{x^{2n}+1}$ 的连续性.

解　分别在 $x<-1$,$x=-1$,$|x|<1$,$x=1$,及 $x>1$ 的范围内求极限就可得到

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ -\frac{1}{2}, & x=-1;\\ \frac{x}{2}, & -1<x<1;\\ \frac{1}{2}, & x=1;\\ 0 & x>1.\end{cases}$$



2.3.16 题图

由此可讨论得，$x=\pm 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，在其它范围内 $f(x)$ 是连续的.

2.3.17 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1;\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$

(1) 证明 $g[f(x)]=1-f(x)$；

(2) 求 $f[g(x)]$ 的间断点，并指出其类型.

解 (1) 设 $u=f(x), v=g(x)$，则

$$g[f(x)]=g(u)=\begin{cases}u-1, & u\geqslant 1;\\ 1-u, & u<1.\end{cases}$$

但当 $x>0$ 时，$u=1$；$x\leqslant 0$ 时，$u=0$，所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x>0;\\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

而

$$1-f(x)=\begin{cases}1-1=0, & x>0;\\ 1-0=1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

故对于任何 x，都有 $g[f(x)]=1-f(x)$.

(2) 因为

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x>1;\\ 0, & x=1;\\ 1, & x<1.\end{cases}$$

所以函数 $f[g(x)]$ 在 $x=1$ 点间断.

由 $\lim\limits_{x\to 1}f[g(x)]=1$ 知，$x=1$ 为可去间断点.

2.3.18 证明单调有界函数的一切间断点皆为第一类间断点.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调递增函数，x_0 为 $f(x)$ 的间断点，则因 $f(x)$ 在 $x_0-\delta<x\leqslant x_0$ 内单调递增，且 $f(x)\leqslant f(x_0)$，故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\leqslant f(x_0)$.

同理，当x自x_0的右侧趋于x_0时，函数单调递减且有界，故$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\geqslant f(x_0)$. 从而可知单调有界函数的一切间断点皆为第一类间断点.

3. 讨论连续性

2.3.19　一切初等函数在其定义域内都是连续的，这个结论是否正确.

答　这个结论不正确. 例如，$f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$是初等函数，但因其定义域为离散点集：$\{x|x=n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，故$f(x)$在其定义域内不连续.

又如，$y=\sqrt{x^2\cdot(x-1)}$是初等函数，但它在其定义域$\{x|x=0,x\geqslant1\}$内就不连续.

正确结论应是：一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

2.3.20　设$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0;\\ a+x, & x\geqslant0,\end{cases}$应当怎样选择$a$，才能使$f(x)$成为$(-\infty,+\infty)$内的连续函数.

解　因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$；$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$；$f(0)=a$. 所以当$a=1$时，$f(x)$在$x=0$处连续.

此时，若$x>0$，则$f(x)=1+x$是初等函数. 故$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续；若$x<0$，$f(x)=e^x$也是初等函数，故$f(x)$在$(-\infty,0)$内连续. 从而，当$a=1$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

2.3.21　讨论函数$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}. & x<0;\\ 0, & x=0;\\ x\ln x; & x>0\end{cases}$的连续性.

解　在$x<0$与$x>0$时，$f(x)$显然连续. 又

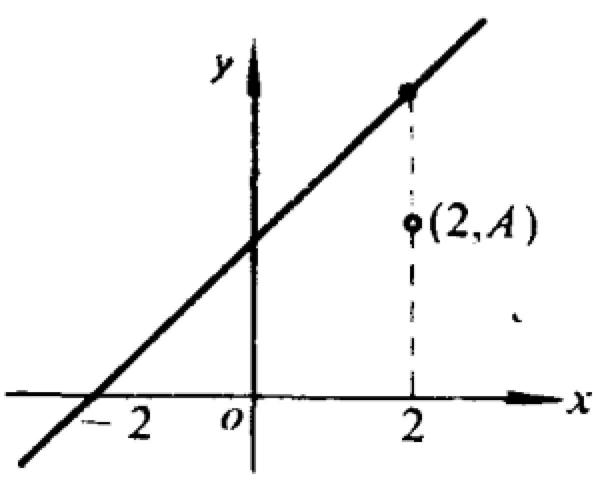
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0,$$

而$f(0)=0$，所以，$f(x)$在$x=0$也连续. 由此可知，对一切x值，$f(x)$均连续.

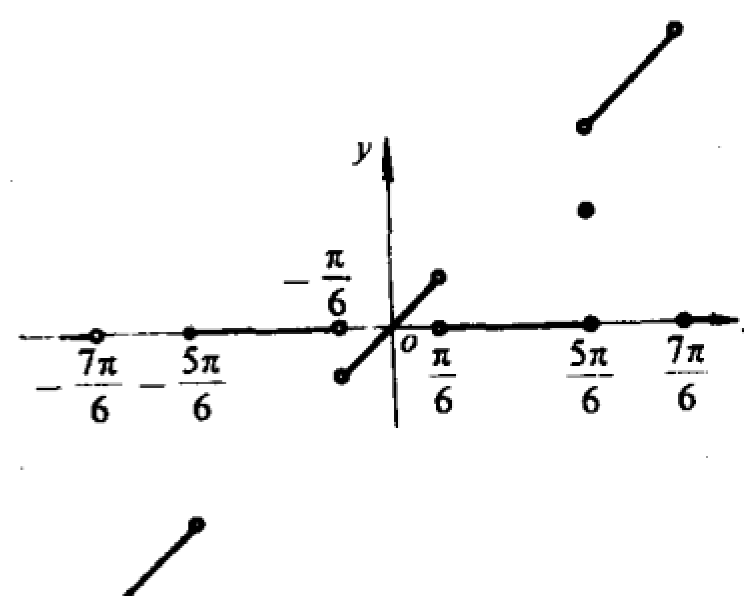
2.3.22　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2;\\ A, & x=2\end{cases}$ 的连续性并绘出其图形.

解　$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4.$

因此,当 $A=4$ 时,$f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续;而当 $A\neq 4$ 时,$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续,至于在点 $x\neq 2$ 处,显然是连续的,并且 $f(x)=x+2$,$(x\neq 2)$.



2.3.22 题图



2.3.23 题图

2.3.23　讨论函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$ 的连续性并绘出其图形.

解　
$$y=\begin{cases}x, & |x-k\pi|<\dfrac{\pi}{6};\\ \dfrac{x}{2}, & x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{6};\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)\\ 0, & \dfrac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\dfrac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

所以,$x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 为第一类间断点.

2.3.24　讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性.

解　讨论这类由极限给出的函数,一般是先设法去掉极限符号,将它转化为一个分段函数,然后,再进行讨论.

因为在 $n\to+\infty$ 的过程中,当 $x<0$,$x=0$ 或 $x>0$ 时,其极限是不同的.故先分别在 $x<0$,$x=0$,$x>0$ 的范围内求极限:

当 $x<0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=x$，(因为此时 $e^{nx}\to 0$)；

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{xe^{-nx}+x^2}{e^{-nx}+1}=x^2$，

(因为此时 $e^{-nx}\to 0$)；

由此可得　$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

由于 $f(x)$ 在各段上都是连续的，在分界点 $x=0$ 处，有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x=0,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0,$$

且 $f(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

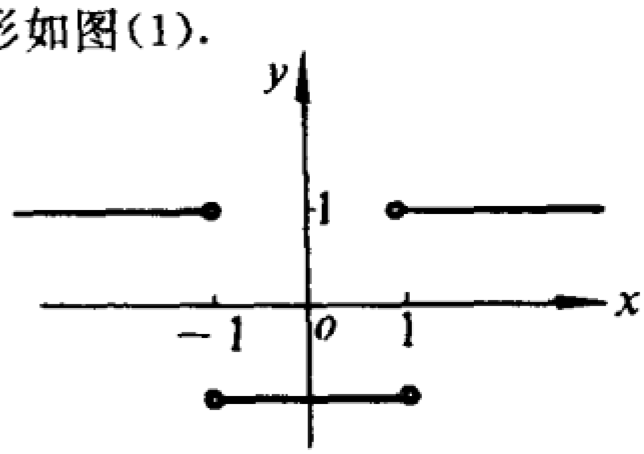
2.3.25　讨论函数 $y=f(x)=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{x^{2a}-1}{x^{2a}+1}$ 的连续性并绘出其图形.

解　分 $a\to+\infty$ 与 $a\to-\infty$ 两种情况讨论：

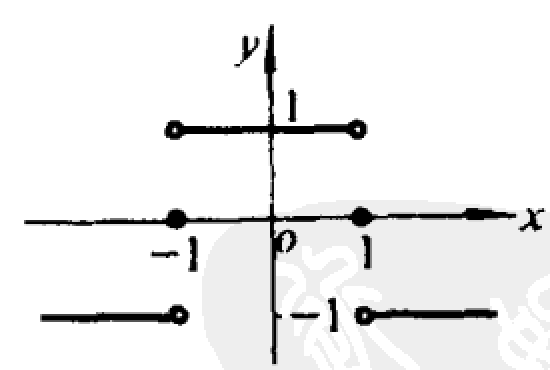
(1) $y=f(x)=\lim\limits_{a\to+\infty}\dfrac{x^{2a-1}}{x^{2a+1}}=\begin{cases}-1, & |x|<1;\\ 0, & x=\pm 1;\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

可见 $x=\pm 1$ 为间断点，连续区间为 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$.

图形如图(1).



(1)



(2)

2.3.25 题图

(2) $y=f(x)=\lim\limits_{a\to-\infty}\dfrac{x^{2a}-1}{x^{2a}+1}=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$

可见 $x=\pm 1$ 为第一类间断点，连续区间为 $(-\infty,-1)$、$(-1,1)$、$(1,+\infty)$. 图形如图(2).

2.3.26 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{x^{-2}}} & x\neq 0;\\ 0 & x=0\end{cases}$ 的连续性.

解 当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{x^{-2}}}$,有定义,且为初等函数,所以函数 $f(x)$ 是连续的.

当 $x=0$ 时,函数 $f(x)$ 在该点有定义,由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{x^{-2}}}=0=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是连续的.

可见 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

2.3.27 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant 0;\\ x, & x<0.\end{cases} \text{与 } \varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

在分界点的连续性.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x=0,$$

所以 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 处不连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1,\quad \lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1,$

又 $\varphi(1)=1$,所以 $\varphi(x)$ 在分界点 $x=1$ 处连续.

2.3.28 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}}{\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ 的连续性,如有间断点,指出其类型.

解 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 及 $x=2n(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处间断,除以上间断点外,$f(x)$ 处处连续.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 2n}f(x)=\infty$,

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,$x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. $x=2n$ $(n=\pm 1,2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

2.3.29 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}, & x\leqslant 0;\\ \sin\dfrac{x}{x^2-4}, & x>0.\end{cases}$ 的连续性，并确定间断点的类型.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{\pi}{x^2-4}=\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故在 $x=0$ 处，$f(x)$ 不连续，$x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

当 $x>0$ 时，$f(x)$ 由 $\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$ 表示，而 $x=\pm 2$ 是其分母函数 $y=x^2-4$ 的零点，但只有 $x=2$ 属于 $x>0$ 的范围，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点.

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 由 $\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ 表示，而 $x=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\cdots$ 是其分母函数 $y=\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 的零点，但只有 $x=-1,-3,-5,\cdots$ 属于 $x\leqslant 0$ 的范围，故 $x=-1,-3,-5,\cdots$ 是 $f(x)$ 的间断点.

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$.

因 $\cos\dfrac{\pi}{2}x=\cos(-\dfrac{\pi}{2}x)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}x)=\sin\dfrac{\pi}{2}(1+x)$.

令 $\dfrac{\pi}{2}(1+x)=\theta$，则 $1+x=\dfrac{2}{\pi}\theta$，且当 $x\to -1$ 时，$\theta\to 0$.

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(\frac{2}{\pi}\theta-1)\cdot\frac{2}{\pi}\theta}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot(\frac{2}{\pi}\theta-1)}{\frac{\sin\theta}{\theta}}=-\frac{2}{\pi}.$$

所以，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

当 $x_0=-3,-5,\cdots$ 时，分母函数值为零，而分子函数值不为零，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

所以 $x=-3,-5,\cdots$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

综上所述，函数 $f(x)$ 的间断是 $x=2,0,-1,-3,-5,\cdots$. 其中 $x=2$ 为振荡间断点，$x=0$ 为跳跃间断点，$x=-1$ 为可去间断点，$x=-3,-5,\cdots$ 为无穷间断点.

2.3.30　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

2.3.31　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(x-5), & -4\leqslant x<-1;\\ |x|, & -1\leqslant x\leqslant 2;\\ x^2-4x+6, & 0\leqslant x\leqslant 3.5.\end{cases}$

是否处处连续？

解　$f(x)$ 的两段 $\dfrac{1}{3}(x-5)$、x^2-4x+6 都是整式函数，故处处连续.

另一段为 $|x|=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 2;\\ -x, & -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$ 其中 x，$-x$ 也是连续的函数，故 $f(x)$ 只可能在 $-1,0,2$ 三点处间断. 因为

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}(-x)=1,$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{3}(x-5) = -2,$$

故在 $x=-1$ 处不连续. 而

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0;\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0;$$

又 $f(0)=0$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 最后,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-4x+6) = 2,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2,$$

又 $f(2)=2$. 故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续.

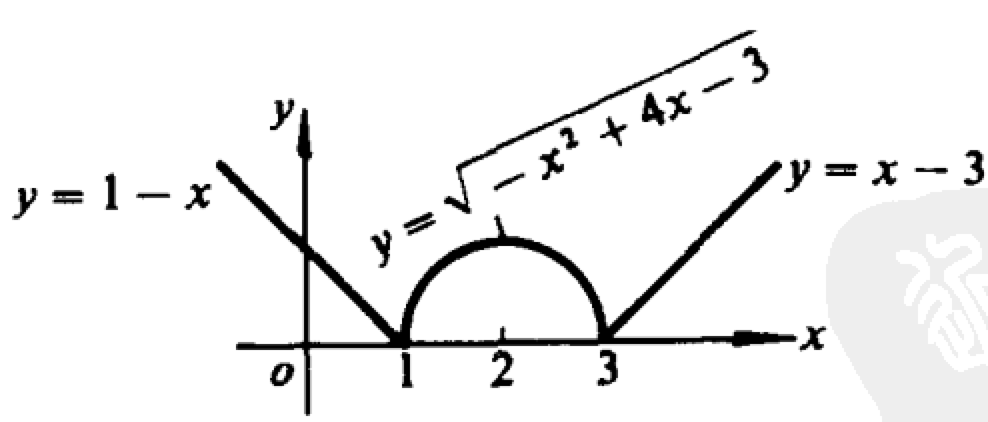
总之,$f(x)$ 不处处连续,而在 $[-4,-1)$,$(-1,3.5]$ 上连续.

2.3.32 设 $f(x)$ 的图形是由 $y=1-x$,$y=x-3$ 和 $x^2+y^2-4x+3=0$ 在上半平面($y\geqslant 0$)的图形所组成. 写出它的解析表达式,并讨论它的连续性.

解 由题意,$f(x)$ 的图形由三段组成:$y=1-x$ 上的直线段,$y=x-3$ 上的直线段,圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 的上半部分. 而上半圆与直线 $y=1-x$、$y=x-3$ 的交点分别为 $(1,0)$、$(3,0)$. 所以可得 $f(x)$ 的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1;\\ \sqrt{-x^2+4x-3}, & 1<x\leqslant 3;\\ x-3, & x>3.\end{cases}$$

显然,$f(x)$ 的间断点只能在 $x=1$ 或 $x=3$ 时出现.



2.3.32 题图

由于 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(1-x) = 0$,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{-x^2+4x-3} = 0,$$

$f(1)=0$;

及 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{-x^2+4x-3}=0$,

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0$,

$f(3)=\sqrt{-9+12-3}=0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

2.3.33 设 $F(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$, $(x-1)(t-1)>0$, $x\neq t$. $f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$, 试求 $f(x)$ 的连续区间, 并讨论 $f(x)$ 在间断点处的左、右极限.

解 先求出 $f(x)$ 的表达式.

因 $(x-1)(t-1)>0$, 所以 $\lim\limits_{t\to x}\dfrac{x-1}{t-1}=1$, 又因 $x\neq t$, 故 $\dfrac{1}{x-t}$ 有意义, 当 $t\to x$ 时, $\dfrac{1}{x-t}\to\infty$, 且 $x-t\neq 0$, $\dfrac{x-1}{t-1}\neq 1$, 所以

$$f(x)=\lim_{t\to x}F(x,t)=\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$$
$$=\lim_{t\to x}\left[\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-t}}\right]^{\frac{1}{t-1}}=e^{\frac{1}{x-1}}.$$

显然, 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 无意义, 故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点, $(-\infty,1)$、$(1,+\infty)$ 为 $f(x)$ 的连续区间.

对 $x=1$, 有

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

2.3.34 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{2x}, & x>0;\\ (1-x^2)^{\frac{4}{3}}+\cos 2x-1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[(1-x^2)^{\frac{4}{3}}+\cos 2x-1\right]=1,$$

及 $f(0)=(1-0)^{\frac{4}{3}}+\cos 0-1=1$，有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2.3.35 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因 $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

但 $f(0)=0$. 故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

2.3.36 讨论下列复合函数的连续性：

(1) 设 $y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1;\\ 2-u, & u>1.\end{cases}$

$u=\varphi(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ x+4, & x>1.\end{cases}$

(2) 设 $y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1;\\ 1, & 1<u\leqslant 5;\\ u-4, & u>5.\end{cases}$

$u=\varphi(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1;\\ x+4, & x>1.\end{cases}$

解 (1) $f[\varphi(x)]=\begin{cases}[\varphi(x)]^2, & \varphi(x)\leqslant 1;\\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1.\end{cases}$

因为，$x\leqslant 1$ 时，$\varphi(x)\leqslant 1$； $x>1$ 时，$\varphi(x)>1$. 于是

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1;\\ 2-(x+4), & x>1.\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1;\\ -x-2, & x>1.\end{cases}$$

故 $f[\varphi(x)]$ 在 $x=1$ 处间断.

$$(2)\ f[\varphi(x)] = \begin{cases} [\varphi(x)]^2, & \varphi(x) \leqslant 1; \\ 1, & 1 < \varphi(x) \leqslant 5; \\ \varphi(x) - 4, & \varphi(x) > 5. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1; \\ (x+4) - 4, & x > 1. \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1; \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

故 $f[\varphi(x)]$ 在 $x = 1$ 处连续.

2.3.37 设 $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ $(-\infty < x < +\infty)$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

试讨论 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的连续性.

解 因 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续函数,所以复合函数

$$f[g(x)] = g[f(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内也是连函数.

2.3.38 设 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} x - \pi, & x \leqslant 0; \\ x + \pi, & x > 0, \end{cases}$

试证在点 $x = 0$ 处 $f[g(x)]$ 连续.

证 $f[g(x)] = \sin g(x) = \begin{cases} \sin(x - \pi), & x \leqslant 0; \\ \sin(x + \pi), & x > 0, \end{cases}$

$$= \begin{cases} \sin[-(\pi - x)] = -\sin x, & x \leqslant 0; \\ \sin(\pi + x) = -\sin x, & x > 0. \end{cases}$$

即在 $(-\infty, \infty)$ 内, $f[g(x)] = -\sin x$. 从而 $f[g(x)]$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内连续. 故在 $x = 0$ 处连续.

2.3.39 当 $x = 0$ 时,函数 $f(x)$ 无意义,定义 $f(0)$ 的数值,使得 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续. 若:

(1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$; (2) $f(x) = \sin x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$;

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$ (4) $f(x) = x \cdot \ln^2 x$;

(5) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; (6) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$;

(7) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{3}{2},$$

故取 $f(0)=\dfrac{3}{2}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$，故取 $f(0)=0$；

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}=0$，故取 $f(0)=0$；

(4) 因 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln^2 x=0$，故取 $f(0)=0$；

(5) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{2x}\cdot 2=2$，故取 $f(0)=2$；

(6) 因 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，故取 $f(0)=e$；

(7) 因 $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$，故取 $f(0)=1$.

2.3.40　当 a、b 为何值时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 为连续函数.

解　从已知的极限式求得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1;\\ ax^2+bx, & |x|<1;\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1;\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=a+b$，所以

$$a+b=1. \tag{1}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=a-b$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$，所以

$$a-b=-1. \tag{2}$$

解(1)和(2)得 $a=0$，$b=1$. 故当 $a=0$，$b=1$ 时，$f(x)$ 为连续函数.

2.3.41 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义，在$[a,c]$和$[c,b]$上都连续，$f(x)$ 在$[a,b]$上连续吗？

解 是连续的.

因为 $f(x)$ 在$[a,c]$和$[c,b]$上分别连续，即 $f(x)$ 在 a 点右连续，在 b 点左连续，在(a,c)、(c,b) 内每点都连续，在点 c 既左连续又右连续. 故 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

2.3.42 若 $f(x)$ 连续，$|f(x)|$ 和 $f^2(x)$ 是否连续？又若 $|f(x)|$ 或 $f^2(x)$ 连续，$f(x)$ 是否连续？

解 设 $f(x)$ 在 x_0 连续，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，所以

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}|f^2(x) - f^2(x_0)| &= |f(x) - f(x_0)| \cdot |f(x) + f(x_0)| \\ &= |f(x) - f(x_0) + 2f(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &\leqslant (\varepsilon + 2|f(x_0)|) \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

由此可见，若 $f(x)$ 连续，则 $|f(x)|$ 及 $f^2(x)$ 也连续.

若 $|f(x)|$ 或 $f^2(x)$ 连续，则 $f(x)$ 不一定连续. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处间断，但 $|f(x)|$，$f^2(x)$ 均在 $x = 0$ 处连续.

2.3.43 设 $f(x)$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$内的实函数，并且具有中间值性质，即：如果 $f(a) < c < f(b)$，那么，在 a、b 之间有一个 x，使 $f(x) = c$. 再假设当 r 是有理数时，满足 $f(x) = r$ 的一切 x 组成闭集，证明 $f(x)$ 是连续函数.

证 用反证法，若存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，使 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则存在正数 ε_0 及以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}$，使得

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0, \quad n = 1,2,3,\cdots.$$

首先，设有无穷多个点$\{x_{n_k}\}$，使得 $|f(x_{n_k})| < f(x_0) - \varepsilon_0$，则存在 r_1 为有理数，使得

$$|f(x_{n_k})| < r_1 < f(x_0), \quad k = 1,2,\cdots, \tag{1}$$

由题设条件知，存在 ξ_k，使得 ξ_k 在 x_0 与 x_{n_k} 之间且 $r_1 = f(\xi_k)$，$k = 1,2,3,\cdots$，但$\{\xi_k\}$为闭集，故 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k = x_0$ 仍属于此闭集，从而 $f(x_0) = r_1$，此式与(1)式矛盾.

其次,若只有有限多个点 $x_1,x_2,\cdots,x_p$,使得

$$f(x_i) < f(x_0) - \varepsilon_0, \quad i = 1,2,\cdots,p$$

那么,必有无穷多个点 $\{x_{k_j}\}$ 满足:

$$f(x_0) < f(x_{k_j}) - \varepsilon_0, \quad j = 1,2,\cdots$$

仿上讨论,亦得出矛盾.

综上所述,故知 $f(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数.

2.3.44　证明函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ 1-x, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

仅有一个连续点 $x = \dfrac{1}{2}$,此外在任何点都不连续.

证　$\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$,

取有理点列 $r_n \to \dfrac{1}{2}$,则 $\varphi(r_n) = r_n \to \dfrac{1}{2}$,　　(1)

取无理点列 $\alpha_n \to \dfrac{1}{2}$,则 $\varphi(\alpha_n) = 1 - \alpha_n \to 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.　　(2)

由此,对任意点列 $x_n \to \dfrac{1}{2}$,若 x_n 中只有有限个无理点,则由(1)知,有 $\varphi(x_n) \to \dfrac{1}{2}$;若 x_n 中只有有限个有理点,则由(2)知,有 $\varphi(x_n) \to \dfrac{1}{2}$;若 x_n 中既有无限个有理点 x_{n_i},又有无限个无理点 x_{n_j},由(1)、(2)知,对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 I,当 $i > I$ 时,有 $|\varphi(x_{n_i}) - \dfrac{1}{2}| < \varepsilon$;存在 J,当 $j > J$ 时,有 $|\varphi(x_{n_j}) - \dfrac{1}{2}| < \varepsilon$,故取 $N = \max\{I, J\}$,则当 $n > N$ 时,有 $|\varphi(x_n) - \dfrac{1}{2}| < \varepsilon$.从而对任意点列 $x_n \to \dfrac{1}{2}$,都有 $\varphi(x_n) \to \dfrac{1}{2}$.再根据函数极限与数列极限的关系,便得到

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \varphi(x) = \frac{1}{2} = \varphi(\frac{1}{2}).$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{2}$ 处连续.

任取一点 $x_0 \neq \dfrac{1}{2}$,取有理点列 $r_n \to x_0$,则 $\varphi(r_n) = r_n \to x_0$;取无理

点列 $\alpha_n \to x_0$，则 $\varphi(\alpha_n) = 1 - \alpha_n \to 1 - x_0$. 因 $x_0 \neq \frac{1}{2}$，故 $x_0 \neq 1 - x_0$，由此推知 $\lim\limits_{x \to x_0^-} \varphi(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} \varphi(x)$ 均不存在. 所以 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续，x_0 为第二类间断点.

2.3.45　若 $f(f(x))$ 连续，$f(x)$ 是否连续？

答　未必连续. 如

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \geqslant 0; \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

可以看出，$f(f(x) \equiv 2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的 0 点不连续.

又如，由

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数}; \\ 0, & x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$

可知 $f(f(x)) \equiv 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，但 $f(x)$ 却处处不连续.

故 $f(f(x))$ 连续时，$f(x)$ 不一定连续.

2.3.46　设 (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续；(2) 当 $x = x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都不连续. 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点是否一定不连续？举出适当的例子.

解　(1) 未必. 例如

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geqslant 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0, \end{cases} \text{ 及 } f(x) = 0,$$

它们满足假设条件，其中 $f(x)$ 处处连续，而 $g(x)$ 在点 $x = 0$ 不连续，但 $f(x)g(x) \equiv 0$ 处处连续.

(2) 未必. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geqslant 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0, \end{cases} \text{ 及 } g(x) = f(x),$$

它们均在点 $x = 0$ 处不连续，但其乘积 $f(x)g(x) \equiv 1$ 却处处连续.

2.3.47　若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的，试证明函数 $\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$ 和 $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$ 也是连续的.

证　因为 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$，

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |(f(x) - g(x)|].$$

我们知道，若 $f(x)$ 为连续函数，则函数 $F(x) = |f(x)|$ 也是连续函数(见

2.3.42 题). 故 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是连续函数.

2.3.48　设函数在闭区间$[a,b]$上有定义并有界. 证明函数 $m(x) = \inf\limits_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$ 和 $M(x) = \sup\limits_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$ 在闭区间$[a,b]$上是左方连续的.

证　设 $x_0\in(a,b]$, 要证 $m(x)$ 在 x_0 左方连续. 由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界, 故 $m(x)$ 恒为有限. 任给 $\varepsilon>0$, 必存在一点 $\xi_0\in[a,x_0)$, 使得

$$f(\xi_0) < m(x_0) + \varepsilon.$$

于是当 $\xi_0 < x < x_0$ 时; 必有 $m(x_0) \leqslant m(x) \leqslant f(\xi_0) < m(x_0) + \varepsilon$, 由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0} m(x) = m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$ 在$[a,b]$也为左方连续.

2.3.49　证明狄利克莱函数 $X(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\{\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\}$ 对任意的 x 值都是不连续的.

证　记 $f(m,n) = \cos^n(\pi m!x)$.

当 x 为有理数时, 总可以认为 $m>p$, 其中 $x=\dfrac{q}{p}$(p,q 为互质的整数), 于是 $f(m,n)=1$, 故此时 $X(x)=1$;

当 x 为无理数时, 对任一固定的 m 而言, $|\cos(\pi m!x)|<1$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0$, 故此时 $X(x)=0$.

总之, $X(x) = \begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.}\end{cases}$

由实数的稠密性可知, 对于 x 的任一值, 在其任一邻域内均含有无限多个有理数和无理数, 因而 $X(x)$ 的值总在 1 和 0 这两数中取一个. 这样, $X(x)$ 的极限就不存在. 于是当 x 取任一值时, $X(x)$ 都是不连续的.

4. 连续函数的性质

2.3.50　证明: 若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases}-c, & f(x) < -c; \quad (*)\\ f(x), & |f(x)| \leqslant c; \quad (**)\\ c, & f(x) > c \quad (***)\end{cases}$$

也是连续函数. (式中 c 为任意正数).

证　设 x_0 为定义域内任一点, 分别讨论如下:

(1) 若 $|f(x_0)|<c$, 因 $f(x)$ 连续, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在

$\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,可使 $|f(x)|<c$,且 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,又由(**)式推知,$|f_c(x)-f_c(x_0)|<\varepsilon$.

(2) 若 $f(x_0)<-c$,因 $f(x)$ 连续,所以对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)<-c$,且 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,又由(*)式推知 $|f_c(x)-f_c(x_0)|=|-c-(-c)|=0<\varepsilon$.

(3) 同理可证得当 $f(x_0)>c$ 时,$|f_c(x)-f_c(x_0)|<\varepsilon_0$.

(4) 若 $f(x_0)=c$ 时,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,即 $|f(x)-c|<\varepsilon$,得 $c-\varepsilon<f(x)<c+\varepsilon$,故 $c-\varepsilon<f_c(x)\leqslant c$,于是 $|f_c(x)-c|<\varepsilon$ 和 $|f_c(x)-f_c(x_0)|<\varepsilon_0$.

(5) 同理可证 $f(x_0)=-c$ 的情况.

综上所述,$f(x)$ 在任一点都连续.

2.3.51 设 $f(x)$ 对任意实数有意义,且对任意的实数 x,y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,试证明:若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $f(x)$ 在一切 x 处连续.

证 设 x_0 为任一实数,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0+x_0)=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]\\&=\lim_{x\to x_0}f(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f(0)+f(x_0)\\&=f(0+x_0)=f(x_0).\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 x_0 点连续,由 x_0 的任意性知,$f(x)$ 在一切 x 处连续.

2.3.52 设 n 为自然数,函数 f 是 $[0,n]$ 上的连续函数,且 $f(0)=f(n)$,试证存在 $a,a+1\in[0,n]$,使 $f(a)=f(a+1)$.

证 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$,则 $g(x)$ 是 $[0,n-1]$ 上的连续函数,且

$$\sum_{k=0}^{n-1}g(k)=\sum_{k=0}^{n-1}[f(k+1)-f(k)]=f(n)-f(0)=0.$$

记 $\quad M(g)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant n-1}[g(x)],\quad m(g)=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant n-1}[g(x)],$

则 $\quad m(g)\leqslant g(k)\leqslant M(g),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$

$$m(g)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(k)\leqslant M(g).$$

由介值定理可知,存在 $a\in[0,n-1]$,使 $g(a)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}g(k)=0$. 即

有

$$g(a) = f(a+1) - f(a) = 0.$$

所以　$f(a) = f(a+1)$.

由于 $0 \leqslant a \leqslant n-1 < n$，所以 $0 \leqslant 1 \leqslant a+1 \leqslant n$，从而 $a, a+1 \in [0,n]$.

2.3.53　设 $f(x)$ 在$[0,n]$上连续，且 $f(0) = f(n)$，证明 $f(x) = f(y)$ 至少有 n 个不同的解. 其中 $y - x$ 是非负整数.

证　用数学归纳法证明.

当 $n = 1$ 时，命题显然成立. 设命题对 $n-1$ 成立，现证命题对 n 也成立. 为此，由假设 $f(x)$ 在$[0,n]$上连续，令

$$d(x) = f(x+1) - f(x), x \in [0, n-1],$$

若存在非负整数 k，$(0 \leqslant k \leqslant n-1)$，使得 $d(k) = 0$，则有 $f(k) = f(k+1)$. 若 $d(k) \neq 0$. 其中 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$. 因 $f(0) = f(n)$，故 $\sum_{k=0}^{n-1} d(k) = 0$. 由此可知存在非负整数 j $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$ 使

$$d(j) \cdot d(j+1) < 0,$$

由连续函数介值定理知，存在 $a \in (j, j+1)$ 使得 $d(a) = 0$.

综上所述，总存在 $\beta, \beta+1 \in [0,n]$，使得 $f(\beta) = f(\beta+1)$.

定义 $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,\beta]; \\ f(x+1), & x \in [\beta, n-1]. \end{cases}$

则 $g(x)$ 在$[0, n-1]$上连续，且 $g(0) = g(n-1)$，由归纳法假设存在 (x_i, y_i)，$i = 1,2,\cdots,n-1$，使得 $g(x_i) = g(y_i)$，其中 $y_i - x_i$ 为非负整数. 又

$$0 = g(y_i) - g(x_i) = \begin{cases} f(y_i) - f(x_i), & y_i < \beta; \\ f(y_i+1) - f(x_i), & x_i \leqslant \beta \leqslant y_i; \\ f(y_i+1) - f(x_i+1), & \beta < x_i. \end{cases}$$

由此即得 $f(x) = f(y)$ 的 $n-1$ 个不同的解，且 $y - x$ 为非负整数，再加上$(\beta, \beta+1)$得到 n 个不同的解.

2.3.54　设 $f(x)$ 在闭间$[0,2a]$上连续，且 $f(0) = f(2a)$，则在$[0,a]$上至少存在一点 x，使 $f(x) = f(x+a)$.

证　令 $F(x) = f(x) - f(x+a)$. 因 $f(x+a)$ 可以看作由 $f(u)$ 与 $u = x+a$ 复合而成，所以 $f(u)$ 在$[0,a]$上连续，故 $F(x)$ 在$[0,a]$上连续，注意到

$$F(0)=f(0)-f(a),$$
$$F(a)=f(a)-f(2a)=-[f(0)-f(a)].$$

(1) 若 $f(0)-f(a)=0$，则 $f(a)=f(0)=f(2a)$，即当 $x=0,a$ 时，有

$$f(x)=f(x+a). \tag{1}$$

(2) 若 $f(0)-f(a)\neq 0$，则 $F(0)\cdot F(a)<0$，由介值定理，在 $[0,a]$ 内至少存在一点 ξ，使 $F(\xi)=0$. 即

$$f(\xi)=f(\xi+a). \tag{2}$$

综合(1)、(2) 得，在 $[0,a]$ 上至少存在一点 x，使

$$f(x)=f(x+a).$$

2.3.55　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<c<d<b$，试证在 $[a,b]$ 上必存在一点 ξ，使

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi).$$

证　因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取得最大值 $\overline{M}$ 和最小值 $\overline{m}$. 又因为

$$(m+n)\overline{m}<mf(c)+nf(d)\leqslant(m+n)\overline{M},$$

即
$$\overline{m}\leqslant\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}\leqslant\overline{M}.$$

故由介值定理，在 $[a,b]$ 上必存在一点 ξ，使

$$\frac{mf(c)+nf(d)}{m+n}=f(\xi),$$

即
$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi).$$

2.3.56　函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明在 (a,b) 内存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证　因 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，故有最大值 M、最小值 m，而

$$m=\frac{nm}{n}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant\frac{nM}{n}=M.$$

由介值定理知，有 $\xi\in[x_1,x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

显然 $\xi\in(a,b)$.

2.3.57　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，证明至少有一点 $c\in[0,1]$，使 $f(c)=c$.

证　如果 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，就取 $c=0$ 或 1.

现设 $f(0)>0, f(1)<1$. 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 因为

$$F(0)=f(0)-0>0, F(1)=f(1)-1<0,$$

故由介值定理知，至少有一点 $c\in(0,1)$，使 $F(c)=0$，即 $f(c)=c$.

2.3.58　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明一定存在长度为 $\frac{b-a}{2}$ 的区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使 $f(\alpha)=f(\beta)$，即在区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上一定存在 α，使得

$$f(\alpha)=f(\alpha+\frac{b-a}{2}).$$

证　设 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$，则 $F(x)$ 在区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上连续，且

$$F(a)=f(a)-f(a+\frac{b-a}{2})=f(a)-f(\frac{a+b}{2}),$$

$$F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b).$$

又 $f(a)=f(b)$，故

$$F(a)\cdot F(\frac{a+b}{2})=-[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]^2\leqslant 0.$$

根据连续函数的介值定理，必存在 $\alpha\in[a,\frac{a+b}{2}]$，使 $F(\alpha)=0$. 即

$$f(\alpha)=f(\alpha+\frac{b-a}{2}).$$

2.3.59　已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，则对任一实数 $l,(0<l<1)$，必有实数 $x_0,(0\leqslant x_0\leqslant 1)$，使

$$f(x_0)=f(x_0+l).$$

证　作函数 $F(x)=f(x)-f(x+l)$，则

$$F(0)=f(0)-f(l)\leqslant 0,\quad F(1-l)=f(1-l)\geqslant 0.$$

若 $F(0)=0$，则 $x_0=0$ 即为所求；若 $F(1-l)=0$，则 $x_0=1-l$ 即为所求；若 $F(0)\neq 0, F(1-l)\neq 0$，则 $F(0)<0, F(1-l)>0$，于是由 $F(x)$ 的连续性可知，存在 $0<x_0<1-l<1$，使

$$F(x_0)=f(x_0)-f(x_0+l)=0.$$

即存在 $x_0\in[0,1-l]$，使

$$f(x_0) = f(x_0 + l).$$

2.3.60 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，若有数列 $x_n \to a, y_n \to a\ (x_n, y_n \in (a,b))$，使极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$ 存在，则对 A 和 B 间的任意数 u，必可找到数列 $z_n \to a$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = u$.

证 若 $u = A$ 或 $u = B$，则取 $Z_n = x_n$ 或 $Z_n = y_n$. 故设 $A < u < B$.

因 $f(x_n) \to A$，所以存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，$f(x_n) < u$. 又因 $f(y_n) \to B$，所以存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，$f(y_n) > u$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，$f(x_n) < u < f(y_n)$.

由于 $f(x)$ 在 $[x_n, y_n]$ 上连续，由连续函数的介值定理知，有 z_n 介于 x_n 与 y_n 之间，使得 $f(z_n) = u$. 从而可构造数列 $\{z_n\}$，使 $f(z_n) \to u$，而且由 $x_n \to a, y_n \to a$ 知 $z_n \to a$.

2.3.61 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又设 $f(x)$ 只取有理值，且 $f(\frac{1}{2}) = 2$，试证 $f(x) \equiv 2$.

证 设 x_0 为 $[0,1]$ 不同于 $\frac{1}{2}$ 的任一点，因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，若 $f(x_0) \neq f(\frac{1}{2}) = 2$，则由介值定理知，$f(x)$ 必取得介于 $f(x_0)$ 与 2 之间的任何值，包括有理值和无理值，这与 $f(x)$ 只取有理值矛盾. 故 $f(x_0) = f(\frac{1}{2}) = 2$，因而在 $[0,1]$ 上，$f(x) \equiv 2$.

2.3.62 连续函数 $f(x)$ 如果在有理点处为零，则此函数恒为零.

证法 1 用反证法，设 $f(x)$ 不恒为零，比方说在 x_0 处有 $f(x_0) > 0$，则对 x_0 的某一邻域内的一切 x，有 $f(x) > 0$，这一切 x 里有有理点，即在此邻域内的有理点处 $f(\gamma) > 0$，这与假设矛盾.

对于 $f(x_0) < 0$，可同样证明.

证法 2 设 β 为任一无理数，取一列有理数

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \cdots \to \beta,$$

由 $f(\beta)$ 在 β 的连续性，得

$$f(\gamma_1), f(\gamma_2), \cdots, f(\gamma_n), \to f(\beta),$$

即 $0, 0, \cdots, 0, \cdots \to f(\beta)$，由此得 $f(\beta) = 0$. 故 $f(x)$ 在有理点和无理点均为 0，即 $f(x)$ 恒为零.

2.3.63 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且无零点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为正（或负）.

证　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为正(或负)，不妨设 $f(x_1)<0$，$f(x_2)>0$，因 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，故在$[a,b]$上必至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$. 这与题设 $f(x)$ 在$[a,b]$上无零点相矛盾.

2.3.64　设 $f(x)$ 为连续函数，$x=a$、$x=b$ 是 $f(x)$ 的两个相邻的根. 证明：若已知(a,b)内一点 c，使 $f(c)>0$(或 <0)，则 $f(x)$ 在(a,b)内必处处为正(或负).

证　用反证法，设 d 为(a,b)内的一点，使 $f(d)<0$，则有 $f(c)\cdot f(d)<0$，即在(c,d)内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$，即 $x=\xi$ 为函数 $f(x)=0$ 的一个根，这与假设矛盾. 所以，$f(x)$ 在(a,b)内处处为正.

若 $f(c)<0$，同理可证得 $f(x)$ 在(a,b)内处处为负.

5. 判断方程的根

2.3.65　证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上至少有一个根.

证　令 $\varphi(x)=\sin x+x+1$，因为 $\varphi(-\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$，$\varphi(\frac{\pi}{2})=2+\frac{\pi}{2}>0$，故由介值定理知，在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$内至少有一个 ξ 使 $\varphi(\xi)=\sin\xi+\xi+1=0$，即 $x=\xi$ 为其一个根.

2.3.66　试证 $x=a\sin x+b(a,b>0)$ 至少有一个正根，且不超过 $a+b$.

证　设 $f(x)=a-a\sin x-b\ (a,b>0)$，它在$[0,a+b]$上连续，且 $f(0)=-b<0$，

$$f(a+b)=a-a\cdot\sin(a+b)=a[1-\sin(a+b)].$$

若 $\sin(a+b)=1$，则 $f(a+b)=0$，$a+b$ 即为一个根.

若 $\sin(a+b)<1$，则 $f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]>0$，于是，$f(0)$ 与 $f(a+b)$ 异号. 故在$(0,a+b)$内只有一个根 ξ.

2.3.67　设有两个多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

与
$$g(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

且其中的 a_j 与 $b_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_{n-1}<b_{n-1}<a_n<b_n.$$

试证明对任意的正数 λ，方程

$$f(x)+\lambda g(x)=0 \tag{1}$$

的 n 个根都是实根.

证　由题设知

$$f(a_n)+\lambda g(a_n)=\lambda g(a_n)$$
$$=\lambda(a_n-b_1)\cdots(a_n-b_{n-1})\cdot(a_n-b_n)<0,$$
$$f(b_n)+\lambda g(b_n)=f(b_n)$$
$$=(b_n-a_1)\cdots(b_n-a_{n-1})\cdot(b_n-a_n)>0.$$

因 $f(x)+\lambda g(x)$ 是 n 次多项式,它在区间 $[a_n,b_n]$ 上连续,由连续函数的性质知,必有满足 $a_n<c_n<b_n$ 的 c_n,使 $f(c_n)+\lambda g(c_n)=0$(即 c_n 是方程(1)的根).类似地,可证方程(1)在区间 (a_j,b_j) 内都有根 $(j=1,2,\cdots,n)$,故方程(1)的 n 个根都是实根,分别含在区间 (a_j,b_j) 内,$(j=1,2,\cdots,n)$.

2.3.68　试证任何一元三次方程

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

至少有一个实根(其中 a_0,a_1,a_2,a_3 都是实数).

证　设 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 并设 $a_0>0$,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=a_0>0,$$

即当 $|x|$ 足够大时有 $\dfrac{f(x)}{x^3}>\dfrac{a_0}{2}$.故

当 $x>0$ 时,$f(x)>\dfrac{a_0}{2}x^3$,$x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$;

当 $x<0$ 时,$f(x)<\dfrac{a_0}{2}x^3$,$x\to-\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$.

所以在 $(-\infty,+\infty)$ 内必存在两点 a 和 b,使 $f(a)<0$,$f(b)>0$.又因 $f(x)$ 连续,根据根的存在定理,在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$,故方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

若 $a_0<0$.可仿照上面方法证明.

6. 利用连续性求极限

2.3.69　利用函数的连续性求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}]^x$

$$=[\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}]^x=e^x.$$

$$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\{[(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}}]^{2a}\cdot(1+\frac{2a}{x-a})^a\}$$

$$=e^{2a}\cdot 1^a=e^{2a}\quad(a\text{为正实数}).$$

2.3.70　求$\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

解　令$x-e=t$或$x=t+e$,当$x\to e$时,$t\to 0$.从而

$$\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+e)-\ln e}{t}$$

$$=\lim\limits_{t\to 0}[\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{t+e}{e}]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{e}[\ln(1+\frac{t}{e})^{\frac{e}{t}}]$$

$$=\frac{1}{e}\ln[\lim\limits_{t\to 0}(1+\frac{t}{e})^{\frac{e}{t}}]=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}.$$

2.3.71　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln[3^x(1+3^{-x})]}{\ln[2^x(1+2^{-x})]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\frac{\ln(1+3^{-x})}{x}}{\ln 2+\frac{\ln(1+2^{-x})}{x}}=\frac{\ln 3+0}{\ln 2+0}=\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

2.3.72　求$\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x]$,式中$a_1,a_2,\cdots,a_k$是给定的常数.

解　$\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x$

$$=\frac{(\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)})^k-x^k}{(\sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)})^{k-1}+x(\sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)})^{k-2}+\cdots+x^{k-1}}$$

$$=\frac{(a_1+\cdots+a_k)x^{k-1}+(a_1a_2+a_1a_3\cdots+a_{k-1}a_k)x^{k-2}+a_1a_2\cdots a_k}{(\sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)})^{k-1}+x(\sqrt[k]{(x+a_1)\cdots(x+a_k)})^{k-2}+\cdots+x^{k-1}}$$

$$=\frac{(a_1+\cdots+a_k)+\dfrac{a_1a_2+\cdots+a_{k-1}a_k}{x}+\cdots+\dfrac{a_1+\cdots+a_k}{x^{k-1}}}{\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-1}+\left[\sqrt[k]{(1+\frac{a_1}{x})\cdots(1+\frac{a_k}{x})}\right]^{k-2}+\cdots+1}$$

$$\to\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+\overbrace{0+0+\cdots+0}^{k-1\text{项}}}{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\text{项}}}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)}-x\right]=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}.$$

2.3.73 求$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)$，$(a>0)$.

解 先考虑极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)$，如果它的值等于$A$，则必有

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=A.$$

令$a^{\frac{1}{x}}-1=t$或$x=\dfrac{\ln a}{\ln(1+t)}$，当$x\to+\infty$时，$t\to0$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{t\to0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)}\cdot t=\lim_{t\to0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\frac{\ln a}{\ln\left[\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]}$$

$$=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a.$

2.3.74 设$f(x)$在$(0,+\infty)$内连续，当$x>0$时，$0\leqslant f(x)<x$，若$a_1\geqslant0$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 因$0\leqslant f(x)<x$ $(x>0)$，故由$a_1\geqslant0$知，

$$a_{n+1}=f(a_n)<a_n,$$

即$\{a_n\}$单调递减且有下界0，所以可设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A，从而有 A=f(A).$$

若$A>0$，则$A=f(A)<A$，矛盾. 故$A=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

7. 一致连续

2.3.75　对于$\varepsilon>0$，求使函数$f(x)$在已知区间上满足一致连续的条件的$\delta=\delta(\varepsilon)$（任何的！），设

(1) $f(x)=5x-3,\quad(-\infty<x<+\infty)$；

(2) $f(x)=x^2-2x-1,\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad(0.1\leqslant x\leqslant 1)$；

(4) $f(x)=2\sin x-\cos x,(-\infty<x<+\infty)$.

解　(1) $|f(x_1)-f(x_2)|=5|x_1-x_2|$，故取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$即可.

(2) $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-2|$，

由于$-2\leqslant x\leqslant 5$，故$|x_1+x_2-2|\leqslant 8$，于是只需取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{8}$.

(3) $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|\leqslant\dfrac{|x_1-x_2|}{0.01}$，

只需取$\delta=0.01\varepsilon$.

(4) $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2|\sin x_1-\sin x_2|+|\cos x_1-\cos x_2|$

$$\leqslant 2|x_1-x_2|+\left|\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)\right|=3|x_1-x_2|,$$

故只需取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

2.3.76　函数$f(x)=x^2$在下列区间是否为一致连续的？

(1) $(-l,l)$，(这里l为任意的正数)；(2) 区间$(-\infty,+\infty)$.

解　(1) 当x_1、$x_2\in(-l,l)$时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2l|x_1-x_2|$.

对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2l}$，则当$|x_1-x_2|<\delta$，且$x_1,x_2\in(-l,l)$时，恒有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，故$f(x)$在$(-l,l)$上一致连续.

(2)　取$\varepsilon_0=1$，不论$\delta>0$取得多么小，只要n充分大，我们总可以使$x_n'=n+\dfrac{1}{n}$，$x_n''=n$的距离$|x_n'-x_n''|=\dfrac{1}{n}<\delta$. 但是，

$$|f(_n')-f(x_n'')|=2+\left(\frac{1}{n}\right)^2>\varepsilon_0.$$

可见$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

2.3.77　证明$y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

证　对任意的$\varepsilon>0$，由于$y=\sqrt{x}$在$[0,1]$上连续，从而在$[0,1]$上一致连续. 故存在δ_1，当$x_1,x_2\in[0,1]$且$|x_1-x_2|<\delta_1$时，有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

由于 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处连续，故存在 δ_2，当 $|x-1|<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-f(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

在区间$[1,+\infty)$上，取 $\delta_3=\varepsilon$，于是当 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_3$ 时，

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|<|x_1-x_2|<\delta_3=\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，则当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$. 即 $y=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

2.3.78 讨论下列函数在已知域上的一致连续性.

(1) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$，$(-1\leqslant x\leqslant 1)$；

(2) $f(x)=\ln x$，$(0<x<1)$.

解 (1) $$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{x_1}{4-x_1^2}-\frac{x_2}{4-x_2^2}\right|$$
$$=\left|\frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right|\cdot|x_1-x_2|,$$

由于 $\left|\frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}\right|<\frac{4+1}{3\cdot 3}=\frac{5}{9}<1$，故对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则对满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 的值，均有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 因而，$f(x)$ 在区间$[-1,1]$上一致连续.

(2) 考虑 $x_n=\frac{1}{n}$，$x_n'=\frac{1}{2n}$，则当 $0<\varepsilon_0<\ln 2$ 时，不论 δ 如何选取，只要 n 充分大，我们总可使 $|x_n-x_n'|=\frac{1}{2n}<\delta$，但是，

$$|f(x_n)-f(x_n')|=\ln 2>\varepsilon,$$

因而，$f(x)$ 在区间$(0,1)$内并非一致连续.

2.3.79 证明：$\sqrt{\ln x}$ 在$[1,+\infty)$上一致连续.

证 由于 $\sqrt{u}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续，$\ln x$ 在$[1,+\infty)$上一致连续，当 $x\geqslant 1$ 时，恒有 $\ln x\geqslant 0$ 成立. 因此 $\sqrt{\ln x}$ 在$[1,+\infty)$上一致连续.

2.3.80 试证 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内一致连续.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$，由于

$$|\sin x'-\sin x''|=|2\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}|\leqslant|x'-x''|,$$

欲使 $|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon$,只要 $|x'-x''|<\varepsilon$,故取 $\delta=\varepsilon$,则当 $|x'-x''|<\delta$ 时,均有

$$|\sin x'-\sin x''|<\varepsilon.$$

所以,$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是一致连续的.

2.3.81　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内是连续的,但在此区间内并非一致连续.

证　连续性是显然的,现证其非一致连续.考虑区间$(0,1)$内的两个点列.

$$x_n=\frac{1}{n},\ x_n'=\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

当 $0<\varepsilon_0<1$ 时,不论 $\delta>0$ 取得多小,只要 n 取得充分大,总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{n(n+1)}<\delta.$$

但是,　$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0$.

因而,$f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$上并非一致连续.

2.3.82　试证 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内非一致连续.

证　取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$,对任意 $\delta>0$,都有

$$x'=\frac{1}{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi},\quad x''=\frac{1}{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi+\frac{\pi}{2}},$$

满足 $x',x''\in(0,1)$,且

$$|x'-x''|=\left|\frac{1}{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi}-\frac{1}{(\frac{1}{\delta}+1)\pi+\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$=\frac{\frac{\pi}{2}}{\{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi\}\cdot\{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi+\frac{\pi}{2}\}}$$

$$<\frac{1}{2([\frac{1}{\delta}]+1)}<\frac{\delta}{2}<\delta.$$

但是 $\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|$

$$=\left|\sin([\frac{1}{\delta}]+1)\pi-\sin\{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi+\frac{\pi}{2}\}\right|$$

$$=\left|\sin\{([\frac{1}{\delta}]+1)\pi+\frac{\pi}{2}\}\right|=1>\varepsilon_0.$$

所以 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内非一致连续.

2.3.83 试证 $f(x)=x\cdot\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内非一致连续.

证 借助于拉格朗日定理,容易证明:当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时,恒有 $\sin x>\frac{x}{2}$.

取 $\varepsilon_0=\frac{\pi}{8}$,对任意正数 $\delta<\frac{2\pi}{3}$,都存在 $x_1=[\frac{1}{\delta}+1]$,$x_2=[\frac{1}{\delta}+1]\pi+\frac{\delta}{2}$,满足 $|x_1-x_2|<\delta$. 但

$$|x_1\cdot\sin x_1-x_2\sin x_2|=([\frac{1}{\delta}+1]\pi+\frac{\delta}{2})\cdot\sin\frac{\delta}{2}$$

$$>\frac{\pi}{\delta}\sin\frac{\delta}{2}>\frac{\pi}{\delta}\cdot\frac{\delta}{4}=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

故 $f(x)=x\cdot\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内非一致连续.

2.3.84 试证下列函数在指定的区间内一致连续.

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $(0<x<\pi)$;

(2) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $x\in[c,+\infty)$, $(c>0)$.

证 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$,定义函数

$$F(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \frac{\sin x}{x}, & 0<x<\pi;\\ 0, & x=\pi.\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,据康托定理知,$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上一致连续,从而 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内一致连续.

(2) 由于 $\cos x$ 与 $\sqrt{x}$ 均在 $[c,+\infty)$ 上一致连续,又 $\cos x$ 在

$[c,+\infty)$ 上有界，对任意的 $x\geqslant c$，都有 $\sqrt{x}\geqslant\sqrt{c}$，故，$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

注　这里用到如下定理：设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在区间 X 上一致连续，且 $f(x)$ 在 X 上有界，又存在 $a>0$，使对任意 $x\in X$ 都有 $|g(x)|\geqslant a$ 成立，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 X 上一致连续且有界.

2.3.85　讨论 $f(x)=e^x\cdot\cos\frac{1}{x}(0<x<1)$ 的一致连续性.

解　取 $\varepsilon_0=1$，令 $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$，$x_n'=\frac{1}{n\pi}$（n 为正整数），显然 x_n，x_n' 均属于 $(0,1)$，不论 $\delta>0$ 取得多么小，只要 n 充分大，总有

$$|x_n-x_n'|=\frac{1}{(2n+1)n\pi}<\delta.$$

但
$$|f(x_n)-f(x_n')|=e^{\frac{1}{n\pi}}>1=\varepsilon_0,$$

因而 $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内非一致连续.

2.3.86　讨论 $f(x)=\operatorname{arctg}x$，$(-\infty<x<+\infty)$ 的一致连续性.

解　当 x'，x'' 充分接近时，

$$|f(x')-f(x'')|=|\operatorname{arctg}x'-\operatorname{arctg}x''|=\operatorname{arctg}\left|\frac{x'-x''}{1+x'x''}\right|.$$

若 x'，x'' 同号，则 $1+x'x''>1$，

若 x'，x'' 异号，则取 δ_1 如此之小，使 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，$|1+x'x''|>\frac{1}{2}$. 所以 $\operatorname{tg}|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{x'-x''}{1+x'x''}\right|<2|x'-x''|$. 更取 $\delta_2=\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{2}$，则当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，

$$\operatorname{tg}|f(x')-f(x'')|<\operatorname{tg}\varepsilon\text{，即 }|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

故取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致连续.

2.3.87　证明：函数 $f(x)=\sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty<x<+\infty$ 内是连续的，并且有界，但在此区间上并非一致连续.

证　命题的前半部分是明显的，这里只证明 $\sin^2x$ 在 $-\infty<x$

$<+\infty$ 内并非一致连续.

取 $x''=(2n\pi)^{\frac{1}{2}}$, $x'=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$ 其中 n 为待定的正整数.

对于任意给定的正数 ε,无论选取 δ 为怎样小的正数,必可取 n 如此之大,使

$$|x'-x''|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}+\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}<\delta.$$

但此时 $|\sin x'^2-\sin x''^2|=|\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})|=1>\varepsilon$.

因此,$\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内并非一致连续.

2.3.88 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内连续,试证:$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

证 充分性.因 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,所以 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在且有限.定义 $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $f(b)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$,于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.由康托定理,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,故在 (a,b) 内一致连续.

必要性.若 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在 $\delta>0$,使对 (a,b) 中的任意两点 x', x'',只要 $|x'-x''|<\delta$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

特别地,当 $a<x'<a+\delta$, $0<x''<a+\delta$ 时,必有

$$|f(x')+f(x'')|<\varepsilon.$$

当 $b-\delta<x'<b$, $b-\delta<x''<b$ 时,也必有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

因此,根据柯西收敛准则,$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在.

2.3.89 证明:在有限区间 (a,b) 内有定义且连续的函数 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上的充要条件是函数在区间 (a,b) 内是一致连续的.

证 必要性.若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上,则延拓后的函数在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续,当然 $f(x)$ 在 (a,b) 内也是一致连续的.

充分性. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，显然 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在(有限)，如下定义 $[a,b]$ 上的函数 $f^*(x)$：

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<b;\\ f(a+0), & x=a;\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f^*(x)\equiv f(x)$，故 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续延拓.

2.3.90　函数 $\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$（式中的 x_1,x_2 为 (a,b) 中受条件 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 限制的任意两数）称为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的连续模. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta)=0$.

证　必要性. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续. 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，对 (a,b) 中任何两点 x_1、x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta'$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $0<\delta<\delta'$，则当 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 时，必有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而 $\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，由此可知 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta)=0$.

充分性. 设 $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta)=0$. 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使当 $0<\delta<\delta'$ 时，恒有 $\omega_f(\delta)<\varepsilon$.

现设 x_1、x_2 是 (a,b) 内满足 $|x_1-x_2|<\delta'$ 的任两点.

若 $x_1=x_2$，则显然

$$|f(x_1)-f(x_2)|=0<\varepsilon;$$

若 $x_1\neq x_2$，令 $|x_1-x_2|=\delta^*$，则 $0<\delta^*<\delta$. 于是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\omega_f(\delta^*)<\varepsilon.$$

由此可知，$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

2.3.91　证明若函数 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上有定义并且是连续的，而且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上是一致连续的.

证　对任意的 $\varepsilon>0$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，故必存在 $X>a$，使当 $x'>X$，$x''>X$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在$[a,X+1]$上连续，故一致连续，从而必有正数 δ' 存在，使当 $x'\in[a,X+1]$，$x''\in[a,X+1]$，$|x'-x''|<\delta'$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

令 $\delta=\min\{\delta',1\}$，现设 x',x'' 是满足 $a\leqslant x'<+\infty$，$a\leqslant x''<+\infty$，$|x'-x''|<\delta$ 的任意两点，由于 $|x'-x''|<\delta$，故 x' 与 x'' 或同时属于$[a,X+1]$，或同时满足 $x'>X$，$x''>X$. 因此，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上一致连续.

2.3.92 证明：若单调有界函数 $f(x)$ 在有穷或无穷区间(a,b)上是连续的，则此函数在区间(a,b)上是一致连续的.

证 分三种情形讨论.

(1) 设(a,b)是有穷区间. 由于 $f(x)$ 在(a,b)内单调有界，故极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限). 在$[a,b]$上定义函数 $f^*(x)$：

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } a<x<b \text{ 时;}\\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时;}\\ f(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时.}\end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在$[a,b]$上连续，从而一致连续，当然在(a,b)上也一致连续，故 $f(x)$ 在(a,b)上一致连续.

(2) a 为有限数，$b=+\infty$. 此时，令

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } a<x<+\infty \text{ 时;}\\ f(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时,}\end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限)，故 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上一致连续，从而 $f(x)$ 在 $a<x<+\infty$ 上一致连续.

若 $a=-\infty$，b 为有限数，考虑函数 $g(x)=f(-x)$，$(-b<x<+\infty)$，即可化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(3) $a=-\infty$，$b=+\infty$. 任给 $\varepsilon>0$. 利用(2)中已证的结果，$f(x)$ 在 $0<x<+\infty$ 上一致连续，故存在 $\delta_1>0$ 使当 x' 与 x'' 都属于$(0,+\infty)$且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

同样利用(2)中已证的结果，$f(x)$ 在 $-\infty<x<1$ 上一致连续，故对于

同一个ε,存在$\delta_2>0$,使当x'与x''都属于$(-\infty,1)$且$|x'-x''|<\delta_2$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现令$\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$,则当$-\infty<x'<+\infty$, $-\infty<x''<+\infty$, $|x'-x''|<\delta$时,x'与x''必或是同属于区间$(0,+\infty)$,或是同属于区间$(-\infty,1)$.因此,

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

2.3.93 证明无界函数$f(x)=x+\sin x$于全轴$-\infty<x<+\infty$上一致连续.

证 $$|f(x')-f(x'')|=|(x'-x'')+(\sin x'-\sin x'')|$$
$$\leqslant|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|\leqslant 2|x'-x''|.$$

对任意的$\varepsilon>0$取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$,则当$-\infty<x'<+\infty$, $-\infty<x''<+\infty$, $|x'-x''|<\delta$时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故$f(x)$在$-\infty<x<+\infty$上一致连续.

2.3.94 证明函数$f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$在每个区间$J_1=(-1,0)$及$J_2=(0,1)$上是一致连续的,但在它们的和$J_1+J_2=\{x|0<|x|<1\}$上并非一致连续.

证 在$J_1=(-1,0)$上,$f(x)=-\dfrac{\sin x}{x}$;在$J_2=(0,1)$上,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,它们的一致连续性由2.3.89题可知,由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

故必存在$\eta>0\ (\eta<1)$,使当$0<x_1<\eta$, $-\eta<x_2<0$时,恒有$|f(x_1)-f(x_2)|>1$.现取$\varepsilon_0=1$,则不论$\delta>0$取得多么小,都可取两点x'_1和x'_2,使$0<x_1'<\min\{\eta,\dfrac{\delta}{2}\}$, $-\min\{\eta,\dfrac{\delta}{2}\}<x_2'<0$,于是$|x_1'-x_2'|<\delta$,但是,

$$|f(x_1')-f(x_2')|>\varepsilon_0=1.$$

由此可知，$f(x)$ 在 $J_1 + J_2 = \{x|0 < |x| < 1\}$ 上非一致连续.

2.3.95 证明 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $0 < x < 1$ 内非一致续，而在 $1 < x < 2$ 与 $2 < x < +\infty$ 内均一致连续.

证 考虑(0,1)内的两串点 $x_n' = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$

$x_n'' = \dfrac{1}{2n\pi}$，$|x_n' - x_n''| = \dfrac{1}{2n(4n+1)\pi}$. 无论 $\delta > 0$ 取得怎么小，只要 n 充分大，总可以使 $|x_n' - x_n''| < \delta$. 但

$$|f(x_n') - f(x_n'')|$$
$$= \frac{\dfrac{2}{(4n+1)\pi}+2}{\dfrac{2}{(4n+1)\pi}+1}\cdot\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2}) - \frac{\dfrac{1}{2n\pi}+2}{\dfrac{1}{2n\pi}+1}\cdot\sin(2n\pi)$$
$$= \frac{2+2(4n+1)\pi}{2+(4n+1)\pi} > 1.$$

故 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)上非一致连续.

由于 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$ 在[1,2]上连续，故在[1,2]上一致连续，从而在(1,2)内连续.

又由于 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上一致连续，从而在 $(2,+\infty)$ 上一致连续.

8. 综合问题

2.3.96 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且

$$l = \varliminf_{x\to a^+} f(x) \text{ 及 } L = \varlimsup_{x\to a^+} f(x).$$

证明对任意数 $\lambda\ (l \leqslant \lambda \leqslant L)$，有数列 $x_n \to a^+ (n = 1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda.$$

证 当 $\lambda = l$ 或 $\lambda = L$ 时，结论都是显然的. 故设 $l < \lambda < L$. 由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$，$a_n \to a^+$，$b_n \to a^+$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = L$. 于是，存在自然数 N，使当 $n > N$ 时，恒有 $f(a_n) < \lambda$ 及 $f(b_n) > \lambda$.

再由 $f(x)$ 的连续性可知，a_n 与 b_n 之间存在 x_n，使 $f(x_n)=\lambda$ $(n>N)$.

这样选取的 $\{x_n\}$，由于 $a_n\to a^+$，$b_n\to a^+$，故 $x_n\to a^+$，从而

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

2.3.97　已知函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-a}$，若 $x\neq a$ 及 $f(a)=0$，试证明：在任意闭区间 $[a,b]$ 上，$f(x)$ 取于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切值，但 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上并不连续.

证　事实上，只要 $a<b$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取 $[-1,1]$ 之间的一切值，自然取 $f(a)=0$ 与 $f(b)(|f(b)|\leqslant 1)$ 之间的一切值. 但 $f(x)$ 在 $x=a$ 处显然不连续.

2.3.98　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界.

证　只讨论上方有界的情况，下方有界类同.

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上方无界，于是对于任意正整数 n，应有 $x_n\in[a,b]$，使 $f(x_n)>n$. 于是就得到一个有界数列 $\{x_n\}$，从而必有收敛的子叙列 $\{x_{n_k}\}$.

设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\leqslant x_0$，由于 $a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$ $(k=1,2,\cdots)$，则必有 $a\leqslant x_0=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\leqslant b$，即 $x_0\in[a,b]$.

再由 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性得，$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$，于是数列 $\{f(x_{n_k})\}$ 是有界的.

然而，$f(x_{n_k})>n_k\to\infty(k\to\infty)$，与 $\{f(x_{n_k})\}$ 有界相矛盾. 从而原命题得证.

2.3.99　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，试证 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界.

证　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>\max\{0,a\}$，当 $x>N$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 所以

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<\varepsilon+|A|.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,N]$ 上连续，从而 $f(x)$ 在 $[a,N]$ 上有界，即存在 $B>0$，当 $x\in[a,N]$ 时，$|f(x)|\leqslant B$.

令 $M=\max\{B,|A|+\varepsilon\}$，则对于任意的 $x\in[a,+\infty)$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

即函数 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上有界.

2.3.100 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，皆有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$，则对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，有 $f(x) = x \cdot f(1)$.

证 先用数学归纳法证明

$$f(nx) = nf(x), \ x \in (-\infty, +\infty), n \text{ 为自然数}. \tag{1}$$

当 $n = 2$ 时，由题设有

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x),$$

设 $n = k$ 时.(1) 式成立，即有 $f(kx) = k \cdot f(x)$，则当 $n = k + 1$ 时，因为

$$f[(k+1)x] = f(kx + x) = f(kx) + f(x)$$
$$= kf(x) + f(x) = (k+1)f(x),$$

所以，$\qquad f(nx) = nf(x).$

从而，若令 $x = \frac{1}{n}$，则可得 $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}f(1)$. $\qquad (2)$

利用(1)、(2) 两式，对任何正有理数$\frac{n}{m}$，就有

$$f(\frac{n}{m}) = nf(\frac{1}{m}) = \frac{n}{m}f(1).$$

在(1) 中取 $n > 1, x = 0$，则有 $f(0) = 0$. 再取 $x = x_1 = -x_2$，由 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 可得 $f(-x) = -f(x)$.

所以，对一切有理数 x，均有 $f(x) = x \cdot f(1)$.

再利用 $f(x)$ 及 $x \cdot f(x)$ 的连续性，便容易推出，对一切实数 x，$f(x) = x \cdot f(1)$ 成立.

2.3.101 设函数 $f(x)$ 在圆上有定义且连续. 试证：可在直径上找到对称于圆心的两点 a、b 使 $f(a) = f(b)$.

解 假设圆周上点的位置由角度 φ $(-\infty < \varphi < +\infty)$ 确定，所以每一个点对应于无穷多个 φ 值. 那么，函数 f 是关于 φ 的连续函数.

考虑 $g(\varphi) = f(\varphi + \pi) - f(\varphi)$，则有

$$g(\varphi + \pi) = f(\varphi + 2\pi) - f(\varphi + \pi)$$
$$= f(\varphi) - f(\varphi + \pi) = -g(\varphi).$$

由中值定理，函数 $g(\varphi)$ 在区间$[\varphi, \varphi + \pi]$上的某点 φ^* 处为零，即

$$g(\varphi^*) = f(\varphi^* + \pi) - f(\varphi^*) = 0.$$

从而 $f(\varphi^* + \pi) = f(\varphi^*)$. 于是,命题得证.

2.3.102　设函数 $f(x)$ 满足:

(1) $-\infty < a \leqslant f(x) \leqslant b < +\infty$, $(a \leqslant x \leqslant b)$;

(2) $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$, $(0 < k < 1, x, y \in [a,b])$.

$x_1 \in [a,b]$,并定义数列 $\{x_n\}$: $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1,2,\cdots$,试证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在,且 $x = f(x)$,其中 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

证　首先由条件(2)易知,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 考察函数 $g(x) = f(x) - x$,显然 $g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续,且有

$$g(a) = f(a) - a \geqslant 0, \text{与 } g(b) = f(b) - b \leqslant 0.$$

若上两式中的等号有一个成立,则得

$$f(a) = a \text{ 或 } f(b) = b.$$

现设上两式中的等号皆不成立,即 $g(a) > 0, g(b) < 0$. 由连续函数的介值定理可知,必存在一点 $x \in [a,b]$,使得 $g(x) = 0$,即

$$x = f(x). \tag{1}$$

综上所述,存在 $x \in [a,b]$,使等式 $x = f(x)$ 成立.

次证满足(1)式的 x 是唯一的. 事实上,若存在 $x_1 \in [a,b]$, $x_2 \in [a,b]$, $x_1 \neq x_2$,使

$$x_1 = f(x_1) \text{ 和 } x_2 = f(x_2)$$

都成立. 则由条件(2)知

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

这是不可能的. 故满足(1)式的 x 是唯一的.

最后证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. 由于

$$|x_{n+1} - x| = |f(x_n) - f(x)| \leqslant k|x_n - x|, \quad n = 1,2,\cdots$$

又　$|x_n - x| = |f(x_{n-1}) - f(x)| \leqslant k|x_{n-1} - x|$,

从而, $|x_{n+1} - x| \leqslant k|x_n - x| \leqslant k^2 \cdot |x_{n-1} - x| \leqslant \cdots \leqslant k^n|x_1 - x|$.

此处 $0 < k < 1$,由此可知

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

注　满足关系式 $x = f(x)$ 的点 x 称为函数 $y = f(x)$ 的不动点,题中的条件(1)与(2)保证了不动点的存在性与唯一性,这一事实就是著名的"压缩映象原理".

2.3.103　设已知函数 $f(x) = x + 0.001[x]$. 试证对于每一个 $\varepsilon > 0.001$,都可选出 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$,使得只要 $|x' - x| < \delta$,则

$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$;而对于 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$,这件事对于一切的值 x 都不行.在怎样的点这个函数失去了连续性?

证 当 $\varepsilon>0.001$,且 $|x'-x|<1$ 时,

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|$$
$$\leqslant|x-x'|+0.001.$$

此时只要取 $\delta=\min\{\varepsilon-0.001,1\}$,则当 $|x-x'|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

当 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$,且 x_0 不为整数时,有整数 n 使得 $n<x_0<n+1$,只要取

$$\delta=\min(x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon)>0,$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $[x]=[x_0]$,从而

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当 $x_0=n$ 为整数时,则对于无论怎样选取的正数 δ,总有 x 满足 $x<x_0$ 及 $x_0-x<\delta$.此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$$

于是,函数 $f(x)$ 在 $x=n$(整数)的点失去了连续性.

2.3.104 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数,当 $-\infty<x<+\infty$ 时有定义且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$.试证 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的周期相同.设 $\varphi(x)$ 的周期为 p,则 $\varphi(x+p)=\varphi(x)$,由于当 $x\to+\infty$ 时,有 $\varphi(x+p)-\psi(x+p)\to 0$.于是有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]=0$,及

$$\lim_{x\to+\infty}[\psi(x)-\psi(x+p)]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x+p)]-\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0. \tag{1}$$

再证明 $\psi(x)$ 的周期也是 p,若不然,则至少存在一个数 x_0,使 $\psi(x_0)\neq\psi(x_0+p)$,且设 $\psi(x)$ 的周期为 q,N 为任意正整数,$x=x_0+Nq$,以及 $a=|\psi(x_0)-\psi(x_0+p)|>0$,此时恒有 $|\psi(x)-\psi(x+p)|=a$.但由(1)式,对充分大的 x,必有 $|\psi(x)-\psi(x+p)|<a$.这显然是矛盾的.

最后证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$,若结论不成立,则至少存在一个 x_1,使 $\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$.记 $\beta=|\varphi(x_1)-\psi(x_1)|>0$,则对任意 $x=x_1+Np$,恒有 $|\varphi(x)-\psi(x)|=\beta$,这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\varphi(x)-\psi(x)]=0$ 矛盾.于是

$$\varphi(x)\equiv\psi(x).$$

2.3.105 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = x_0$. (*)

问 $\lim\limits_{t\to t_0} f[\varphi(t)] = a$ 是否成立?如果成立,试加以证明;否则试举反例.

解 不成立.例如,设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad \varphi(t) \equiv 0.$$

取 $x_0 = t_0 = 0$,则$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = x_0$,

但是 $\lim\limits_{t\to 0} f[\varphi(t)] = \lim\limits_{t\to 0} f(0) = \lim\limits_{t\to 0} 1 = 1 \neq 0.$

注 在(*)条件的基础上增加下述两条件之一便能保证 $\lim\limits_{t\to t_0} f[\varphi(t)] = a$ 成立:

(1) $a = f(x_0)$,即 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,

(2) 存在 $\delta > 0$,使对于 $0 < |t - t_0| < \delta$,有 $\varphi(t) \neq x_0$.

2.3.106 某工厂的车间制造正方形薄板,其边长 x 可取 1cm 到 10cm 之间的值.为了使不论何种边长(在上述范围内)的薄板的面积 y 与原设计的面积差皆小于 ε,问可以取多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工,设(1)$\varepsilon = 1\text{cm}^2$;(2)$\varepsilon = 0.01\text{cm}^2$;(3)$\varepsilon = 0.0001\text{cm}^2$,计算 δ 的值.

解 $y = x^2$.由于

$$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''| \cdot |x' + x''| \leqslant 20|x' - x''|,$$

于是对于任意给的 $\varepsilon > 0$,要 $|x'^2 - x''^2| < \varepsilon$ 时,只要 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{20}$ 即可.因此,加工薄板边长时,只要取公差 $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{20}$,当 $|x' - x''| < \delta$ 时,即可满足要求.

(1) 当 $\varepsilon = 1\text{cm}^2$ 时,$\delta \leqslant \frac{1}{20} = 0.05\text{cm} = 0.5\text{mm}$.

(2) 当 $\varepsilon = 0.01\text{cm}^2$ 时,$\delta \leqslant \frac{0.01}{20} = 0.0005\text{cm} = 0.005\text{mm}$.

(3) 当 $\varepsilon = 0.0001\text{cm}^2$ 时,$\delta \leqslant \frac{0.0001}{20} = 0.000005\text{cm}$

$= 0.00005\text{mm}$.

第三章　一元函数微分学

§1　导数与微分

内容提要

1. 导数

(1) 函数在一点处的导数定义

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义. 当自变量 x 在该邻域内有改变量 Δx 时，相应地，函数有改变量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$f'(x_0)$ 的定义还采用如下几种等价形式：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

或
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

或
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(2) 左、右导数

如果右极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则它称为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$，即

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

同样，左导数定义为

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

显然，$f'(x_0)=A \Longleftrightarrow f'_{+}(x_0)=f'_{-}(x_0)=A$.

(3) 导函数

导数 $f'(x_0)$ 显然由 x_0 点所决定. 如果在某个点集上的每一点都有导数，称 $f(x)$ 在该点集上可导. 此时，点集上的导数就成为点集上的一个函数 $f'(x)$，称为导函数，通常简称为导数.

(4) 导数的几何意义和物理意义

若把 $y=f(x)$ 看作平面直角坐标系下的曲线方程，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

就是曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率.

若把 $s=f(t)$ 看作物体沿直线运动的运动规律，则 $f'(t_0)$ 是运动物体在 $t=t_0$ 时刻的瞬时速度.

2. 基本求导法则

设 c 为常数，$u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 是 x 的函数且它们的导数都存在.

(1) 函数的四则运算求导法则

$$c'=0,$$
$$(u\pm v)'=u'\pm v',$$
$$(cu)'=cu',$$
$$(uv)'=u'v+uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},(v\neq 0).$$

(2) 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)=f[u(x)]$，$f(u)$ 也有导数，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot u'(x).$$

(3) 反函数的求导法则

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上是严格单调的连续函数，在 $x\in(a,b)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应点 y 可导，且有

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\left(\text{或}=\frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=\varphi(y)}\right).$$

即两个互为反函数的函数其导数互为倒数.

3. 隐函数的导数

设可导函数 $y = y(x)$ 满足方程 $F(x,y) = 0$，则由此方程确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $y' = y'(x)$ 可由方程 $\frac{d}{dx}[F(x,y)] = 0$ 求得，这里 $F(x,y)$ 中的 y 必须看作 x 的函数.

4. 用参数方程所确定的函数的导数

设 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 是可导函数，且 $\varphi'(t) \neq 0$，则方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

确定了一个函数 $y = y(x)$，它的导数存在且由下式确定

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

5. 高阶导数

导函数 $f'(x)$ 的导数 $f''(x) = (f'(x))'$ 称为 $f(x)$ 的二阶导数，记为 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$，即

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x).$$

一般地，称函数 $y = f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数 $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ 为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记为

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

6. 一阶和高阶微分

(1) 一阶微分

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是一个与 Δx 无关的常数，当 $\Delta x \to 0$ 时，$o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小量，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的微分，记作 $dy|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$，即

$$df(x_0) = A\Delta x.$$

自变量的微分就是它的增量：$dx = \Delta x$.

函数 $y = f(x)$ 的微分等于它的导数与自变量微分的乘积：

$$dy = f'(x)dx.$$

一阶微分具有形式不变性，即不论 x 是自变量还是中间变量，$y = f(x)$ 的一阶微分总具有以下形式：

$$dy = f'(x)dx.$$

如果 $f(x)$ 是可微函数，$|\Delta x|$ 充分小，则有

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

这样，函数的微分可用于近似计算.

(2) 微分法则

设 $u,v,f(u)$ 都是可微函数，c 是任意常数，则有

$$dc = 0,$$
$$d(cu) = cdu,$$
$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(uv) = udv + vdu,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, (v \neq 0)$$
$$df(u) = f'(u)du.$$

(3) 高阶微分

如果 $y = f(x)$ 有 n 阶导数，则其 n 阶微分为

$$d^n y = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n,$$

其中 x 为自变量，$n = 2,3,\cdots$；$d^n y$ 统称为高阶微分.

7. 导数基本公式

(1) $(c)' = 0$　(c 为常数)；

(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$　(a 为任意实数)；

(3) $(a^x)' = a^x\ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$，特别地，$(e^x)' = e^x$；

(4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$，特别地，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

(5) $(\sin x)' = \cos x$；

(6) $(\cos x)' = -\sin x$；

(7) $(\mathrm{tg} x)' = \sec^2 x$；

(8) $(\mathrm{ctg} x)' = -\csc^2 x$

(9) $(\sec x)' = \sec x \mathrm{tg} x$；

(10) $(\csc x)' = -\csc x \mathrm{ctg} x$；

(11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(13) $(\mathrm{arc\,tg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(14) $(\mathrm{arc\,ctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

(15) $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$;

(16) $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$;

(17) $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$;

(18) $(\mathrm{cth}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

问 题 与 解 答

1. 基本概念

判断下列命题是否正确(3.1.1—3.1.24 题):

3.1.1　初等函数在其定义域内必可导.

非.例如,初等函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, x \in (-\infty, +\infty)$ 在 $x = 0$ 处不可导.这是因为在 $x = 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}$$

不存在.

3.1.2　若 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.

是.因为 $f(x)$ 在 x_0 处可导,即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

故
$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x).$$

其中 α 是 Δx 的高阶无穷小.于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)] = 0,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 处必连续.

3.1.3 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在 x_0 必可导.

非.例如,函数 $y=|x|, x\in(-\infty,+\infty)$,在 $x=0$ 处连续,但因为

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=-1,\quad \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=1.$$

故函数 y 在 $x=0$ 处不可导.

3.1.4 连续函数 $f(x)$ 除去可能有几个特别点之外,处处有导数.

非.例如,函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(b^n\pi x),$$

其中 $0<a<1$,b 为奇整数且大于 $\frac{1}{a}+\frac{3\pi}{2a}(1-a)$.

这是一个处处不可导的连续函数,由德国数学家外尔斯特拉斯于1860年给出.其证明十分冗长,这里从略(见陈建功《实变函数论》第六章).

在历史上的一个漫长时期内,人们曾坚信,连续函数除去可能有几个特别点之外,应该处处有导数.发现上述这个著名的例子是数学史上的光辉成就,它揭示了当时统治整个时代的直观方法是不可靠的.

3.1.5 若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续,则 $f(x)$ 在 x_0 处必不可导.

是.假设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续,可用反证法证明.如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导,根据题3.1.2的结论,$f(x)$ 在 x_0 处必连续.这与假设矛盾.所以 $f(x)$ 在 x_0 处必不可导.

由此可知,函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续是可导的必要条件.

3.1.6 若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导,则 $f(x)$ 在 x_0 处必不连续.

非.例如,函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,但在 $x=0$ 处却连续.

3.1.7 若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点处必无切线.

非.例如,函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导,但曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 处有垂直的切线.

3.1.8 若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线,则函数 $y=f(x)$ 必处处可导.

非.如3.1.7题中的例子.

3.1.9 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处必可导.

非.例如，函数 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导，但 $|f(x)|=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

3.1.10 若 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导.

非.例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

不难看出，$|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处可导，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

3.1.11 若 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处必皆可导.

非.例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & -1\leqslant x<0;\\ x+2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0;\\ -x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

显然，和函数 $f(x)+g(x)=3\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 在 $x=0$ 处可导，而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 处均不可导.

3.1.12 若 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处必皆可导.

非.例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, x\geqslant 0;\\ x, x<0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0;\\ -1, x<0.\end{cases}$$

显然，积函数 $f(x)\cdot g(x)=-x(-\infty<x<+\infty)$ 在 $x=0$ 处可导，而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 处均不可导.

3.1.13 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处都不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处必不可导.

非.见 3.1.11 题中的例子.

同理可知，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处都不可导，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 未必不可导.例如，函数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}, g(x)=x^{-\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处均不可导，但

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}}=x$$

却在 $x=0$ 处可导.

顺便指出，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处都不可导，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处未必不可导.（见 3.1.12 题中的例子）

3.1.14　若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$g(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处必不可导.

是. 用反证法. 设 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处可导，由可导函数的性质可知，$[f(x)+g(x)]-f(x)=g(x)$ 在 x_0 处亦可导. 这与题设矛盾. 故 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处不可导.

3.1.15　若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$g(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处必不可导.

非. 例如，函数 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导，$g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，但 $f(x)\cdot g(x)=|x|\cdot x=\begin{cases}-x^2, x<0;\\ x^2, x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处却可导.

有必要指出，如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，$g(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处必不可导. 这可根据导数的运算性质，用反证法证之. 事实上，若 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处可导，$f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则由商的导数规则可知，$g(x)=\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)}$ 在 x_0 处必定可导，与题设矛盾. 故知 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处必不可导.

3.1.16　若 $f(x)$ 为周期可导函数，则其导数 $f'(x)$ 必为周期函数.

是. 设 $f(x)$ 的周期为 a，即 $f(x+a)=f(x)$，且 $f(x)$ 可导，则

$$f'(x+a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+a+\Delta x)-f(x+a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

3.1.17　若函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可微，则其导数必处处连续.

非. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，但其导函数不连续.

3.1.18　若 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 内可导的偶(奇)函数，则导数 $f'(x)$ 必为 $(-l,l)$ 内的奇(偶)函数.

是. 事实上，若 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 内可导的偶函数，则由导数定义有

$$\begin{aligned}f'(-x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}\\&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x-\Delta x)]-f(-x)}{\Delta x}\\&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&= \lim_{\Delta x\to 0}-\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{(-\Delta x)}=-f'(x).\end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 为 $(-l,l)$ 内的奇函数.

同理可知，若 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 内可导的奇函数，则 $f'(x)$ 必为 $(-l,l)$ 内的偶函数.

3.1.19　若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则其反函数在相应点必定可导.

非. 例如，函数 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处可导，而反函数 $x=\arcsin y$ 在相应的 $y=1$ 处导数不存在.

3.1.20　若 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则其在 x_0 处必可微.

是. 由于 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，所以 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，故

$$dy=f'(x_0)\cdot dx,$$

即 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微.

3.1.21　若 $f(u)$ 在 u_0 处不可导，$u=g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处必不可导.

非. 例如，函数 $f(u)=|u|$ 在 $u=0$ 处不可导；$u=g(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处可导，而 $f[g(x)]=|x^4|$ 在 $x=0$ 处却可导.

3.1.22　若 $f(u)$ 在 u_0 处不可导，$u=g(x)$ 在 x_0 处也不可导，且 $u_0=g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 必不可导.

非. 例如，函数 $f(u)=2u+|u|$ 在 $u=0$ 处不可导，$u=g(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，而

$$f[g(x)]=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\right)$$

$$= \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}|x| + \frac{1}{3}|2x - |x||,$$

其中 $|2x - |x|| = \begin{cases} 2x - |x|, 2x - |x| \geqslant 0; \\ -2x + |x|, 2x - |x| < 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 2x - |x|, x \geqslant 0 \\ -2x + |x|, x < 0; \end{cases} = \begin{cases} 2x - x, x \geqslant 0; \\ -2x - x, x < 0 \end{cases}$$

$$= 2|x| - x.$$

所以 $f[g(x)] = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}|x| + \frac{1}{3}(2|x| - x) = x.$

于是 $f[g(x)]$ 在 $x = 0$ 处可导.

3.1.23　若 $f(u)$ 在 u_0 处可导，$u = g(x)$ 在 x_0 处不可导，且 $u_0 = g(x_0)$，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处必不可导.

非. 例如，函数 $f(u) = u^2$ 在 $u = 0$ 处可导，$u = g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导，但 $f[g(x)] = f(|x|) = |x|^2 = x^2$ 在 $x = 0$ 处却可导.

3.1.24　若 $f'(x_0)$ 存在，则在 x_0 的某邻域内必存在 $x \neq x_0$，使 $f(x)$ 仍可导.

非. 例如，函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数}; \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 只在 $x = 0$ 处可导.

事实上，当 h 为有理数时，在 $x = 0$ 处有

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0,$$

当 h 为无理数时，在 $x = 0$ 处有

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$.

而对任何有理数 $x \neq 0$，当 h 为有理数时，有

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = 2x,$$

当 h 为无理数时，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2}{h}$$

不存在. 故对任何有理数 $x \neq 0$，函数 $f(x)$ 不可导.

类似地可证，在 $x = 0$ 的邻域内，对任何无理数 x，函数 $f(x)$ 也不可导.

3.1.25　(达布(Darbux)定理)若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,则 $f'(x)$ 必取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的每一个值.

证　不妨设 $f'(a)<f'(b)$,对于任意的 $\mu\in[f'(a),f'(b)]$,作辅助函数 $F(x)=f(x)-\mu x$,则 $F'(x)=f'(x)-\mu$. 显然

$$F'(a)=f'(a)-\mu<0,\ F'(b)=f'(b)-\mu>0,$$

即

$$\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)<0,$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=F'(b)>0,$$

由极限的保号性,存在点 $x_1,a<x_1<b$,使得

$$\frac{F(x_1)-F(a)}{x_1-a}<0\ 或\ F(x_1)<F(a);\tag{1}$$

且存在点 $x_2,a<x_2<b$,使得

$$\frac{F(x_2)-F(b)}{x_2-b}>0\ 或\ F(x_2)<F(b).\tag{2}$$

又因函数 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,故必取得最小值,由(1)、(2)式说明 $F(a),F(b)$ 都不是最小值;因而在(a,b)内至少存在一点 c,使得 $F(c)$ 是最小值,显然 $F(x)$ 在 c 可导,于是有

$$F'(c)=f'(c)-\mu=0.$$

即 $f'(c)=\mu$.

由此定理可直接推出,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,则 $f'(x)$ 在区间$[a,b]$上没有第一类间断点. 即$[a,b]$上的每一个点 x 或为 $f'(x)$ 的连续点或为第二类间断点.

2. 显函数的导数

(1) 定义求导法

函数 $f(x)$ 在点 x 处的导数是重要的概念,也是导数理论的基础;用定义求函数的导数是最基本的方法. 定义求导法除了导出导数基本公式(见本节内容提要 7)外,常用于函数可导性的讨论,例如对于分段函数在分界点处的导数,就一定要用导数定义来计算.

3.1.26　求函数 $y=2x^3-x^2+1$ 当 $x=1,\Delta x=0.1$ 时增量之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 及 $y'(1)$.

解　因 $\Delta y=[2(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+1]-[2x^3-x^2+1]$

$$= (6x^2 - 2x)\Delta x + (6x - 1)\Delta x^2 + 2(\Delta x)^3,$$

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 - 2x + (6x - 1)\Delta x + 2\Delta x^2.$

故 $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} = 6 - 2 + (6 - 1) \times 0.1 + 2 \times (0.1)^2 = 4.52.$

又 $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 - 2x$，所以 $y'(1) = 4$.

3.1.27　当 $x = 2$，$\Delta x = 0.01$ 时，求函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的增量之比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 以及 $y'(2)$.

解　因 $\Delta y = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$，所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

故 $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = -\dfrac{1}{2(2 + 0.01)} = \dfrac{-1}{4.02} \approx -0.249.$

又据导数定义有

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2},$$

所以 $y'(2) = -\dfrac{1}{4} = -0.25.$

3.1.28　设

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & x^2 \\ x & x^2 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & x \end{vmatrix},$$

求 $f'(0)$.

解　把行列式按第二列展开，得

$$f(x) = x^2\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} = x^2 g(x).$$

其中 $g(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 为多项式.

由导数定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)-0}{x}=0.$$

注 把行列式展开以简化函数表达式，使求 $f'(0)$ 的计算明朗化，然后用导数定义去处理.

3.1.29 设 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$.

证 $f(x)$ 为偶函数，则有

$$f(x)=f(-x),\ f(\Delta x)=f(-\Delta x)$$

又因 $f'(0)$ 存在，即

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x},$$

令 $\Delta x=-\Delta t$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{f(-\Delta t)-f(0)}{-\Delta t}$$

$$=-\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{f(\Delta t)-f(0)}{\Delta t}=-f'(0).$$

于是，有 $f'(0)=-f'(0)$，即 $f'(0)=0$.

3.1.30 根据导数的定义，直接求函数 $y=x\sin x$ 的导数.

解
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x)-x\sin x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x[\sin(x+\Delta x)-\sin x]+\Delta x\sin(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x\cdot 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(\frac{2x+\Delta x}{2})}{\Delta x}+\sin(x+\Delta x)\right]$$

$$=x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})+\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\Delta x)$$

$$=x\cdot 1\cdot\cos x+\sin x=x\cos x+\sin x.$$

3.1.31 根据导数的定义，直接求函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的导数.

解
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x + 1} + \sqrt{x + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}.$$

3.1.32　根据导数的定义，直接求函数 $y = \mathrm{tg}x$ 的导数.

解　由 $\Delta y = \mathrm{tg}(x + \Delta x) - \mathrm{tg}x = \dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}\Delta x}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}\Delta x} - \mathrm{tg}x$

$$= \frac{\mathrm{tg}\Delta x(1 + \mathrm{tg}^2 x)}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}\Delta x}$$

有　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\mathrm{tg}\Delta x(1 + \mathrm{tg}^2 x)}{\Delta x(1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}\Delta x)} = \dfrac{\mathrm{tg}\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}\Delta x)}$.

故　$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\Delta x\sec^2 x}{\Delta x(1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}\Delta x)} = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3.1.33　设 $f(x) = (x - a)^m (x - b)^n (x - c)^p$（$m,n,p$ 是自然数），用定义求 $f'(a), f'(b), f'(c)$.

解　$f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}[(a + \Delta x - a)^m (a + \Delta x - b)^n (a + \Delta x - c)^p$

$$- (a - a)^m (a - b)^n (a - c)^p]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^m}{\Delta x}(a - b + \Delta x)^n (a - c + \Delta x)^p$$

$$= \begin{cases} (a - b)^n (a - c)^p, & m = 1; \\ 0, & m > 1. \end{cases}$$

同理可得

$$f'(b) = \begin{cases} (b - a)^n (b - c)^p, & n = 1; \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$

$$f'(c) = \begin{cases} (c - a)^m (c - b)^n, & p = 1; \\ 0, & p > 1. \end{cases}$$

3.1.34　设 $f(x) = \varphi(a + bx) - \varphi(a - bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义且在 a 点可导，求 $f'(0)$ 的值.

解　由于 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义且在 $x = a$ 可导，据导数定义，有

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(a + bx) - \varphi(a - bx)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(a + bx) - \varphi(a) - \varphi(a - bx) + \varphi(a)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} b\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx} + \lim_{x\to 0} b\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}$$
$$= b\varphi'(a) + b\varphi'(a) = 2b\varphi'(a).$$

3.1.35 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$，求 $f'(0)$.

解 $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-1000)$$
$$= (-1)^{1000}(1000)! = 1000!.$$

3.1.36 已知函数 $g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{g(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = 2\pi$，如果定义 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)$，试根据导数的定义求 $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

解 因为 $$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)}{x-\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)}{x-\frac{\pi}{2}}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\cdot 0 = 0.$$

于是 $$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

3.1.37 求函数 $f(x) = [x+1]\sin[x+1]\pi$ 在 $x=0$ 处的左、右导数，其中[ ]为取整记号.

解 设 $\Delta x > 0$，由
$$f(0+\Delta x) = [\Delta x + 1]\sin[\Delta x + 1]\pi = \sin\pi = 0$$
和 $f(0) = [1]\sin\pi = 0$ 可得
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = 0.$$
设 $\Delta x < 0$，同样有
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = 0.$$

3.1.38 证明函数 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ 在 a 点没有导数，其中 $\varphi(x)$

在 $x=a$ 处连续，且 $\varphi(a)\neq 0$.

证　先计算左、右导数 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$.

设 $\Delta x>0$，由 $f(a)=0, f(a+\Delta x)=\Delta x\varphi(a+\Delta x)$ 有

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\varphi(a);$$

又设 $\Delta x<0$，由 $f(a)=0, f(a+\Delta x)=-\Delta x\varphi(a+\Delta x)$，有

$$f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=-\varphi(a).$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$，$f'_+(a)\neq f'_-(a)$，故 $f(x)$ 在 a 点没有导数.

3.1.39　证明：若函数 $f(x)$ 可导，n 为自然数，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x).\tag{1}$$

反之，若对于函数 $f(x)$，极限(1)存在，可否断定这个函数有导数?讨论狄利克莱函数的例子.

证　因为 $f(x)$ 为可导函数，所以

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}=f'(x).$$

反之，不一定对. 例如，对狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数};\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

它在任一有理点 x 处都不连续，当然其导数也不存在，但由于 $x+\frac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 x 为有理数时，

$$D\left(x+\frac{1}{n}\right)-D(x)=1-1=0.$$

从而，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[D\left(x+\frac{1}{n}\right)-D(x)\right]=0$ 存在.

3.1.40　证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处有有穷导数，但在该点的任何邻域内都有导数不存在的点.

证　由于 x^2 处处有导数，$|\cos\frac{\pi}{x}|$ 除 $x=0$ 及 $x_k=\frac{2}{2k+1}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 外处处有导数，因此，除 $x=0$ 及 $x=x_k$ 外，积函数 $x^2|\cos\frac{\pi}{x}|$ 处处有导数，而在 $x=0$ 及 $x=x_k$ 处，按定义计算导数，我们有

$$(1)\ f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2|\cos\frac{\pi}{\Delta x}|}{\Delta x}=0,$$

即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有导数.

$$(2)\ f'_{\pm}(x_k)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(x_k+\Delta x)-f(x_k)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(x_k+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{(\frac{2}{2k+1}+\Delta x)^2|\cos[\pi/(\frac{2}{2k+1}+\Delta x)]|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to\pm 0}(\frac{2}{2k+1}+\Delta x)^2\cdot\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}|\cos\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)\Delta x}|$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\cdot\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}|\cos[\frac{(2k+1)\pi}{2}+(\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{(2k+1)\pi}{2})]|$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\cdot\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}|\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{(2k+1)\pi}{2})|$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\cdot\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}|\frac{(2k+1)\pi}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{(2k+1)\pi}{2}|$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\cdot(2k+1)^2\pi\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{1}{\Delta x}|\frac{\Delta x}{2(2+(2k+1)\Delta x)}|$$

$$=\pm\pi.$$

即 $f'_-(x_k)\neq f'_+(x_k)$.

因为对任意的 $\varepsilon>0$，总存在这样的 k，使 $|\frac{2}{2k+1}|<\varepsilon$ 成立. 由此可知，在点 $x=0$ 的任意邻域内，函数 $f(x)$ 都有导数不存在的点.

3.1.41　构造一个连续函数，使它在给定的 n 个点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 处没有导数（$a_i\neq a_j,i\neq j$）.

解　作函数 $f(x)=|x-a_1|\cdot|x-a_2|\cdots|x-a_n|$，显然它是连续

的，然而它在点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 处的导数不存在．事实上

$$f'_-(a_i)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a_i+\Delta x)-f(a_i)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(a_i+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{\Delta x}\prod_{k=1}^{n}|a_i+\Delta x-a_k|$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_i+\Delta x-a_k|=-\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_i-a_k|.$$

同理可得 $f_+(a_i)=\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_i-a_k|$．因为 $f'_+(a_i)\neq f'_-(a_i)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $f(x)$ 在 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 处不可导．

3.1.42　设

$$f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明：$f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不存在（参见 3.1.17 题）．

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$ 可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是连续的．

当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=x^3\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+3x^2\sin\frac{1}{x}=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x},$$

显然是连续的．

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0,$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}\right]=0=f'(0)$.

于是，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处也是连续的．

但是极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}[3x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}]$$

不存在，所以 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不存在.

3.1.43 设函数 $f(u)$ 的一阶导数存在，求

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}[f(t+\frac{r}{a}) - f(t-\frac{r}{a})],$$

其中 t, a 与 r 无关.

解 原式 $= \frac{1}{a}\lim_{r\to 0}[\frac{f(t+\frac{r}{a}) - f(t)}{\frac{r}{a}} + \frac{f(t-\frac{r}{a}) - f(t)}{-\frac{r}{a}}]$

$$= \frac{1}{a}[f'(t) + f'(t)] = \frac{2}{a}f'(t).$$

3.1.44 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微，计算

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t) - f(a-2t)}{2t}.$$

解 原式 $= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t) - f(a-2t) + f(a) - f(a)}{2t}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t) - f(a)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{f(a-2t) - f(a)}{-2t}$$

$$= \frac{1}{2}f'(a) + f'(a) = \frac{3}{2}f'(a).$$

值得指出的是，如下的解法是错误的：

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t) - f(a-2t)}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{f(a+t) - f(a-2t)}{3t}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{3t\to 0}\frac{f(a+t) - f(a-t)}{3t} = \frac{3}{2}f'(a-2t).$$

错误在于，第一，违背了导数定义，在定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)$$

中，定点 a 与 Δx 无关，而在上述解法中，点 $(a-2t)$ 随 t 而变化，第二，题设 $f'(a)$ 存在，而 $f'(a-2t)$ 是否存在并不知道.

3.1.45 设 $f(x) = x^n\ln x\ (x>0)$，求证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!} = c,$$

(c 为欧拉常数).

证　由数学归纳法易求出

$$f^{(k)}(x) = x^{n-k} \cdot n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \cdot [n^{-1} + (n-1)^{-1} + \cdots + (n-k+1)^{-1} + \ln x],$$

由此可得 $f^{(n)}(\frac{1}{n}) = n![\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n]$，于是有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!} = \lim_{n\to+\infty} [\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n] = c.$$

3.1.46　设 $f(x)$ 的定义域为所有非零实数之全体；对任何非零的实数 x,y，均有 $f(xy) = f(x) + f(y)$；且 $f'(1)$ 存在.

(1) $f'(x)$ 还在哪些点存在？

(2) $f(x) = ?$

解　(1) 由 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 故 $f(y) = f(1) + f(y)$，即 $f(1) = 0$. 从而对任何不为 0 的 x，

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f[x\cdot(1+\frac{\Delta x}{x})] - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x) + f(1+\frac{\Delta x}{x}) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{x} \frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{f'(1)}{x}.$$

即 $f'(x)$ 除 $x = 0$ 外处处存在.

(2) 由 $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ 可知，$f(x) = f'(1)\ln|cx|$.

3.1.47　设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$f(x) \neq 0$ 且满足恒等式 $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$. 若 $f'(0) = 1$，求 $f(x)$.

解　在恒等式 $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ 中，取 $y = 0, y = \Delta x$，对任意的 x，都有

$$f(x+\Delta x) = f(x)\cdot f(\Delta x) \text{ 与 } f(x) = f(x)\cdot f(0),$$

因 $f(x) \neq 0$，故 $f(0) = 1$，于是

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)[f(\Delta x) - 1]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[f(\Delta x) - f(0)]}{\Delta x} = f(x) \cdot f'(0) = f(x).$$

由此可知，$f'(x)$ 存在且 $f'(x) = f(x)$.

解方程 $\frac{df(x)}{dx} = f(x)$ 可得，$\ln f(x) = x + \ln c$，即 $f(x) = ce^x$，由条件 $f(0) = 1$ 得 $c = 1$，故 $f(x) = e^x$.

3.1.48　若已知

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1; \\ x, & \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

且有 $f(0) = 0$，试求函数 $f(t)$.

解　先在 $0 < x \leqslant 1$ 内考虑 $f'(\ln x) = 1$，由 $f'(t) = 1$ 有 $f(t) = t + c_1$，从而 $f(\ln x) = \ln x + c$，其中 $x \in (0,1]$. 此时 $\ln x = t$，$t \in (-\infty, 0]$，即知

$$f(t) = t + c_1, \quad -\infty < t \leqslant 0.$$

又由 $f(0) = 0$ 知 $c_1 = 0$，即

$$f(t) = t, \quad -\infty < t \leqslant 0.$$

再考虑 $x > 1$，由 $f'(\ln x) = x$ 可得 $f'(t) = e^t$，故 $f(t) = e^t + c_2$，其中由 $x > 1$ 可知 $t > 0$，即 $f(t) = e^t + c^2$，$t > 0$. 再由 $f'(t)$ 存在，知 $f(t)$ 是连续的，所以由 $f(0) = 0$ 又知 $c_2 = -1$.

综上所述，

$$f(t) = \begin{cases} t, & -\infty < t \leqslant 0; \\ e^t - 1, & t > 0. \end{cases}$$

(2) 函数和、差、积、商的导数

3.1.49　求 $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x}} - \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ 的导数.

解　由 $y = \frac{(1 - \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x}}{x - 1}$ 有

$$y' = \frac{2\left[(x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot 1\right]}{(x-1)^2} = -\frac{x+1}{\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

本题也可以不先经过“通分”、“有理化分母”，而直接把两项分别求导，然后再将结果“通分”化简：

$$y' = -\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}(1+\sqrt{x})' + \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2}\cdot(1-\sqrt{x})'$$
$$= -\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$= -\frac{x+1}{\sqrt{x}(x-1)^2}.$$

3.1.50　求 $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ 的导数

解　由　$y = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}$，有 $y' = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$.

本题也可利用公式 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，这时要用到复合函数求导数法则：

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\left[\sqrt{x\sqrt{x}} + x\frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\left(\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x}}.$$

3.1.51　设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-m)$，求 $f'(0)$.

解法 1　定义求导法(见 3.1.35 题).

解法 2　设 $v(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-m)$，则

$$f'(0) = [xv(x)]'|_{x=0} = [v(x)+xv'(x)]|_{x=0} = v(0)$$
$$= (-1)^m m!.$$

解法 3　因为　$f(x)=x^{m+1}+a_1x^m+\cdots+(-1)^m\cdot m!x$，其中 $a_1, a_2,\cdots,a_{m-1}$ 为常数，所以 $f'(0)=(-1)^m\cdot m!$.

3.1.52　求函数 $y=\frac{x}{4^x}$ 的导数.

解　$y' = \frac{4^x\cdot(x)' - x\cdot(4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - x\cdot 4^x\ln 4}{(4^x)^2} = \frac{1-x\ln 4}{4^x}.$

本题也可看作两个函数的乘积来求导，这时要用到复合函数的求导法则

$$y' = (x\cdot 4^{-x})' = 4^{-x} + x\cdot 4^{-x}(\ln 4)\cdot(-1) = \frac{1-x\ln 4}{4^x}.$$

(3) 复合函数的导数

3.1.53 设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$,求 $f'(x)$.

解法1 因为 $f(x)$ 仅在 $-\infty<x<1,2<x<3,4<x<+\infty$ 内有一阶导数,所以

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}}\left[\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right]'$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(2x-3)(x-3)(x-4)-(x-1)(x-2)(2x-7)}{(x-3)^2(x-4)^2}$$

$$=-\sqrt{\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)}}\frac{2x^2-10x+11}{(x-3)^2(x-4)^2}.$$

解法2 设 $F(x)=\sqrt{\left|\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|}$,则 $F(x)$ 的定义域为 $x\neq 3,4$. 且 $F(x)$ 在其定义域内除点 $x=1,2$ 外均有一阶导数,因为

$$\ln F(x)=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|],$$

所以 $\quad\dfrac{1}{F(x)}F'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right)$,

故 $F(x)$ 在其定义域内除点 $x=1,2$ 外都有导数,且

$$F'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

于是,当 x 满足 $-\infty<x<1,2<x<3,4<x<+\infty$ 时,有

$$f'(x)=F'(x)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

注 通常如下求解:因为

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)],$$

所以 $\quad\dfrac{1}{f(x)}f'(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right]$,

故　$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right].$

这种解法得到与前面相同的结果,但不够完善,这是因为 $f(x)$ 的定义域为 $-\infty<x\leqslant 1,\ 2\leqslant x<3,4<x<+\infty$,但 $\ln f(x)$ 的定义域为 $x>4$,所以 $f'(x)$ 的定义域也为 $4<x<+\infty$.

3.1.54　求 $y=\sqrt{1+\cos x}$ 的导数.

解　$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}(1+\cos x)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$$
$$=-\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}.$$

如果先用半角公式去根号,再求导会稍简单些:
$$y'=(\sqrt{1+\cos x})'=(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2})'$$
$$=-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cdot(\frac{x}{2})'=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}.$$

3.1.55　求 $y=\sin 3x+\cos^2 x$ 的导数.

解　$$y'=\cos 3x\cdot(3x)'+2\cos x\cdot(\cos x)'=3\cos 3x-2\cos x\sin x$$
$$=3\cos 3x-\sin 2x.$$

3.1.56　设 $y=\sqrt{1+\operatorname{arctg}(x+\frac{1}{x})}$,求 y'.

解　$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{arctg}(x+\frac{1}{x})}}\cdot\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+(x+\frac{1}{x})^2}$$
$$=\frac{x^2-1}{2(x^4+3x^2+1)\sqrt{1+\operatorname{arctg}(x+\frac{1}{x})}}.$$

3.1.57　求 $y=\sin\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)}$ 的导数.

解 $y' = \cos\left[\dfrac{x^3}{\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}\right] \times$

$$\times \frac{3x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right) - x^3\cos\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)\dfrac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}}{\sin^2\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}$$

$$= \cos\left[\frac{x^3}{\sin(\frac{x^3}{\sin x})}\right] \times$$

$$\times \frac{3x^2\sin^2 x\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right) - x^5(3\sin x - x\cos x)\cos\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}{\sin^2 x\sin^2\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}.$$

3.1.58 求 $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$ 的导数

解 $y' = \sin(\cos^2 x) \cdot \{[-\sin(\sin^2 x)] \cdot 2\sin x\cos x\}$

$$+ \{\cos(\cos^2 x) \cdot 2\cos x(-\sin x)\}\cos(\sin^2 x)$$

$$= -\sin 2x[\sin(\cos^2 x)\sin(\sin^2 x) + \cos(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)]$$

$$= -\sin 2x[\cos(\cos^2 x - \sin^2 x)] = -\sin 2x\cos(\cos 2x).$$

3.1.59 求 $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ 的导数.

解 $y' = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)'$

$$= e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$$

$$= e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{(1+x)\cdot(-1) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

3.1.60 求 $y = \ln(\operatorname{tg}x + \sec x)$ 的导数.

解 $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}x + \sec x}(\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg}x) = \sec x.$

同样可求得 $y = \ln(\operatorname{ctg}x + \csc x)$ 的导数为 $y' = -\csc x$.

3.1.61 设 $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}+2}{e^{4x}}}$,求 y' 及 $y'|_{x=0}$.

解 由 $y=\frac{1}{2}[\ln(e^{4x}+2)-4x]$ 得

$$y'=\frac{1}{2}(\frac{4e^{4x}}{e^{4x}+2}-4)=\frac{2e^{4x}}{e^{4x}+2}-2,$$

$$y'|_{x=0}=-\frac{4}{3}.$$

3.1.62 设 $y=\frac{1+x}{1-x}e^{\sqrt{x}}$,求$\frac{dy}{dx}$.

解法 1

$$y'=\frac{\left[e^{\sqrt{x}}+(1+x)e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right](1-x)+(1+x)e^{\sqrt{x}}}{(1-x)^2}.$$

解法 2 在原方程两边取对数后,再对 x 求导得

$$y'=\frac{1+x}{1-x}e^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right].$$

3.1.63 求 $y=\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$ 的导数.

解 由 $y=\ln\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)^2}=\ln x-2\ln(\sqrt{x+1}+1)$ 有

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)-x}{x\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

3.1.64 求 $y=\lg\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}}$ 的导数.

解 将函数化简,得

$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{(1+x^2)-x^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\lg(\sqrt{1+x^2}+x).$$

$$=\lg(\sqrt{1+x^2}+x).$$

于是，$y' = \dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)\ln 10} \cdot (\sqrt{1+x^2}+x)'$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)\ln 10} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\ln 10}.$$

3.1.65 求函数 $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$ 的导数.

解 令 $u = \cos^2 x$，则 $u' = -\sin 2x$，由 $y = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$ 可得

$$y'_x = \frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}} \cdot (u + \sqrt{1+u^2})'_x$$

$$= \frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}} \cdot \left[u' + \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \cdot (1+u^2)'_x\right]$$

$$= \frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}\left(u' + \frac{2u \cdot u'}{2\sqrt{1+u^2}}\right)$$

$$= \frac{u'}{u+\sqrt{1+u^2}}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}.$$

将 $u = \cos^2 x, u' = -\sin 2x$ 代入得

$$y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

3.1.66 求 $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$ 的导数.

解 $y' = \dfrac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot [\ln^2(\ln^3 x)]'$

$$= \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot [\ln(\ln^3 x)]'$$

$$= \frac{2}{\ln(\ln^3 x)} \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' = \frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}.$$

(4) 反函数的导数

3.1.67 求 $y = \arcsin\dfrac{1+2\cos x}{2+\cos x}$ 的导数.

解 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+2\cos x}{2+\cos x}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{1+2\cos x}{2+\cos x}\right)'$,

$$= \frac{2+\cos x}{\sqrt{3(1-\cos^2 x)}} \cdot \frac{(2+\cos x)\cdot(1+2\cos x)' - (1+2\cos x)\cdot(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(2+\cos x)(-2\sin x)-(1+2\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)\sqrt{3\sin^2 x}}$$

$$= \frac{-3\sin x}{(2+\cos x)\sqrt{3}\,|\sin x|},$$

当 $\sin x > 0$ 时，$y' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2+\cos x}$；

当 $\sin x < 0$ 时，$y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\cos x}$.

3.1.68　求 $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$ 的导数.

解　$$y' = \frac{\arccos x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos x)^2}$$

$$= \frac{\arccos x + \arcsin x}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}},$$

由 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$，得 $y' = \dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

3.1.69　求 $y = \arcsin\left(\operatorname{tg}\dfrac{a-x}{a+x}\right)$ 的导数.

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)}} \cdot \sec^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) \cdot \frac{-(a+x)-(a-x)}{(a+x)^2}$$

$$= \frac{\cos\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)-\sin^2\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2}$$

$$= -\frac{2a}{(a+x)^2\cos\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)\sqrt{\cos\dfrac{2(a-x)}{a+x}}}.$$

3.1.70 求 $x = e^{\arcsin y}$ 的导数.

解 因为$\dfrac{dx}{dy} = e^{\arcsin y} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$,

所以 $$\frac{dy}{dx} = (e^{\arcsin y})^{-1}\sqrt{1-y^2}$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{1-\sin^2(\ln x)} = \frac{\cos\ln x}{x}.$$

3.1.71 求 $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{sh}x) + \mathrm{arcctg}(\mathrm{ch}x)$ 的导数.

解 $$y' = \frac{1}{1+\mathrm{sh}^2x}\cdot\mathrm{ch}x - \frac{1}{1+\mathrm{ch}^2x}\mathrm{sh}x = \frac{1}{\mathrm{ch}x} - \frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}^2x}.$$

3.1.72 求 $y = \mathrm{arctg}(\ln\dfrac{1}{x})$ 的导数.

解 $$y' = \frac{1}{1+(\ln\frac{1}{x})^2}(-\ln x)' = -\frac{1}{x(1+\ln^2x)}.$$

3.1.73 求

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$$

的导数.

解 因为

$$\left(\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)'$$

$$= \left[\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) - \ln(x^2-\sqrt{x}+1)\right]'$$

$$= \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2} = \frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^4},$$

又 $$\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)'$$

$$= \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+(\sqrt{2}x)^2}\cdot\frac{(1-x^2)\cdot\sqrt{2}-(-2x)\sqrt{2}x}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4},$$

所以 $$y' = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}(1-x^2)}{1+x^4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4}$$

$$= \frac{1}{1+x^4}.$$

(5) 对数求导法

在求某些复杂初等函数的导数时，可以先两边取对数，然后再求导，以简化计算，减少差错，这种方法叫做对数求导法.

对于由一些函数经过乘、除、乘方与开方等运算构成的函数以及幂指函数 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 等函数，采用对数求导法往往会使运算简化.

3.1.74　求 $y=(x^2+1)^3(x+2)^2x^6$ 的导数.

解　两边取对数，得

$$\ln y = 3\ln(x^2+1) + 2\ln|x+2| + 6\ln|x|,$$

两边分别对 x 求导，得 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3\cdot 2x}{x^2+1} + \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{6}{x}$,

所以 $$y' = (x^2+1)^3(x+2)^2x^6\left(\frac{6x}{x^2+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{6}{x}\right)$$

$$= 6x^7(x^2+1)^2(x+2)^2 + 2x^6(x^2+1)^3(x+2) + 6x^5(x^2+1)^3(x+2)^2.$$

3.1.75　求 $u=\dfrac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}$ 的导数.

解　两边取对数，得

$$\ln u = 2\ln(1+t) - 3\ln(2+t) - 4\ln(3+t),$$

两边关于 t 求导，得

$$\frac{1}{u}\cdot u' = \frac{2}{1+t} - \frac{3}{2+t} - \frac{4}{3+t}.$$

所以 $$u' = \frac{(1+t)^2}{(2+t)^3(3+t)^4}\left[\frac{2}{1+t} - \frac{3}{2+t} - \frac{4}{3+t}\right].$$

3.1.76　求 $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}\sqrt[3]{x^2}\sin^3x\cos^2x$ 的导数.

解　两边取对数，得

$$\ln y = \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + \frac{2}{3}\ln x + 3\ln\sin x + 2\ln\cos x,$$

两边关于 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{3\cos x}{\sin x} - \frac{2\sin x}{\cos x},$$

所以 $y' = \frac{1-x}{1+x^2}\sqrt[3]{x^2}\sin^3 x\cos^2 x\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\operatorname{ctg}x - 2\operatorname{tg}x\right).$

3.1.77 求 $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$ 的导数.

解 $\ln|y| = 2\ln|x+5| + \frac{1}{3}\ln|x-4| - 5\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+4|$

两边分别对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)},$$

所以 $y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(x+4)}\right).$

3.1.78 求 $y = \frac{\sin^m nx}{\sin^n mx}$ 的导数.

解 两边取对数,得 $\ln y = m\ln\sin nx - n\ln\sin mx$,
两边分别对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}y' = m\cdot\frac{1}{\sin nx}\cdot\cos nx\cdot n - n\cdot\frac{1}{\sin mx}\cdot\cos mx\cdot m$$
$$= \frac{mn(\sin mx\cos nx - \cos mx\sin nx)}{\sin mx\sin nx} = \frac{mn\sin(m-n)x}{\sin mx\sin nx}.$$

所以 $y' = \frac{\sin^m nx}{\sin^n mx}\cdot\frac{mn\sin(m-n)x}{\sin mx\sin nx} = \frac{mn\sin^{m-1}nx\sin(m-n)x}{\sin^{n+1}mx}.$

3.1.79 求 $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{3x}}}$ 的导数

解 两边取对数,得

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln\sin x + \frac{1}{4}\ln(1-e^{3x})$$

两边分别对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-e^{3x}}\cdot(-e^{3x})\cdot 3,$$

所以　$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{3x}}}\left[\frac{1}{x}+\text{ctg}x-\frac{3e^{3x}}{2(1-e^{3x})}\right].$

3.1.80　$y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解　函数带有多层根号，且为相乘，这时一般应写成指数形式，再取对数.

$$y=\{e^{\frac{1}{x}}[x(\sin x)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2x}}x^{\frac{1}{4}}(\sin x)^{\frac{1}{8}},$$

$$\ln y=\frac{1}{2x}\ln e+\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{8}\ln\sin x,$$

两边分别对 x 求导，得$\frac{1}{y}y'=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8}\text{ctg}x$，

所以　$y'=y\left(\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8}\text{ctg}x\right)$

$$=e^{\frac{1}{2x}}x^{\frac{1}{4}}(\sin x)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{8}\text{ctg}x\right).$$

(6) 幂指函数的导数

求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数时，一般用对数求导法. 要注意所取的对数有意义，即 $\ln f(x)$ 中的 $f(x)$ 要大于 0.

3.1.81　求 $y=x^x(x>0)$ 的导数.

解　因 $x>0$，所以 x 有对数，$\ln y=x\ln x$.

两边分别对 x 求导，得$\frac{1}{y}y'=1+\ln x$，所以

$$y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x).$$

3.1.82　求 $y=x^{(x-1)(x-2)}$ 的导数.

解　$\ln y=(x-1)(x-2)\ln x$，两边分别对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=1\cdot(x-2)\ln x+1\cdot(x-1)\ln x$$

$$+(x-1)(x-2)\cdot\frac{1}{x},$$

所以　$y'=x^{(x-1)(x-2)}\left[(2x-3)\ln x+\frac{(x-1)(x-2)}{x}\right].$

3.1.83　求 $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$ 的导数.

解　令 $y_1=(\sin x)^{\cos x}$，$y_2=(\cos x)^{\sin x}$，则

$$\ln y_1 = \cos x \ln\sin x, \quad \ln y_2 = \sin x \ln\cos x,$$

$$\frac{1}{y_1}y'_1 = \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + (-\sin x)\ln\sin x,$$

$$\frac{1}{y_2}y'_2 = \sin x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x} + \cos x\ln\cos x,$$

所以　$$y'_1 = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln\sin x\right],$$

$$y'_2 = (\cos x)^{\sin x}\left[-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\ln\cos x\right].$$

由此可得

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln\sin x\right] + (\cos x)^{\sin x}\left[-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\ln\cos x\right].$$

3.1.84　求 $y = (\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b$ $(a > 0, b > 0)$ 的导数.

解　$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a\ln\frac{b}{x} + b\ln\frac{x}{a}$$

$$= x\ln\frac{a}{b} + a\ln b - a\ln x + b\ln x - b\ln a,$$

两边分别对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}y' = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x},$$

所以,$y' = y(\ln\frac{a}{b} + \frac{b-a}{x}) = (\frac{a}{b})^x(\frac{b}{x})^a(\frac{x}{a})^b(\ln\frac{a}{b} + \frac{b-a}{x})$.

3.1.85　设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$,求$\frac{dy}{dx}$.

解法 1　把 y 改写成 $y = e^{\sin x\ln(1+x^2)}$,则有

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x\ln(1+x^2)}[\sin x\ln(1+x^2)]'$$

$$= (1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right].$$

解法 2　两边取对数,得

$$\ln y = \sin x\ln(1+x^2),$$

两边分别对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}.$$

所以 $$y' = (1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right].$$

解法 3　令 $u = 1+x^2, v = \sin x$，则 $y = u^v$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= vu^{v-1}\cdot 2x + u^v\ln u\cdot\cos x \\ &= 2x\sin x\cdot(1+x^2)^{\sin x-1} + (1+x^2)^{\sin x}\ln(1+x^2)\cdot\cos x \\ &= (1+x^2)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{1+x^2} + \cos x\ln(1+x^2)\right].\end{aligned}$$

3.1.86　已知 $y = (1+x^3)^{\cos x^2}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　两边取对数并对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx} = (1+x^3)^{\cos x^2}\left[\frac{3x^2\cos x^2}{1+x^3} + (-2x\sin x^2\ln(1+x^3))\right].$$

3.1.87　求 $y = x(\sin x)^{\cos x}$ 的导数.

解　$y' = (\sin x)^{\cos x} + x[(\sin x)^{\cos x}]'$

设　$y_1 = (\sin x)^{\cos x}$，则 $\ln y_1 = \cos x\ln\sin x$，

$$\frac{1}{y_1}y'_1 = (-\sin x)\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

所以 $$y'_1 = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

于是，
$$\begin{aligned}y' &= (\sin x)^{\cos x} + x(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) \\ &= (\sin x)^{\cos x}\left[1 + x\left(-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)\right].\end{aligned}$$

3.1.88　求 $y = (\cos x)^{\sin x}$ 的导数.

解　用对数求导法，得

$$[(\cos x)^{\sin x}]' = (\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right].$$

故 $$\begin{aligned}y' &= (\cos x)^{\sin x} + x[(\cos x)^{\sin x}]' \\ &= (\cos x)^{\sin x}\left[1 + x\cos x\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right].\end{aligned}$$

3.1.89　设 $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$（$\varphi(x)\neq 0, \psi(x) > 0$）且 $\varphi(x)\psi(x)$ 对 x 可导，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　$y = [\psi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}$. 因 $\varphi(x)\neq 0, \psi(x) > 0$，所以可以两边取对数并

求导.

$$\ln y = \frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x),$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{\frac{1}{\psi(x)}\psi'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)},$$

所以 $y' = y[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)\varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)]$

$$= [\psi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)\varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)].$$

(7) 分段函数的导数

分段函数的导数应分段求导,分界点处的导数一定要用导数的定义来计算.例如,若

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$

但若从 $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 利用公式求得导函数后再用 $x = 0$ 代入,不仅求不到导数 $f'(0)$,而且犯了原则性错误.这一点要切记.

3.1.90 证明:函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\text{ 为有理数}; \\ 0, & x\text{ 为无理数}, \end{cases}$$

只在 $x = 0$ 处有导数.

证 首先证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有导数.

由导数定义得

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n},\ x_n \neq 0$$

这里 x_n 是任意的数列,当 $n\to\infty$ 时,$x_n\to 0$.

估计比的绝对值:

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| \leqslant \left|\frac{x_n^2}{x_n}\right| \leqslant |x_n|,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = 0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n} = 0$.由此可知,$f'(0) = 0$.

现证明函数 $f(x)$ 在任何点 $x\neq 0$ 处均无导数，显然，$f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是间断的. 因此，在 $x\neq 0$ 处 $f(x)$ 的导数不存在.

也可以直接证明.

令 $x=r\neq 0$ 是一有理点，x'_n 及 x''_n 分别是一有理数序列及无理数序列，当 $n\to\infty$ 时，它们均趋向于零. 讨论极限 α_1 及 α_2.

$$\alpha_1=\lim_{n\to\infty}\frac{f(r+x'_n)-f(r)}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(r+x'_n)^2+2}{x'_n}=2r,$$

$$\alpha_2=\lim_{n\to\infty}\frac{f(r+x''_n)-f(r)}{x''_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-r^2}{x''_n}\neq 2r,$$

故在有理点 $x=r\neq 0$ 处，$f(x)$ 的导数不存在.

再令 $x=s$ 是一无理点，x'_n 是一无理数序列，当 $n\to\infty$ 时，$x'_n\to 0$，

则 $$\beta_1=\lim_{n\to\infty}\frac{f(s+x'_n)-f(s)}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(s+x_n)}{x'_n}=0;$$

取有理数序列 η_n，$\eta_n\to s(n\to\infty)$，于是 $\beta_2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\eta_n)-f(s)}{\eta_n-s}$，

令 $\eta_n-s=x''_n$，则 $\beta_2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\eta_n)}{x''_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\eta_n^2}{x''_n}\neq\beta_1$.

故在无理点 $x=s$ 处，$f(x)$ 的导数也不存在. 于是有

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ \text{不存在}, & x\neq 0.\end{cases}$$

3.1.91　证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x>0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处右连续，但在 $x=0$ 处不可导.

证　因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1}=0,$$

又 $f(0)=0$，所以在 $x=0$ 处 $f(x)$ 右连续.

但 $$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)/\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x\sqrt{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x}(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = +\infty.$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右不可导.

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

3.1.92　讨论：

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ x^3, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内的连续性与可导性及 $f'(x)$ 的连续性.

(2) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的一阶导数和二阶导数是否存在？如果存在，试求其值.

解　(1) 显然在 $x\neq 0$ 处 $f(x)$ 连续可导. 由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\sin\frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^3 = 0,$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-0}{x-0} = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在，于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

由 $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 3x^2, & x\leqslant 0 \end{cases}$

知，$x\neq 0$ 时 $f'(x)$ 连续，虽然 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 = 0$，$f'(0)=0$，但

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，故当 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不连续.

(2) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(\Delta x)^3\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0.$

$$f'(x) = 3x^2\cos\frac{1}{x} + x^3(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})$$

$$= 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0).$$

$$f''(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(\Delta x)^2\cos\frac{1}{\Delta x} + \Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(3\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x} + \sin\frac{1}{\Delta x}).$$

所以，$f''(0)$ 不存在.

3.1.93　设 $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 试证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.

证　因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$，且 $f(0) = 0$，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 但因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

3.1.94　讨论 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的可导性.

解　$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{\Delta x 2^{\frac{1}{\Delta x}}}{1 + 2^{\frac{1}{\Delta x}}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2^{\frac{1}{\Delta x}}}{1 + 2^{\frac{1}{\Delta x}}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2^{-\frac{1}{\Delta x}} + 1},$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{2^{-\frac{1}{\Delta x}} + 1} = 1$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{2^{-\frac{1}{\Delta x}} + 1} = 0$，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可

导.

注 $f'(0)=(0)'=0$ 是不对的，从根本上违背了函数在一点处的导数定义.

3.1.95 在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$

(1) 在 $x=0$ 处连续；

(2) 在 $x=0$ 处可导；

(3) 在 $x=0$ 处导数连续？

解 (1) 因为 $f(0)=0$，所以为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0$. 由于当 $x\to 0$ 时 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，为了使 $\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0$，必须且只须 $n>0$. 因此，当 $n>0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 为使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，我们考察极限

$$\lim_{x\to 0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}=\frac{x^n\sin\frac{1}{n}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x},$$

类似于(1)中的分析，为使该极限存在，必须且只须 $n-1>0$ 或 $n>1$. 因此当 $n>1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3) 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}+x^n\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}.$$

因为 $f'(0)=0$，所以为使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应有

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left[nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right]=0,$$

为此须 $n-2>0$ 或 $n>2$. 因此当 $n>2$ 时 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3.1.96 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant x_0;\\ ax+b, & x>x_0,\end{cases}$ 为使函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且可微，应当如何选取系数 a 与 b？

解 因 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}(ax+b)=ax_0+b$,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} x^2 = x_0^2, \text{且} f(x_0) = x_0^2.$$

故欲使函数在 $x = x_0$ 处连续，则应取 $ax_0 + b = x_0^2$. 此时

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{a(x_0+\Delta x) + b - x_0^2}{\Delta x} = a,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = 2x_0,$$

欲使函数在 $x = x_0$ 处可微，应取 $a = 2x_0$，从而 $b = -x_0^2$. 故所求的 $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

3.1.97　设 $f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x = \dfrac{\pi}{2}; \\ ax^2 + b, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

试确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处可导.

解　可由函数的连续性和可导性确定两个末知数 a、b.

(1) $f(x)$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处连续. $f(\dfrac{\pi}{2}) = 0$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (ax^2 + b) = \frac{\pi^2}{4}a + b,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (-\cos x) = 0.$$

要使 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处连续，必须 $\dfrac{\pi^2}{4} + b = 0$.　　(1)

(2) $f(x)$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 处可导.

$$f'_+(\frac{\pi}{2}) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(\frac{\pi}{2}+\Delta x) - f(\frac{\pi}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{a(\frac{\pi}{2}+\Delta x)^2 + b - 0}{\Delta x},$$

把(1)代入得

$$f'_+(\frac{\pi}{2}) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{a\pi\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (a\pi + a\Delta x) = a\pi,$$

$$f'_-(\frac{\pi}{2}) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\frac{\pi}{2} + \Delta x) - f(\frac{\pi}{2})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

要 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处可导，必须 $a\pi = 1$. (2)

由(1)、(2)两式解得 $a = \frac{1}{\pi}$, $b = \frac{\pi^2}{4}$.

3.1.98 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ 求 $f'(1)$.

解 按一般的方法，应根据函数在一点的导数定义求 $f'(1)$. 但是，当 $f'(x)$ 不存在时，只要证明 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续即可(见3.1.5题).

因 $f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} = 0$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{-\frac{1}{x-1}} = \infty,$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续，故在该处不可导，即 $f'(1)$ 不存在.

3.1.99 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1; \\ x, & x > 1. \end{cases}$ 且 $f(0) = 0$，试求函数 $f(t)$.

解 当 $0 < x \leqslant 1$ 时，由 $f'(\ln x) = 1$ 得，$f(\ln x) = \ln x + c_1$，即 $f(t) = t + c_1$, $-\infty < t \leqslant 0$. 当 $x > 1$ 时，由 $f'(\ln x) = x = e^{\ln x}$，得 $f(\ln x) = e^{\ln x} + c_2$，即 $f(t) = e^t + c_2$, $t > 0$. 由 $f(0) = 0$ 知，$c_1 = 0$, $c_2 = -1$，故所求的函数为 $f(t) = \begin{cases} t, & -\infty < t \leqslant 0; \\ e^t - 1, & t > 0. \end{cases}$

3.1.100 若 $F(x) = \max\{x, x^2\}$, $x \in (0,2)$ 试求 $F'(x)$.

解 $F(x) = \max\{x, x^2\} = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1; \\ x^2, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 于是有

$$F'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 2x, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

而 $F'(1^-)=1$，$F'(1^+)=2$，于是 $F'(1)$ 不存在，或者说 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

3.1.101　设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & 1<x<+\infty;\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x^3, & -\infty<x<0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　在分段开区间内分别求导，得

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & 1<x<+\infty;\\ 2x, & 0<x<1;\\ 3x^2, & -\infty<x<0.\end{cases}$$

在分界点 $x=0$ 处，由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}(2x)=0,\quad \lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}(3x^2)=0.$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 存在，且 $f'(0)=0$.

在分界点 $x=1$ 处，由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，而

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}(2x)=2,$$

所以，$\lim\limits_{x\to1}f'(x)$ 不存在，因此，$f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数要根据导数的定义来求(求法从略).

由导数定义判定知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导，于是

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & 1<x<+\infty;\\ 2x, & 0\leqslant x<1;\\ 3x^2, & -\infty<x<0.\end{cases}$$

在 $x=1$ 处，$f(x)$ 不可导.

3.1.102　设 $F(x)=f[f(x)]$，其中 $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2;\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 求 $F'(x)$.

解　设 $u=f(x)$，则

当 $|x|\leqslant 2$ 时，$u=2-x^2$ 且 $|u|=|2-x^2|\leqslant 2$；

当 $|x|>2$ 时，$u=2$，而

$$f(u)=\begin{cases}2-u^2, & \text{当 } |u|\leqslant 2 \text{ 时};\\ 2, & \text{当 } |u|>2 \text{ 时}.\end{cases}$$

因此，得

$$f[f(x)]=\begin{cases}2-(2-x^2)^2=-x^4+4x^2-2, & |x|\leqslant 2;\\ 2-2^2=-2, & |x|>2.\end{cases}$$

即
$$F(x)=\begin{cases}-x^4+4x^2-2, & |x|\leqslant 2;\\ -2, & |x|>2.\end{cases}$$

于是，当 $|x|<2$ 时，$F'(x)=-4x^3+8x$；当 $|x|>2$ 时，$F'(x)=0$. 而当 $x=-2$ 时，因

$$F'(-2^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(-2+\Delta x)-F(-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\Delta x}\{[-(-2+\Delta x)^4+4(-2+\Delta x)^2-2]-[-(-2)^4+4(-2)^2-2]\}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{32\Delta x-24(\Delta x)^2+8(\Delta x)^3-(\Delta x)^4-16\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=16.$$

$$F'(-2^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{F(-2+\Delta x)-F(-2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-2-[-(-2)^4+4(-2)^2-2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

因为 $F'(-2^+)\neq F'(-2^-)$，所以，在 $x=-2$ 处，函数 $f(x)$ 不可导.

同理，在 $x=2$ 处，有 $F'(2^+)=0, F'(2^-)=-16, F'(2^+)\neq F'(2^-)$，所以，在 $x=2$ 处函数 $F(x)$ 亦不可导.

综上所述，有

$$F'(x)=\begin{cases}-4x^3+8x, & |x|<2;\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

3.1.103 求函数

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2(x-b)^2, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

的导数.

解 当 $x\in(a,b)$ 时，

$f'(x)=[(x-a)^2(x-b)^2]'=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$，

当 $x\notin[a,b]$ 时，$f'(x)=(0)'=0$.

在 $x=a$ 处，$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{0-0}{x-a}=0$，

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)^2(x-b)^2-0}{x-a}=0,$$

所以　$f'(a)=0$.

类似地，可求得 $f'(b)=0$. 因此

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x\notin(a,b);\\ 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & x\in(a,b).\end{cases}$$

3.1.104　试讨论函数 $f(x)$ 的可导性.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

解　当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\frac{1-e^{\frac{1}{x}}-xe^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{(1-e^{\frac{1}{x}})^2}=\frac{1-e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{(1-e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

在 $x=0$ 点，有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0$，且 $f(0)=0$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，由导数定义

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg|_{x=0}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{\Delta x}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}},$$

有　$\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}=0$，　$\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{\Delta x}}}=1$.

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导. 故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,\infty)$ 内可导.

3.1.105　设 $y=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & x\leqslant 0;\\ \log_x e, & x>0,\end{cases}$　求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　分界点为 $x=0$，

当 $x<0$ 时，$\dfrac{dy}{dx}=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}(-2x)=2xe^{-x^2}(1-x^2)$；

当 $x>0$ 时，$\dfrac{dy}{dx}=(\dfrac{1}{\ln x})'=-\dfrac{1}{x\ln^2x}$；

当 $x=0$ 时，

$$f'(0^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2e^{-(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\Delta x e^{-(\Delta x)^2}=0;$$

$$f'(0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\ln\Delta x}-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\Delta x\ln\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{\ln\Delta x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{(\Delta x)^2}}{\frac{1}{\Delta x}}=-\infty;$$

所以 $f'(0)$ 不存在,即 y 在 $x=0$ 处不可导.

3.1.106 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$

和 $$g(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}-1, & x\leqslant 0;\\ \sin x-\cos 2x, & x>0,\end{cases}$$

(1) 求它们的导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$;

(2) 能否从 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 求得 $f'(0)$ 和 $g'(0)$?如何正确地求得它们;

(3) 若 $y=f(x)$ 表示直角坐标系中在 $x=x_0$ 邻域内的曲线方程,且 $f(x)$ 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内可得,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的几何意义是什么?二者在什么情况下相等?

解 (1) $$f'(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}e^{-x^2}(1-2x^2), & x\leqslant 0;\\ \cos x+2\sin 2x, & x>0.\end{cases}$$

(2) 不能从 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 求得 $f'(0)$ 和 $g'(0)$. 应当用函数在一点导数定义来求.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但 $f(0)$ 不是由函数关系 $\sqrt[3]{x^4}\sin\frac{1}{x}$ 来定义的，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^4}\sin\frac{1}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x}=0.$$

为求 $g'(0)$，由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且当 $x\leqslant 0$ 时，$g(0)$ 由 $g(x)=xe^{-x^2}-1$ 定义，所以，左导数 $g'(0^-)$ 可用 $(xe^{-x^2}-1)'|_{x=0}=e^{-x^2}(1-2x^2)|_{x=0}=1$ 来求得. 当 $x\geqslant 0$ 时，$g(0)$ 由 $g(x)=\sin x-\cos 2x$ 定义，所以，右导数 $g'(0^+)$ 可用 $(\sin x-\cos 2x)'|_{x=0}=(\cos x+2\sin 2x)|_{x=0}=1$ 来求得. 由于 $g'(0^-)=g'(0^+)=1$，所以 $g'(0)=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 的几何意义表示曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x,y)$ 点的切线 MT 的斜率 $f'(x)$ 当 M 点沿曲线 $y=f(x)$ 趋近于 M_0 时的极限值；$f'(x_0)$ 的几何意义表示曲线 $y=f(x)$ 的弦 M_0M 的斜率 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 当 M 点沿曲线 $y=f(x)$ 趋近于 M_0 时的极限. 所以二者未必相等. 例如本题中的 $f(x)$ 在 $x=0$ 时有 $f'(0)=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 却不存在. 又如，对函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}-2, & x\leqslant 0;\\ \sin x-\cos 2x, & x>0\end{cases}$$

可以求得　$$\varphi'(x)=\begin{cases}e^{-x^2}(1-2x^2), & x<0;\\ \cos x+2\sin 2x, & x>0.\end{cases}$$

显然，$\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=1$，但 $\varphi'(0)$ 不存在，因为 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，因此，只有当 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在时，才有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$. 否则，要用导数的定义或可导的必要条件来判断在 $x=x_0$ 处 $f'(x_0)$ 是否存在.

3.1.107　设

$$g(x)=\begin{cases}f'(x), & x=0;\\ \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

证明：(1) 若 $f(0)=0$，$f''(0)$ 存在，则有 $g'(0)=\frac{1}{2}f''(0)$；

(2) 若 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，则 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证　(1) $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}.$$

因 $f''(0)$ 存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导. 又由 $f(0)=0$ 可知，上式为“$\dfrac{0}{0}$”型不定式，利用洛比达法则及导数定义，得

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

(2) 对任意的 $x(x\neq 0)$，

$$g'(x)=\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},$$

由于 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在，故 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $g'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续.

在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，由 $f(0)=0$ 可知，上式为“$\dfrac{0}{0}$”型不定式，故

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(f'(x)+xf''(x))-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2},$$

又由 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\frac{f''(0)}{2}=g'(0).$$

于是，$g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

注　此题的证明是从导数的定义和连续的定义入手，借助洛比达法则这一求不定式极限的工具完成的.

3.1.108　若 $g(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $\dfrac{d}{dx}f[g(x)]|_{x=0}$.

解　$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=0$，$f'(u)|_{u=0}=f'(0)$.

设 $u=g(x)$，则

$$\frac{d}{dx}f[g(x)]|_{x=0}=[\frac{d}{du}f(u)\cdot g'(x)]_{x=0}=f'(0)\cdot 0=0.$$

(8) 含绝对值符号的函数的导数

求这类函数的导数，关键是去掉绝对值符号，变成分段函数.

3.1.109　设 $f(x)=|x|+1$，证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但在该点处不可微.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$ 可知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|+1-|x|-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h},$$

所以　$f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}$ 不存在.

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数不存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

3.1.110　在导数存在的点，求 $f(x)=|x|+|x-1|$ 的导数.

解　$f(x)$ 可化为 $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x\leqslant 0;\\ 1, & 0<x<1;\\ 2x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

从而有

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & x<0;\\ 0, & 0<x<1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$$

在 $x=0$ 和 $x=1$ 处，$f'(x)$ 均不存在.

3.1.111　讨论函数 $y=x|x(x-2)|$ 的可导性.

解　当 $x\neq 0, x\neq 2$ 时，函数显然是可导的. 又因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x|x(x-2)|}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x|x(x-2)|}{x}=0.$$

故在 $x=0$ 处函数亦可导. 但是

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x|x(x-2)|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2(2-x)}{x-2}=-4,$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x|x(x-2)|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$$

故在 $x=2$ 处函数不可导.

3.1.112 求函数 $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$ 的导数.

解 把 y 化为

$$y = \begin{cases} (x-1)^2(x+1)^3, & x \geqslant -1; \\ -(x-1)^2(x+1)^3, & x < -1. \end{cases}$$

故当 $x > -1$ 时，$y' = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$，

当 $x < -1$ 时，$y' = -(x-1)(x+1)^2(5x-1)$.

而当 $x = -1$ 时，

$$y'(-1^+) = \lim_{x\to 0^+}[y(-1+x) - y(-1)]/x$$
$$= \lim_{x\to 0^+}[(-2+x)^2x^3 - 0]/x = 0.$$

同样可求得 $y'(-1^-) = 0$，所以 $y'(-1^+) = y'(-1^-)$，故 $y'(-1)$ 存在且 $y'(-1) = 0$.

综上可得

$$y'(x) = (x-1)(x+1)^2(5x-1)\mathrm{sgn}(x+1).$$

3.1.113 设函数 $f(x) = (1+|x-1|)\sin(x-1)$，问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数是否存在？如果存在，求出该导数，如果不存在，说明理由.

解 按照导数的定义，有

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\{(1+|1+\Delta x-1|)\sin(1+\Delta x-1) - (1-|1-1|)\sin(1-1)\}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+|\Delta x|)\sin\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

所以，$f(x)$ 在 $x=1$ 处导数存在，且 $f'(1) = 1$.

3.1.114 求函数 $y = |1-2x|\cdot\sin(2+x+\sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解 $$y = \begin{cases} (1-2x)\sin(2+x+\sqrt{1+x^2}), & x < \dfrac{1}{2}; \\ (2x-1)\sin(2+x+\sqrt{1+x^2}), & x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(1) 当 $x \neq \dfrac{1}{2}$ 时，

$$y'=\begin{cases}-2\sin(2+x+\sqrt{1+x^2})+(1-2x)\cos(2+x+\\ \qquad +\sqrt{1+x^2})\cdot\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}, & x<\dfrac{1}{2};\\ 2\sin(2+x+\sqrt{1+x^2})+(2x-1)\cos(2+x+\\ \qquad +\sqrt{1+x^2})\cdot\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

(2) 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{2}+\Delta x)-f(\frac{1}{2})}{\Delta x}=2\sin\left(\frac{5}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\frac{1}{2}+\Delta x)-f(\frac{1}{2})}{\Delta x}=-2\sin\left(\frac{5}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right).$$

故函数 y 在 $x=\frac{1}{2}$ 处不可导.

3.1.115　函数 $f(x)=|\cos x|$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处是否连续?是否可导?

解　当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\cos x$,

当 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=-\cos x$.

因 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(-\cos x)=0$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x=0,\ f(\frac{\pi}{2})=|\cos\frac{\pi}{2}|=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处连续.

又 $$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\frac{\pi}{2}+\Delta x)-f(\frac{\pi}{2})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\cos(\frac{\pi}{2}+\Delta x)}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\frac{\pi}{2}+\Delta x)-f(\frac{\pi}{2})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\Delta x)}{\Delta x}=-1,$$

所以，$f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不可导.

3.1.116 设 $y=\cos(|\frac{\pi}{2}+\sin(x^2+1)|)$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 因为对于任何 x 值，都有$\frac{\pi}{2}+\sin(x^2+1)>0$，所以

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=[\cos(\frac{\pi}{2}+\sin(x^2+1))]'\\&=-\sin(\frac{\pi}{2}+\sin(x^2+1))\cdot\cos(x^2+1)\cdot 2x\\&=-2x\cos(x^2+1)\sin(\frac{\pi}{2}+\sin(x^2+1)).\end{aligned}$$

3.1.117 若 $y=2^{|a-x|}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 去掉绝对值符号，得

$$y=\begin{cases}2^{x-a}, & x>a;\\ 1, & x=a;\\ 2^{-(x-a)}, & x<a.\end{cases}$$

当 $x\neq a$ 时，y 是初等函数，所以

$$y'=\begin{cases}2^{x-a}\ln 2, & x>a;\\ -2^{-(x-a)}\ln 2, & x<a.\end{cases}$$

当 $x=a$ 时，

$$y'(a^+)=\lim_{x\to a^+}y'(x)=\lim_{x\to a^+}2^{x-a}\ln 2=\ln 2;$$

$$y'(a^-)=\lim_{x\to a^-}y'(x)=\lim_{x\to a^-}-2^{-(x-a)}\ln 2=-\ln 2,$$

故 $y'(a)$ 不存在，所以$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}2^{x-a}\ln 2, & x>a;\\ \text{不存在}, & x=a;\\ -2^{-x+a}\ln 2, & x<a.\end{cases}$

3.1.118 函数 $y=e^{|x|}$ 在 $x=0$ 处是否连续，是否可导，是否有极值，为什么？

解 $y=e^{|x|}=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0;\\ e^{-x}, & x<0,\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$；$\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-x}=1$，又$\lim\limits_{x\to 0}y=1$，$y|_{x=0}=1$，故在 $x=0$ 处 $y=e^{|x|}$ 连续.

而 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}e^x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1,$$

故 $y=e^{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导.

又当 $x<0$ 时,$y'=-e^{-x}<0$;当 $x>0$ 时,$y'=e^x>0$,所以 $y=e^{|x|}$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=1$.

3.1.119　设 $f(x)=\ln|x-1|$,求 $f'(x)$.

解　去掉绝对值符号,得

$$f(x)=\begin{cases}\ln(x-1), & x>1;\\ \text{无定义}, & x=1;\\ \ln(1-x), & x<1.\end{cases}$$

当 $x=1$ 时,$f(x)$ 无定义,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,当然不可导,所以

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1;\\ \text{不存在}, & x=1.\end{cases}$$

3.1.120　求函数 $y=\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right|$ 的导数.

解　$y=\ln|\sqrt{x^3+1}-1|-\ln|\sqrt{1+x^3}+1|$,

故 $$y'=\frac{(\sqrt{1+x^3})'}{\sqrt{x^3+1}-1}-\frac{(\sqrt{1+x^3})'}{\sqrt{1+x^3}+1}$$

$$=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^3}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}+1}\right)$$

$$=\frac{3}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

(9) 极限函数的导数

这类题目,一般是求出极限,再求导数.

3.1.121　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2})^n$,求 $f'(x)$.

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\dfrac{x}{n})^n(1+\dfrac{x}{n})^n\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left\{\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-\frac{n}{x}}\right]^{-x}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^{x}\right\}$$
$$= e^{-x}e^{x} = 1,$$

所以 $f'(x)=0$.

3.1.122 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$,讨论 $f(x)$ 的连续性及可微性,并求 $f'(x)$.

解 当 $|x|\leqslant 1$ 时,$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^{2n}}\leqslant\sqrt[n]{2}$,而 $\sqrt[n]{2}\to 1\ (n\to\infty)$,所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=1.$$

当 $|x|>1$ 时,$x^2=\sqrt[n]{x^{2n}}<\sqrt[n]{1+x^{2n}}<\sqrt[n]{2x^{2n}}=x^2\sqrt[n]{2}$,

所以
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=x^2,$$

故
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ x^2, & |x|>1.\end{cases}$$

因为
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=1=f(1),$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^-}f(x)=1=f(-1),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 与 $x=-1$ 处都连续,于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

由于
$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2,$$
$$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{1-1}{\Delta x}=0.$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

同理可证,$f(x)$ 在 $x=-1$ 处也不可导,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$ 内可微,在 $x=\pm1$ 处不可微,其导数为:

$$f'(x)=\begin{cases}0, & |x|<1;\\ 2x, & |x|>1;\\ \text{不存在}, & |x|=1.\end{cases}$$

3.1.123 讨论函数 $f(x)$ 的连续性及可微性,并求导,其中

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}, & x\geqslant 0;\\ -\sqrt[3]{x}, & x<0.\end{cases}$$

解　由 $f(x)$ 的表示式可以求出

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>1;\\ 1/2, & x=1;\\ 0, & 0\leqslant x<1;\\ -\sqrt[3]{x}, & x<0.\end{cases}$$

因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\sqrt[3]{x})=0=f(0)=f(0^+)$，$f(1^-)\neq f(1^+)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$ 内连续.

又因 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可微. 而

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0,\ f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt[3]{x}-0}{x}=\infty.$$

由此知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$、$(0,1)$、$(1,+\infty)$ 上可微，且

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x>1;\\ 0, & 0<x<1;\\ -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, & x<0.\end{cases}$$

3.1.124　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$　$|x|<1$，求 $f'(x)$.

解　$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

（最后一个等号成立是因为 $|x|<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$）.

于是　$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

3.1.125　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$，$(x>0)$，求 $f'(x)$.

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}[x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1]$

$$= \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n^2}{n(n+1)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}},$$

其中，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n(n+1)} = 1$.

令 $y = x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1$，则当 $n \to \infty$ 时，$y \to 0$. 而$\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln x}$，

于是，
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln x}{\frac{\ln(1+y)}{y}}$$
$$= \frac{\ln x}{\lim\limits_{y\to 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \ln x \frac{1}{\ln e} = \ln x.$$

故得 $f(x) = \ln x, (x > 0)$，所以 $f'(x) = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$.

3.1.126　设 $\varphi(t) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{r}[(t + \dfrac{r}{a}) - f(t - \dfrac{r}{a})]$，其中函数 $f(u)$ 存在直到二阶导数，t, a 与 r 无关. 求 $\varphi'(t)$.

解　
$$\varphi(t) = \frac{1}{a} \lim_{r\to 0} \left[\frac{f(t + \frac{r}{a}) - f(t)}{\frac{r}{a}} + \frac{f(t - \frac{r}{a}) - f(t)}{-\frac{r}{a}} \right]$$
$$= \frac{1}{a}[f'(t) + f'(t)] = \frac{2}{a} f'(t),$$

故得
$$\varphi'(t) = \frac{2}{a} f''(t).$$

3.1.127　设 $\varphi(t) = \lim\limits_{x\to t} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{t} + \sqrt{x-t}}{\sqrt{x^2 - t^2}}$，求 $\varphi'(t)$.

解　
$$\varphi(t) = \lim_{x\to t} \frac{1}{\sqrt{x+t}} \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} + 1 \right]$$
$$= \lim_{x\to t} \frac{1}{\sqrt{x+t}} \left[\frac{x-t}{\sqrt{x-t}(\sqrt{x} + \sqrt{t})} + 1 \right]$$
$$= \lim_{x\to t} \frac{1}{\sqrt{x+t}} \left[\frac{\sqrt{x-t}}{\sqrt{x} + \sqrt{t}} + 1 \right] = \frac{1}{\sqrt{2t}},$$

故
$$\varphi'(t)=-\frac{1}{\sqrt{2}\,t^2}.$$

(10) 抽象函数的导数

求抽象函数的导数与求具有具体表达式的函数的导数一样，认准复合关系，由表及里层层求导，关键是注意对"谁"求导.

3.1.128　设 $f(x)=(x^{331}-1)g(x)$，其中 $g(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，且 $g(1)=6$，试求导数 $f'(1)$ 的值.

解　
$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^{331}-1)g(x)-0}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x^{330}+x^{329}+\cdots+x+1)\cdot\lim_{x\to1}g(x)\\&=331\times6=1986.\end{aligned}$$

3.1.129　设 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)\ (n\geqslant1)$，$\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.

解　因 $\varphi(x)$ 的具体表达式未知，所以要按导数定义证明.

因　$f(x_0)=0$，所以
$$\begin{aligned}f'(x_0)&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{[(x_0+\Delta x)-x_0]^n\varphi(x_0+\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}(\Delta x)^{n-1}\varphi(x_0+\Delta x)=\begin{cases}\varphi(x_0), & n=1;\\0, & n>1,\end{cases}\end{aligned}$$
所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.

3.1.130　设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，其中函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

解　
$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)-0}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}(x+a)g(x)=2ag(a).\end{aligned}$$

3.1.131　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个对 x 的所有值皆有定义的函数，且具有下列性质：

(1) $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$；

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处是可微的，且已知 $f(0)=0, g(0)=1, f'(0)=1, g'(0)=0$. 试证明 $f(x)$ 对于 x 的所有值皆是可微的，且 $f'(x)=g(x)$

证　由题设知 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 处可微，故有

$$g'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=0;$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0.$$

所以
$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[g(\Delta x)-1]+f(\Delta x)g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(x)[g(\Delta x)-g(0)]}{\Delta x}+\frac{[f(\Delta x)-f(0)]g(x)}{\Delta x}\right\}\\&=f(x)g'(0)+f'(0)g(x)=f(x)\cdot 0+1\cdot g(x)\\&=g(x).\end{aligned}$$

3.1.132　设 $y=f(\sin x)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dy}{d(\sin x)}$.

解　$\frac{dy}{dx}=f'(\sin x)\cos x$，　$\frac{dy}{d(\sin x)}=f'(\sin x)$，

例如，$y=\sin x^2$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dy}{d(x^2)}$，$\frac{dy}{d(x^3)}$，则

$$\frac{dy}{dx}=\cos x^2\cdot 2x,\quad \frac{dy}{d(x^2)}=\cos x^2$$

$$\frac{dy}{d(x^3)}=\frac{d}{d(x^3)}\sin(x^3)^{\frac{2}{3}}=\cos(x^3)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}(x^3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{\cos x^2}{x}.$$

最后一式相当于设 $u=x^3,x=\sqrt[3]{u},x^2=u^{\frac{2}{3}}$，故

$$y=\sin u^{\frac{2}{3}},\ y'_u=\cos u^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\frac{1}{x}\cos x^2.$$

或者用微分之商来解：

$$\frac{dy}{d(x^3)}=\frac{d(\sin x^2)}{d(x^3)}=\frac{\cos x^2\cdot 2x\cdot dx}{3x^2dx}=\frac{2}{3}\frac{1}{x}\cos x^2.$$

3.1.133　设 $f(u)$ 为可导函数，求 $y=\sin[f(\sin f(x))]$ 的导数.

解　$y'=\cos[f(\sin f(x))]\cdot f'(\sin f(x))\cdot\cos f(x)\cdot f'(x)$.

3.1.134　设 $f(u)$ 为可导函数，求 $y=f(e^x)e^{f(x)}$ 的导数.

解　$$\begin{aligned}y'&=[f'(e^x)\cdot e^x]e^{f(x)}+f(e^x)[e^{f(x)}\cdot f'(x)]\\&=e^{x+f(x)}f'(e^x)+e^{f(x)}f(e^x)f'(x).\end{aligned}$$

3.1.135　计算 $\frac{d}{dx}\log_{\varphi(x)}f(x)$，其中 φ,f 均为可微函数，且 $\varphi>0$，

$\varphi \neq 1, f > 0.$

解
$$\frac{d}{dx}\log_{\varphi(x)}f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln f(x)}{\ln\varphi(x)}\right]$$
$$= \frac{1}{\ln^2\varphi(x)}\left[\ln\varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} - \ln f(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]$$
$$= \frac{1}{\ln\varphi(x)}\left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \log_{\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right].$$

3.1.136　$y = f\{f[f(x)]\}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解　设 $u = f[f(x)]$，$v = f(x)$，故 $y = f(u)$.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = f'_u(u)f'_v(v)f_x(x)$$
$$= f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x).$$

3.1.137　设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$，式中 a、b、c 都是常数，且 $|a| \neq |b|$，求 $f'(x)$.

解　将所给方程两边对 x 求导，得
$$af'(x) - \frac{b}{x^2}f'(\frac{1}{x}) = -\frac{c}{x^2}. \tag{1}$$
再在原方程中以$\frac{1}{x}$代 x，则成为
$$af(\frac{1}{x}) + bf(x) = cx,$$
将此式两边对 x 求导，得
$$-\frac{a}{x^2}f'(\frac{1}{x}) + bf'(x) = c, \tag{2}$$
以 b 乘(2)式，a 乘(1)式后两者相减，得
$$(b^2 - a^2)f'(x) = \frac{c(a + bx^2)}{x^2},$$
所以
$$f'(x) = \frac{c(a + bx^2)}{(b^2 - a^2)x^2}.$$

3. 隐函数的导数

设由方程 $F(x,y) = 0$ 确定了一个隐函数 $y = f(x)$. 如果它是可导的，如何求 $f'(x)$?有些方程所确定的隐函数容易表示成显函数的形式，这时便可用上面介绍过的方法求导；但有时隐函数的显化是困难的，甚至是(在一定意义下)不可能的，这时就要考虑用隐函数微分法.

由于 $F[x,f(x)]\equiv 0$，则有$\frac{d}{dx}F[x,f(x)]=0$. 据此在 $F(x,y)=0$ 中视 $y=f(x)$，把方程两端分别对 x 求导，这时视 y 为中间变量，求导结果便会出现 y'，从中解出 y'，即得隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

3.1.138 设 $F(x,y)=x^2+2xy-y^2-2x=0$，求 $y'|_{x=2}$.

解 利用隐函数的求导法则，得

$$\frac{dF}{dx}=2x+2y+2xy'-2yy'-2=0,$$

所以
$$y'=\frac{1-x-y}{x-y}.$$

将 $x=2$ 代入方程 $F(x,y)=0$，得 $4y-y^2=0$，解之得

$$y_1=0,y_2=4.$$

当 $x=2,y=0$ 时，有 $y'_1=-\frac{1}{2}$，

当 $x=2,y=4$ 时，有 $y'_2=\frac{5}{2}$.

3.1.139 设 y 是由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定的函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边同时对 x 求导，得

$$\cos(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{1}{y-x}\left(\frac{dy}{dx}-1\right)=1,$$

将 $x=0$ 代入原方程，得 $\ln y=0$，即 $y=1$，再将 $x=0,y=1$ 代入上式，则有 $1+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}-1=1$，即$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$.

3.1.140 设 $x^y-y^x=1$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 所给方程可改写为

$$e^{y\ln x}-e^{x\ln y}=1,$$

视 y 为由该方程所确定的隐函数，方程两边对 x 求导，可得

$$e^{y\ln x}(y'\ln x+y\frac{1}{x})-e^{x\ln y}(\ln y+x\frac{1}{y}y')=0,$$

或
$$x^y(y'\ln x+\frac{y}{x})-y^x(\ln y+\frac{xy'}{y})=0.$$

解之得
$$y'=\frac{y^x\ln y-yx^{y-1}}{x^y\ln x-xy^{x-1}}.$$

3.1.141　设 $x\sin y + y\sin x = 0$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　原式两边关于 x 求导，有

$$\sin y + x\cos y \cdot y' + y'\sin x + y\cos x = 0,$$

解出 y'，即得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin y + y\cos x}{\sin x + x\cos y}.$$

3.1.142　设 $x + \operatorname{arctg} y = y$，求 y'.

解　两边对 x 求导，得 $1 + \frac{y'}{1+y^2} = y'$，所以

$$y' = 1 + \frac{1}{y^2}.$$

3.1.143　求由方程 $e^x + e^y + 2^{xy} - 1 = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　等式两边关于 x 求导，得

$$e^x + e^y y' + 2^{xy}\ln 2(y + xy') = 0,$$

解出 y'，即得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x + \ln 2 \cdot 2^{xy} \cdot y}{e^y + \ln 2 \cdot 2^{xy} \cdot x}.$$

3.1.144　求由方程 $x = e^{\frac{x-y}{y}}$ 所确定的隐函数 y 的导数.

解法 1　方程两边分别对 x 求导，可得

$$1 = e^{\frac{x-y}{y}} \cdot \left(\frac{x-y}{y}\right)' = x \cdot \frac{y \cdot (x-y)'_x - (x-y)y'}{y^2}$$

$$= x\frac{y(1-y') - (x-y)y'}{y^2} = \frac{xy - x^2y'}{y^2},$$

解出 y'，得

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2}.$$

如果将原方程的两边分别取对数，可得

$$\ln x = \frac{x-y}{y},$$

解出 y，得 $y = \frac{x}{1+\ln x}$，再将其代入 y'，可得

$$y' = \frac{x \cdot \frac{x}{1+\ln x} - \left(\frac{x}{1+\ln x}\right)^2}{x^2} = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}.$$

解法 2 方程两边取对数,并解出 y,得

$$y=\frac{x}{1+\ln x}.$$

求导,得 $$y'=\frac{1+\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}.$$

3.1.145 求由方程 $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两边关于 x 求导,得

$$\frac{xy'-y}{x^2}+\frac{xy'-y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{xy'-y}{x^2}=0.$$

整理得

$$\left(3x+3xe^{\frac{y}{x}}-x\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)y'-\left(3y+3ye^{\frac{y}{x}}-y\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)=0.$$

解出 y',即得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{3y+3ye^{\frac{y}{x}}-y\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{3x+3xe^{\frac{y}{x}}-x\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}.$$

3.1.146 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y^2$,试求 $y'(0)$.

解 方程两边分别对 x 求导,得

$$e^{xy}(y+xy')+\cos(x^2y)(2xy+x^2y')=2yy',$$

解出 y',得 $$y'=\frac{ye^{xy}+2xy\cos(x^2y)}{xe^{xy}+x^2\cos(x^2y)-2y}.$$

以 $x=0$ 代入原方程,得 $1-y^2=0$,解之得 $y_1=1,y_2=-1$.

当 $x=0,y_1=1$ 时,$y'_1=\frac{1}{2}$,

当 $x=0,y_2=-1$ 时,$y'_2=\frac{1}{2}$.

3.1.147 设 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$,求 $\frac{dy}{dx}$.

解 两边对 x 求导,得

$$1 = a\left[\frac{\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}}{a+\sqrt{a^2-y^2}} - \frac{1}{y}\right]\frac{dy}{dx},$$

解出$\frac{dy}{dx}$,得 $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a^2}\sqrt{a^2-y^2}.$$

3.1.148 求由方程

$$\sin(y-x^2) - \ln(y-x^2) + 2\sqrt{y-x^2} - 3 = 0$$

所确定的隐函数 y 的导数.

解 两边关于 x 求导,得

$$\cos(y-x^2)\cdot(y'-2x) - \frac{y'-2x}{y-x^2} + \frac{y'-2x}{\sqrt{y-x^2}} = 0,$$

解出 y',即得 $y' = 2x$.

3.1.149 设 $\arcsin x \ln y - e^{2x} + \mathrm{tg}y = 0$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程的两边对 x 求导,得

$$\frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} - 2e^{2x} + \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

即 $$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x} - \frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{\arcsin x}{y} + \frac{1}{\cos^2 y}}.$$

以 $x = 0$ 代入原方程,得

$$-e^0 + \mathrm{tg}y = 0,\text{即 } \mathrm{tg}y = 1,\text{所以 } y = \frac{\pi}{4} + n\pi.$$

为使方程有意义,应取 $y > 0$,故 $n = 0,1,2,\cdots$,于是

$$y'|_{x=0} = 1 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\ (n = 0,1,2,\cdots)$$

特别地,$y'|_{(0,0)} = 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4}$.

3.1.150 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$,求$\frac{dy}{dx}$.

解法 1 方程两边分别对 x 求导,得

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right)$$

整理，得
$$x + y\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} - y.$$

故
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

解法 2　由原方程得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$

两边分别对 x 求导，得

$$\frac{1}{2(x^2+y^2)}(2x+2y\frac{dy}{dx}) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}).$$

解出$\frac{dy}{dx}$，得
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

解法 3　设 $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$，则

$$F'_x = \frac{2x}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{(1+\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F'_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2},$$

于是
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{x+y}{x-y}.$$

4. 用参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta)$$

所确定，其中 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是可微函数，且 $\varphi'(t) \neq 0$，则此函数的导数存在，且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

3.1.151　设 $x = t^3 + 3t + 1, y = 3t^5 + 5t^3 + 1$，求导数$\frac{dy}{dx}$.

解　因为$\frac{dx}{dt}=3t^2+3$，　$\frac{dy}{dt}=15t^4+15t^2$，

所以　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{15(t^4+t^2)}{3(t^2+1)}=5t^2$.

3.1.152　设$x=2t+|t|,y=5t^2+4t|t|$所确定的函数$y=f(x$在$t=0$处可微，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

解　应用公式$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}$求导数比较繁琐，因$x=\varphi(t)$的反函数$t=\bar{\varphi}(x)$不是单值的，需分成$t>0$与$t<0$两种情况.此时，一般都是先消去$t$.

当$t>0$时，$x=2t+t=3t$, $t=\frac{x}{3}$，代入y，得

$$y=5(\frac{x}{3})^2+4\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}=x^2.$$

当$t<0$时，$x=2t-t=t$，

$$y=5x^2+4x(-x)=x^2.$$

当$t=0$时，$x=y=0$.所以，

$$y=\begin{cases}x^2,t\neq 0;\\0,\ t=0.\end{cases}\quad 即\ y=x^2.$$

因y在$x=0$附近连续可导，且

$$\lim_{x\to 0}y'(x)=\lim_{x\to 0}2x=0,$$

所以$y'(0)=0$（或根据导数定义求），即$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$.

3.1.153　试利用关于参数方程的求导公式，计算由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所表示的函数$y=y(x)$的导数.

解　椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为：

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=b\sin\theta.\end{cases}\quad(0<\theta<2\pi)$$

所以，　$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}/\frac{dx}{d\theta}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\text{ctg}\theta$.

3.1.154　设$T=\cos n\theta,\theta=\arccos x$，求$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{dT}{dx}$.

解　所给的方程即为

$$\begin{cases} T = \cos n\theta, \\ x = \cos\theta. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{dT}{dx} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\frac{dT}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ \theta\to 0^+}} \dfrac{-n\sin n\theta}{-\sin\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{n^2\cos n\theta}{\cos\theta} = n^2.$

3.1.155 设 $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt, \\ y = k\cdot\cos t + \cos kt. \end{cases}$ 其中 k 为常数，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

解 由 $\dfrac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt$，及 $\dfrac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt$ 可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k(\sin t + \sin kt)}{k\cos t + k\cos kt} = -\frac{2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t.$$

从而有 $$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = 0.$$

3.1.156 已知 $x = \operatorname{ch}t, y = \operatorname{sh}t$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 因 $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{sh}t$，$\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{ch}t$，所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}t} = \operatorname{cth}t.$$

3.1.157 设 $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{t}{|t|(1+t^2)},$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}\cdot 1-t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t}{|t|}=\begin{cases}1, & 当 t>0;\\ -1, & 当 t<0.\end{cases}$$

或 $$\frac{dy}{dx}=\text{sgn}t\ (0<|t|<+\infty).$$

3.1.158 设 $\rho=(\frac{2}{3}\sqrt{a}+1)a,\theta=\sqrt{a}e^{\sqrt{a}}$，求 $\frac{d\rho}{d\theta}$.

解 将 a 看作参数，于是

$$\frac{d\rho}{da}=\frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{a}}+\frac{2}{3}\sqrt{a}+1=\sqrt{a}+1,$$

$$\frac{d\theta}{da}=\frac{1}{2\sqrt{a}}e^{\sqrt{a}}+\sqrt{a}e^{\sqrt{a}}\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}e^{\sqrt{a}}.$$

故得 $$\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{\sqrt{a}+1}{\frac{\sqrt{a}+1}{2a}e^{\sqrt{a}}}=2ae^{-\sqrt{a}}.$$

3.1.159 设 $x=e^{-t}\sin t,\ y=e^t\cos t$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 由 $$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=(\cos t-\sin t)e^{-t}$$

和 $$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=(\cos t-\sin t)e^t$$

可得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos t-\sin t)e^t}{(\cos t-\sin t)e^{-t}}=e^{2t}.$$

3.1.160 设 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=kt^2$，求 $\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz}$.

解 把 t 看作中间变量，得

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dz}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{2kt},$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dz}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2kt}.$$

3.1.161 设方程

$$\begin{cases}e^x=3t^2+2t+1,\\ t\sin y-y+\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}$$

确定 y 为 x 的函数，t 为参变量，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解 将所给方程两边对 t 求导，得

$$e^x\frac{dx}{dt}=6t+2,$$

$$t\cos y\cdot\frac{dy}{dt}+\sin y-\frac{dy}{dt}=0.$$

由此可得 $\frac{dx}{dt}=2e^{-x}(3t+1)$，$\quad\frac{dy}{dt}=\frac{\sin y}{1+t\cos y}$.

于是
$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\sin y}{2(3t+1)(1-t\cos y)},$$

当 $t=0$ 时，$x=0$，$y=\frac{\pi}{2}$. 代入上式，得 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}=\frac{1}{2}$.

3.1.162 设 $y=y(x)$ 是由下列方程组所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ e^y\sin t-y+1=0.\end{cases}$$

解 将各方程两边对 t 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6t+2,\\ e^y\sin t\dfrac{dy}{dt}+e^y\cos t-\dfrac{dy}{dt}=0.\end{cases}\quad 即\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6t+2,\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^y\cos t}{2-y}.\end{cases}$$

故 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^y\cos t}{2-y}\cdot\frac{1}{6t+2}=\frac{e^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}.$$

5. 高阶导数

(1) 求高阶导数，一般用下面方法.

1) 用公式.

例如，莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=(u)^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)};$$

2) 直接找规律；

3) 数学归纳法；

4) 按高阶导数定义；

5) 递推法.

(2) 几个函数的 n 阶导数公式：

1) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\ (a>0,a\neq1)$，特别地，$(e^x)^{(n)}=e^x$；

2) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$；

3) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$；

4) $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$；

5) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

3.1.163　求 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的二阶导数.

解　$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}+x^2/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x)=3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

3.1.164　求 $y=\sin x^{10}+\ln(\ln x)$ 二阶导数.

解 $y' = 10x^9\cos x^{10} + \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$,

$$y'' = 90x^8\cos x^{10} + 10x^9(-\sin x^{10})\cdot 10x^9 - \frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}$$

$$= 90x^8\cos x^{10} - 100x^{18}\sin x^{10} - \frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2}.$$

3.1.165 设 $y = f(x) = \begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 当 $x\neq 0$ 时,有 $y' = 4x^3\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}$,

$$y'' = (4x^3\sin\frac{1}{x})' - (x^2\cos\frac{1}{x})'$$

$$= 12x^2\sin\frac{1}{x} - 4\cos\frac{1}{x} - 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}.$$

当 $x = 0$ 时,有

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4(\Delta x)^3\sin\frac{1}{\Delta x} - (\Delta x)^2\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0.$$

所以,$\frac{d^2y}{dx^2} = \begin{cases} 12x^2\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x\neq 0. \end{cases}$

3.1.166 设 $y = x|x|$,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 去掉绝对值符号,得

$$y = \begin{cases} x^2, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时,$\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$;

当 $x < 0$ 时,$\frac{dy}{dx} = -2x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$;

在 $x = 0$ 处,$y'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}(2x) = 0$, $y'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}(-2x) = 0$.

即 $y'(0) = 0$.(直接导数定义求)所以,

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}2x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -2x, & x<0.\end{cases}$$

因当 $x\neq 0$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 连续且导数存在,所以有

$$y''_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}y''(x)=\lim_{x\to 0^{+}}(2x)'=\lim_{x\to 0^{+}}2=2,$$

$$y''_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}y''(x)=\lim_{x\to 0^{-}}(-2x)'=\lim_{x\to 0^{-}}(-2)=-2.$$

所以 $y=x|x|$ 在 $x=0$ 处,$y''(0)$ 不存在;当 $x\neq 0$ 时,有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\begin{cases}2, & x>0;\\ -2, & x<0.\end{cases}$$

注　求 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶导数时,可直接用定义来求,不必分别求左、右导数.

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

3.1.167　$y=x^x\ (x>0)$,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　因 $x>0$,故 x 有对数.两边取对数,得 $\ln y=x\ln x$,两边分别对 x 求导,得

$$\frac{y'}{y}=1+\ln x.$$

从而 $y'=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$,再求导,得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=(x^x)'(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)'$$
$$=x^x(1+\ln x)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right].$$

3.1.168　证明:函数 $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ 满足方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0.$$

其中 c_1,c_2 为任意常数,λ_1,λ_2 为定数.

证　$y'=c_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$, $y''=c_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+c_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}$,

代入方程,得

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y$$
$$=c_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+c_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}-(\lambda_1+\lambda_2)(c_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})$$

$$+ \lambda_1\lambda_2(c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x})$$

$$= c_1e^{\lambda_1 x}[\lambda_1^2 - \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2]$$

$$+ c_2e^{\lambda_2 x}[\lambda_2^2 - \lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2] = 0.$$

3.1.169　试证:如果用$\frac{1}{y}$代替 y,下面的表达式不变.

$$S = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}(\frac{y''}{y'})^2.$$

证　令 $z = \frac{1}{y}$,则 $z' = -\frac{y'}{y^2}$,

$$z'' = -\frac{y''}{y^2} + \frac{2y' \cdot y'}{y^3} = -\frac{y''}{y^2} + \frac{2y'^2}{y^3},$$

$$z''' = (-\frac{y'''}{y^2} + \frac{2y'' \cdot y'}{y^3}) + (\frac{4y' \cdot y''}{y^3} - \frac{6y'^2 \cdot y'}{y^4})$$

$$= -\frac{y'''}{y^2} + \frac{6y'y''}{y^3} - \frac{6y'^3}{y^4}.$$

将求得的 z',z'' 及 z''' 代入 S 的表达式,得

$$S = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}(\frac{z''}{z'})^2$$

$$= \frac{-\frac{y'''}{y^2} + \frac{6y'y''}{y^3} - \frac{6y^3}{y^4}}{-\frac{y'}{y^2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{-\frac{y''}{y^2} + \frac{2y'^2}{y^3}}{-\frac{y'}{y^2}}\right)^2$$

$$= \frac{-y^2y''' + 6yy'y'' - 6y'^3}{-y'y^2} - \frac{3}{2}(\frac{-yy'' + 2y'^2}{-yy'})^2$$

$$= \frac{y'''}{y'} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}(-6yy'^2y'' + 6y'^4) - (yy'' - 2y'^2)^2}{y^2y'^2}$$

$$= \frac{y'''}{y'} + \frac{3}{2} \cdot \frac{-y^2y''^2}{y^2y'^2} = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}(\frac{y''}{y'})^2.$$

3.1.170　已知方程

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0,$$

试求作变量代换 $x = \sin t$ 后所得到的 y 关于 t 的方程.

解　由 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\cos t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\cos t})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\cos t}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\cos t}$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sin t}{\cos^3 t}.$$

代入原方程，得

$$(1-\sin^2 t)(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sin t}{\cos^3 t})-\sin t\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\cos t}+a^2y=0.$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a^2y=0.$$

3.1.171　设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$、$f''[f^{-1}(x)]$ 都存在，且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，证明：

$$\frac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2}=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

证　设 $x=f(y)$，则 $y=f^{-1}(x)$. 将 $x=f(y)$ 对 x 求导，得

$$1=f'(y)\frac{dy}{dx},$$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$. 于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{f'(y)})=\frac{-f''(y)\frac{dy}{dx}}{[f'(y)]^2},$$

把 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$ 代入，并注意到 $y=f^{-1}(x)$，即有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-f''(y)\frac{1}{f'(y)}}{f'(y)^2}=\frac{-f''(y)}{[f'(y)]^3}=\frac{-f''(f^{-1})(x)}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

3.1.172　设 $x+\mathrm{arctg}y=y$，求 $y''(x)$.

解　两边分别对 x 求导，得 $1+\frac{y'}{1+y^2}=y'$，即 $y'=1+\frac{1}{y_2}$，两端再对 x 求导，得

$$y''=(1+y^{-2})'=-2y^{-3}y'=-\frac{2(y^2+1)}{y^5}.$$

3.1.173　求由方程 $e^{x+y}=xy$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

解 由 $e^{x+y}=xy$ 可得

$$e^{x+y}\cdot(1+y')=1\cdot y+x\cdot y',$$

解出 y',得 $$y'=\frac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}=\frac{y-xy}{xy-x},$$

再对 x 求导,得

$$y''=\frac{(xy-x)[y'-(1\cdot y+x\cdot y')]-(y-xy)[(1\cdot y+x\cdot y')-1]}{(xy-x)^2}$$

$$=\frac{-x(1-x)y'-y(y-1)}{x^2(y-1)^2}=\frac{-x(1-x)\dfrac{y(1-x)}{x(y-1)}-y(y-1)}{x^2(y-1)^2}$$

$$=-\frac{y[(1-x)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^2}.$$

如果想避免用商的求导法则,在 $e^{x+y}(1+y')=y+xy'$ 或 $xy+xyy'=y+xy'$ 中,视 $y=y(x)$,等式两边分别对 x 求导,得

$$(x\cdot y'+1\cdot y)+(1\cdot yy'+x\cdot y'\cdot y'+xy\cdot y'')$$
$$=y'+(1\cdot y'+y\cdot y''),$$

解出 y'',得

$$y''=\frac{y+(x+y-2)y'+x(y')^2}{x(1-y)}$$

$$=\frac{y+(x+y-2)\dfrac{y(1-x)}{x(y-1)}+x\left[\dfrac{y(1-x)}{x(y-1)}\right]^2}{x(1-y)}$$

$$=-\frac{y[(1-x)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^2}.$$

3.1.174 设 $(\cos x)^y=(\sin y)^x$,求 y',y''.

解 两边取对数,得 $y\ln\cos x=x\ln\sin y$,两边分别对 x 求导,得

$$y'\ln\cos x+y\frac{-\sin x}{\cos x}=\ln\sin y+x\cdot\frac{\cos y}{\sin y}\cdot y',$$

整理得 $y'=\dfrac{y\,\mathrm{tg}x+\ln\sin y}{\ln\cos x-x\,\mathrm{ctg}y}$,

再对 x 求导,得

$$y''=[(y'\,\mathrm{tg}x+y\sec^2x+\mathrm{tg}y\cdot y')(\ln\cos x-x\,\mathrm{ctg}x)$$
$$-(y\,\mathrm{tg}x+\ln\sin y)(-\mathrm{tg}x+x\csc^2y\cdot y')]/(\ln\cos x-x\,\mathrm{ctg}y)^2.$$

3.1.175 设 $x=at^3,y=bt^2$.求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2bt}{3at^2}=\frac{2b}{3at}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{2b}{3at^2}}{3at^2}=-\frac{2b}{9a^2t^4}.$$

3.1.176　设$\begin{cases}x=\ln(1+t),\\y=\text{arctg}t,\end{cases}$ 求$\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=0}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t}}=\frac{1+t}{1+t^2}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(1+t)(1-2t-t^2)}{(1+t^2)^2},$$

所以　$\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=0}=1.$

3.1.177　设 $x=4-t^2$, $y=4t-t^3$,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4-3t^2}{-2t}$, $t\neq 0$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{4-3t^2}{-2t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-6t(-2t)-(4-3t^2)(-2)}{(-2t)^2}\cdot\frac{1}{-2t}.$$

即　$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3t^2+4}{4t^3}.$

3.1.178　计算由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

解　椭圆的参数方程是:

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=b\sin\theta,\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

由 3.1.153 题知，$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta$，于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta\right)'}{(a\cos\theta)'}$$
$$=-\frac{b}{a^2}\csc^3\theta.$$

3.1.179　如果 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，其中 r 是 θ 的函数，试证：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)^3}.$$

证　$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta,$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right)-\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)$$
$$=\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta,$$
$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\right)+\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)$$
$$=\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta.$$

先计算$\frac{d^2y}{dx^2}$的表达式的分子：

$$\begin{bmatrix}\frac{dx}{d\theta} & \frac{dy}{d\theta}\\ \frac{d^2x}{d\theta^2} & \frac{d^2y}{d\theta^2}\end{bmatrix}=\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d^2x}{d\theta^2}$$
$$=\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)$$
$$-\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta\right)$$
$$=-r\frac{d^2r}{d\theta^2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$
$$+r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

于是 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2(\frac{dr}{d\theta})^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta)^3}.$$

3.1.180 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=0}$.

解 将第二个方程两边对 t 求导，得

$$e^y\cos t+\sin t\cdot e^y y'_t-y'_t=0,$$

即 $$y'_t=\frac{e^y\cos t}{1-e^y\sin t}=\frac{e^y\cos t}{2-y},$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^y\cos t}{2(3t+1)(2-y)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left[\frac{e^y\cos t}{2(3t+1)(2-y)}\right]'_t}{2(3t+1)}$$

$$=\frac{(3t+1)(2-y)(-e^y\sin t+\cos t\cdot e^y y'_t)}{4(3t+1)^3(2-y)^2}-\frac{e^y\cos t[(3t+1)(-y'_t)+(2-y)\cdot 3]}{4(3t+1)^3(2-y)^2}.$$

因 $y\big|_{t=0}=1, y'_t\big|_{t=0}=e$，故

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-e(-e+3)}{2}=\frac{1}{4}(2e^2-3e).$$

注 所给函数的表示式是多种多样的，本题 $y(x)$ 的表示式将显函数、复合函数、隐函数及参数函数凑到一起来了.

3.1.181 设 $x=\ln(1+\theta^2), y=\theta-\mathrm{arctg}\theta$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{\theta=1}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{1-\frac{1}{1+\theta^2}}{\frac{2\theta}{1+\theta^2}}=\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}(\frac{dy}{dx})\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\theta^2}{2\theta}=\frac{1+\theta^2}{4\theta}.$$

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\theta=1}=\frac{1}{2}.$$

3.1.182　$x = 1 + e^{a\varphi}, y = a\varphi + e^{-a\varphi}$，求$\frac{d^3y}{dx^3}$.

解　$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{a - ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = e^{-a\varphi}(1 - e^{-a\varphi})$，

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{2ae^{-2a\varphi} - ae^{-a\varphi}}{ae^{a\varphi}} = e^{-2a\varphi}(2e^{-a\varphi} - 1),$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{2ae^{-2a\varphi} - 6ae^{-3a\varphi}}{ae^{a\varphi}}$$

$$= 2e^{-3a\varphi}(1 - 3e^{-a\varphi}).$$

3.1.183　若 $f''(a)$ 存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

证　用洛比达法则，得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h) - f''(a-h)}{2} = f''(a).$$

3.1.184　设函数 $f(x)$ 在 $x \leqslant x_0$ 时有定义. 且二阶导数存在，问如何选择 a、b 及 c 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqslant x_0; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

有二阶导数存在.

解　要函数 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶导数存在，必须要求

1) $f(x_0) = c$（函数 $F(x)$ 的连续条件）.

2) $\lim\limits_{\Delta x\to x_0^-}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to x_0^+}\frac{a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x}$，

即 $b = f'_-(x_0)$（一阶导数 $F'(x_0)$ 存在）.

3) $\lim\limits_{\Delta x\to x_0^-}\dfrac{f'_-(x_0+\Delta x)-f'_-(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to x_0^+}\dfrac{2a\Delta x+b-b}{\Delta x}$.

即 $2a=f''_-(x_0)$(二阶导数 $F''(x_0)$ 存在). 故得所求 a、b 及 c 为 $a=\dfrac{1}{2}f''_-(x_0)$, $b=f'_-(x_0)$, $c=f(x_0)$.

3.1.185　设 φ 为二阶可微函数, $y=\ln[\varphi(x^2)]$, 求 y''.

解　$y'=\dfrac{\varphi'(x^2)2x}{\varphi(x^2)}$,

$$y''=\frac{[2\varphi'(x^2)+2x\varphi''(x^2)2x]\varphi(x^2)-\varphi'(x^2)2x\varphi'(x^2)2x}{\varphi^2(x^2)}$$
$$=\frac{2\varphi(x^2)\varphi'(x^2)+4x^2\varphi(x^2)\varphi''(x^2)-4x^2[\varphi'(x^2)]^2}{\varphi^2(x^2)}.$$

3.1.186　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶导数连续, 且 $f(0)=0$, 对于函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0;\\ a, & x=0,\end{cases}$$

(1) 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续;

(2) 证明对确定的 a 值, $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一阶导数连续.

解　当 $x\neq 0$ 时, 显然 $g(x)$ 是连续的. 现在讨论在 $x=0$ 处 $g(x)$ 的连续性.

因 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$; 故当 $a=f'(0)$ 时, $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

又当 $x\neq0$ 时, $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}.$$

即　$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0;\\ \dfrac{f''(0)}{2}, & x=0.\end{cases}$

由上式即知，在$(-\infty,+\infty)$内$g(x)$的一阶导数连续.

3.1.187　设$f(y)$的反函数为$f^{-1}(x)$，且$f'[f^{-1}(x)]$、$f''[f^{-1}(x)]$都存在，$f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，求$\dfrac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2}$.

解　因$f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，将$y=f^{-1}(x)$两边对x求导，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df^{-1}(x)}{dx},$$

即

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

又因$f''[f^{-1}(x)]$存在，故

$$\begin{aligned}\frac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\Big]=\frac{-f''[f^{-1}(x)]\cdot[f^{-1}(x)]'}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^2}\\&=\frac{-f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.\end{aligned}$$

注　关键是搞清直接函数与其反函数之间的复合关系.

3.1.188　设$x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$，且$f'(t)$为二阶可导，$f''(t)\neq 0$. 求$\dfrac{dy}{dx}$与$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f''(t)}{f''(t)}=\frac{f'(t)}{f''(t)}+t-1.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)=\frac{\frac{d}{dt}\Big(\frac{f'(t)}{f''(t)}+t-1\Big)}{\frac{dx}{dt}}\\&=\Big[\frac{[f''(t)]^2-f'(t)f'''(t)}{[f''(t)]^2}+1\Big]/f''(t)\\&=\frac{2[f''(t)]^2-f'(t)f'''(t)}{[f''(t)]^3}.\end{aligned}$$

3.1.189　求由参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的一阶与二阶导数.

解　$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a\sin t$, 所以,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}}{a(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^2\frac{t}{2}}.$$

3.1.190　设 $f(x) = e^x \sin x$, 试求 $f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0)$.

解　对 $f(x)$ 逐次求导,得

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x),$$

$$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x,$$

$$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x),$$

$$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x.$$

将 $x = 0$ 分别代入,得

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

3.1.191　已知 $y = x^3 \ln(2x + 1)$, 求 $y^{(4)}$.

解　设 $u = x^3, v = \ln(2x + 1)$, 则

$$u' = x^3,\ u'' = 6x,\ u''' = 6,\ u^{(4)} = 0,$$

$$v' = \frac{2}{2x + 1},\ v'' = \frac{-4}{(2x + 1)^2},\ v''' = \frac{16}{(2x + 1)^3},\ v^{(4)} = \frac{-96}{(2x + 1)^4}.$$

应用莱布尼兹公式,得

$$y^{(4)} = 0 \cdot \ln(2x + 1) + 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{2x + 1} + 6 \cdot 6x \cdot \frac{-4}{(2x + 1)^2} + 4 \cdot 3x^2 \cdot \frac{16}{(2x + 1)^3} + x^3 \cdot \frac{-96}{(2x + 1)^4}$$

$$= \frac{48(2x + 1)^3 - 144(2x + 1)^2 + 192(2x + 1) - 96x^3}{(2x + 1)^4}$$

$$= \frac{48(x+1)(2x^2+2x+1)}{(2x+1)^4}.$$

3.1.192 证明莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \tag{1}$$

其中 $u = u(x), v = v(x)$ 都有 n 阶导数，$u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$，$c_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

证 任取一点 x_0，使 $u(x), v(x)$ 在 x_0 处都有 n 阶导数，把 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 x_0 点作泰勒展开，得

$$u(x) = u(x_0) + \frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{u''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

$$v(x) = v(x_0) + \frac{v'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{v''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{v^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

两式相乘，得

$$\begin{aligned} u(x)\cdot v(x) &= u(x_0)v(x_0) + [u(x_0)v'(x_0) + u'(x_0)v(x_0)](x-x_0) \\ &+ \left[u(x_0)v''(x_0) + \frac{2!}{1!1!}u'(x_0)v'(x_0) + u''(x_0)v(x_0)\right]\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} \\ &+ \cdots \\ &+ \Big[u(x_0)v^{(n)}(x_0) + \frac{n!}{1!(n-1)!}u'(x_0)v^{(n-1)}(x_0) + \cdots \\ &+ \frac{n!}{i!(n-i)!}u^{(i)}(x_0)v^{(n-i)}(x_0) + \cdots + u^{(n)}(x_0)v(x_0)\Big]\frac{(x-x_0)^n}{n!} \\ &+ o((x-x_0)^n). \end{aligned} \tag{2}$$

上面计算中只写出了乘幂不超过 n 的项，即含

$$(x-x_0)^k \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

的项，而把含 $(x-x_0)^{n+1}, (x-x_0)^{n+2}, \cdots$ 的项全部并入 $o((x-x_0)^n)$ 项中.

由 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有 n 阶导数可以知道，

$$f(x) = u(x)v(x) \tag{3}$$

也有 n 阶导数，故 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数并有泰勒展开式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \tag{4}$$

由于 $f(x)=u(x)v(x)$，故(2)式的右端与(4)式的右端相等，即

$$u(x_0)v(x_0)+[u(x_0)v'(x_0)+u'(x_0)v(x_0)](x-x_0)+\cdots$$
$$+[u(x_0)u^{(n)}(x_0)+\frac{n!}{1!(n-1)!}u'(x_0)v^{(n-1)}(x_0)$$
$$+\cdots+u^{(n)}(x_0)v(x_0)]\frac{(x-x_0)^n}{n!}+o((x-x_0)^n).$$
$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o((x-x_0)^n) \tag{5}$$

由于 $f(x_0)=u(x_0)v(x_0)$，两边分别消去 $u(x_0)v(x_0)$ 和 $f(x_0)$，然后同除以 $x-x_0$，并取 $x\to x_0$ 时的极限，得

$$f'(x_0)=u(x_0)v'(x_0)+u'(x_0)v(x_0),$$

在(5)式两边再分别消去 $f'(x_0)$ 和 $u(x_0)v'(x_0)+u'(x_0)v(x_0)$，并同除以 $(x-x_0)^2$，然后取 $x\to x_0$ 时的极限，即得

$$f''(x_0)=u(x_0)v''(x_0)+2u'(x_0)v'(x_0)+u''(x_0)v(x_0),$$

重复上述过程，最后可得

$$f^{(n)}(x_0)=u(x_0)v^{(n)}(x_0)+\frac{n!}{1!n!}u'(x_0)v^{(n-1)}(x_0)+\cdots$$
$$+\frac{n!}{i!(n-i)!}u^{(i)}(x_0)v^{(n-i)}(x_0)+\cdots+u^{(n)}(x_0)v(x_0)$$
$$=\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}(x_0)v^{(n-i)}(x_0).$$

由 x_0 的任意性即得莱布尼兹公式成立.

3.1.193　设 $y=\frac{e^x}{x}$，用莱布尼兹公式求 $y^{(10)}$.

解　视 y 为 $\frac{1}{x}$ 与 e^x 的乘积，于是用莱布尼兹公式可得

$$y^{(10)}=(\frac{1}{x}\cdot e^x)^{(10)}$$
$$=e^x\cdot\frac{1}{x}+C_{10}^1e^x\cdot(-\frac{1}{x^2})+C_{10}^2e^x(\frac{2}{x^3})$$

$$+C_{10}^{3}e^{x}(-\frac{2\cdot 3}{x^{4}})+\cdots+C_{10}^{9}e^{x}(-\frac{9!}{x^{10}})+C_{10}^{10}e^{x}(\frac{10^{x}}{x^{11}})$$

$$=e^{x}\sum_{n=0}^{10}(-1)^{n}C_{10}^{n}\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

3.1.194 设 $y=x^{2}\cdot\cos x$，求 $y^{(10)}$.

解 令 $v=x^{2}, u=\cos ax$，于是有

$$v'=2x, v''=2, v'''=v^{(4)}=\cdots=v^{(10)}=0,$$

$$u'=-a\sin ax=a\cos(ax+\frac{\pi}{2}),$$

$$u''=-a\sin(ax+\frac{\pi}{2})=a^{2}\cos(ax+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$u^{(k)}=a^{k}\cos(ax+k\cdot\frac{\pi}{2}).$$

根据求高阶导数的莱布尼兹公式，得

$$y^{(10)}=(u\cdot v)^{(10)}=u^{(10)}v+10u^{(9)}\cdot v'+\frac{10\times 9}{2}u^{(8)}v''+\cdots+v^{(10)}\cdot u$$

$$=x^{2}a^{10}\cos(ax+10\cdot\frac{\pi}{2})+10\cdot 2xa^{9}\cos(ax+9\cdot\frac{\pi}{2})+\frac{10\times 9}{2}\cdot 2a^{8}\cos(ax+8\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$=x^{2}a^{10}(-\cos ax)+20xa^{9}(-\sin ax)+90a^{3}\cos ax$$

$$=a^{8}[(90-a^{2}x^{2})\cos ax-20ax\sin ax].$$

3.1.195 求函数 $y=e^{x}x^{3}$ 的 15 阶导数.

解 $f(x)=e^{x}$, $g(x)=x^{3}$, $g'(x)=3x^{2}$, $g''(x)=6x$, $g'''(x)=6$, $g^{(k)}=0\ (k\geqslant 4)$. 由莱布尼兹公式，得

$$(e^{x}x^{3})^{(15)}=e^{x}x^{3}+15e^{x}\cdot 3x^{2}+\frac{15\times 14}{2\times 1}e^{x}6x+\frac{15\times 14\times 13}{3\times 2\times 1}e^{x}\cdot 6$$

$$=e^{x}(x^{3}+45x^{2}+630x+2730).$$

3.1.196 设函数 $y=1/(2-x-x^{2})$，求 $y^{(20)}$.

解 由于 $\frac{1}{2-x-x^{2}}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1-x})$，故

$$y^{(20)}=\frac{1}{3}[(\frac{1}{2+x})^{(20)}+(\frac{1}{1-x})^{(20)}].$$

而 $(\frac{1}{2+x})'=-1(2+x)^{-2}$,

$$(\frac{1}{2+x})'' = (-1)(-2)(2+x)^{-3},$$

$$(\frac{1}{2+x})''' = (-1)(-2)(-3)(2+x)^{-4},$$

……………………

$$(\frac{1}{2+x})^{(20)} = (-1)(-2)\cdots\cdots(-20)(2+x)^{-21} = \frac{20!}{(2+x)^{21}}.$$

用相同的办法亦可求得

$$(\frac{1}{1-x})^{(20)} = \frac{20!}{(1-x)^{21}},$$

所以 $y^{(20)} = \frac{20!}{3}[\frac{1}{(2+x)^{21}} + \frac{1}{(1-x)^{21}}]$.

3.1.197　设 $y = e^x(x^2-1)$，求 $y^{(24)}$.

解　$y^{(24)} = [e^x(x^2-1)]^{(24)}$

$$= (e^x)^{(24)}(x^2+1) + 24(e^x)^{(23)}(x^2-1)' + \frac{24\times 23}{2}(e^x)^{(22)}(x^2-1)''$$

$$= e^x(x^2-1) + 24e^x\cdot 2x + 12\times 23e^x\cdot 2$$

$$= e^x(x^2+48x+551).$$

3.1.198　求 $\frac{d^{100}}{dx^{100}}[\frac{1}{x^2+5x+6}]$.

解　$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2+5x+6}) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3})$

$$= -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}$$

$$= (-1)^1[\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}],$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{x^2+x+6}) = \frac{d}{dx}(-1)^1[\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}]$$

$$= (-1)^2[\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3} - \frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}],$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(\frac{1}{x^2+x+6}) = \frac{d}{dx}(-1)^2[\frac{1\cdot 2}{(x+2)^3} - \frac{1\cdot 2}{(x+3)^3}]$$

$$= (-1)^3[\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+2)^4} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4}],$$

……………………

$$\frac{d^{100}}{dx^{100}}\left(\frac{1}{x^2+5x+6}\right)=(-1)^{100}\left[\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot100}{(x+2)^{101}}-\frac{1\cdot2\cdots\cdot100}{(x+3)^{101}}\right]$$
$$=\frac{100!}{(x+2)^{101}}-\frac{100!}{(x+3)^{101}}.$$

3.1.199 设 $y=\frac{1-x}{1+x}$,求 $y^{(n)}$.

解 先将 y 改写为 $y=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$,再求导,得

$$y'=\frac{-2}{(1+x)^2},\ y''=\frac{2\cdot2}{(1+x)^3},\ y'''=\frac{-2\cdot2\cdot3}{(1+x)^4},$$
$$y^{(4)}=\frac{2\cdot2\cdot3\cdot4}{(1+x)^5},\cdots.$$

一般地,可得

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

3.1.200 设 $y=(x^2+2)/(x^2-1)$,求 $y^{(n)}$.

解 由 $y=\frac{x^2+2}{x^2-1}=1+\frac{3}{x^2-1}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$ 可得

$$y'=\frac{3}{2}\left[\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{-1}{(x+1)^2}\right],$$
$$y''=\frac{3}{2}\left[\frac{(-1)(-2)}{(x-1)^3}-\frac{(-1)(-2)}{(x+1)^2}\right],$$

由此可归纳出

$$y^{(n)}=\frac{3}{2}\left[\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$
$$=\frac{3}{2}(-1)^n\cdot n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

用数学归纳法可以证明,这样的归纳是正确的.

3.1.201 求函数 $y=\frac{x^2}{x^2-3x-4}$ 的 n 阶导数.

解 原函数可改写为

$$y=\frac{x^2-3x-4+(3x+4)}{x^2-3x-4}=1+\frac{3x+4}{x^2-3x-4}$$
$$=1+\frac{16}{5(x-4)}-\frac{1}{5(x+1)}.$$

从而,

$$y^{(n)}=\frac{16}{5}\left(\frac{1}{x-4}\right)^{(n)}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$
$$=\frac{16}{5}(-1)(-1-1)\cdots[-1-(n-1)](x-4)^{-1-n}$$
$$-\frac{1}{5}(-1)(-1-1)\cdots[-1-(n-1)](x+1)^{-1-n}$$
$$=\frac{16}{5}(-1)^n\cdot n!(x-4)^{-1-n}-\frac{1}{5}(-1)^n\cdot n!(x+1)^{-1-n}$$
$$=\frac{(-1)^n}{5}n!\left[\frac{16}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

3.1.202　已知 $y=\frac{13}{6x^2-15x-6}$,求 $y^{(n)}$.

解　由 $y=\frac{13}{6x^2-15x-6}=\frac{13}{(2x-3)(3x+2)}$
$$=\frac{2}{2x-3}-\frac{3}{3x+2}$$
可得
$$y'=\frac{-2\cdot 2}{(2x-3)^2}+\frac{3\cdot 3}{(3x+2)^2}$$
$$=(-1)\left[\frac{2^2}{(2x-3)^2}-\frac{3^3}{(3x+2)^2}\right],$$
$$y''=(-1)\left[-\frac{2^2\cdot 2\cdot 2}{(2x-3)^3}+\frac{3^2\cdot 2\cdot 3}{(3x+2)^3}\right]$$
$$=(-1)^2 2!\cdot\left[\frac{2^3}{(2x-3)^3}-\frac{3^3}{(3x+2)^3}\right],$$
$$y'''=(-1)^2\cdot 2!\left[\frac{-2^3\cdot 2\cdot 3}{(2x-3)^4}+\frac{3^3\cdot 3\cdot 3}{(3x+2)^4}\right]$$
$$=(-1)^3 3!\left[\frac{2^4}{(2x-3)^4}-\frac{3^4}{(3x+2)^4}\right].$$
$$\cdots\cdots$$
一般地,有
$$y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\left[\frac{2^{n+1}}{(2x-3)^{n+1}}-\frac{3^{n+1}}{(3x+2)^{n+1}}\right].$$

3.1.203　设 $y=(x^2-1)^n$,试求 $y^{(n)}$ 在 $x=1$ 及 $x=-1$ 处的值.

解　对函数 $y=(x+1)^n\cdot(x-1)^n$ 应用莱布尼兹公式,得
$$y^{(n)}=(x+1)^n\cdot\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}+n\cdot\frac{d(x+1)^n}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}$$

$$+\cdots+\frac{d^n(x+1)^n}{dx^n}\cdot(x-1)^n.$$

因为上式从第二项起都含有因式$(x-1)$，故当$x=1$时，它们都为零. 于是

$$y^{(n)}(1)=(1+1)^n\cdot n!=2^n\cdot n!.$$

同理可得

$$y^{(n)}(-1)=(-1-1)^n\cdot n!=(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!.$$

3.1.204 求$y=x^n\sqrt{x}$的n阶导数.

解 原式可改写为$y=x^{n+\frac{1}{2}}$，于是有

$$y'=(n+\frac{1}{2})x^{(n+\frac{1}{2})-1}=(n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}},$$

$$y''=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})x^{(n+\frac{1}{2})-2}=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})x^{n-\frac{3}{2}},$$

$$y'''=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})x^{(n+\frac{1}{2})-3}$$

$$=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})x^{n-\frac{5}{2}},$$

……

$$y^{(k)}=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(n-\frac{2k-3}{2})x^{n-\frac{2k-1}{2}},$$

……

$$y^{(n)}=(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(n-\frac{2k-3}{2})\cdots\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

或者 $$y^{(n)}=\prod_{k=1}^{n}(n-\frac{2k-3}{2})x^{\frac{1}{2}}.$$

3.1.205 已知$f(x)=x\sin\omega x$，求证

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n(\omega^{2n}x\sin\omega x-2n\omega^{2n-1}\cos\omega x).$$

证 由$f'(x)=x\omega\cos\omega x+\sin\omega x$,

和 $$f''(x)=-(\omega^2x\sin\omega x-2\omega\cos\omega x)$$

知，当$n=1$时，等式成立. 今设$n=k$时等式成立，即

$$f^{(2k)}(x)=(-1)^k(\omega^{2k}x\sin\omega x-2k\omega^{2k-1}\cos\omega x),$$

则 $$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k(\omega^{2k}\sin\omega x+\omega^{2k+1}x\cos\omega x+2k\omega^{2k}\sin\omega x).$$

$$f^{(2k+2)}(x)=(-1)^k(\omega^{2k+1}\cos\omega x+\omega^{2k+1}\cos\omega x-\omega^{2k+2}x\sin\omega x+2k\omega^{2k+1}\cos\omega x)$$

$$=(-1)^{k+1}[\omega^{2k+2}x\sin\omega x-2(k+1)\omega^{2(k+1)-1}\cos\omega x].$$

故 $n=k+1$ 时等式成立. 所以原式对任何自然数成立.

3.1.206　设 $y=e^{ax}\sin bx$, 求 $y^{(n)}$.

解　这里的 y 可看作 e^{ax} 与$\sin bx$ 的乘积, 于是可用莱布尼兹公式求其 n 阶导数. 下面介绍另一种解法, 其结果形式较为紧凑.

由 $y=e^{ax}\sin bx$ 可得

$$y'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx.$$

引入由下列条件定义的辅助角 φ:

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

一阶导数的表达式可以改写为

$$\begin{aligned}y'&=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}(\sin bx\cos\varphi+\cos bx\sin\varphi)\\&=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}e^{ax}\sin(bx+\varphi),\end{aligned}$$

而 $y''=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}[ae^{ax}\sin(bx+\varphi)+e^{ax}\cdot b\cos(bx+\varphi)]$

$$\begin{aligned}&=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\\&\qquad e^{ax}[\sin(bx+\varphi)\cos\varphi+\cos(bx+\varphi)\sin\varphi]\\&=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\cdot 2}e^{ax}\sin(bx+2\varphi).\end{aligned}$$

……

一般地, 可得

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi).$$

3.1.207　设 $y=e^{2x}\cos x\sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解　由 $y=e^{2x}\cos x\sin x=\frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x$ 可得

$$y'=\frac{1}{2}\cdot 2e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\,e^{2x}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$y''=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\cdot e^{2x}\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

一般地, 有

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^n\cdot e^{2x}\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

3.1.208　试证函数 $y=(\arcsin x)^2$ 满足微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'=2.$$

证　由 $y=(\arcsin x)^2$ 得

$$y' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 2\arcsin x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x)}{(1-x^2)^{3/2}},$$

把求得的 y' 及 y'' 代入方程，得

左端 $= (1-x^2)y'' - xy'$

$$= (1-x^2)\cdot\frac{2(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x)}{(1-x^2)^{3/2}} - x\cdot\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$= 2 =$ 右端.

证法 2 由 $y' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 可得，$y'\sqrt{1-x^2} = 2\arcsin x$，

等式两端分别对 x 求导，得

$$y''\cdot\sqrt{1-x^2} + y'\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即 $$(1-x^2)y'' - xy' = 2.$$

3.1.209 设 $y = (\arcsin x)^2$，求证

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n-1)xy^{(n)} - (n-1)^2y^{(n-1)} = 0, \quad (n = 2,3,\cdots)$$

并求 $y'(0), y''(0), \cdots, y^{(n)}(0)$.

证 由 $$y' = 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1}$$

和 $$y'' = \frac{2}{1-x^2} + 2\arcsin x\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

得 $$(1-x^2)y'' - xy' = 2, \tag{2}$$

对(2)式两边求导，得 $(1-x^2)y''' - 3xy'' - y' = 0$. 这表明当 $n = 2$ 时所给关系式成立. 设 $n = k$ 时所给关系式成立，即

$$(1-x^2)y^{(k+1)} - (2k-1)xy^{(k)} - (k-1)^2y^{(k-1)} = 0,$$

两边求导，得

$$(1-x^2)y^{(k+2)} - (2k+1)xy^{(k+1)} - k^2y^{(k)} = 0,$$

整理后得

$$(1-x^2)y^{(k+2)}-[2(k+1)-1]xy^{(k+1)}-[(k+1)-1]^2y^{(k)}=0.$$

故 $n=k+1$ 时，所给关系式仍成立．由数学归纳法知，所给关系式成立．

由(1)、(2) 及所证明的关系式，得

$$y'(0)=0,\ y''(0)=2,y^{(n+1)}(0)=(n-1)^2y^{n-1}(0),\quad (n=2,3,\cdots).$$

故有 $y^{(2n-1)}(0)=0,y^{(2n)}(0)=2^{n-1}[(n-1)!]^2,\ (n=1,2,\cdots)$.

3.1.210　若 $z=\operatorname{arctg}x$，试证明 $z^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!$，并利用此结果对函数 $y=x\operatorname{arctg}x$ 求 $y^{(100)}(0)$.

证　由 $z=\operatorname{arctg}x$ 有 $z'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $1=(1+x^2)z'$．应用莱尼兹公式，则有

$$0=(1-x^2)z^{(n+1)}+2nxz^{(n)}+n(n-1)z^{(n-1)}.$$

令 $x=0$ 有

$$z^{(n+1)}(0)=-n(n-1)z^{(n-1)}(0).$$

依此递推公式并注意 $z'(0)=1$，则有

$$\begin{aligned}z^{(2k+1)}(0)&=-(2k)(2k-1)z^{(2k-1)}(0)\\&=2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)z^{(2k-3)}(0)\\&=\cdots=(-1)^k(2k)!\end{aligned}$$

由　$y^{(100)}=x(\operatorname{arctg}x)^{100}+100(\operatorname{arctg}x)^{(99)}$ 可得

$$\begin{aligned}y^{(100)}(0)&=100\cdot(\operatorname{arctg}x)^{(99)}|_{x=0}\\&=100(-1)^{49}\cdot 98!=-100(98)!.\end{aligned}$$

3.1.211　求 $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数值．

解　$f'(x)=\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x$,

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

$$f'''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

继续作下去，很难得到 $f^{(n)}(x)$ 的表示式．

把 $f''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成幂级数：

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$
$$(-1<x<1),$$

对 $f''(x)$ 积分两次，得

$$f'(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3.4}x^4+\frac{1}{5.6}x^6+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots,$$

由幂级数展开的唯一性，得

$$f^{(2k+2)}(0)=\frac{(-1)^k\cdot(2k+2)!}{(2k+1)(2k+2)}=(-1)^k\cdot(2k)!$$

$$f^{(2k+1)}(0)=0.\ (k=0,1,\cdots,n)$$

注 当函数较为复杂，直接求高阶导数很困难时，采用函数的幂级数展开式，并逐项积分，问题明显地得以解决.

3.1.212 求 $y=\ln(a+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y'=\frac{1}{a+x}=(a+x)^{-1}$,

$y''=-(a+x)^{-2}$,

$y'''=(-1)^2\cdot 2!(a+x)^{-3}$,

……

一般地，有

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!(a+x)^{-n}.$$

3.1.213 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处各阶导数存在，且 $f^{(n)}(0)=0,\ (n=1,2,\cdots)$.

证 用数学归纳法证明.

(1) 当 $n=1$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x}$.

令 $y=\frac{1}{x}$，得 $f'(0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{e^{y^2}}=0$.

(2) 假设 $n=k$ 时，$f^{(k)}(0)=0$，证明当 $n=k+1$ 时，$f^{(k+1)}(0)=0$，

事实上

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}.$$

因为当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}=\frac{2}{x^3}f(x),$$

$$f''(x)=-\frac{6}{x^4}f(x)+\frac{2}{x^3}f'(x)=-(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6})f(x),$$

不难看出，$f^{(k)}(x)$ 一定具有如下形状

$$f^{(k)}(x)=p(\frac{1}{x})f(x).$$

其中 $p(\frac{1}{x})$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的多项式，令 $y=\frac{1}{x}$，则有

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{yp(y)}{e^{y^2}}=0.$$

所以对一切自然数 n 都有 $f^{(n)}(0)=0$.

3.1.214　求 $y=2^x+2^{-x}$ 的 n 阶导数.

解

$$y'=2^x\ln 2+2^{-x}(-\ln 2),$$

$$y''=2^x(\ln 2)^2+2^{-x}(-\ln 2)^2,$$

……

一般地，有 $y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n+2^{-x}(-\ln 2)^n$，即

$$y^{(n)}=[2^x+(-1)^n2^{-x}](\ln 2)^n.$$

3.1.215　求 $x=at+b$, $y=\alpha t^2+\beta t+\gamma$ 的 n 阶导数 $\frac{d^ny}{dx^n}$.

解　因 $\frac{dx}{dt}=a$, $\frac{dy}{dt}=2\alpha t+\beta$. 所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\alpha t+\beta}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{2\alpha}{a^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dt}(\frac{d^2y}{dx^2})\cdot\frac{dt}{dx}=0,$$

故　$\frac{d^ny}{dx^n}=0.\ (n\geqslant 3)$.

3.1.216　求 $x=\ln t, y=\dfrac{1}{t}$ 的 n 阶导数 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

解　由 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$；$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}$ 有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{t^2}\cdot t=-\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=(-1)^2\frac{1}{t^2}\cdot t=(-1)^2\frac{1}{t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dt}{dx}=(-1)^3\frac{1}{t^2}\cdot t=(-1)^3\frac{1}{t},$$

……

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^n\frac{1}{t}.$$

3.1.217　设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上的偶函数，且在 $x=0$ 处有各阶导数，证明 $f^{(2n-1)}(0)=0,(n=1,2,\cdots)$.

证　对 $n=1$，由 $f(-x)=f(x)$ 知，

$$f(0^+)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=f'(0^-).$$

又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在，故 $f'(0^+)=f'(0^-)=f'(0)$.

于是有
$$f'(0)=0.$$

依此类推，并注意到 $f^{(2n)}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是偶函数，得

$$f^{(2n-1)}(0)=0,\quad(n=1,2,\cdots).$$

3.1.218　设 $f(x)$ 在实轴上无穷次可微，证明：对 $x\neq0$，有

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

证　应用数学归纳法．当 $n=0,1$ 时，等式显然成立．

设 $n=m$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{x^{m+1}}f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\left[x^{m-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

把上式两端微分，得

$$-\frac{m+1}{x^{m+2}}f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^{m+1}}f^{(m+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= (-1)^m \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})],$$

$$左端 = -\{\frac{m+1}{x}[\frac{1}{x^{m+1}}f^{(m)}(\frac{1}{x})] + \frac{1}{x}[\frac{1}{x^{m+2}}f^{(m+1)}(x)]\}$$

$$= -\frac{1}{x}\{(m+1)(-1)^m \frac{d^m}{dx^m}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})]$$

$$+ [\frac{1}{x^{m+2}}f^{(m+1)}(\frac{1}{x})]\}.$$

因此 $(m+1)(-1)^m \frac{d^m}{dx^m}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})] + \frac{1}{x^{m+2}}f^{(m+1)}(\frac{1}{x})$

$$= (-1)^{m+1}x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})],$$

移项得 $\frac{1}{x^{m+2}}f^{(m+1)}(\frac{1}{x})$

$$= (-1)^{m+1}\{(m+1)\frac{d^m}{dx^m}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})] + x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})]\},$$

根据莱布尼兹公式得

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^m f(\frac{1}{x})] = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\{x[x^{m-1}f(\frac{1}{x})]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(\frac{d^k}{dx^k}x)(\frac{d^{m+1-k}}{dx^{m+1-k}}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})])$$

$$= \binom{m+1}{0}x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})] + \binom{m+1}{1}\frac{d^m}{dx^m}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})]$$

$$= x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})] + (m+1)\frac{d^m}{dx^m}[x^{m-1}f(\frac{1}{x})],$$

故 $\quad (-1)^{m+1}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}[x^m f(\frac{1}{x})] = \frac{1}{x^{m+2}}f^{(m+1)}(\frac{1}{x}),$

即 $n = m+1$ 时，等式也成立，于是，对一切 n 等式成立.

3.1.219　设 $p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，证明

$$p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x).$$

证　$p_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1},$

$$p_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}.$$

所以　$p'_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^{n+1}$

$$= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[(n+1)(x^2-1)^n 2x]$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}];$$

$$p'_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n-1}.$$

故

$$p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}] - \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1} - 2n(x^2-1)^{n-1}]$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^{n-1}(x^2-1)]$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)^n]$$

$$= (1+2n)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = (2n+1)p_n(x).$$

6. 一阶和高阶微分

对于函数 $y = f(x)$，x 为自变量，要计算 $d^n y$，只要先计算 $f^{(n)}(x)$，然后乘以 dx^n，即

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

3.1.220　比较函数 $y = 2x^3 + 5x^2$ 的增量和微分.

解　$\Delta y = 2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2$

$= (6x^2 + 10x)\Delta x + (6x+5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3,$

$dy = (6x^2 + 10x)dx.$

该函数的增量与微分之差等于 $(6x+5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3$，它是自变量增量 Δx 的高阶无穷小.

3.1.221　求 $y = uvw$ 的微分.

解　$dy = ud(vw) + vwdu = u(vdw + wdv) + vwdu$

$= uvdw + uwdv + vwdu.$

3.1.222　求 $y = \frac{u}{v^2}$ 的微分.

解　$dy = \frac{v^2du - ud(v^2)}{(v^2)^2} = \frac{v^2du - 2uvdv}{v^4} = \frac{du}{v^2} - \frac{2udv}{v^3}.$

也可以把 y 看作 u 与 v^{-2} 的乘积，于是

$$dy = d(uv^{-2}) = ud(v^{-2}) + v^{-2}du = -2uv^{-3}dv + v^{-2}du.$$

3.1.223　对于复合函数 $y = f(u) = e^u$, $u = \varphi(x) = x^2$，验证

(1) $dy = f'(u)du$,　(2) $d^2y \neq f''(u)du^2$.

其中 dy, d^2y 是 y 关于 x 的一、二阶微分.

证　(1) 由 $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$，可得

$$dy = 2xe^xe^{x^2}dx.$$

而 $f'(u) = e^u, du = 2xdx$，所以

$$f'(u)du = 2xe^{x^2}dx = dy$$

(2) 由 $f''(u) = e^u$ 可得，$f''(u)du^2 = e^u(2xdx) = 4x^2e^{x^2}dx$

而 $(e^{x^2})'' = (2xe^{x^2})' = (2+4x^2)e^{x^2}$，所以

$$d^2y = (e^{x^2})''dx^2 = (2+4x^2)e^{x^2}dx^2.$$

从而 $d^2y \neq f''(u)du^2$

3.1.224　求 $y = \arcsin(2x^2-1)$ 的微分.

解　$dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}d(2x^2-1) = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}}dx$

$$= \frac{2xdx}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

3.1.225　求 $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$ 的微分.

解　因为 $y' = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$，所以，$dy = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$.

3.1.226　求 $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$ 的微分.

解　$dy = \left(\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}\right)'dx = \dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{x+6}{x-6}\cdot\dfrac{x+6-(x-6)}{(x+6)^2}dx$

$$= \frac{1}{x^2-36}dx.$$

3.1.227　求 $y = 2\ln\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}$ 的微分.

解　$dy = \left(2\ln\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}\right)'dx = 2\dfrac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}dx = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}dx.$

3.1.228　设 $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$，求 dy.

解　$2xdx+2(ydx+xdy)-2ydy=0$,由此可得

$$dy=-\frac{x+y}{x-y}dx.$$

3.1.229　求$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$的微分.

解　先将原式改写成

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

两边求微分,得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}d(x^2+y^2)=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}d(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

由此得到　$dy=\frac{x+y}{x-y}dx.$

3.1.230　求函数$y=e^{\sin x}$的微分.

解　根据微分定义,有

$$dy=(e^{\sin x})'dx=e^{\sin x}\cdot(\sin x)'dx=e^{\sin x}\cos xdx.$$

如用微分形式的不变性,则有

$$dy=e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}\cos xdx.$$

3.1.231　求$f(x)=x|x|$的导数与微分.

解法1　把f表为分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$$

当$x\neq 0$时,有

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0;\\ -2x, & x<0,\end{cases}$$

当$x=0$时,有

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x}=0.$$

所以$f'(0)=0$,综上所述,有

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -2x, & x<0\end{cases}=2|x|,$$

故　　　$df=2|x|dx.$

对于分段函数求导，要分段分别求导．对那些“分界点”要单独进行考察．这一点要特别给予注意．

解法 2　当 $x\neq 0$ 时，$\ln|f(x)|=\ln x^2$，对此两端求导，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x},\text{即 } f'(x)=\frac{2f(x)}{x}=2|x|.$$

当 $x=0$ 时，根据导数的定义可得 $f'(0)=0$，综合起来有

$$f'(x)=2|x|,\quad df=2|x|dx.$$

3.1.232　不用圆面积公式求圆面积的微分．

解　设半径为 r 的圆面积为 $S(r)$，给 r 以增量 Δr，则

$$\Delta S=S(r+\Delta r)-S(r).$$

显然　　$2\pi r\Delta r<\Delta S<2\pi(r+\Delta r)\Delta r=2\pi r\Delta r+2\pi(\Delta r)^2,$

所以　　$0<\Delta S-2\pi r\Delta r<2\pi(\Delta r)^2,$

或　$0<\dfrac{\Delta S-2\pi r\Delta r}{\Delta r}<2\pi(\Delta r)\to 0(\Delta r\to 0),$

故　$\Delta S=2\pi r\Delta r+o(\Delta r).$

由微分定义知 $dS=2\pi rdr$．或 $\dfrac{dS}{dr}=2\pi r.$

根据已知函数求微分，这只要会求导数就行了．由实际问题按定义求微分，就要难一些，这实际上是在建立一种微分方程，学会这种方法在进一步学习中是很有用的．同时圆面积公式也正是由 $dS=2\pi rdr$，通过求积分得到的．

3.1.233　求 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$ 的二阶微分．

解　$y'=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}},\ y''=\dfrac{-x}{(x^2+4)^{3/2}}.$

所以　$d^2y=-\dfrac{x}{(x^2+4)^{3/2}}dx^2.$

3.1.234　求 $y=x(\ln x-1)$ 的一、二、三阶微分．

解　由 $y'=\ln x-1+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x,\ y''=\dfrac{1}{x},\ y'''=-\dfrac{1}{x^2}$

可得 $dy = \ln x dx$，$d^2y = \frac{1}{x}dx^2$，$d^3y = -\frac{1}{x^2}dx^3$.

3.1.235 求 $y = e^x \ln x$ 的 4 阶微分.

解 由 $y^{(4)} = e^x(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4})$，得

$$d^4y = y^{(4)}dx^4 = e^x(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4})dx^4.$$

3.1.236 求 $y = x\cos 2x$ 的 10 阶微分.

解 由 $y^{(10)} = -1024(x\cos 2x + 5\sin 2x)$，得

$$d^{10}y = y^{(10)}dx^{10} = -1024(x\cos 2x + 5\sin 2x)dx^{10}.$$

3.1.237 已知 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$，试求 d^ny，$(n \geqslant 2, x \neq -1)$.

解 设 $u = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$，$v = x$，则

$$u^{(k)} = (-\frac{1}{3})\cdot(-\frac{1}{3}-1)\cdots[-\frac{1}{3}-(k-1)](1+x)^{-\frac{1}{3}-k}$$

$$= \frac{(-1)^k}{3^k}\cdot 1\cdot 4\cdots(3k-2)(1+x)^{-(k+\frac{1}{3})}.$$

$$v' = 1, v'' = v''' = \cdots = v^{(n)} = 0.$$

应用莱布尼兹公式，得

$$y^{(n)} = x(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}})^{(n)} + n(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}})^{(n-1)}$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-2)x}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}} + \frac{n(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^{n-1}(1+x)^{n-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}[3n(1+x)-(2n-2)x]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}\cdot(3n+2x).$$

所以

$$d^ny = y^{(n)}dx^n == \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}(3n+2x)dx^n.$$

§2 中值定理

内容提要

1. 罗尔(Rolle)定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有导数，而且 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 $x=\xi$，使 $f'(\xi)=0$.

特别地，如果 $f(a)=f(b)=0$，则在方程 $f(x)=0$ 的二根 a 与 b 之间，其导数方程 $f'(x)=0$ 至少有一个根.

2. 拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有导数，则在 (a,b) 内至少存在一点 $x=\xi$，使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{3.2.1}$$

上式对 $b<a$ 也成立. (3.2.1) 称为拉格朗日中值公式，它也可写成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, 0<\theta<1, \tag{3.2.2.}$$

或

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

因此，拉格朗日中值公式也往往称为有限增量公式.

3. 柯西(Cauchy)定理

如果 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有导数，并且 $\varphi'(x)\neq 0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 $x=\xi$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, (a<\xi<b). \tag{3.2.3}$$

4. 泰勒(Taylor)公式

如果函数 $y=f(x)$ 在包含点 x_0 的某区间上有直到 $n+1$ 阶的导数，则在 x_0 附近，它可以表为 n 次多项式与余项 R_n 之和：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n \tag{3.2.4}$$

其中 $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}, \xi=x_0+\theta(x-x_0)$,

$$0<\theta<1, \tag{3.2.5}$$

或

$$R_n=o((x-x_0)^n). \tag{3.2.6}$$

(3.2.4) 称为泰勒公式，R_n 称为泰勒公式的余项，(3.2.5) 称为拉格朗日余项，(3.2.6) 称为皮亚诺余项.

5. 马克劳林(Maclaurin) 公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式又叫做马克劳林公式：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n. \tag{3.2.7}$$

6. 几个重要的展式

(1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^x}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$,

$$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{\sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{n^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$,

$$|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cos\xi x}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

(4) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + R_n(x)$,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{a-n-1} x^{n+1} \right|.$$

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!\,(1+\xi)^{n+1}} \right|.$$

问 题 与 解 答

1. 基本概念

判断下列命题是否正确(3.2.1—3.2.10)：

3.2.1　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

非. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=1$，但对任意的 $\xi\in(0,1)$，都有 $f'(\xi)\neq 0$.

这表明在罗尔定理中，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 两端处连续的条件不可缺少.

3.2.2　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

非. 例如，函数 $f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $f(-1)=f(1)$，但在 $(-1,1)$ 内不存在 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

这表明在罗尔定理中，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导的条件不可缺少.

3.2.3　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

非. 例如，函数 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，但对任意 $x\in(0,1)$，$f'(x)\neq 0$.

这表明在罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 的条件不可缺少.

3.2.4　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内必存在一点 ξ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

非. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

可以看出，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，但在 $(0,1)$ 内不存在 ξ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=0.$$

这表明在拉格朗日中值定理中，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 两端点处连续的条件不可缺少.

3.2.5 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

非. 例如，函数 $f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且除 $x=0$ 点外，$f(x)$ 在 $(-1,0)$，$(0,1)$ 内可导，但不存在 $\xi\in(-1,1)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0.$$

这表明在拉格朗日中值定理中，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导的条件不可缺少.

3.2.6 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗中值定理的条件，则对 (a,b) 内任何 ξ，必定可以在 $[a,b]$ 上找到不同的 x_1,x_2，使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

成立.

非. 例如，函数 $f(x)=x^3$，$x\in[-1,1]$，取 $\xi=0$，则有 $f'(\xi)=0$. 此时容易看出，欲使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0,$$

必须 $x_1=x_2$.

3.2.7 设 $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$，$0<\xi(x)<x$；又设 $f(x)=x\sin(\ln x)(x>0)$，$f(0)=0$，则 $\xi=\xi(x)$ 在 $(0,\varepsilon)(\varepsilon>0)$ 内是不连续的函数.

是. 对于任意的 $\varepsilon>0$，当 $x\in(0,\varepsilon)$ 时，在 $[0,x]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日公式，得

$$x\sin(\ln x)=x[\sin(\ln\xi(x)+\cos(\ln\xi(x))],\ 0<\xi(x)<x,$$

由此可得 $\sin(\ln x)=\sqrt{2}\cos(\ln\xi(x)-\frac{\pi}{4})$，

令 $x_0\in(0,x)$，于是

$$\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\cos(\ln\xi(x_0)-\frac{\pi}{4}),$$

$$\sin(\ln(x_0+\Delta x))=\sqrt{2}\cos(\ln\xi(x_0+\Delta x)-\frac{\pi}{4}),$$

因此 $\ln\xi(x_0)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\frac{\sin(\ln x_0)}{\sqrt{2}}$，

$$\ln\xi(x_0+\Delta x)=\frac{\pi}{4}+2n\pi\pm\arccos\frac{\sin(\ln(x_0+\Delta x))}{\sqrt{2}},$$

$$(n,k = 0, -1, -2, \cdots)$$

$$\ln\xi(x_0 + \Delta x) - \ln\xi(x_0)$$

$$= 2\pi(n-k) \pm \left[\arccos\frac{\sin\ln(x_0+\Delta x)}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{\sin(\ln x_0)}{\sqrt{2}}\right].$$

由此可见,对任意小的 Δx 及 $|n-k| \geqslant 1$,均有

$$|\ln\xi(x_0+\Delta x) - \ln\xi(x_0)| \geqslant 2\pi|n-k| - \pi \geqslant \pi,$$

故 $\xi(x)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 内为间断函数.

但是,对于 $0 < x < \varepsilon$, $e^{k\pi} < \xi < e^{\frac{\pi}{4}+k\pi}$,

$$\xi(x) = e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi-\arccos\frac{\sin(\ln x)}{\sqrt{2}}};$$

对于 $0 < x < \varepsilon, e^{\frac{\pi}{4}+k\pi} < \xi < e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}$,

$$\xi(x) = e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi-\arccos\frac{\sin\ln x}{\sqrt{2}}}, \ (k = 0, -1, -2, \cdots)$$

因此,这时 $\xi(x)$ 是连续函数.

3.2.8 拉格朗日微分中值定理

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$$

中,ξ 必定是 x 的连续函数.

非. 例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x), & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

对此我们有

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi).$$

其中 $\xi = \xi(x)$ 满足 $0 < \xi < x$.

下面用反证法证明 $\xi = \xi(x)$ 在任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ 内都是不连续的.

设 $\xi = \xi(x)$ 为 $(0,\varepsilon)$ 内的连续函数. 由于当 $x \neq 0$ 时,有

$$f'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = \sqrt{2}\sin(\ln x + \frac{\pi}{4}).$$

设 $x_n = e^{-2n\pi+\frac{\pi}{4}}, n = 1,2,3,\cdots$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

在 $(0,\varepsilon)$ 内任取一点 τ_1,由题设可知,存在 $\xi(\tau_1)(0 < \xi(\tau_1) < \tau_1)$,使得

$$f(\tau_1) - f(0) = \tau_1 f'(\xi(\tau_1)).$$

对于 $\xi(\tau_1)$ 来说，必有正整数 N，使得

$$0 < x_N = e^{-2N\pi+\frac{\pi}{4}} < \xi(\tau_1).$$

再在 $(0,x_N)$ 内取一点 τ_2，则有 $\xi(\tau_2)(0 < \xi(\tau_2) < \tau_2)$，使得

$$f(\tau_2) - f(0) = \tau_2 f'(\xi(\tau_2)).$$

由假设 $\xi(x)$ 是 $[\tau_2,\tau_1]$ 上的连续函数，故知 $\xi(x)$ 可取得 $\xi(\tau_2)$ 与 $\xi(\tau_1)$ 之间的一切值. 而

$$\xi(\tau_2) < \tau_2 < x_N < \xi(\tau_1)$$

故必存在 $\tau_3(\tau_2 < \tau_3 < \tau_1)$，使得 $\xi(\tau_3) = x_N$，即

$$f(\tau_3) - f(0) = \tau_3 f'(\xi(\tau_3)) = \tau_3 f'(x_N) = \sqrt{2}\,\tau_3.$$

故 $\tau_3 \sin(\ln\tau_3) = \sqrt{2}\,\tau_3$. 亦即 $\sin(\ln\tau_3) = \sqrt{2}$，这与 $|\sin(\ln x)| \leqslant 1$ 矛盾.

故 $\xi = \xi(x)$ 在任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ 内不连续.

3.2.9 若 $f(x)$ 为 (a,b) 内的严格单调递增函数，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则必有 $f'(x) > 0$.

非. 例如，函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调递增，且在 $(-1,1)$ 内可导，但 $f'(0) = 0$.

3.2.10 若对于任意的 $x \in (a,b)$，都有 $f'(x) = 0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 恒为常数.

是. 任取 $x_1,x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$. 由拉格朗日中值定理可知，必存在一点 $\xi \in (x_1,x_2)$，使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0.$$

故 $f(x_1) = f(x_2)$，即在 (a,b) 内 $f(x)$ 恒为常数.

2. 罗尔、拉格朗日、柯西定理

3.2.11 在区间 $[1,2]$ 与 $[2,3]$ 上，对函数

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

能否应用罗尔定理？

解 首先容易验证 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 与 $[2,3]$ 上满足罗尔定理条件：1) 有理整函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，必在 $[1,2]$、$[2,3]$ 上连续；2) $f(x)$ 在 $(1,2)$、$(2,3)$ 内可导，且

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) + (x-1)(x-2)$$
$$= 3x^2 - 12x + 11;$$

3) $f(1)=f(2)=0, f(2)=f(3)=0$.

其次，为验证罗尔定理的结论对 $f(x)$ 在 $[1,2]$、$[2,3]$ 上成立，由 $f'(x)=3x^2-12x+11=0$ 不难解出

$$x=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\times3\times11}}{2\times3}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

其中 $\xi_1=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $(1,2)$ 内：$1<\xi_1=2-\frac{\sqrt{3}}{3}<2$；$\xi_2=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $(2,3)$ 内：$2<\xi_2=2+\frac{\sqrt{3}}{3}<3$，即在 $(1,2)$ 内确有一点 ξ_1，在 ξ_1 处 $f'(\xi_1)=0$；在 $(2,3)$ 内确有一点 ξ_2，在 ξ_2 处 $f'(\xi_2)=0$.

3.2.12　验证函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10, x\in[-1,2]$，满足罗尔定理的条件，并确定 ξ 的值.

解　由于函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上连续且有导数，并且 $f(-1)=f(2)=0$，所以罗尔定理成立. 由 $f'(x)=3x^2+8x-7=0$，求出 $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{37}}{3}$. 显然，$x_1=\frac{-4-\sqrt{37}}{3}\notin[-1,2]$，而 $x_2=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}\in[-1,2]$，故 $\xi=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}$.

3.2.13　对于函数 $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$，在区间 $[0,8]$ 上能否应用罗尔定理？这时 ξ 取何值？

解　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,8]$ 上连续，在开区间 $(0,8)$ 上有导数 $f'(x)=(8-2x)/3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}$，并且，$f(0)=f(8)=0$，从而罗尔定理成立. 令 $f'(x)=0$ 得 $\xi=4$.

3.2.14　已知函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x-8)^2}$，$a=0, b=16$. 且有 $f(a)=f(b)=4$. 然而导数 $f'(x)=2/3\sqrt[3]{x-8}$ 在区间 $(0,16)$ 的每一个点上都不等于 0，问这是否与罗尔理矛盾？

解　不矛盾. 由于在 $x=8$ 处函数的导数不存在，从而罗尔定理的条件不满足.

3.2.15　对于函数 $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$，在 $[-1,1]$ 上能否应用罗尔定理？

解　因 $f'(0)$ 不存在，故不能应用罗尔定理. 所以不一定存在 $\xi\in$

$(-1,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

事实上，$f'(x)=-2/3\sqrt[3]{x}=0$ 无解.

3.2.16 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

能否应用罗尔定理？

解 罗尔定理的条件(1)、(3)都满足，但条件(2)不满足：在 $(0,1)$ 内的 $x=\frac{1}{2}$ 处导数不存在，故在 $(0,1)$ 内使 $f'(\xi)=0$ 的点 ξ 不一定存在. 事实上

$$f'(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ -1, \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

故不存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

3.2.17 在区间$[0,1]$上，对函数 $f(x)=\mathrm{arctg}x$ 能否应用拉格朗日中值定理？

解 $f(x)$ 在$[0,1]$上满足拉格朗日中值定理条件：1) 在$[0,1]$上连续；2) 在$(0,1)$内可导且 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

由 $f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)$ 或 $\frac{\pi}{4}-0=\frac{1}{1+\xi^2}$ 中可解出 $\xi=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$，它在$(0,1)$：$0<\xi=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}<1$，且使拉格朗日公式成立：$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)$.

3.2.18 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, & 0\leqslant x<1;\\ \frac{1}{x}, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

能否应用拉格朗日中值定理？这时 ξ 取何值？

解 容易验证，$f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件. 故拉格朗日中值定理成立. 于是，必存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得

$$f(2)-f(0)=f'(\xi)\cdot(2-0),$$

即
$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

另一方面，

$$f'(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x<1;\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

令 $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$，解得 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=\sqrt{2}$，$x_3=-\sqrt{2}$，

因 $x_1,x_2\in(0,2)$，故可取 $\xi=\dfrac{1}{2}$ 或 $\xi=\sqrt{2}$.

3.2.19　对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,a);\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

能否应用拉格朗日中值定理？

解　因 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，拉格朗日定理的条件不满足，故结论未必成立. 事实上，因为

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{a^2}>0,$$

而 $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0$，$x\in(0,a)$，故 $f'(x)=\dfrac{1}{a^2}$ 在 $(0,a)$ 内无解，从而满足 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a^2}$ 的 ξ 不存在.

3.2.20　对于函数 $y=|x-1|$，在区间 $[0,3]$ 上能否应用拉格朗日中值定理？

解　因 $y'(1^+)=1$，$y'(1^-)=-1$，所以函数 $y=|x-1|$ 在 $x=1$ 处不可导. 故它不满足拉格朗日中值定理的条件(2)，因此，定理的结论不一定成立. 事实上，因为

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3},$$

而函数 y 在 $[0,1]$ 上的导数恒为 1，在 $[1,3]$ 上的导数恒为 -1，从而满足 $f'(\xi)=\dfrac{1}{3}$ 的 ξ 点不存在.

3.2.21 验证 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{20+x^2}{8}, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ x+\dfrac{2}{x}, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ 在[0,4]上满足拉格朗日定理的条件，并求出中值公式中的 ξ.

解 $f(x)$ 为分段函数，在[0,2]，(2,4)内 $f(x)$ 连续且可导. 现先讨论在 $x=2$ 处的连续性和可导性.

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x+\frac{2}{x}\right)=3;\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{20+x^2}{8}=3;$$

$$f(2)=\frac{20+2^2}{8}=3;$$

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续.

又 $$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\left(x+\frac{2}{x}\right)'=\lim_{x\to 2^+}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{20+x^2}{8}\right)'=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x}{8}=\frac{1}{2};$$

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导.

总之，$f(x)$ 在[0,4]上连续，在(0,4)内可导.

由拉格朗日定理，

$$f(4)-f(0)=f'(\xi)4,\ \frac{9}{2}-\frac{20}{8}=f'(\xi)4,\ f'(\xi)=\frac{1}{2}.$$

而 $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, & 0<x\leqslant 2;\\ 1-\dfrac{2}{x^2}, & 2<x<4.\end{cases}$$

若 ξ 在(0,2]中，则 $\dfrac{\xi}{4}=\dfrac{1}{2}$，$\xi=2$；若 ξ 在(2,4)中，则 $1-\dfrac{2}{\xi^2}=\dfrac{1}{2}$，$\xi=\pm 2$. 所以 $\xi=2$.

3.2.22 证明：对函数 $f(x)=px^2+gx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的中点处.

证 设 $f(x)=px^2+gx+r$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个二次三项式. 所以它满足拉格朗日中值定理的条件. 故存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{pb^2+qb+r-pa^2-qa-r}{b-a}$$
$$=p(b+a)+q,$$

又由 $f'(x) = 2px + q$ 得

$$f'(\xi) = 2p\xi + q.$$

由 $2p\xi + q = p(b + a) + q$ 可得 $\xi = \dfrac{a + b}{2}$. 即 ξ 为区间 (a,b) 的中点.

3.2.23 已知两个点:$A(1,1)$,$B(3,-3)$. 试在曲线 $y = 2x - x^2$ 的 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上找一点 M,使曲线在该点的切线平行于弦 AB.

解 对所有的 $x \in (-\infty,\infty)$,函数 $f(x) = 2x - x^2$ 连续且有导数. 这里 A 点的横坐标 $a = 1$,B 点的横坐标 $b = 3$. 据拉格朗日定理,在区间 $(1,3)$ 内可以找到一点 ξ,使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

其中 $f'(x) = 2 - 2x$. 于是由上式得,

$$f(3) - f(1) = f'(\xi)(3 - 1).$$

即有 $-4 = 4(1 - \xi)$,$\xi = 2$. 又 $f(2) = 0$. 故所求点为 $M(2,0)$.

3.2.24 如下证明柯西中值定理是否正确?

根据拉格朗日中值定理,存在 $\xi \in (a,b)$,使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \text{ 及 } g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a),$$

所以
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)(b - a)}{g'(\xi)(b - a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

解 不正确. 因为当 $f(x)$,$g(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件时,对于函数 $f(x)$,存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$,对于函数 $g(x)$,存在 $\eta \in (a,b)$,使 $g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a)$. 一般地,$\xi \neq \eta$.

3.2.25 对于函数 $f(x) = \sin x$,$g(x) = \cos x$,$x \in [0,\frac{\pi}{2}]$,柯西定理是否成立?这时 ξ 取何值?

解 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上,函数 $f(x)$,$g(x)$ 连续可导,且在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内 $g'(x) = -\sin x \neq 0$,故柯西定理成立. 于是有 $\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$,使

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0} = \frac{\cos\xi}{-\sin\xi} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

即
$$\frac{1}{-1}=\frac{\cos\xi}{-\sin\xi},\ \operatorname{ctg}\xi=1,$$
由此可得
$$\xi=\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

3.2.26　对于函数 $f(x)=x^2,g(x)=x^3,x\in[-1,1]$,柯西定理是否成立?

解　因 $g'(x)|_{x=0}=3x^2|_{x=0}=0$,定理的条件不满足,故柯西定理的结论不一定成立.事实上.
$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$
而
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2}{3x}\ (x\neq 0),$$
故
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\neq\frac{f'(x)}{g'(x)},(x\neq 0).$$

3.2.27　设函数 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可微,又 $f(a^+),f(b^-)$,$g(a^+),g(b^-)$ 皆存在,而且 $g'(x)\neq 0,x\in(a,b)$.证明:在 (a,b) 内存在一点 c,使
$$\frac{f(b^-)-f(a^+)}{g(b^-)-g(a^+)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\qquad a<c<b.$$

证　在 $[a,b]$ 上定义函数
$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\\ f(a^+), & x=a;\\ f(b^-), & x=b;\end{cases}$$
和
$$G(x)=\begin{cases}g(x), & x\in(a,b);\\ g(a^+), & x=a;\\ g(b^-), & x=b.\end{cases}$$
对 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西定理,即得
$$\frac{f(b^-)-f(a^+)}{g(b^-)-g(a^+)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad a<c<b.$$

3.2.28　$\overset{\frown}{AB}$ 是曲线 $x=t^2,y=t^3$ 上的一段弧,其中 A 点和 B 点分别对应于参数 $t=1$ 和 $t=3$.试在 $\overset{\frown}{AB}$ 上找一点 M,使曲线在该点的切线平行于弦 AB.

解　AB 弦的斜率为$\dfrac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$,而曲线在 M 点$(t=\xi)$ 之切线的斜率为$\dfrac{y_t'(\xi)}{x_t'(\xi)}$,其中 $x_t'=2t, y_t'=3t^2$.

为了求 ξ,应用柯西定理,得

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}=\frac{y_t'(\xi)}{x_t'(\xi)},\ 即\frac{27-1}{9-1}=\frac{3\xi^2}{2\xi},\ \frac{13}{4}=\frac{3}{2}\xi.$$

所以　$\xi=\dfrac{13}{6}\in(1,3)$.

将 $t=\xi=\dfrac{13}{6}$ 代入曲线的参数方程,得到

$$x=\frac{169}{36}, y=\frac{2197}{216}.$$

故所求的点为 $M(\dfrac{169}{36},\dfrac{2197}{216})$.

3.2.29　设 $f(x), g(x), h(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明:必存在一点 $\xi(a<\xi<b)$,使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0, \tag{1}$$

并由此说明拉格朗日中值定理和柯西定理都是它的特例.

证　作辅助函数

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}.$$

容易验证,$F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $F(a)=F(b)=0$. 由罗尔定理知道,必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,即

$$\left(\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}\right)'_{x=\xi}=0,$$

由此即得(1)

当取 $h(x)=1, g(x)=x$ 时,(1)式成为

$$\begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(\xi) & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即是

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

当取 $h(x)=1$ 时,(1) 式成为

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(\xi) & g'(\xi) & 0 \end{vmatrix}=0,$$

即在 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$ 时,有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

从欲证的结论出发,设相应的辅助函数,借助已有的定理来证明需要的结论,是一种常见的论证方法. 不少问题可以这样处理.

3.2.30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有有界的 $n+1$ 阶导数,且 $f^{(n)}(a)\neq 0$. 证明:拉格朗日余项形式的泰勒公式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(a+\theta h)$$

中的 θ 满足

$$\lim_{h\to 0^+}\theta=1-\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

证 令 $\varphi(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)$

$$-\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x),$$

$$\varphi(x)=(b-a)\varphi(x)-(b-x)\varphi(a),$$

于是
$$\varphi(a)=\varphi(b)=0.$$

由罗尔定理可知,存在 $0<\theta<1$,使 $\varphi'(a+\theta h)=0$, 即有拉格朗日公式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h),$$

又由泰勒公式知,

$$f^{(n)}(a+\theta h)=f^{(n)}(a)+f^{(n+1)}(a+\theta_1\theta h)\theta h,\quad 0<\theta_1<1,$$

代入上式得

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

$$+\frac{h^n f^n(a)(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-1}\theta}{(n-1)!}\cdot f^{(n+1)}(a+\theta_1\theta h).$$

另一方面，

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$
$$+\frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_2 h)}{(n+1)!},\ 0<\theta_2<1,$$

比较两式，得

$$\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^{(n)}(a)+\theta h f^{(n+1)}(a+\theta_1\theta h)\right]$$
$$=\frac{h^k}{n!}\left[f^{(n)}(a)+\frac{hf^{(n+1)}(a+\theta_2 h)}{h+1}\right].$$

又 $f^{(n)}(a)\neq 0$，故

$$\theta=\frac{1}{1-\sqrt[n-1]{n}}\left[\frac{f^{(n)}(a)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta_2 h)}{f^{(n)}(a)+\theta h f^{(n+1)}(a+\theta_1\theta h)}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

由于 $f^{(n+1)}(x)$ 有界，故

$$\lim_{h\to 0^+}\theta=1-\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

3.2.31　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n-1$ 次连续可微，在 (a,b) 内有 n 阶导数，证明施勒密赫—儒歇余项的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x),$$

其中余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!p}(1-\theta)^{n-p}(x-a)^n,\ 0<\theta<1.$$

证　令

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1},$$

$$R_n(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

于是有

$$\varphi(a)=R_n(x),\ \varphi(x)=0,\ \varphi'(z)=-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}.$$

在区间 (a,x) 上应用柯西定理，得

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},\ a<c<x,$$

因为 $\varphi(x),\psi(a),\varphi'(c)$ 已知，令 $\psi(z)=(x-z)^p, p>0$，于是

$\psi(x)=0,\ \psi(a)=(x-a)^p,\ \psi'(z)=-p(x-z)^{p-1},$

从而 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!\,p}(x-c)^{n-p}(x-a)^p, a<c<x;$

令 $c=a+\theta(x-a), 0<\theta<1, x-c=(1-\theta)(x-a)$，于是，

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!\,p}(1-\theta)^{n-p}(x-a)^n,\quad 0<\theta<1.$$

3.2.32　设函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a,b) 中任意一点 x 处有有限的导数 $f'(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$，证明：在 (a,b) 中存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

证　当 (a,b) 为有穷区间时，设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b);\\ A, & x=a \text{ 或 } x=b,\end{cases}$$

其中 $A=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$. 显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$. 由罗尔定理可知，在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $F'(c)=0$，而在 (a,b) 内有 $F'(x)=f'(x)$，所以 $f'(c)=0\ (a<c<b)$.

现设 (a,b) 为无穷区间. 若 $a=-\infty, b=+\infty$，令

$$x=\mathrm{tg}t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x=\mathrm{tg}t$ 组成的复合函数

$$g(t)=f(\mathrm{tg}t),$$

在有穷区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内满足题设的条件. 仿前面的讨论易知，至少存在一点 $t_0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使

$$g'(t_0)=f'(c)\sec^2 t_0=0,$$

其中 $c=\mathrm{tg}t_0$. 由于 $\sec^2 t_0\neq 0$，故 $f'(c)=0$.

若 a 为有限数，$b=+\infty$，则令 $b_0>\max\{a,0\}$，且 $x=\dfrac{(b_0-a)t}{b_0-t}$，于是，复合函数 $g(t)=f\left(\dfrac{(b_0-a)t}{b_0-t}\right)$ 在有穷区间 (a,b_0) 上满足题设条件，

仿前面的讨论可知，存在一点 $t_0 \in (a, b_0)$，使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}$　显然，$a < c < +\infty$. 由于 $\frac{b_0(b - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0$，故有 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty$，b 为有限数的情形，可类似地证明.

注　本题可以看作是罗尔定理的推广.

3.2.33　证明：如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在常数 $L > 0$，使

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, x_1, x_2 \in [a,b]$$

证　设 x_1, x_2 为 $[a,b]$ 上任意两点，由拉格朗日中值定理，得

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2),\ \xi \text{ 在 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 之间},$$

又 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值，设为 L，则 $|f'(\xi)| \leqslant L$. 由此可得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

3.2.34　若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且有最大值 1，最小值 0，证明：在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使 $f''(\xi) > 1$.

证　设 $f(x_1) = 1$，$f(x_2) = 0$，应用拉格朗日中值定理，得

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2),$$

其中 ξ 位于 x_1 与 x_2 之间，从而 $\xi \in (0,1)$. 由此即得

$$1 = |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| < f'(\xi),$$

即
$$|f'(\xi)| > 1.$$

3.2.35　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，$f(a) = f(b) = 0$，设 $M = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$，证明：存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $|f'(\xi)| \geqslant \frac{2M}{(b-a)}$.

证　设 $|f(x_0)| = M$，则 $x_0 \in [c,d]$，其中 $[c,d]$ 是区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$，$[\frac{a+b}{2}, b]$ 中的某一个，并设 $x_1 \in [c,d]$ 满足 $f(x_1) = 0$.

由中值定理知，存在一点 $\xi \in (c,d) \subset (a,b)$，使

$$M = |f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_1)| = |f'(\xi)| \cdot |x_0 - x_1|$$

$$\leqslant |f'(\xi)| \cdot |d-c| = |f'(\xi)| \cdot \frac{b-a}{2}.$$

由此即得

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{2M}{b-a}.$$

3.2.36　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，且不恒为常数，证明在 (a,b) 内必存一点 ξ，使 $f'(\xi) > 0$.

证法 1　因 $f(x) \not\equiv k$，所以在 (a,b) 内必有一点 c，使 $f(c) \neq f(a)$.

若 $f(c) > f(a)$，在 $[a,c]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0, \quad \xi_1 \in (a,c).$$

若 $f(c) < f(a) = f(b)$，在 $[c,b]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c} > 0, \quad \xi_2 \in (c,b).$$

无论 $f(c)$ 大于或小于 $f(a) = f(b)$，在 (a,b) 内都存在一点 ξ，使 $f'(\xi) > 0$.（以上两次应用拉格朗日定理，因为 $f(x)$ 连续、可导，其条件是具备的）.

证法 2　反证法. 设对 (a,b) 内的每一点都有 $f'(x) \leqslant 0$. 在 (a,b) 内任取一点 x，在 $[a,x]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \leqslant 0,$$

即

$$f(x) \leqslant f(a).$$

因 $f(x)$ 不恒为常数，x 为 (a,b) 内任一点，所以在 (a,b) 内总可以找到一点 x_0，使

$$f(x_0) < f(a).$$

在 $[x_0,b]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$f(b) - f(x_0) = f'(\xi_1)(b-x_0) \leqslant 0,$$

即

$$f(b) \leqslant f(x_0),$$

所以有 $f(b) \leqslant f(x_0) < f(a)$，这与 $f(a) = f(b)$ 矛盾，命题得证.

3.2.37　设 $f(x)$，$f'(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f''(x)$ 在开区间 (a,b) 内存在，若 $f(a) = f(b) = 0$，且存在一点 $c(a < c < b)$，使得 $f(c) < 0$，证明：在 (a,b) 中存在一点 ξ，使得 $f''(\xi) > 0$.

证　分别在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上用拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1),\quad a<\xi_1<c;$$

及
$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2),\quad c<\xi_2<b.$$

因为 $f(c)<0, f(a)=f(b)=0$，所以 $f'(\xi_1)<0$，$f'(\xi_2)>0$.

再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用中值定理，有

$$\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=f''(\xi),\ \xi_1<\xi<\xi_2.$$

故有 $f''(\xi)>0,(a<\xi<b)$.

3.2.38　设(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有一阶导数 $f'(x)$，且 $f(x)$ 在 a 点的右导数

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0;$$

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数 $f''(x)$，

证明：在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

证　由(1)与(2)得

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0,$$

由极限的保号定理可知，必存在一个充分小的正数 η，使得在 $(a,a+\eta)$ 上总有 $\frac{f(x)}{x-a}>0$，又 $x-a>0$，故 $f(x)>0$. 于是，在 $(a,a+\eta)$ 内总可取一点 x_0，使 $f(x_0)>0$.

在 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=f'(\xi_1),\quad \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}=f'(\xi_2),$$

其中 $a<\xi_1<x_0<\xi_2<b$. 由题设条件 $f(a)=f(b)=0$ 以及前面结果 $f(x_0)>0$，得

$$f'(\xi_1)>0,\ f'(\xi_2)<0.$$

再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用拉格日中值定理，即得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,$$

其中 $a<\xi_1<\xi<\xi_2<b$.

3.2.39　若当 $x\geqslant a$ 时有 $|f'(x)|\leqslant g'(x)$，试证当 $x\geqslant a$ 时恒有

$$|f(x)-f(a)|\leqslant g(x)-g(a).$$

证　设 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$，在 $[a,x]$ 上应用中值定理，有

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(x-a)$$
$$=[g'(\xi)-f'(\xi)](x-a),\quad a<\xi<x.$$

因为 $-g'(\xi)\leqslant f'((\xi)\leqslant g'(\xi)$，$x>a$，所以 $\varphi(x)-\varphi(a)\geqslant 0$，即

$$g(x)-f(x)-[g(a)-f(a)]>0,$$

亦即 $$g(x)-g(a)>f(x)-f(a).$$

或写成 $f(x)-f(a)<g(x)-g(a)$. (1)

再设 $\psi(x)=g(x)+f(x)$，且在 $[a,x]$ 上应用中值定理，有

$$\psi(x)-\psi(a)=\psi'(\xi)(x-a)=[g'(\xi)+f'(\xi)](x-a)>0.$$

即 $$g(x)+f(x)-[g(a)+f(a)]>0,$$

亦即 $$f(x)-f(a)>-\{g(x)-g(a)\}. \tag{2}$$

联结(1)、(2) 便有

$$-\{g(x)-g(a)\}<f(x)-f(a)<\{g(x)-g(a)\}.$$

亦即 $$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a).$$

3.3.40 设 $f(x)$ 是单调增加的可微函数，而且当 $x\geqslant x_0$ 时有 $|g'(x)|<|f'(x)|$. 证明：当 $x\geqslant x_0$ 时，

$$|g(x)-g(x_0)|\leqslant f(x)-f(x_0).$$

证 由柯西中值定理知，存在一点 c，$x_0<c<x$，使

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\right|=\left|\frac{g'(c)}{f'(c)}\right|\leqslant 1,$$

故 $|g(x)-g(x_0)|\leqslant|f(x)-f(x_0)|=f(x)-f(x_0)$.

3.2.41 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，又 $f(x)$ 为非线性函数，证明：存在一点 c，$a<c<b$，使

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

证法 1 令 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数，且 $F(a)=F(b)=0$. 故存在 $c_1\in(a,b)$，使 $F(c_1)\neq 0$. 若 $F(c_1)>0$，在 $[a,c_1]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$F'(\xi_1)(c_1-a)=F(c_1)-F(a)>0,\quad a<\xi_1<c_1,$$

即 $F'(\xi_1)>0$，$f'(\xi_1)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

再在 $[b,c_1]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}<0,\ c_1<\xi_2<b.$$

即 $f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, c_1 < \xi_2 < b$.

令
$$c = \begin{cases} \xi_1, |f'(\xi_1)| > |f'(\xi_2)|; \\ \xi_2, |f'(\xi_2)| > |f'(\xi_1)|, \end{cases}$$

于是有
$$|f'(c)| > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

同理可讨论 $F(c_1) < 0$ 的情形.

证法2　不妨设 $f(b) \geqslant f(a)$. 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内无界，则不等式显然成立. 故设 $|f'(x)|$ 在 (a,b) 内有界，令 $M = \sup\limits_{a<x<b} |f'(x)|$，再设

$$F(x) = f(x) - f(a) - M(x-a), a < x < b.$$

注意到 $F'(x) = f'(x) - M \leqslant 0, a < x < b$，因此 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调不增，而且存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$F'(\xi) = f'(\xi) - M < 0.$$

若不然，则有 $F'(x) = f'(x) - M = 0, f'(x) = M, x \in (a,b)$，这表明 $f(x)$ 为线性函数，这与题设矛盾.

于是有 $F(\xi) < 0$, $F(b) \leqslant F(\xi) < 0$，即

$$f(b) - f(a) - M(b-a) < 0.$$

所以
$$0 \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < M.$$

选取 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$0 \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < M - \varepsilon_0 < M,$$

据上确界的定义，存在 $c \in (a,b)$，使

$$|f'(c)| > M - \varepsilon_0 > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

同理可证 $f(b) \leqslant f(a)$ 情形.

3.2.42　设 $f(t)$ 在 $[x, x+h]$ $(h>0)$ 上二次可微，又 $\tau \in [0,1]$，证明：存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f(x+\tau h) = \tau f(x+h) + (1-\tau)f(x) + \frac{h^2}{2}\tau(\tau-1)f''(x+\theta h).$$

证　若 $\tau = 0$ 或 1，则 θ 可取任意值. 不妨设 $\tau \in (0,1)$，于是 $\frac{h^2}{2}\tau(\tau-1) \neq 0$，令

$$F(t) = f(x+th) - tf(x+h) - (1-t)f(x) - \frac{h^2}{2}t(t-1)c,$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1,$$

其中 $c = \dfrac{f(x+\tau h) - \tau f(x+h) - (1-\tau)f(x)}{\dfrac{h^2}{2}\tau(\tau - 1)}$,

于是，$F(0) = F(\tau) = F(1) = 0$,两次应用罗尔定理,则存在 $\theta \in [0, 1]$,使 $F''(\theta) = 0$,即 $c = f''(x + \theta h)$,代入 $F(\tau) = 0$,得

$$f(x+\tau h) = \tau f(x+h) + (1-\tau)f(x) + \frac{h^2}{2}\tau(\tau-1)f''(x+\theta h).$$

注 我们再应用上述方法求拉格朗日插值多项式的余项.

设 $f(x)$ 是给定的函数,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $n+1$ 个相异的点. $f(x)$ 在这些点的值相应地记为 $f_0,f_1,\cdots,f_n$. 拉格朗日插值多项式 $y(x)$ 是次数不超过 n 的多项式,且 $y(x_k) = f_k, k = 0,1,\cdots,n$. 插值多项式的余项为

$$E(x) = f(x) - y(x).$$

设$[a,b]$是包含点 $x,x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的闭区间. $f(x)$ 在$[a,b]$上有 $n+1$ 阶导数 $f^{(n+1)}(x), x \neq x_k,\ k = 0,1,2,\cdots n$. 令

$$g(t) = f(t) - y(t) - k\pi(t),$$

其中 $\pi(t) = (t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$,$k$ 是常数,使得 $t = x$ 时,

$$f(x) - y(x) - k\pi(x) = 0. \tag{3}$$

于是 $g(t)$ 在 $t = x_0,x_1,\cdots,x_n,x$ 这 $n+2$ 个点处为 0. 重复利用罗尔定理,得出

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - k(n+1)!$$

应在(a,b)内某一点 ξ 处为零. 即有

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

再由(3)得

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x).$$

这里顺便给出拉格朗日多项式的形式:

$$y(x) = l_0(x)\cdot f_0 + l_1(x)\cdot f_1 + \cdots + l_n(x)f_n,$$

其中,$l_k(x) = \dfrac{\lambda_k(x)}{\lambda_k(x_k)}$,而 $\lambda_k(x) = \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x - x_j),\ k = 0,1,2,\cdots,n.$

3.2.43 设 $f(x)$, $g(x)$ 在(a,b)内 n 次可微,在$[a,b]$上$(n-1)$次连续可微,令 $x_0 \in [a,b]$,证明:对任意的 $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$,存在 ξ, $x <$

$\xi < x_0$ 或 $x_0 < \xi < x$，使得

$$\left[f(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right]\cdot g^{(n)}(\xi)$$

$$=f^{(n)}(\xi)\left[g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right].$$

证　设 $x_0 < b$，固定 x，定义函数

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

$$G(t)=g(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, t\in[x_0,x],$$

$$H(t)=F(t)[G(x)-G(x_0)]-G(t)[F(x)-F(x_0)],$$

则 $H(x_0)=H(x)$，$H(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，在 (x_0,x) 内可微，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(x_0,x)$，使 $H'(\xi)=0$，即等式成立.

3.2.44　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $(p+q)$ 次连续可微，在 (a,b) 内有 $(p+q+1)$ 阶导数，且有

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(p)}(a)=0,$$
$$f(b)=f'(b)=\cdots=f^{(q)}(b)=0,$$

证明：在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f^{(p+q+1)}(c)=0$.

证　不妨设 $p\leqslant q$. 因为 $f(a)=f(b)=0$，由罗尔定理可知，存在 $a<c_{11}<b$，使得 $f'(c_{11})=0$.

又 $f'(a)=f'(b)=0$，再由罗尔定理可知，存在 $a<c_{21}<c_{11}$，$c_{11}<c_{22}<b$，使 $f''(c_{21})=f''(c_{22})=0$.

依次类推，可求出点列

$$a<c_{p1}<c_{p2}<\cdots<c_{pp}<b,$$

使 $$f^{(p)}(c_{pi})=0,(i=1,2,\cdots,p).$$

再据假设 $f^{(p)}(a)=f^{(p)}(b)=0$，由罗尔定理可知，存在点列

$$c_{p+1,1}<c_{p+1,2}<\cdots<c_{p+1,p+1}<b,$$

使得 $$f^{(p+1)}(c_{p+1,i})=0,\ (i=1,2\cdots,p+1).$$

又 $f^{(p+1)}(b)=0$，再由罗尔定理可知，存在点列

$$c_{p+2,1}<c_{p+2,2}<\cdots<c_{p+2,p+1}<b,$$

使得 $$f^{(p+2)}(c_{p+2,i})=0,\ (i=1,2,\cdots,p+1).$$

依次类推，存在点列

$$c_{p+(q-p),1}<c_{p+(q-p),2}<\cdots<c_{p+(q-p),p+1}<b,$$

使得 $$f^{(q)}(c_{q,i})=0,\quad (i=1,2,\cdots,p+1),$$
再由 $f^{(q)}(b)=0$,仿前可证,存在点列
$$c_{q+1,1}<c_{q+1,2}<\cdots<c_{q+1,p+1},$$
使 $$f^{(q+1)}(c_{q+1,i})=0,\quad (i=1,2,\cdots,p+1).$$
仍由罗尔定理,存在点列
$$c_{q+2,1}<c_{q+2,2}<\cdots<c_{q+2,p}$$
使 $$f^{(q+2)}(c_{q+2,i})=0,\quad (i=1,2,\cdots,p).$$
再依次类推,存在点列
$$c_{q+p,1}<c_{q+p,p-(p-2)}=c_{q+p,2},$$
使 $$f^{(a+p)}(c_{p+q,i})=0,\quad (i=1,2),$$
故最后有 $a<c<b$,使 $f^{(p+q+1)}(c)=0$.

3.2.45 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=0$,求证:存在一点 $\xi\in(a,b)$,使
$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

证 欲证 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$,只要证
$$e^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0,$$
即 $$(f(x)e^{g(x)})'|_{x=\xi}=0.$$
为此作辅助函数 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$,就有
$$F'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)e^{g(x)}g'(x)=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)].$$
显然,$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导;且由条件 $f(a)=f(b)=0$ 知道:
$$F(a)=f(a)e^{g(a)}=0,\quad F(b)=f(b)e^{g}(b)=0,$$
即 $$F(a)=F(b).$$
由罗尔定理可知,存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$,即
$$e^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]=0,$$
因为 $e^{g(\xi)}\neq0$,所以 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

3.2.46 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,如果 $a\geqslant0$,证明:(a,b) 内存在三个数 x_1,x_2,x_3,使等式
$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}$$
成立.

证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件,故至少存在一点 $x_1\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1). \tag{1}$$

令 $F(x)=f(x)$，　$G(x)=x^2$，显然它们在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，故至少存在一点 $x_2\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2}. \tag{2}$$

再令 $F(x)=f(x)$，$G(x)=x^3$，显然它们在$[a,b]$上也都满足柯西中值定理的条件，故至少存在一点 $x_3\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}. \tag{3}$$

由(1)，(2)，(3) 式可得

$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

3.2.47　设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，且 $f(0)=0$，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为 n 个正数. 证明：在区间$(0,1)$内存在一组不相等的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

证　令

$$\eta_i=\frac{\sum_{j=1}^{i}k_j}{\sum_{j=1}^{n}k_j},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则　　$$f(0)=0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_n=f(1).$$

据连续函数的介值定理，存在 n 个点 $0<y_1<y_2<\cdots<y_n=1$，使 $f(y_i)=\eta_i\,(i=1,2,\cdots,n)$. 在区间$[y_{i-1},y_i]$ $(i=1,2,\cdots,n$，其中 $y_0=0$，$y_n=1)$ 上应用拉格朗日中值定理，则存在 $x_i\in(y_{i-1},y_i)\subset(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$，$x_1<x_2<\cdots<x_n$，使

$$f'(x_i)=\frac{f(y_i)-f(y_{i-1})}{y_i-y_{i-1}}=\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{y_i-y_{i-1}}=\frac{k_i\Big/\sum_{j=1}^{n}k_j}{y_i-y_{i-1}}\neq 0.$$

于是　　$$\Big(\sum_{j=1}^{n}k_j\Big)(y_i-y_{i-1})=\frac{k_i}{f'(x_i)},$$

两边对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}k_j\right)(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)},$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}k_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}.$$

3.2.48 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导$(0 < a < b)$,证明:在(a,b)内存在 ξ 和 η,使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

证 作函数 $F(x) = \frac{x^2 - a^2}{2}$,则 $F(a) = 0$, $F(b) = \frac{b^2 - a^2}{2}$, $F'(x) = x$,由于 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在所给区间上满足柯西中值定理的条件,故在(a,b)内至少存在一点 η,使

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\eta)}{F'(\eta)},$$

即

$$f(b) - f(a) = \frac{b^2 - a^2}{2\eta}f'(\eta).\quad (a < \eta < b)$$

又 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件,故存在一点 $\xi \in (a,b)$,使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

于是有

$$f'(\xi)\cdot(b - a) = \frac{b^2 - a^2}{2\eta}f'(\eta),$$

即

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

注 本题的关键是构造函数 $F(x) = \frac{x^2 - a^2}{2}$,有了 $F(x)$,应用柯西中值定理就很自然了.

3.2.49 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某一邻域内有连续的一阶导数,且 $f'(0) = 0$,$f''(0)$ 存在.证明:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3} = \frac{1}{2}f''(0).$$

证 因为 $\ln(1+x) \leqslant x\ (x \in (-1, +\infty))$,故由拉格朗日中值定理可知,存在 $\xi(x) \in (\ln(1+x), x)$,使

$$\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x - \ln(1+x)} = f'(\xi),$$

由此可得

$$\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=f'(\xi)\frac{x-\ln(1+x)}{x^3},$$

又当 $x>0$ 时,有

$$\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{\xi(x)}{x}<1,$$

当 $-1<x<0$ 时,有

$$1<\frac{\xi(x)}{x}<\frac{\ln(1+x)}{x},$$

故由极限的夹逼定理知,$\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\xi(x)=0$. 于是

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\xi(x)}{x}\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=f''(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0).\end{aligned}$$

3.2.50　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无穷次可微,又 $f(0)\cdot f'(0)\geqslant0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=0,n=0,1,2,\cdots$,证明:存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots$,使得 $f^{(n)}(x_n)=0,n=1,2,\cdots$.

证　用数学归纳法证明.

(1) 证明存在 $x_1\geqslant0$,使 $f'(x_1)=0$. 若 $f'(0)=0$,则令 $x_1=0$,结论显然成立;若 $f'(0)\neq0$ 而 $f(0)=0$,由题设有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,应用广义罗尔定理,存在 $x_1>0$,使 $f'(x_1)=0$;若 $f(0)\neq0$,而 $f'(0)>0$,则存在 $\alpha>0$, 使得 $f(\alpha)>f(0)>0$. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 故必有 $\beta>\alpha$,使 $f(\beta)<f(0)$,即有

$$f(\beta)<f(0)<f(\alpha).$$

因为 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 故存点 $r\in(\alpha,\beta)$, 使 $f(r)=f(0)$,$0<\alpha<r$. 再由罗尔定理可知,存在 $x_1\in(0,r)$,使 $f'(x_1)=0$;若 $f(0)\neq0$ 而 $f'(0)<0$,同样可证明存在 $x_1>0$,使 $f'(x_1)=0$.

(2) 设 $n>1$ 时,存在 $x_n>x_{n-1}>\cdots>x_1\geqslant0$,使

$$f^{(k)}(x_k)=0,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

在区间 $[x_n,+\infty)$ 上,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=0$, 由广义罗尔定理可知,存在 $x_{n+1}\in(x_n,+\infty)$,使

$$f^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0.$$

由数学归纳法即知,结论成立.

3.2.51 $f(x)$ 在$[a,b]$上二次连续可微,证明:对于任意的 $x \in (a,b)$,必存在 ξ_1,ξ_2,满足 $a < \xi_2 < x, x < \xi_1 < b$,并使等式

$$(a-b)f'(x) = f(a) - f(b) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\xi_1) - \frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\xi_2)$$

成立.

证 由泰勒公式得

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(a-x)^2,\ (a < \xi_2 < x),$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(b-x)^2,\ (x < \xi_1 < b),$$

两式相减即得

$$(a-b)f'(x) = f(a) - f(b) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\xi_1) - \frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\xi_2).$$

3.2.52 设函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 皆 n 次可微,且

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0),\quad k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$$

又当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$.求证 $\varphi(x) > \psi(x)$, $(x > x_0)$.

证 令 $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$,由泰勒公式,有

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \cdots + g^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{g^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n}{n!},\ x_0 < \xi < x.$$

注意到 $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$, $k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$,则有 $g^{(k)}(x_0) = 0, k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$.所以有

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n}{n!}.$$

又因 $\xi > x_0$ 时,$\varphi^{(n)}(\xi) > \psi^{(n)}(\xi)$,故 $g^{(n)}(\xi) > 0$,从而有 $g(x) > 0$.即

$$\varphi(x) > \psi(x),\quad (x > x_0).$$

3.2.53 设$f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶导数,且$f'(a) = f'(b) = 0$,则在(a,b)内必存在一点 c,使

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

证　因为 $f'(a) = f'(b) = 0$，故由泰勒公式，有

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{f''(x_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + \frac{f''(x_2)}{2} \cdot (\frac{b-a}{2})^2,$$

其中，$x_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$，$x_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$.

令

$$c = \begin{cases} x_2, & |f''(x_2)| \geqslant |f''(x_1)|; \\ x_1, & |f''(x_2)| < |f''(x_1)|, \end{cases}$$

则 $c \in (a,b)$，且有

$$|f''(c)| = \max\{|f''(x_2)|, |f''(x_1)|\}.$$

又

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant |f(b) - f(\frac{a+b}{2})| + |f(\frac{a+b}{2}) - f(a)| \\ &= (\frac{b-a}{2})^2 \cdot \frac{1}{2}(|f''(x_1)| + |f''(x_2)|) \\ &\leqslant \frac{(b-a)^2}{4}|f''(c)|. \end{aligned}$$

由此即得

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^4}|f(b) - f(a)|.$$

3.2.54　设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的三次可微函数，且 $f(-1) = 0$，$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，$f'(0) = 0$，证明：必定存在某一个 $x \in (-1,1)$，使 $f^{(3)}(x) \geqslant 3$.

证　由 $f(0) = f'(0) = 0$，把 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处作二阶泰勒展开，有

$$f(x) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}x^3, \ (\xi = \theta x, 0 < \theta < 1),$$

把 $x = -1$ 和 $x = 1$ 代入，可知存在 ξ_1 和 ξ_2，使

$$0 = f(-1) = \frac{f''(0)}{2} - \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}, \quad (-1 < \xi_1 < 0),$$

$$1 = f(0) = \frac{f''(0)}{2} + \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}, \quad (0 < \xi_2 < 1).$$

两式相减，消去 $f''(0)$，得

$$6 = f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2) \leqslant 2\max\{f^{(3)}(\xi_1), f^{(3)}(\xi_2)\}.$$

当 $f^{(3)}(\xi_1) \leqslant f^{(3)}(\xi_2)$ 时，取 $x = \xi_2$，当 $f^{(3)}(\xi_1) \geqslant f^{(3)}(\xi_2)$ 时，取 $x = \xi_1$，则

$$f^{(3)}(x) = \max\{f^{(3)}(\xi_1), f^{(3)}(\xi_2)\}.$$

于是有 $f^{(3)}(x) \geqslant 3$, ($x \in \{\xi_1, \xi_2\} \subset (-1,1)$. 即存在 $x \in (-1,1)$, 使 $f^{(3)}(x) \geqslant 3$.

3.2.55 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$, 且 $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0$, $i = 1,2,\cdots,n-1$. 证明：存在一点 $c \in (a,b)$, 使

$$|f^{(n)}(c)| \geqslant \frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|.$$

证 由泰勒定理及题设条件，有

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^n, \quad a < \xi_1 < \frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b.$$

令
$$c = \begin{cases} \xi_1, |f^{(n)}(\xi_2)| \geqslant |f^{(n)}(\xi_1)|; \\ \xi_2, |f^{(n)}(\xi_2)| < |f^{(n)}(\xi_1)|, \end{cases}$$

则有

$$\frac{2^{n-1}\cdot n!\,|f(b)-f(a)|}{(b-a)^n} \leqslant |f^{(n)}(c)|.$$

3.2.56 设 $f(x)$ 于 x_0 附近存在二阶导数，

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,\ f''(x_0) \neq 0$$

且 $f''(x)$ 在 x_0 处连续，证明：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$.

证 对 $f'(x_0+\theta\Delta x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$f'(x_0+\theta\Delta x) = f'(x_0) + \theta\Delta x f''(x_0+\theta\Delta x), \quad \theta < \theta_1 < 1,$$

于是 $\quad f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0+\theta_1\theta\Delta x)\theta\Delta x^2.$

另一方面，由泰勒公式，有

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0+\theta_2\Delta x)\Delta x^2,\ 0 < \theta_2 < 1.$$

所以，对 $\Delta x \neq 0$，有

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{f''(x_0+\theta_2\Delta x)}{f''(x_0+\theta_1\theta\Delta x)}.$$

又 $f''(x)$ 在 x_0 处连续，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\theta = \frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x_0+\theta_2\Delta x)}{f''(x_0+\theta_1\theta\Delta x)} = \frac{1}{2}.$$

3.2.57 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 中可微分，且

$$|xf'(x) - f(x) + f(0)| < x^2M, \quad x \in (0,1),$$

其中 M 是正常数. 证明 $f'_+(0)$ 存在.

证　设 $0 < x < 1$, 令 $h(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

从而
$$f'(x) = xh'(x) + h(x),$$
因此
$$xf'(x) - f(x) + f(0) = x^2h'(x).$$
由题设条件得
$$|h'(x)| < M,\quad x \in (0,1).$$

又设 $\{x_n\}$ 为任意趋于 0 的序列, 其中 $x_n \in (0,1)$, $n = 1,2,\cdots$, 由中值定理得
$$h(x_m) - h(x_n) = h'(\xi)(x_m - x_n).$$
其中 ξ 在 x_m 与 x_n 之间. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 所以, 对于任意给定的正数 ε, 总存在正整数 N, 当 $m,n > N$ 时, 有 $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, 故
$$|h(x_m) - h(x_n)| < \varepsilon,$$
即 $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ 存在, 从而 $f'_+(0)$ 存在.

3.2.58　设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + f'(x)) = 0$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证　对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $a > 0$, 使当 $x \geqslant a$ 时, 有
$$|f(x) + f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

若 $x > a$, 由柯西定理知, 存在 $b \in (a,x)$ 使
$$\frac{f(x)e^x - f(a)e^a}{e^x - e^a} = f(b) + f'(b),$$
由此可知, $|f(x) - f(a)e^{a-x}| < \dfrac{\varepsilon}{2}|1 - e^{a-x}|$. 故
$$|f(x)| < |f(a)|e^{a-x} + \frac{\varepsilon}{2}|1 - e^{a-x}|.$$
又 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a-x} = 0$ 故存在 $X > a$, 当 $x > X$ 时,
$$0 < e^{a-x} < \frac{\varepsilon}{2|f(a)| + 1}.$$
因此, 当 $x > X$ 时,
$$|f(x)| < |f(a)|e^{a-x} + \frac{\varepsilon}{2}|1 - e^{a-x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

3.2.59　若函数 $f(x)$ 在 $[a,a+h]$ $(h>0)$ 上连续，在 $(a,a+h)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = A$（有穷或无穷），则 $f'_+(a) = A$.

证　对于任意的 $x\in(a,a+h)$，由拉格朗日中值公式，有 $\xi\in(a,x)\subset(a,a+h)$，使
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi),$$
于是　$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi) = A.$$

用完全类似的方法，可以在 a 点左侧建立类似的论断. 由此有如下的结论：

若函数 $f(x)$ 在 a 点的某邻域 $U(a,h)$ 上连续，除 a 点外可导，且 $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = A$（有穷或无穷），则 $f(x)$ 在 a 点可导，且
$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x) = A.$$

注意：（1）命题的条件是充分的，但不必要. 就是说当 $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ 不存在也不等于无穷时，$f(x)$ 在 a 点仍然可能存在导数. 例如
$$g(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
处处连续，当 $x\neq 0$ 时，$g'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$，这里 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ 不存在，但 $g(x)$ 在 $x=0$ 却有导数，且
$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x} - 0}{x} = 0.$$

（2）由此命题可以直接推出一个函数的导函数不可能有第一类间断点.

3. 函数的泰勒展开

3.2.60　写出 $p_n(x) = x^3 - 2x - 5$ 在 $x_0 = 2$ 处的泰勒展开式.

解　$p_n(2) = -1$；

$p_n'(x) = 3x^2 - 2$，　　$p_n'(2) = 10$；

$p_n''(x) = 6x, \qquad p_n''(2) = 12;$

$p_n^{(3)}(x) = 6, \qquad p_n^{(3)}(2) = 6.$

因而　$p_n(x) = -1 + \frac{10}{1!}(x-2) + \frac{12}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3$

$= -1 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3.$

3.2.61　把函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 表示为关于 $x-1$ 的 5 次多项式.

解　首先求 $f(x) = x^{1/3}$ 及其前五阶导数在 $x_0 = 1$ 的值：

$f(x) = x^{1/3}, \qquad f(1) = 1;$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \qquad f'(1) = \frac{1}{3};$

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \qquad f''(1) = -2/9;$

$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}, \qquad f'''(1) = \frac{10}{27};$

$f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-11/3}, \quad f^{(4)}(1) = -\frac{80}{81};$

$f^{(5)}(x) = \frac{880}{243}x^{\frac{-14}{3}}, \qquad f^{(5)}(1) = \frac{880}{243}.$

从而，由泰勒公式，有

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5 + R_5$$

其中 $R_5 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-1)^6 = -\frac{12320}{729\cdot 6!}\cdot \xi^{-17/3}(x-1)^6$，而 ξ 是介于 1 和 x 之间的数.

3.2.62　利用 $f(x) = (1+x)^m$ 在 $x=0$ 点的 n 阶泰勒公式，将函数 $g(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 按变量 x 的正整数幂展开到含 x^4 的项为止.

解　$g(x) = 1 + \frac{2x}{1-x+x^2}$

$= 1 + 2x[1 + (x-x^2) + (x-x^2)^2 + (x-x^2)^3 + o(x^3)]$

$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$

3.2.63　求函数 $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}\cdot(1+2x)^{60}}$ 的马克劳林展开式（到 x^2 项为止）.

解　所给函数改写为 $f(x) = (1+x)^{100}(1-2x)^{-40}(1+2x)^{-60}$，

因为

$$(1+x)^{100}=1+100x+5099x^2+o(x^2),$$
$$(1-2x)^{-40}=1+80x+8041x^2+o(x^2),$$
$$(1+2x)^{-60}=1-120x+12061x^2+o(x^2).$$

将上面三式相乘且右端只保留到 x^2 项,得

$$f(x)=1+60x+1950x^2+o(x^2).$$

3.2.64 求出函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的三阶马克劳林展式.

解 因 $y'=\sec^2x$, $y''=2\sec^2x\mathrm{tg}x$, $y'''=2(1+2\sin^2x)/\cos^4x$, 故 $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$. $y'''(\theta x)=\dfrac{2(1+2\sin^2\theta x)}{\cos^4\theta x}$,

于是 $$\mathrm{tg}x=x+\frac{1+2\sin^2\theta x}{3\cos^4\theta x}x^3,\ (0<\theta<1).$$

3.2.65 求函数 $y=\sin^2x$ 的 $2n$ 阶马克劳林展开式.

解 因 $y^{(k)}=2^{k-1}\sin[2x+\dfrac{k-1}{2}\pi]$

故 $$y^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k\text{ 为奇数};\\ (-1)^{\frac{k}{2}-1}\cdot 2^{k-1}, & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

于是 $$\sin^2x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}\cdot x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$
$$+(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\cdot\sin(2\theta x)x^{2n+1},\quad (0<\theta<1).$$

3.2.66 把函数 $f(x)=a^x\ (a>0)$ 表示为关于 x 的三次多项式.

解
$$\begin{aligned}
f(x)&=a^x, & f(0)&=1;\\
f'(x)&=a^x\ln a, & f'(0)&=\ln a;\\
f''(x)&=a^x\ln^2a, & f''(0)&=\ln^2a;\\
f'''(x)&=a^x\ln^3a, & f'''(0)&=\ln^3a;\\
f^{(4)}(x)&=a^x\ln^4a, & f^{(4)}(\theta x)&=\ln^4a\cdot e^{\theta x}.
\end{aligned}$$

由马克劳林公式,得

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2a}{2!}+\frac{x^3\ln^3a}{3!}+R_3.$$

其中

$$R_3=\frac{x^4\ln^4a}{4!}e^{\theta}x,\quad 0<\theta<1.$$

3.2.67 求函数 $\ln(1+x)$ 在 $x_0=0$ 处的泰勒展开式.

解 设 $f(x)=\ln(1+x)$,则

$$f^{(k)}(1+x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\quad k=1,2,\cdots$$

故　$$f(0)=0,$$
$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\quad k=1,2,\cdots$$

于是，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(|x|^n).$$

3.2.68　求函数 $f(x)=\ln\cos x$ 的马克劳林展式（到 x^6 项为止）.

解　$$\ln\cos x=\ln(1-\sin^2x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln[1+(-\sin^2x)]$$
$$=\frac{1}{2}[-\sin^2x-\frac{1}{2}\sin^4x-\frac{1}{3}\sin^6x+o(x^6)]$$
$$=\frac{-1}{2}[(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6))^2+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4))^4+\frac{1}{3}(x+o(x^2))^6+o(x^6)]$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

3.2.69　求函数 $f(x)=\ln(\frac{\sin x}{x})$ 的马克劳林展式，其中 $x\neq 0$，$f(0)=0$，展开到 x^6 项为止.

解　$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5040}x^6+o(x^6),$$

记　$$\frac{\sin x}{x}=1+\alpha(x),\quad \alpha(x)=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6).$$

则　$$\ln(\frac{\sin x}{x})=\ln(1+\alpha(x))$$
$$=\alpha(x)-\frac{1}{2}\alpha^2(x)+\frac{1}{3}\alpha^3(x)+o(\alpha^3(x))$$
$$=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2835}x^6+o(x^6).$$

3.2.70　举例说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有各阶导数 $f^{(n)}(0)$，$n=1,2,3,\cdots$，但 $f(x)$ 相应的泰勒级数之和在 $x=0$ 的任一邻域上却不等于 $f(x)$.

解　例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

首先证明，对任意的 n，当 $x \neq 0$ 时，

$$f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2},$$

其中 $p_n(x)$ 为 x 的 $3n$ 次多项式.

当 $n = 1$ 时，$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$，$p_1(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x^3}$.

设 $n = m$ 时有 $f^{(m)}(x) = p_m(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}$，则

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x) &= p'_m(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})e^{-1/x^2} + p_m(\frac{1}{x}) \cdot \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \\ &= \left[\frac{2}{x^3}p_m(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}p'(\frac{1}{x})\right]e^{-1/x^2}, \end{aligned}$$

这里$\frac{2}{x^3}p_m(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}p'_m(\frac{1}{x})$正好是$\frac{1}{x}$的 $3 + 3m = 3(m+1)$ 次多项式.

即 $n = m + 1$ 时，$f^{(m+1)}(x) = p_{m+1}(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}$.

由此易知，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处有各阶导数

$$f^{(n)}(0) = 0, n = 1,2,3,\cdots,$$

$f(x)$ 相应的泰勒级数的和$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}0$ 对一切 x 收敛于恒等于 0 的函数，而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的任一邻域内不恒等于零，故该级数的和不等于 $f(x)$.

3.2.71 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)中有二阶导数，证明：存在一点 $c \in (a,b)$，使

$$f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(c).$$

证 由泰勒公式可得

$$\begin{aligned} f(a) = f(\frac{a+b}{2}) &+ f'(\frac{a+b}{2})(a - \frac{a+b}{2}) \\ &+ f''(\xi_1)\frac{1}{2}(a - \frac{a+b}{2})^2,\ a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

$$f(b) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(b - \frac{a+b}{2})$$

$$+ f''(\xi_2)\frac{1}{2}(b-\frac{a+b}{2})^2,\ \frac{a+b}{2}<\xi_2<b,$$

两式相加，得

$$f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2},$$

$$a<\xi_1<\xi_2<b,$$

又　$\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}\leqslant\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$，

于是，存在一点 $c\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使

$$f''(c)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2},$$

即存在一点 $c\in(a,b)$，使

$$f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot f''(c).$$

3.2.72　设 $f(x)$ 有连续的三阶导数，且在等式

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

中，θ 与 h 无关，则 $f(x)$ 必为一次函数或二次函数.

证　由泰勒公式有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(\xi),\tag{1}$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 与之间.

与题设的已知等式进行比较，得

$$h[f'(x+\theta h)-f'(x)]=\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(\xi).$$

用 h^2 除两边得

$$\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}hf'''(\xi),$$

$$\theta\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}hf'''(\xi).$$

令 $h\to 0$，得

$$\theta f''(x)=\frac{1}{2}f''(x),$$

若 $\theta\neq\frac{1}{2}$，则 $f''(x)=0$. 由于 x 的任意性知，$f''(x)\equiv 0$. 从而，$f'''(x)\equiv 0$. 在(1)式中用 0 代替 x，用 x 代替 h，则得一次函数.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x.$$

若 $\theta=\frac{1}{2}$，由题设有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\frac{1}{2}h),$$

上式两边对 h 求导得

$$f'(x+h)=f'(x+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{2}hf''(x+\frac{1}{2}h).$$

再对 h 求导

$$\begin{aligned}f''(x+h)&=\frac{1}{2}f''(x+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{2}hf''(x+\frac{1}{2}h)\\&\qquad+\frac{1}{4}hf'''(x+\frac{1}{2}h)\\&=f''(x+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{4}hf'''(x+\frac{1}{2}h).\end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理得

$$f'''(\eta)\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4}hf'''(x+\frac{1}{2}h).$$

其中 η 在 $x+h$ 与 $x+\frac{h}{2}$ 之间，即得

$$\frac{1}{2}f'''(\eta)=\frac{1}{4}f'''(x+\frac{1}{2}h).$$

令 $h\to 0$，由 $f'''(x)$ 的任意性得

$$\frac{1}{2}f'''(x)=\frac{1}{4}f'''(x).$$

这只有当 $f'''(x)=0$ 时才能成立，由 x 的任意性知

$$f'''(x)\equiv 0.$$

在(1)式中用 0 代替 x，用 x 代替 h，得二次函数

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

§3　洛比达法则

内容提要

如果当 $x\to a$(或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋向于零或都趋向于 ∞，那么，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在，也可能不存在. 通常把这种极限称为不定型.

1. 洛比达第一法则（$\frac{0}{0}$ 型不定式的求值法则）设

(1) 当 $x\to a$(a 可为有限数或符号 ∞) 时，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋向于零，

(2) 在点 a 的某邻域内(点 a 本身可以除外)，$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大)；

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

即当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$，当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 为无穷大时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也是无穷大.

2. 洛比达第二法则（$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式的求值法则）设

(1) 当 $x\to a$(a 可为有限数或符号 ∞) 时，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋向于无穷大；

(2) 在点 a 的某邻域内(点 a 本身可以除外)，$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，并且当 x 属于该邻域且 $x\neq a$ 时，
$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0;$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大)；

则
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

如果$\frac{f'(x)}{g'(x)}$当$x\to a$时仍属$\frac{0}{0}$型(或$\frac{\infty}{\infty}$型)不定式,且这时$f'(x)$及$g'(x)$能满足洛比达法则中$f(x)$和$g(x)$所要满足的条件,则可以继续使用洛比达法则先确定$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,从而确定$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. 即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

3. 对于$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$等型的不定式,利用代数变型与取对数的方法,可以化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型不定式来求极限.

问 题 与 解 答

1. $\frac{0}{0}$型不定式求值

3.3.1 求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$.

解 这是$\frac{0}{0}$型不定式,由洛比达法则可得

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\dfrac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}}=\frac{16}{9}a.$$

3.3.2 求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$,$(a\neq 0)$.

解 这是$\frac{0}{0}$型不定式,由洛比达法则可得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$$

3.3.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解 这是$\frac{0}{0}$型不定式. 用洛比达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2},$$

这仍是$\frac{0}{0}$型不定式，再用一次洛比达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

（既然很容易用洛比达法则导出$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos}{1}=1$，当初何必费力地推出$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$呢？请读者认真考虑一下.）

3.3.4　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}$.

解　这是$\frac{0}{0}$型不定式，由洛比达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{1-\cos x}.$$

右端仍是$\frac{0}{0}$型不定式，再用一次洛比达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)$$
$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\cos x=2+1=3.$$

3.3.5　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　这是$\frac{0}{0}$型不定式，前面曾用适当的恒等变形及重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$求得该极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

现用洛比达法则求其极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

3.3.6　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x-\arcsin x}$.

解　这是$\frac{0}{0}$型不定式，由洛比达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x\cos x}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 2\sin x\cos x}{\dfrac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}}=\lim_{x\to 0}\left[-6\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x(1-x)^{3/2}\right]=-6.$$

3.3.7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

解 这是$\dfrac{0}{0}$型不定式,由洛比达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=-2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2.$$

这里用过一次洛比达法则后得到的仍属$\dfrac{0}{0}$型不定式,但往下没有再用罗必达法则,而是直接引用了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$的结果,如果二次用洛比达法则,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2+2x\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{-\cos x}=-2.$$

3.3.8 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{12}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{24x}-\frac{1}{12}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin}{24x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{24}-\frac{1}{12}=-\frac{1}{12}.$$

3.3.9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}+e^{2x}+xe^{x}+e^{x}-4e^{2x}+2e^{x}}{3(e^{x}-1)^{2}e^{x}}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+e^{x}+x+1-4e^{x}+2}{(e^{x}-1)^{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+2e^{x}+e^{x}+1-4e^{x}}{2(e^{x}-1)e^{x}}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-e^{x}+1}{e^{x}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+2e^{x}-e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{6}.$$

3.3.10　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}-1+\ln x}{e^{x}-e}$.

解　当 $x\to 1$ 时,分子和分母的极限都等于 0,所以本题为$\dfrac{0}{0}$型不定式.由洛比达法则可得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1+\ln x}{e^{x}-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^{x}}=\frac{3}{e}.$$

3.3.11　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-x}{\ln x-x+1}$.

解　这是$\dfrac{0}{0}$型不定式,应用洛比达法则时要用到

$$(x^{x})'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot\left(x\cdot\frac{1}{x}+1\cdot\ln x\right)=x^{x}(1+\ln x),$$

故　$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x}-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x}(1+\ln x)-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(1+\ln x)-x}{1-x},$$

这仍是$\dfrac{0}{0}$型不定式,再次用罗必达法则时要用到

$$[x^{x+1}(1+\ln x)]'=(x^{x+1})'(1+\ln x)+x^{x+1}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= [e^{(x+1)\ln x}]'(1+\ln x) + x^x$$
$$= e^{(x+1)\ln x}\left(\frac{x+1}{x} + \ln x\right)(1+\ln x) + x^x$$
$$= x^{x+1}\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)(1+\ln x) + x^x,$$

于是，原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x+1}(1+\ln x)-x}{1-x}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)(1+\ln x)+x^x-1}{-1}$$
$$= \frac{1\times 2\times 1+1-1}{-1} = -2.$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式求值

3.3.12 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，但是，当 $x\to\infty$ 时，$(x+\sin x)' = 1+\cos x$ 和 $(x-\cos x)' = 1+\sin x$ 都没有极限，更不同时为无穷小量或无穷大量，因此不能应用洛比达法则. 假若盲目地用洛比达法则计算：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$$

不存在，从而说极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$ 不存在，那就错了，事实上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

这个简单例子也说明，洛比达法则虽然在求极限中有重要价值，但毕竟有它的适用条件，有其局限性.

3.3.13 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 3x\cdot 3}{\sec^2 x} = 3\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 3x}{\sec^2 x}$,

继续直接用洛比达法则运算较繁（读者可试做一下），先进行恒等变形

后再用洛比达法则.

$$原式 = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 3x}{\sec^2 x} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 3x} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin 6x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x\cdot 2}{\cos 6x\cdot 6} = \frac{1}{3}.$$

本题也可以先进行恒等变形：

$$\mathrm{tg}3x = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x}{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}2x} = \frac{\mathrm{tg}x + \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}}{1 - \mathrm{tg}x\cdot\dfrac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{3\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3\mathrm{tg}^2 x},$$

于是，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3-\mathrm{tg}^2 x}{1-3\mathrm{tg}^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\,\mathrm{ctg}^2 x - 1}{\mathrm{ctg}^2 x - 3} = \dfrac{1}{3}.$

3.3.14　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

解　这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式，由洛比达法则得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{x}{2})}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(2+\frac{x}{2})}{e^x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

3.3.15　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{e^x}$（$a$ 为正实数）.

解　这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式. 当 a 为正整数时，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\cdots 1}{e^x} = 0,$$

当 $a>0$ 不是整数时，总存在着正整数 $k=[a]+1$，使 $a<k$，即 $a-k<0$，于是连续求 k 次导数，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{x^{k-a}e^x} = 0.$$

因此，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=0.$$

同样有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}=0(a>0)$. 可见,当 $x\to+\infty$ 时,$\ln x,x^a(a>0)$,e^x 是阶数越来越高的三个无穷大量.

3.3.16 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{-1}}{-\csc^2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\sin^2x}{x}=0.$

3.3.17 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\mathrm{tg}x}{\ln\mathrm{tg}2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\mathrm{tg}7x}{\ln\mathrm{tg}2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\mathrm{tg}7x)^{-1}\cdot\sec^27x\cdot7}{(\mathrm{tg}2x)^{-1}\cdot\sec^22x\cdot2}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{7\sin4x}{2\sin14x}=\frac{7}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{4\cos4x}{14\cos14x}=1.$$

3. 其它类型的不定式求值

3.3.18 求 $\lim\limits_{x\to0}e^{-x^{-2}}x^{-100}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}e^{-x^{-2}}x^{-100}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}=50!\lim\limits_{x\to0}e^{-1/x^2}=0.$

3.3.19 求 $\lim\limits_{x\to0}(x^2\ln x)$.

解 这是$0\cdot\infty$型不定式,先把它化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式,然后再应用洛比达法则

$$\lim_{x\to0}(x^2\ln x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^2=0.$$

3.3.20 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\dfrac{1}{x})=\ln[\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\ln(1+2^x)}]$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1+2^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2^x\ln2}{1+2^x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln2}{1+\frac{1}{2^x}}=\ln2$,

所以,原式 $=\ln[\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x\cdot\frac{\ln(1+2^x)}{x}}]=\ln e^{\ln2}=\ln2.$

3.3.21　求 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x)$.

解　这是 $\infty-\infty$ 型不定式,可先化为$\frac{0}{0}$型不定式.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$,

如直接用洛比达法则运算较繁,可先进行恒等变形:

$$\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x},$$

其中前一个因式的极限很容易求出:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}(1+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x)=1+1=2,$$

而后一个极限属$\frac{0}{0}$型不定式,可用洛比达法则求出:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-(1\cdot\cos x-x\sin x)}{2x\sin x+x^2\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x}=\frac{1}{3};$$

(后一步如果继续用洛比达法则,运算就较繁)

于是,原式 $=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

3.3.22　求 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

解　这是$\infty-\infty$型不定式,可先化为$\frac{0}{0}$型不定式,然后用洛比达法则.

$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

3.3.23　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2}{1-x}+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解　这是$\infty-\infty$型不定式,可先化为$\dfrac{0}{0}$型不定式,然后用洛比达法则.

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{x^2\ln x+1-x}{(1-x)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{2x\ln x+x-1}{-\ln x+\dfrac{1-x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(\ln x+1)+1}{-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=-\frac{3}{2}.$$

3.3.24　求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

解　$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x}\left[\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}-(1+x)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}\right]}{\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x}}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

3.3.25　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

解　这是$\infty-\infty$型,可先化为$\dfrac{0}{0}$型不定式,即

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[x\left(\frac{a}{x}+1\right)\right]^{1+\frac{1}{x}}-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{a}{x}+1\right)^{\frac{1}{x}+1}\right]-x\cdot x^{\frac{1}{x+a}}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{a}{x}+1\right)^{\frac{1}{x}+1}-x^{\frac{1}{x}-\frac{a}{x(x+a)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}+1}-\frac{1}{x^{\frac{a}{x(x+a)}}}\right]$$

令$\frac{1}{x}=t$,则由$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$及洛比达法则可得

$$\text{原式}=\lim_{t\to+0}[(1+at)^{t+1}-t^{\frac{at^2}{1+at}}]/t$$

$$=\lim_{t\to+0}\{(1+at)^{t+1}[\ln(1+at)+a\cdot\frac{t+1}{1+at}]$$

$$-t^{\frac{at^2}{1+at}}[\frac{2at+a^2t^2}{(1+at)^2}\ln t+\frac{at}{1+at}]\}$$

$$=1\times[0+a]-0=a.$$

3.3.26　求$\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$.

解　这是0^0型不定式.记$y=(\sin x)^x$并对两边同时取对数,得

$$\ln y=x\cdot\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{1/x}.$$

上式右边的极限为$\frac{\infty}{\infty}$型不定式,用洛比达法则得

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x}{1/x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}$$

$$=-\lim_{x\to0}(x\cos x\cdot\frac{x}{\sin x})=0.$$

从而$\lim\limits_{x\to0}y=e^0=1$,即,$\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x=1$.

3.3.27　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$.

解　这是∞^0型不定式,令$y=(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}$,并对两边同时取对数,得

$$\ln y=2\cos x\ln\mathrm{tg}x=\frac{2\ln\mathrm{tg}x}{1/\cos x},$$

由洛比达法则,有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\sec x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x/\mathrm{tg}x}{\sec x}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\mathrm{tg}^2x}$$

$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x\cdot\mathrm{tg}x}{2\mathrm{tg}x\cdot\sec^2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0.$$

即
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}y=e^0=1.$$

3.3.28　求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 因为$(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)}$,

且
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}\cdot(-\frac{1}{1+x^2})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(1+x^2)\cdot 1-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x}=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

3.3.29 求 $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}$.

解
$$原式=e^{\lim\limits_{x\to+0}(x^x-1)\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln^2x\cdot\frac{x^x-1}{x\ln x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln^2x\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^x-1}{x\ln x}},$$

式中

$$\lim_{x\to+0}x\ln^2x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}(-2x\ln x)=0,$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x},$$

令 $x\ln x=t$,显然有 $x\to+0$ 时,$t\to 0$,于是

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1}=1.$$

故原式 $=e^{0\cdot 1}=1$.

3.3.30 求 $\lim\limits_{x\to 0}(x^{x^x}-1)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x}-\lim\limits_{x\to 0}1=0-1=-1$.

3.3.31 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c})^{\frac{1}{x}}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)\frac{1}{x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{a+b+c}{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}\cdot\frac{1}{a+b+c}\cdot(a^{x+1}\ln a+b^{x+1}\ln b+c^{x+1}\ln c)}{1}}$$

$$= e^{\frac{1}{a+b+c}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)}$$

$$= (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}} = \sqrt[a+b+c]{a^a\cdot b^b\cdot c^c}$$

3.3.32　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$

解　设 $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=\mathrm{ctg}^2x$，当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to 0$，$\psi(x)\to+\infty$. 这是 1^∞ 型不定式.

因为　$\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{ctg}^2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\cos^2x=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\mathrm{ctg}^2x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2\mathrm{ctg}^2x\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{ctg}^2x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=e^1=e.$$

3.3.33　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

解　这是 1^∞ 型不定式，令 $y=(1+x)^{\ln x}$，两边同时取对数，然后用洛比达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2x}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2x}{1+x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2x}{1+\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

3.3.34 求 $\lim\limits_{\varphi\to 0}(\frac{\sin\varphi}{\varphi})^{1/\varphi^2}$.

解 设 $y = (\frac{\sin\varphi}{\varphi})^{1/\varphi^2}$,则 $\ln y = \frac{1}{\varphi^2}\ln\frac{\sin\varphi}{\varphi}$. 于是

$$\lim_{\varphi\to 0}\ln y = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\ln\frac{\sin\varphi}{\varphi}}{\varphi^2} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2}}{2\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{2\varphi^2\sin\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi - \cos\varphi}{4\varphi\sin\varphi + 2\varphi^2\cos\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{-\sin\varphi}{4\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{-\cos\varphi}{4\cos\varphi + 2\cos\varphi - 2\varphi\sin\varphi} = -\frac{1}{6}.$$

故 $\lim\limits_{\varphi\to 0}(\frac{\sin\varphi}{\varphi})^{1/\varphi^2} = e^{\lim\limits_{\varphi\to 0}\ln y} = e^{-\frac{1}{6}}$.

3.3.35 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}}$.

解 设 $y = (\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}}$,则

$$\ln y = \frac{1}{x}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1)] = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2},$$

应用洛比达法则,得

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

故原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

3.3.36 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 4$,求常数 a 的值.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{2a}{x-a})^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{2a}{x-a})}$,

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{2a}{x-a} = 2a$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{2a}{x-a})}{\frac{2a}{x-a}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{2a} = 4$,故 $a = \ln 2$.

3.3.37 设 $f(x)$ 在$[-1,1]$上是恒正的连续可微函数,而且

$f(0)=1$,证明:$\lim\limits_{x\to0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{f'(0)}$.

证　设 $y=[f(x)]^{\frac{1}{x}}$,则 $\ln y=\dfrac{\ln f(x)}{x}$,于是,

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(0)}{f(0)}=f'(0),$$

因此可得

$$\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y}=e^{f'(0)}.$$

3.3.38　设 $f(x)$ 二阶可导,证明

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{\Delta x^2}.$$

证　上式右端的极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式,应用洛比达法则,分子分母对 Δx 求导,得

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)-2f(x)}{\Delta x^2}\\=&\lim_{\Delta x\to0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x-\Delta x)}{2\Delta x}\\=&\lim_{\Delta x\to0}\frac{f''(x+\Delta x)+f''(x+\Delta x)}{2}=f''(x).\end{aligned}$$

3.3.39　证明:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}1, & 0<a<1;\\0, & a=1;\\a, & a>1.\end{cases}$$

证　当 $a=1$ 时,结论是明显的. 当 $a\neq1$ 时,设 $y=\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$,则 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1})$,应用洛比达法则,得

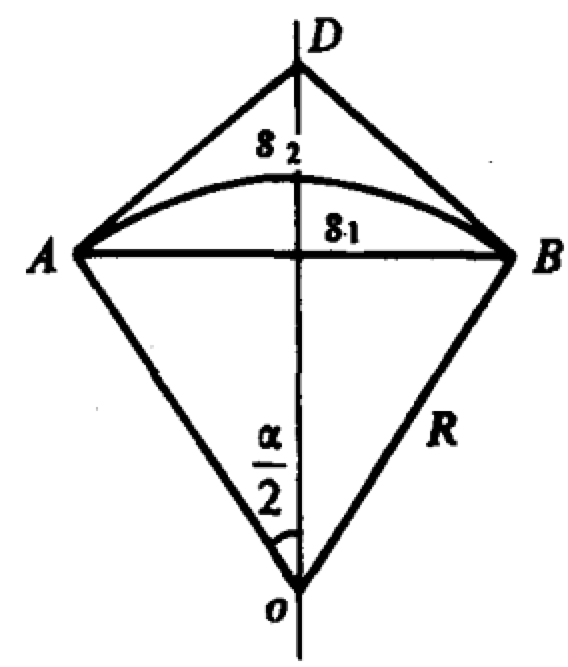
$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{a^x-1}{x(a-1)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}(\frac{a^x\ln a}{a^x-1}-\frac{1}{x})$$

$$=\begin{cases}0, & 0<a<1;\\\ln a, & a>1.\end{cases}$$

由此可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}1, & 0<a<1;\\a, & a>1.\end{cases}$$

3.3.40　如图所示，圆弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为α，设s_1为$\overset{\frown}{AB}$与$\overline{AB}$弦所围成的面积；s_2为过A、B两点处的切线与$\overset{\frown}{AB}$所围成的面积，试求$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{s_1}{s_2}$.



3.3.40 题图

解　$s_1=\frac{1}{2}R^2\alpha-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$

$$=\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha);$$

$$s_2=2\cdot\frac{1}{2}AO,OD\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}R^2\alpha$$

$$=R\cdot\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}R^2\alpha$$

$$=R^2(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}).$$

于是　$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{s_1}{s_2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{R^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)}{R^2(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2})}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\sec^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sin\alpha}=2.$$

§4 函数研究

内容提要

1. 函数单调性判别法

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

如果把这个判别法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间)，结论仍然成立.

2. 函数的极值

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，x_0 是 (a,b) 内的一个点. 如果存在点 x_0 的一个邻域，对于这个邻域内的任何点 x，除了 x_0 点外，$f(x)\leqslant f(x_0)$ 均成立，就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值；如果存在点 x_0 的一个邻域，对于这个邻域内的任何点 x，除了 x_0 点外，$f(x)\geqslant f(x_0)$ 均成立，就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点.

(1) 极值的必要条件

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值，则导数 $f'(x_0)$ 等于零或者不存在.

使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 称为函数的驻点；函数的导数不存在的点 x_0 和驻点统称为可能极值点. 可能极值点不一定是极值点.

(2) 极值的充分条件

第一判别法. 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的可能极值点，而且对于一切充分小的 $h>0$，有 $f'(x_0-h)>0$，$f'(x_0+h)<0$，则函数在点 x_0 有极大值，而如果 $f'(x_0-h)<0$，$f'(x_0+h)>0$，则函数在点 x_0 有极小值.

第二判别法. 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的驻点，且 $f''(x_0)\neq 0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值. 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 有极大值；当 $f''(x_0)>0$

时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极小值.

第三判别法. 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的驻点，且 $f''(x_0)=0,\cdots,f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq 0$，那么，如果 n 是奇数，则函数 $f(x)$ 在 x_0 没有极值；如果 n 是偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值：当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 有极大值；当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 有极小值.

(3) 函数的最大值和最小值

为求函数 $f(x)$ 在某区间 $[a,b]$ 上的最大值（或最小值），只需在它的两个边界值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 以及它在该区间的可能极值点上的一切值中，选择一个最大（或最小）的值. 最大值和最小值统称函数的最值.

3. 函数的凸性与拐点

凸函数的定义　区间 $[a,b]$ 上的实值函数 $f(x)$ 称为上凸的是指对任意的 $x_1,x_2\in[a,b],\lambda\in[0,1]$，不等式

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

恒成立.

如果可导函数 $y=f(x)$ 的图形在区间 (a,b) 内的弧段都位于每一点处切线之下方，称曲线 $y=f(x)$ 在该区间为上凸的；如果图形在区间 (a,b)，的弧段都位于每一点处切线之上方，称曲线 $y=f(x)$ 在该区间上是下凸的. 上凸、下凸又分别称为下凹、上凹.

(1) 凸性的充分条件

如果在区间 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是上凸的；如果在区间 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是下凸的.

(2) 拐点

设 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的点，如果当 x 通过 x_0 时，曲线 $y=f(x)$ 从切线的一方跑到另一方，那么就说点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

设点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则函数在该点的二阶导数不存在或等于零. 凡是使 $f''(x)$ 不存在或 $f''(x)=0$ 的点 x，都可能是拐点.

如果 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在，对任意充分小的 $h>0$，$f''(x_0-h)$ 与 $f''(x_0+h)$ 异号，则 x_0 对应的曲线上的点 $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点，如果 $f''(x_0-h)$ 和 $f''(x_0+h)$ 同号，则 $(x_0,f(x_0))$ 不是拐点.

如果 $f''(x_0-h)$ 与 $f''(x_0+h)$ 虽然异号，但 $f'(x_0^-)\neq f'(x_0^+)$，则 $(x_0,$

$f(x_0)$）也不是拐点.

4. 渐近线

如果当 $x \to \infty$（或 $y \to \infty$）时，曲线 $y = f(x)$ 上点 $M(x,y)$ 到直线 L 的距离趋向于 0，称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ 或 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$，则称直线 $x = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线；如果 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ 或 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$，则称直线 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线；如果存在极限

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$$

或

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx],$$

则称直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

5. 根据函数的特点作图

作函数 $y = f(x)$ 的图形，应先弄清该函数的基本特征，以便作图.

(1) 求出函数的定义域；

(2) 讨论函数的奇偶性、对称性和周期性；

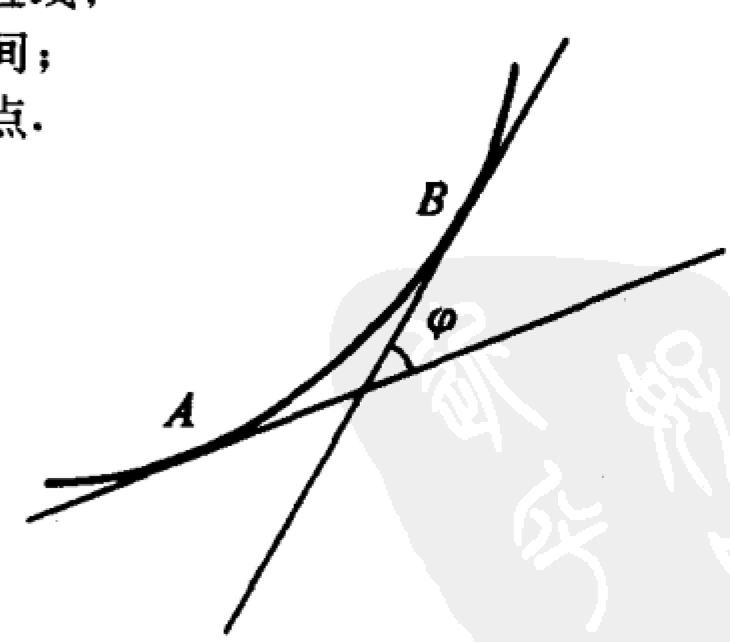
(3) 求出图形与坐标轴的交点；

(4) 讨论函数的连续性；如果有间断点，则找出这些间断点并弄清它的类型；求出曲线 $y = f(x)$ 的渐近线；

(5) 求出函数的单增及单减区间；

(6) 求出函数的凸性区间及拐点.

6. 平面曲线的曲率



平面曲线在点 A 和点 B 的切线间的夹角 φ 称为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的邻角. 弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的邻角 φ 与它的弧长 s 之比称为弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率，记为

$$\bar{k} = \frac{\varphi}{s}.$$

当点 B 沿曲线趋向于点 A 时，如果上式的极限

$$k = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi}{s}$$

存在，则称该极限为曲线在点 A 处的曲率.

圆的曲率为 $k=\frac{1}{R}$，其中 R 是圆的半径；直线的曲率为 0.

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，则曲线 $y=f(x)$ 的曲率为

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

设 $\varphi(t),\psi(t)$ 具有二阶连续导数，且 $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$，则参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 表示的曲线，其曲率为

$$k=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}},$$

其中 $\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\ \dot{y}=\frac{dy}{dt},\ \ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$.

如果 $\rho(\theta)$ 具有二阶连续导数，且 $\rho^2+\rho'^2\neq 0$，则极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 表示的曲线，其曲率为

$$k=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}},$$

其中 $\rho'=\frac{d\rho}{d\theta},\ \rho''=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

曲率的倒数称为曲线在该点的曲率半径，记为 $R=\frac{1}{|k|}$.

在曲线上依次取 B、A、C 三点作圆，当点 B、C 分别沿曲线趋向于点 A 时，此圆的极限位置叫做该曲线在点 A 处的曲率圆. 曲率圆的半径等于曲率半径. 曲率圆的圆心叫做曲率中心，它落在曲线在点 A 处的法线上且位于曲线凹的一侧. 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处之曲率中心的坐标 ξ 和 η 为：

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\ \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

曲率中心的轨迹称为该曲线的渐屈线. 曲率中心的坐标公式可以看作是渐屈线的参数方程(原曲线之横标 x 为参数).

问 题 与 解 答

1. 基本概念

判断下列命题是否正确(3.4.1—3.4.17 题).

3.4.1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的导数 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a,b)

上一致连续.

是. 对于任意的 $x', x'' \in (a,b)$, 由拉格朗日中值定理, 有

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)||x' - x''| \leqslant M|x' - x''|,$$

其中, $|f'(x)| \leqslant M$, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 δ, $0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

3.4.2　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x)$ 在 (a,b) 内只有有限个点的值为 0, 其余皆为正, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定是严格单调增加的.

是. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是严格单调增加函数, 则必存在 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, 使 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 由拉格朗日中值定理知, 存在一点 $\xi \in (x_1, x_2) \subset [a,b]$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,$$

这与已知矛盾.

若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则由 $f'(x)$ 在 (a,b) 内只有有限个零点可知, $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上不恒为常数, 因而存在点 $c \in (x_1, x_2)$, 使 $f(x_1) = f(x_2) \neq f(c)$. 再由拉格朗日中值定理可知, 或在 (x_1, c) 内, 或在 (c, x_2) 内, 必存在一点 ξ, 使 $f'(\xi) < c$, 这也与已知矛盾.

于是, 对任意的 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必为严格单调增加函数.

3.4.3　若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 则必定存在 x_0 的某一邻域, 在该邻域内, 函数在 x_0 的左侧单调增加, 而在右侧单调减少.

非. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin\frac{1}{x}), & x \neq 0; \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

不难看出, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) - f(0) = -x^2(2 + \sin\frac{1}{x}) < 0$, 故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = -2x(2 + \sin\frac{1}{x}) + \cos\frac{1}{x}$, 当 x 接近于 0 时, $2x(2 + \sin\frac{1}{x})$ 接近于 0, 而 $\cos\frac{1}{x}$ 却在 -1 与 1 之间振荡, 因而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 左、右两侧都不是单调的.

顺便指出，若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，且对于这个邻域内异于 x_0 的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 点为 $f(x)$ 的极大值点.

3.4.4　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内皆可导，且 $f(x) > g(x)$，则在 (a,b) 内必有 $f'(x) > g'(x)$.

非. 例如，函数 $f(x) = 5 - x$，$g(x) = x$ 在 $(0,1)$ 内皆可导，且 $f(x) > g(x)$，但在 $(0,1)$ 内，$f'(x) = -1 < 1 = g'(x)$.

3.4.5　单调可导函数的导数必定单调.

非. 例如，函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-1,1)$ 内为单调可导函数，但 $f'(x) = 3x^2$ 在 $(-1,1)$ 内却不是单调函数.

3.4.6　若导函数单调，则函数必单调.

非. 例如，函数 $f(x) = x^2$，其导函数 $f'(x) = 2x$ 在 $(-1,1)$ 内是单调函数，但 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内并非单调函数.

3.4.7　若 $f'(x_0) > 0$，则在 x_0 的某一邻域内，$f(x)$ 必为单调增加函数.

非. 例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} x + 3x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

显然，$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x + 3(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + 3\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 1 > 0,$$

但是，当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) = 1 + 6x\sin\dfrac{1}{x} - 3\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $x_1 = 1/(2k + \dfrac{1}{2})\pi$ 处的值

$$f'(x_1) = 1 + \frac{6}{(2k + \frac{1}{2})\pi}\sin(2k + \frac{1}{2})\pi - 3\cos(2k + \frac{1}{2})\pi$$

$$= 1 + \frac{6}{(2k + \frac{1}{2})\pi} > 0,$$

而在 $x_2 = \dfrac{1}{2k\pi}$ 处的值

$$f'(x_2) = 1 + \frac{6}{2k\pi}\sin 2k\pi - 3\cos 2k\pi = 1 - 3 = -2 < 0,$$

当 k 足够大时，x_1 与 x_2 可以与 $x=0$ 充分接近. 可见在 $x=0$ 的任何邻域内，函数 $f(x)$ 的导数有时为正，有时为负. 故在 $x=0$ 的任何邻域内，$f(x)$ 都不是单调的.

3.4.8　若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点.

非. 例如，函数 $f(x)=x^3$，显然有 $f'(0)=0$，但 $x=0$ 显然不是 $f(x)$ 的极值点.

这说明驻点不一定是极值点.

3.4.9　若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$.

非. 例如，函数 $f(x)=|x|$，$x=0$ 显然是 $f(x)$ 极小值点，但 $f'(0)$ 不存在.

正确的命题是：若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$.

这也表明，求函数 $f(x)$ 的极值时，除了要求出驻点，即 $f'(x)=0$ 的点外，还要求出导数不存在的点，再从中找出极值点.

3.4.10　函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极大值必定大于其极小值.

非. 例如，函数 $f(x)=x+2\sin x$，容易验证，

$$x=\frac{2}{3}\pi \text{ 为极大值点，且 } f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3} \text{ 为极大值；}$$

$$x=\frac{10}{3}\pi \text{ 为极小值点，且 } f\left(\frac{10}{3}\pi\right)=\frac{10}{3}\pi-\sqrt{3} \text{ 为极小值.}$$

显然，$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}<\frac{10}{3}\pi-\sqrt{3}=f\left(\frac{10}{3}\pi\right)$.

3.4.11　若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则当 n 为偶数时，x_0 为 $f(x)$ 的极值点，且当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，x_0 为 $f(x)$ 的极小值点；当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，x_0 为 $f(x)$ 的极大值点；当 n 为奇数时，x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

是. 由于 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，应用泰勒公式，得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &\quad + o((x-x_0)^n) \\ &= f(x_0)+\frac{1}{n}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

由此容易看出，当 x 充分接近 x_0 时，

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\ (x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

的符号取决于第一项.

当 n 为偶数时，$(x-x_0)^n>0$，若 $f^{(n)}(x_0)>0$，则

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\ (x-x_0)^n>0,$$

故对任意充分接近于 x_0 的 x，总有 $f(x)>f(x_0)$，即 x_0 为极小值点；若 $f^{(n)}(x_0)<0$，则

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\ (x-x)^n<0,$$

故对任意充分接近于 x_0 的 x，总有 $f(x)<f(x_0)$，即 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

当 n 为奇数时，若 $x<x_0$，则 $(x-x_0)^n<0$，若 $x>x_0$，则 $(x-x_0)^n>0$，因而不论 $f^{(n)}(x_0)$ 的符号如何，$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\ (x-x_0)^n$ 的符号在 x_0 的两侧异号，故 $f(x_0)$ 不可能成为 $f(x)$ 的极值点.

3.4.12 若点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的上凹与下凹的分界点，则点 $(x_0,f(x_0))$ 必为该曲线的拐点.

非. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0;\\ -x^2+\sin x, & x>0\end{cases}$$

的曲线在 $x<0$ 时为上凹，在 $x>0$ 时为下凹. 因而点 $(0,0)$ 是 $y=f(x)$ 的曲线上凹与下凹的分界点. 但在 $x=0$ 时，$f(x)$ 不可导，因此，点 $(0,0)$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点.

3.4.13 若点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则必有 $f''(x_0)=0$.

非. 例如，函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，易知点 $(0,0)$ 为曲线的拐点，但是 $f''(0)$ 不存在.

3.4.14 若 $f''(x_0)=0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 必为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

非. 例如，函数 $f(x)=x^4$，显然 $f''(x)=0$，但点 $(0,0)$ 并不是曲线 $f(x)=x^4$ 的拐点.

3.4.15　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，且极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，则必定有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

非．例如，函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\sqrt{x}$，显然有

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0,\lim_{x\to 0}g(x)=0,$$

并且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}=0.$

但是，$f'(x)=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在，因而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

这说明洛比达法则中的条件 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或无穷大）不可缺少．

3.4.16　当 $x\to+\infty$ 时，幂函数 $x^a(a>0)$ 趋向于无穷大的速度要比对数函数 $\ln x$ 快得多．

是．事实上，对于无论多么小 $a>0$，无论多么大的自然数 n，反复应用洛比达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(\ln x)^{n-1}}{ax^a}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^nx^a}=0.$$

这说明当 $x\to+\infty$ 时，$x^a(a>0)$ 是比 $\ln x$ 高阶的无穷大．

3.4.17　当 $x\to+\infty$ 时，指数函数 e^x 趋向于无穷大的速度要比幂函数 x^n（n 为自然数）快得多．

是．事实上，对于无论多么大的自然数 n，总有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

这说明当 $x\to+\infty$ 时，e^x 是比 x^n 高阶的无穷大．

2. 函数的单调性

3.4.18 证明:数列 $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ 为递减数列.

证 由 $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2}{n+1} \cdot \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2}{n+1} a_n$ 可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1},$$

对所有的 $n \geqslant 1$,均有 $\dfrac{a_n + 1}{a_n} \leqslant 1$,即 $a_{n+1} \leqslant a_n$, $(n = 1,2,3,\cdots)$,故 $\{a_n\}$ 为递减数列.

3.4.19 证明:数列 $\{a_n\} = \{(n+3)^{\frac{1}{n+3}}\}$ 为递减数列.

证 令 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$,得 $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$,于是 $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $x > e$ 时,恒有 $f'(x) < 0$,由此可知,$f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 内递减,因此 $\{a_n\}$ 为递减数列.

3.4.20 求函数 $y = x(1 + \sqrt{x})$ 的单调增加区间和单调减少区间.

解 因为 $y' = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ 在整个 $[0, +\infty)$ 上都大于零,故 y 在 $[0, +\infty)$ 上都是单调增加的.

3.4.21 求 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 的单调区间.

解 $y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$.

在 $x = -2$ 和 $x = 1$ 处,$y' = 0$,它们把 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个区间,在各区间内:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$y' = 6(x+2)(x-1)$	+	−	+
$y = f(x)$	↗	↘	↗

故 y 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$ 内是单调增加的,在 $(-2, 1)$ 内是单调减少的.

3.4.22 讨论函数 $y = (x-1)[x]$ 在区间 $[1,2]$ 上的单调性.

解 当 $x=2$ 时，$y(2)=2$，

当 $1\leqslant x<2$ 时，$y=(x-1)\times 1=x-1$，$y'=1>0$，且 $\lim\limits_{x\to 2^-} y=1<2$. 因而函数在[1,2]上严格单调增加.

3.4.23 求函数 $y=x+\cos x$ 的单调区间.

解 $y'=1-\sin x$ 除在 $x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处外均有 $y'>0$，因此 $y=x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3.4.24 求 $y=\dfrac{x^2}{2^x}$ 的单调区间.

解 $y'=\dfrac{2^x\cdot 2x-x^2\cdot 2^x\ln 2}{(2^x)^2}=\dfrac{2x-x^2\ln 2}{2^x}=\dfrac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$，

令 $y'=0$，得 $x=0,\dfrac{2}{\ln 2}$. 这两点把 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个区间，在各区间内：

x	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{2}{\ln 2})$	$(\frac{2}{\ln 2},+\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$
$y=f(x)$	↘	↗	↘

故 $y=\dfrac{x^2}{2^x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty)$ 内单调减少，而在 $(0,\dfrac{2}{\ln 2})$ 内单调增加.

3.4.25 对于 $x\geqslant 1$，讨论函数 $y=\dfrac{e^x}{x^x[x]}$ 的单调性.

解法1 函数 y 除在 $x=1,2,3,\cdots$ 点间断外，在任意区间 $[k,k+1)$ 上是连续的，在 $(k,k+1)$ 内可导，且在 $(k,k+1)$ 内，有

$$y=\frac{e^x}{x^x[x]}=\frac{1}{k}e^{(x-x\ln x)},\quad k=1,2,3,\cdots$$

$$y'=\frac{1}{k}e^{(x-x\ln x)}\cdot(-\ln x)=-\frac{1}{k}e^{x-x\ln x}\cdot\ln x<0,$$

因此，在每一个区间 $[k,k+1)$ 内 y 单调减少.

又在任一区间的端点 $x=k+1$ 处，有

$$\lim_{x\to(k+1)^-} y=\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}},$$

$$\lim_{x\to(k+1)^+} y = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{e^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} = y(k+1).$$

由此即知，$\lim\limits_{x\to(k+1)^-} y > y(k+1)$，$k=1,2,3,\cdots$，于是，对于一切 $x\geqslant 1$，函数 $y=\dfrac{e^x}{x^x[x]}$ 单调减少.

解法 2 设 $x_2 > x_1 \geqslant 1$，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 是 $[x_1,x_2]$ 上的所有整数点. 若 m 为正整数，$x\in(m,m+1)$ 时，有

$$y'(x) = \frac{1}{m}e^{(x-x\ln x)}\cdot(-\ln x)\leqslant 0,$$

由拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}y(x_2)-y(x_1) &= y(x_2)-y(n_k)+y(n_k)-y(n_{k-1})+\cdots\\&\quad+y(n_2)-y(n_1)+y(n_1)-y(x_1)\\&= y'(\xi_k)(x_2-n_k)+y'(\xi_{k-1})(n_k-n_{k-1})+\cdots\\&\quad+y'(\xi_2)(n_2-n_1)+y'(\xi_1)(n_1-x_1)\leqslant 0,\end{aligned}$$

故当 $x\geqslant 1$ 时，函数 $y=\dfrac{e^x}{x^x[x]}$ 单调减少.

3.4.26 讨论函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x (x>0)$ 的单调性.

解法 1 $f(x)=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{\varphi(x)}$，$\varphi(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

现在考察 $\varphi(x)$ 的单调性，

$$\varphi'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1},$$

因 $x>0$，在区间 $[x,x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{x+\theta},\quad 0<\theta<1,$$

从而，对一切 $x>0$，有 $\qquad \varphi'(x)=\dfrac{1}{x+\theta}-\dfrac{1}{x+1}>0,$

故 $\varphi(x)$ 在 $x>0$ 时单调增加，从而 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 $x>0$ 时也单调增加.

解法 2 $f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]$，设 $\dfrac{1}{x}=t$，

则 $\quad \ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}=\varphi(t).$

又在$(0,+\infty)$内，$\varphi'(t)=\frac{t}{(1+t)^2}>0$，$\varphi(0)=0$，故在$(0,+\infty)$内$\varphi(t)>0$，注意到$(1+\frac{1}{x})^x>0$，于是有$f'(x)>0$.

从而$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

3.4.27　讨论函数$f(x)=x^2-\ln x^2$的单调性.

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$.

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x},$$

$f'(x)$在区间$(-\infty,-1)$、$(-1,0)$、$(0,1)$、$(1,+\infty)$内的符号依次为$-$、$+$、$-$、$+$. 故函数$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$，$(0,1)$内为单调减少，在$(-1,0)$、$(1,+\infty)$内为单调增加.

3.4.28　讨论$f(x)=\sin x-x$的单调性.

解　因$f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，故$f(x)$在$(-\infty,\infty)$内单调减少.

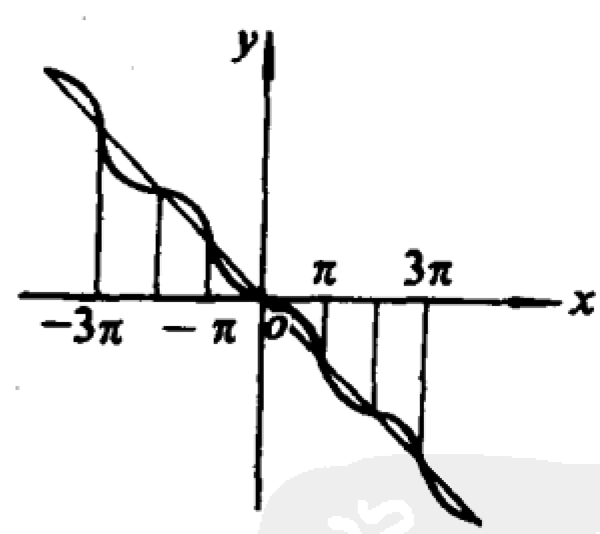
又因仅当$x=2k\pi$时，$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

$f'(x)=\cos x-1=0$，$f(x)$的驻点不填满区间，故$f(x)$严格减少（如图）.

由此还可得

$x>0$时，$f(x)<f(0)$，

即 $\quad \sin x-x<0,\sin x<x.$



3.4.28题图

3.4.29　求函数$y=x-2\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的单调增加及单调减少区间.

解　$y'=1-2\cos x$，易见，在$(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$内，$y'>0$；在$(0,\frac{\pi}{3})$和$(\frac{5\pi}{3},2\pi)$内，$y'<0$. 因而，该函数在区间$(0,\frac{\pi}{3})$和$(\frac{5\pi}{3},2\pi)$内单调减少，而在区间$(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3})$内单调增加.

3.4.30 设在$[a,b]$上$y''(x)>0$，证明：$F(x)=\dfrac{y(x)-y(a)}{x-a}$在$[a,b]$上是单调增加的.

证 $F'(x)=\dfrac{y'(x)\cdot(x-a)-[y(x)-y(a)]}{(x-a)^2}$，

应用拉格朗日中值定理，得

$$y(x)-y(a)=y'(\xi)(x-a),\quad (a<\xi<x).$$

于是有
$$F'(x)=\frac{y'(x)-y'(\xi)}{x-a},$$

由$y''(x)>0$可知，$y'(x)$在$[a,b)$内单调增加，又$x>\xi$，故

$$y'(x)-y'(\xi)>0,\ F'(x)>0.$$

由此可知，$F(x)$在$[a,b]$上单调增加.

3.4.31 设$f(x)$在$0\leqslant x<a$上二次可微，且$f(0)=0$，$f''(x)>0$，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$在$0<x<a$内是单调增加的.

证 欲证$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,a)$内单调增加，只需证明

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0,$$

即应证$F(x)=xf'(x)-f(x)>0$即可，事实上，我们有

$$F'(x)=xf''(x)+f'(x)-f'(x)=xf''(x)>0,\ x\in(0,a).$$

即$F(x)$在$(0,a)$上是单调增加的，再由

$$F(0)=0\cdot f'(0)-f(0)=0$$

知$F(x)>0$，故$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,a)$上是单调增加的.

3.4.32 若$f(0)=0$，且$f'(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内也单调增加.

证 设$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

又因$F(x)=x$及$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导，且$F'(x)=1$在$(0,+\infty)$内每一点处不为零，故由柯西中值定理，对任意的$x\in(0,+\infty)$，在$(0,x)$内至少存在一点ξ，使

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f'(\xi)}{1},(0<\xi<x).$$

又 $f(0)=0, f'(\xi)<f'(x)$，故$\frac{f(x)}{x}<f'(x)$，即 $xf'(x)-f(x)>0$，因此，$\varphi'(x)>0$，所以，$\varphi(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调增加.

3.4.33　设在$(-\infty,+\infty)$内 $f''(x)>0, f(0)<0$，证明：$\frac{f(x)}{x}$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内都是单调增加的.

分析　设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$. 要证 $F(x)$ 为单调增加函数，只要证 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，即只要证 $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)>0$. 当 $\varphi(x)$ 为减函数时，只要证 $\varphi(x)>\varphi(x_0)$ $(x<x_0, \varphi(x_0)\geqslant 0)$；当 $\varphi(x)$ 为增函数时，只要证 $\varphi(x)>\varphi(x_0)$ $(x>x_0, \varphi(x_0)\geqslant 0)$，本题中，取 $x_0=0$，在$(-\infty,0)$中 $\varphi(x)$ 为减函数，在$(0,+\infty)$中 $\varphi(x)$ 为增函数.

证　设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x_2}$，$\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $\varphi'(x)=xf''(x)+f'(x)-f'(x)=xf''(x)$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$ 为单调减少函数，即当 $x<0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=-f(0)>0$；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $\varphi(x)$ 为单调增加函数，即当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\varphi(0)=-f(0)>0$.

所以在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$中，均有 $\varphi(x)>0$，即 $F'(x)>0$，于是 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内都是单调增加的.

3.4.34　若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内的增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 与自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 的符号相同（或相反），则称 $f(x)$ 在 x_0 处是局部增加（或减少）的. 设 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点都是局部增加的，证明：$f(x)$ 在 I 上是单调增加的.

证　若不然，则存在 $x_0\in I$ 及 $\delta_1>0$，使 $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\subseteq I$，且 $\Delta f(x_0)$ 或不确定，或与 Δx 符号相反.

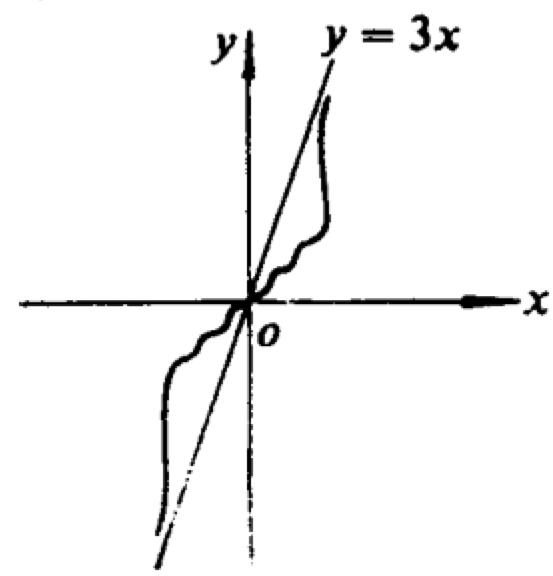
又 $f(x)$ 在 x_0 处是局部增加的，故存在 $\delta_2>0$，使 $(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)\subseteq I$，且 $\Delta f(x_0)$ 与 Δx 同号.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\cap(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)$ 内会出现矛盾.

3.4.35　证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处是局部增加的，但在 0 点的任意邻域 $(-\varepsilon,+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 内却不是单调增加的，并画出 $f(x)$ 的图形.



3.4.35 题图

证 对于 $\Delta f(0)=x(1+x\sin\dfrac{2}{x})$，当 x 充分小时，显然有

$x<0$ 时，$\Delta f(0)<0$；$x>0$ 时，$\Delta f(0)>0$.

因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处是局部增加的.

对于 $x\neq 0$，有

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{2}{x}-2\cos\frac{2}{x},$$

因此对于无论怎样的 $\varepsilon>0$，总可找到充分大的整数 k，使点 $x_k'=\dfrac{1}{k\pi}$，$x_k''=\dfrac{1}{\pi+2k\pi}$ 属于 $(-\varepsilon,\varepsilon)$，又由 $f'(x_k')=-1$，$f'(x_k'')=3$ 可知，$f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是单调增加的.

3.4.36 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内可导，若在 (a,b) 内除有限个点外，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为单调增加函数. 在有限个点处，导数能否等于 0？能否小于 0？试说明理由.

证 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处导数不大于 0，取区间 $(a,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$，$\cdots$，$[x_n,b)$，在这些区间中，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在它们中为单调增加函数（注意，不能得到 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上为严格增函数）.

又由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为单调增加函数，在导数不大于 0 的点处，导数可能等于 0. 例如，$y=f(x)=x^3$，在 $x=0$ 处 $f'(0)=0$，但 $f(x)=x^3$ 为单调增加函数. 在导数不大于 0 处，导数不能小于 0，因为由导数定义

$$f'(x_i)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x},$$

若 $f'(x_i)<0$，则由极限的保号性知，$\dfrac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}<0$，当 $\Delta x>0$ 时，就有 $f(x_i+\Delta x)-f(x_i)<0$. 即 $f(x_i+\Delta x)<f(x_i)$. 这就是说，$f(x)$

在(x_i,x_{i+1})中单调减少. 这与$f(x)$为单调增加矛盾.

3. 函数的极值和最值

(1) 极值的求法

3.4.37　求$f(x)=ax^2+bx+c$的极值点.

解　初等代数中,用配方法可求得二次函数的极值点,现在用求导法.

令$f'(x)=2ax+b=0$,求得驻点$x_0=-\dfrac{b}{2a}$. 又由$f''(x)=2a$可得$f''(x_0)=2a$.

所以,当$a>0$时,$x_0=-\dfrac{b}{2a}$为$f(x)$的极小值点;

当$a<0$时,$x_0=-\dfrac{b}{2a}$为$f(x)$的极大值点.

3.4.38　设$f(x)$是二次连续可微的偶函数,并且$f''(0)\neq 0$,证明:$x=0$是该函数极值点.

证　因$f(x)$是偶函数,故$f(-x)=f(x)$, $-f'(-x)=f'(x)$,于是有$f'(0)=0$.

再由泰勒公式,有

$$f(x)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2),$$

由此可见,当$f''(0)>0$时,$x=0$是局部极小值点,而当$f''(x)<0$时,$x=0$是局部极大值点.

3.4.39　求$f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$的极大值与极小值.

解　$f'(x)=\dfrac{-2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$, 令$f'(x)=0$, 解得$x_1=-2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$. 列表如下:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	4	↘

故$f(x)$的极小值为-1,极大值为4.

3.4.40　讨论 $y = x^n (a - x)^m$ 的极大值与极小值（m、n 均为正整数，$a > 0$）。

解　$y' = (n + m)x^{n-1}(a - x)^{m-1}(\frac{na}{n+m} - x)$.，令 $y' = 0$，求得 $x = 0$（$n > 1$ 时），$x = na/(n + m)$ 及 $x = a$（$m > 1$ 时）。

当 $n = 2k + 1$ $(k = 0,1,2,\cdots)$，x 渐增地经过 $x = 0$ 时，y' 不改变符号；$m = 2k + 1$ $(k = 0,1,2,\cdots)$，x 渐增地经过 $x = a$ 时，y' 也不改变符号，这时 $x = 0$、$x = a$ 不是极值点.

当 $n = 2k$ $(k = 1,2,\cdots)$，x 渐增地经过 $x = 0$ 时，y' 由负变正，故 $y(0) = 0$ 是极小值. 当 $m = 2k$ $(k = 1,2,\cdots)$，x 渐增地经过 $x = a$ 时，y' 由负变正，故 $y(a) = 0$ 是极小值.

当 n、m 为任意正整数，x 渐增地经过 $x = na/(n + m)$ 时，y' 由正变负，故 $y(\frac{na}{n+m}) = n^n m^m (\frac{a}{n+m})^{n+m}$ 是极大值.

3.4.41　求函数 $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解　$f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}[\sqrt[3]{x} + 1]$，令 $f'(x) = 0$，求得驻点 $x = -1$.

又由 $f''(x) = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$ 得，$f''(-1) = -\frac{2}{3} < 0$，因此，由极值的第二判别法知，$f(-1) = 1$ 是极大值.

$x = 0$ 是导数 $f'(x)$ 不存在的点. 在 $x = 0$ 的附近，当 $x < 0$ 时，$f'(x)$ 取负号，函数 $f(x)$ 单调减少，当 $x > 0$ 时，$f'(x)$ 取正号，函数 $f(x)$ 单调增加，即函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 取得极小值，$f(0) = 0$.

3.4.42　求 $f(x) = \sqrt{x^2 + x^3}$ 的极值.

解　$f(x) = \sqrt{x^2 + x^3} = \sqrt{x^2(1 + x)}$ 在 $[-1, +\infty)$ 上连续且除 $x = 0$ 外均可导，

$$f'(x) = \frac{2x + 3x^2}{2\sqrt{x^2 + x^3}} = \frac{2x + 3x^2}{2|x|\sqrt{1 + x}} = \begin{cases} \frac{2 + 3x}{2\sqrt{1 + x}}, x \in (0, +\infty); \\ -\frac{2 + 3x}{2\sqrt{1 + x}}, x \in (-1, 0). \end{cases}$$

令 $f'(x) = 0$，求得唯一驻点 $x_1 = -\frac{2}{3}$.

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 事实上,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x^3}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{1+x}=1;$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+x^3}-0}{x}=\lim_{x\to0^-}(-\sqrt{1+x})=-1,$$

二者不相等,从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 不存在.

为讨论在驻点 $x_1=-\frac{2}{3}$ 和不可导点 $x_2=0$ 邻近 $f'(x)$ 的符号,列表如下:

x	$(-1,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	+
$y=f(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 处取得极大值

$$f(-\frac{2}{3})=|-\frac{2}{3}|\sqrt{1+(-\frac{2}{3})}=\frac{2\sqrt{3}}{9};$$

在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

3.4.43　证明: $\cos2\theta+\sin\theta$ 的极大值为 $\frac{9}{8}$.

证　设 $y=\cos2\theta+\sin\theta$,则

$$y'=-2\sin2\theta+\cos\theta=\cos\theta(1-4\sin\theta),$$

令 $y'=0$,得 $\cos\theta=0$ 或 $\sin\theta=\frac{1}{4}$.

又　$y''=-4\cos2\theta-\sin\theta=4(\sin^2\theta-\cos^2\theta)-\sin\theta$,

以 $\sin\theta=\frac{1}{4}$, $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 代入得 $y''=-\frac{15}{4}<0$.

故当 $\sin\theta=\frac{1}{4}$ 时, y 有极大值 $y=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\sin\theta=\frac{9}{8}$.

当 $\cos\theta=0$ 时,经检验可知,这时 y 非极大值.

故 $\cos 2\theta + \sin\theta$ 的极大值为$\frac{9}{8}$.

3.4.44　设函数 $f(x) = x + a\cos x (a > 1)$ 在区间$(0,2\pi)$内有极小值，且极小值为 0. 求函数 $f(x)$ 在该区间内的极大值.

解　$f'(x) = 1 - a\sin x$，$f''(x) = -a\cos x$. 令 $f'(x) = 0$，得 $\sin x = \frac{1}{a}$ $(a > 1)$，由此求得驻点 $x_0 = \arcsin\frac{1}{a}$. 由于 $f''(x_0) = -a\cos x_0 < 0$，$f''(\pi - x_0) = a\cos x_0 > 0$. 故 $f(x)$ 在 $x = \pi - x_0$ 处取得极小值. 在 $x = x_0$ 处取得极大值.

由题设知，

$$f(\pi - x_0) = \pi - x_0 + a\cos(\pi - x_0) = \pi - x_0 - a\cos x_0 = 0,$$

故 $x_0 + a\cos x_0 = \pi$. 因而求得函数 $f(x)$ 的极大值为

$$f(x_0) = x_0 + a\cos x_0 = \pi.$$

3.4.45　a 为何值时，函数 $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值？是极大值还是极小值？求该极值.

解　令 $f'(x) = a\cos x + \cos 3x = 0$，得 $a = -\frac{\cos 3x}{\cos x}$，把 $x = \frac{\pi}{3}$ 代入，得 $a = -\frac{\cos\pi}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$. 即当 $a = 2$ 时，$f'(x) = 0$.

又 $f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x$，

$$f''(\frac{\pi}{3}) = -2\sin\frac{\pi}{3} - 3\sin\pi = -\sqrt{3} < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取极大值，极大值为 $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

3.4.46　求函数 $f(x) = x^3e^{-x}$ 的极值.

解　$f'(x) = x^2e^{-x}(3 - x)$，令 $f'(x) = 0$，驻点为 $x = 0,3$，

当 $x < 0$ 时，$f'(x) > 0$，当 $0 < x < 3$ 时，$f'(x) > 0$，

又当 $x > 3$ 时，$f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 只在 $x = 3$ 时取得极大值. 极大值为 $f(3) = 27e^{-3}$.

3.4.47　求函数 $y = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$（$n$ 为自然数）的极值.

解　$y' = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!})e^{-x}$

$$- (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$$

$$= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

令 $y' = 0$，得 $x = 0$. 当 n 为偶数时，对一切 x 值，$y' \leqslant 0$，故不存在极值点；当 n 为奇数时，若 $x < 0$，则 $y' > 0$；若 $x > 0$，则 $y' < 0$，这时 y 在 $x = 0$ 处取得极大值 $y(0) = 1$.

3.4.48　求 $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$ 的极值.

解　$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且可导，

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{(1 - x)^2}{1 + x^2}.$$

令 $f'(x) = 0$，求得驻点 $x = 1$. 在 $x = 1$ 的左右两侧总有 $f'(x) > 0$，因此函数 $f(x)$ 在唯一驻点 $x = 1$ 处不取得极值，故该函数没有极值.

3.4.49　已知 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的极值.

解　当 $x \neq 0$ 时，$f(x) = x^{2x}$，$\ln f(x) = 2x\ln x$，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln x + 2，f'(x) = 2x^{2x}(1 + \ln x)，$$

解 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$. 当 $x > \frac{1}{e}$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x < \frac{1}{e}$ 时，$f'(x) < 0$，故 $f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{2}{e}}$ 为极小值.

当 $x = 0$ 时，$f'(0)$ 不存在，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续，故 0 不可能是极值点.

当 $x < 0$ 时，函数无定义，不讨论.

注　对导数不存在的点，也需要判别是否为极值点.

3.4.50　已知函数 $y = f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0; \\ x + 1, & x \leqslant 0, \end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性；

(2) x 为何值时，$f(x)$ 取得极值.

解　(1) $f(0) = (0 + 1) = 1$，$f_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{2x}$. 设 $u = x^{2x}$，则

$$\ln u = 2x\ln x = \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to 0^+}\ln u = \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+} u = 1$，即 $f_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} u = 1$. 又 $f_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1) = 1$. 于是，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 当 $x > 0$ 时，解 $y'(x) = 2x^{2x}(1+\ln x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$，在 $\frac{1}{e}$ 左方附近 $y' < 0$，在 $\frac{1}{e}$ 右方附近 $y' > 0$，故 $f(\frac{1}{e})$ 为极小值.

又在 $x = 0$ 处，$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}[2x^{2x}(1+\ln x)] = -\infty$，$(x^{2x}\to 1)$. 所以在 $x = 0$ 处 $f(x)$ 的导数不存在，而在 0 的左方附近 $y' = 1 > 0$，在 0 的右方附近 $y' < 0$，故 $f(0)$ 为极大值.

3.4.51 求下列函数的可能极值点：

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x-1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

解 因为

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0; \\ 0, & 0 < x < 1; \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

且 $f'_-(0) = -1$，$f'_+(0) = 0$；$f'_-(1) = 0$，$f'_+(1) = 1$，故 $(0,1)$ 内的点都是 $f(x)$ 的可能极值点，即 $f(x)$ 有无穷多个可能极值点.

3.4.52 设 $f(x)$ 满足 $3f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$，$(x\neq 0)$，求函数 $f(x)$ 的极值.

解 令 $x = \frac{1}{t}$，$(t\neq 0)$，则 $3f(\frac{1}{t}) - f(t) = t$，解方程组

$$\begin{cases} 3f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}, \\ -f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = x, \end{cases}$$

得
$$f(x) = \frac{1}{8}(x + \frac{3}{x}),\quad (x\neq 0)$$

对 $f(x)$ 求导，得

$$f'(x)=\frac{1}{8}(1-\frac{3}{x^2}),\ f''(x)=\frac{3}{4x^3}.$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\sqrt{3}$,而

$$f''(-\sqrt{3})=-\frac{1}{4\sqrt{3}}<0,\ f''(\sqrt{3})=\frac{1}{4\sqrt{3}}>0.$$

又 $f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{4},\ f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

所以,函数 $f(x)$ 在 $x=-\sqrt{3}$ 时取极大值 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$,在 $x=\sqrt{3}$ 时取极小值$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.4.53　设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2y^2+y=1(y>0)$ 所确定的函数,讨论函数 $y(x)$ 是否存在极值,若有极值,求出所有的极值.

解　因为 $y>0$,故可将方程化为显函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x^2}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

易知 $y=\frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,由隐函数求导法,得

$$y'=\frac{-2xy^2}{1+2x^2y}.$$

令 $y'=0$,得 $y=y(x)$ 的驻点为 $x=0$. 在$(-\infty,0)$ 内 $y'>0$,所以 $y=\frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x^2}$ 单调增加;在$(0,+\infty)$ 内 $y'<0$,所以 $y=\frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x^2}$ 单调减少,故 y 在 $x=0$ 处取得极大值 $y(0)=1$.

由 $x^2y^2+y=1\ (y>0)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且有唯一的驻点 $x=0$,因此 $y=y(x)$ 仅在 $x=0$ 处取得极大值 $y(0)=1$,在其他点都不能取得极值.

3.4.54　设函数 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$(n 为自然数),其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导;

(2) 若 $\varphi(x_0) \neq 0$，$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有无极值？为什么？

证　(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-1}\varphi(x) = 0$. 故 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，且 $f'(x_0) = 0$.

(2) 因 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0) \neq 0$，则 $\varphi(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号，因此，$f(x)$ 的符号只与自然数 n 的奇偶性有关.

若 n 为奇数，则当 x 渐增地经过 x_0 时，$f(x)$ 的值变号，所以在 $x = x_0$ 处无极值.

若 n 为偶数，则 $(x - x_0)^n > 0\ (x \neq x_0)$.

当 $\varphi(x_0) > 0$ 且 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) = (x - x_0)^n\varphi(x) > 0 = f(x_0)$，所以，在 $x = x_0$ 处有极小值 $f(x_0)$.

当 $\varphi(x_0) < 0$ 且 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) = (x - x_0)^n\varphi(x) < 0 = f(x_0)$，所以，在 $x = x_0$ 处有极大值 $f(x_0)$.

3.4.55　设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有直到 $n+1$ 阶导数，且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$，$f^{(k)}(x_0) \neq 0\ (k \leqslant n)$. 证明：(1) k 为偶数时，$f(x_0)$ 为极值；(2) k 为奇数时 $f(x_0)$ 不是极值.

证　在 $x = x_0$ 处将函数 $f(x)$ 按泰勒公式展开，由假设可得

$$f(x) - f(x_0) = f^{(k)}(\xi)\ (x - x_0)^k / k!,$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间，而且，在 x_0 的某邻域内 $f^{(k)}(\xi)$ 不变号.

(1) k 为偶数时，在 x_0 的某邻域内，当 x 渐增地经过 x_0 时，$f(x) - f(x_0)$ 不变号，且其符号与 $f^{(k)}(\xi)$ 相同，亦即与 $f^{(k)}(x_0)$ 同号，若 $f^{(k)}(x_0) > 0$，则在 x_0 的某邻域内总有 $f(x) > f(x_0)$，因而 $f(x_0)$ 是函数的极小值；若 $f^{(k)}(x_0) < 0$，则 $f(x_0)$ 是函数的极大值. 总之，k 为偶数时，$f(x_0)$ 为极值.

(2) k 为奇数时，在 x_0 的某邻域内，当 x 渐增地经过 x_0 时，$f(x) - f(x_0)$ 变号，所以，这时 $f(x_0)$ 不是极值.

3.4.56　证明：如果函数 $f(x)$ 不为负，则函数 $F(x) = cf^2(x)\ (c > 0)$ 与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

证　下面仅就 $f(x)$ 与 $F(x) = cf^2(x)(c > 0)$ 有相同的极大值点给出证明；至于有相同的极小值点可类似地进行证明.

如果 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$，即对 x_0 的某邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内每一异于 x_0 的 x 均有 [illegible]

$$f(x_0) > f(x).$$

由于 $f(x)$ 不为负，且 $c>0$，所以对 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内每一异于 x_0 的 x 均有 $cf^2(x_0) > cf^2(x)$ 或 $F(x_0) > F(x)$，即 $F(x)$ 在 x_0 处取得极大值. 因此，$f(x)$ 的每一个极大值点必为 $F(x)$ 的极大值点；反之，可以证明：$F(x)$ 的每一个极大值点必为 $f(x)$ 的极大值点. 从而 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极大值点.

3.4.57　设函数 $f(x)$ 满足微分方程

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

如果 $f(0) = f'(0) = 0$，求一个常数 A，使当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x) < Ax^2$.（提示：不必解方程）.

解　令 $F(x) = (1-e^{-x})/x$，因 $\lim\limits_{x\to 0}F(x) = \lim\limits_{x\to 0}e^{-x} = 1$，故可定义 $F(0) = 1$.

又　$$F'(x) = \frac{xe^{-x}+e^{-x}-1}{x^2} = \frac{x+1-e^x}{x^2e^x},$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}F'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{2xe^x+x^2e^x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{2e^x+4xe^x+x^2e^x} = -\dfrac{1}{2}$，

故可定义 $F'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

设 $u(x) = x+1-e^x$，则 $u(0) = 0$. 当 $x>0$ 时 $u'(x) = 1-e^x < 0$，因此，当 $x>0$ 时，$u(x)<0$，即知 $F'(x)<0$，$F(x)$ 于 $x\geqslant 0$ 时单调减少，故当 $x \geqslant 0$ 时 $F(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} \leqslant 1$，于是由所给方程得

$$f''(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} - 3[f'(x)]^2 \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x} \leqslant 1 \quad (x \geqslant 0).$$

设 $F_1(x) = f(x) - Ax^2$，$F_2(x) = F'_1(x) = f'(x) - 2Ax$. 当 $A \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$F'_2(x) = f''(x) - 2A \leqslant 1 - 2A \leqslant 0$，而 $F_2(0) = f'(0) = 0$，即知 $F_2(x) = F'_1(x) = f'(x) - 2Ax \leqslant 0$. 而 $F_1(0) = f(0) = 0$，又知 $F_1(x) = f(x) - Ax^2 \leqslant 0$，即 $f(x) \leqslant Ax^2$. 所以，可取常数 $A \geqslant \dfrac{1}{2}$，使得当 $x \geqslant 0$ 时有 $f(x) \leqslant Ax^2$.

3.4.58　函数 $f(x)$ 对一切实数 x 满足微分方程

$$xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}.$$

(1) 如果 $f(x)$ 在点 $x = c\,(c \neq 0)$ 有极值，证明它是极小值.

(2) 如果 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 有极值，它是极小值还是极大值？

解 (1) 如果 $f(x)$ 在点 $x=c(c\neq 0)$ 有极值. 则 $f'(c)=0$,由所给微分方程得 $f''(c)=(1-e^{-c})/c$. 当 $c>0$ 时 $e^{-c}<1$,故 $f''(c)>0$;当 $c<0$ 时,$e^{-c}>1$,亦有 $f''(c)>0$,因此在这种情况下 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取得极小值.

(2) 由题设,对一切实数 x,有

$$xf''(x)=1-e^{-x}-3x\left[f'(x)\right]^2,$$

若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有极值,则 $f'(0)=0$. 而

$$f''(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}f''(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\{(1-e^{-\varepsilon})/\varepsilon-3\left[f'(\varepsilon)\right]^2\}=1>0,$$

所以,如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极值,它一定是极小值.

3.4.59 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$,其中 a、b、c 都是常数,且 $|a|\neq|b|$. (1) 证明 $f(x)=-f(-x)$;(2) 求 $f'(x)$,$f''(x)$ 及 $f^{(n)}(x)$;(3) 若 $c>0$,$|a|>|b|$,则 a、b 应满足什么条件,$f(x)$ 才有极大值和极小值.

解 将 x 换成 $\frac{1}{x}$,代入所给等式,有 $af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$,与所给等式联立解 $f(x)$,因 $|a|\neq|b|$,得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx).$$

(1) 由上式及题设即得 $\quad f(x)=-f(-x)$.

(2) $f'(x)=\frac{ac}{a^2-b^2}(-\frac{1}{x^2})-\frac{bc}{a^2-b^2}$; $f''(x)=\frac{ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{2\cdot 1}{x^3}$;

$$f^{(n)}(x)=\frac{ac}{a^2-b^2}(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}.$$

(3) 令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\sqrt{-a/b}$,可见 a、b 必须异号,且 $b\neq 0$,特别当 $x=\sqrt{-a/b}$ 时,若 $a>0$,由 $c>0$ 可知 $f''(x)>0$,这时 $f(x)$ 有极小值;若 $a<0$,由 $c>0$ 知 $f''(x)<0$,这时函数有极大值.

(2) 最大值与最小值的求法

3.4.60 在数 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 中求出最大的一个数.

解 设 $y=x^{\frac{1}{x}}$,则 $\ln y=\frac{1}{x}\ln x$,两边求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+\ln x(-\frac{1}{x^2}).$$

即
$$y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - \ln x).$$

当 $x = e$ 时，$y' = 0$；当 $0 < x < e$ 时，$y' > 0$，这时 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 单调增加，且 $y < e^{\frac{1}{e}}$；当 $e < x < +\infty$ 时 $y' < 0$，这时 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 单调减少且 $y < e^{\frac{1}{e}}$，于是，$1 < \sqrt{2}$；$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \cdots > \sqrt[n]{n} > \cdots$；又 $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$. 故所求的最大数是 $\sqrt[3]{3}$.

3.4.61　已知数列 3，$3 - \lg 2$，$3 - 2\lg 2$，…，问前多少项之和最大？

解　设前 n 项之和为 S_n，则
$$S_n = 3 + (3 - \lg 2) + (3 - 2\lg 2) + \cdots + (3 - (n-1)\lg 2)$$
$$= 3n - [1 + 2 + \cdots + (n-1)]\lg 2 = 3n - \frac{n(n-1)}{2}\lg 2.$$

令 $f(x) = 3x - \frac{x(x-1))}{2}\lg 2$，则 $f'(x) = 3 - (x - \frac{1}{2})\lg 2$，由 $f'(x) = 0$ 可求得 $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{\lg 2} \approx 10.5$.

又 $S_{10} = 30 - 45\lg 2$，$S_{11} = 33 - 55\lg 2$，比较后得 $S_{10} > S_{11}$，故前 10 项之和最大.

3.4.62　设 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^2 + 1$，求 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最值.

解　$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 10x = 5x^2(x-1)(x-3)$.

令 $f'(x) = 0$，求得驻点 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. 其中 $x_3 \notin [-1,2]$，应舍去. 函数没有不可导点.

由于 $f(-1) = -10$，$f(0) = 1$，$f(1) = 2$，$f(2) = -7$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 2，最小值为 -10.

3.4.63　求 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ 在 $[0,3]$ 上的最值.

解　$f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，且在 $(0,3)$ 内除 $x = 2$ 外均可导，
$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 2}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}} = \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2 - 2x}},$$

而在 $x = 2$ 处，
$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x - 2}} = \infty,$$

即 $x = 2$ 是函数在(0,3) 内的不可导点.

令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x = 1$.

由于 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = \sqrt[3]{9}$, 所以 $f(x)$ 在[0,3] 上的最大值为 $\sqrt[3]{9}$,最小值为 0.

3.4.64　讨论函数 $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ 的极值,它是否有最小值,若有,求此最小值.

解　函数的定义域为 $(-\infty,0)$ 与 $(1,+\infty)$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}\right]$$

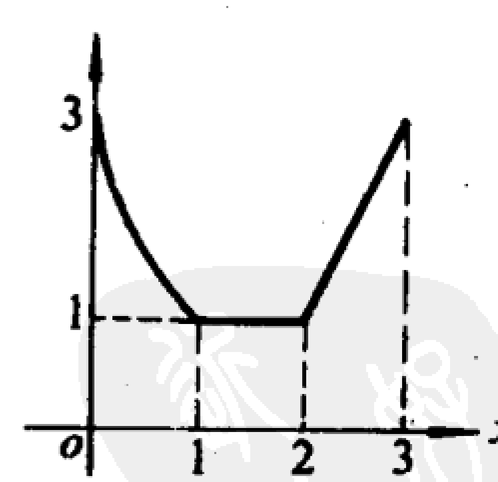
$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}.$$

令 $y' = 0$,得驻点为 $x = 0, \dfrac{3}{2}$,虽然当 $x = 1$ 时 y' 不存在,但此时函数 y 无定义,故不必考虑.当 $-\infty < x < 0$, $1 < x < \dfrac{3}{2}$ 时,$y'(x) < 0$;当 $\dfrac{3}{2} < x < +\infty$ 时, $y'(x) > 0$. 故函数 $y(x)$ 在 $x = \dfrac{3}{2}$ 处取得极小值 $y(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. 无极大值,也无最大值,由于 $y(0) = 0$,函数 $y(x)$ 的最小值为 0.

3.4.65　求函数

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^2+1, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & 1 < x < 2; \\ 2x-3, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

在[0,3] 上的最大值和最小值.



3.4.65 题图

解　$f(x)$ 除在 $x = 2$ 处不可导(左、右导数不相等) 外,在[0,3] 上的其他点处均可导,当 $1 \leqslant x < 2$ 时, $f'(x) = 0$,因此,可能极值点是[1,2] 上的全体点,在这些点处,$f(x) = 1$. 于是,$f(x)$ 在[0,3] 上的最大值和最小值分别是

$$\max\{f(0),1,f(3)\} = \max\{3,1,3\} = 3,$$

$$\min\{f(0),1,f(3)\} = \min\{3,1,3\} = 1.$$

最大值点是 $x = 0, x = 3$;最小值点是 $1 \leqslant x \leqslant 2$.

3.4.66　将 8 分成两个正数之和，使其立方之和为最小.

解　设将 8 分成 x 与 $(8-x)$，则其立方和为

$$y = x^3 + (8-x)^3,\ (0 < x < 8).$$

为求 y 的最小值，我们求 y 对 x 的导数：

$$y' = 3x^2 - 3(8-x)^2 = 48(x-4),\ y'' = 48.$$

令 $y' = 0$，得唯一的驻点为 $x = 4$，且在 $x = 4$ 处 $y'' > 0$，因此 y 在 $x = 4$ 处取得最小值 $y|_{x=4} = 4^3 + 4^3 = 128$，即将 8 分成 4 与 4 之和，其立方和为最小.

3.4.67　设 $f(x) = nx(1-x)^n$（n 为自然数），试求：

(1) $f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的最大值 $M(n)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$.

解　(1) $f'(x) = n(1-x)^{n-1}[1-(1+n)x]$. 令 $f'(x) = 0$，得

$$x = 1, x = 1/(n+1).$$

当 $x < 1/(n+1)$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x > 1/(n+1)$ 时，$f'(x) < 0$. 故 $f(1/(n+1))$ 为极大值，$f(\frac{1}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > 0$，而 $f(1) = f(0) = 0$，故 $f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的最大值为

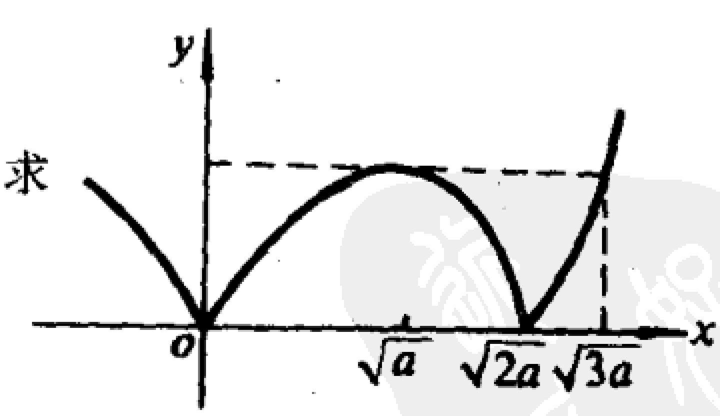
$$M(n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} M(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n}{n+1})^n = \dfrac{1}{e}$.

3.4.68　设 $f(x) = |x^3 - 3ax|$，$-1 \leqslant x \leqslant 1$，其中 $a \geqslant 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值 $M(a)$；

(2) 当 a 为何值时，$M(a)$ 为最小，求此最小值.



3.4.68 题图

解　$f(x) = |x^3 - 3ax|$，$-1 \leqslant x \leqslant 1$ 是偶函数，其图象如右图所示.

令 $f'(x) = 0$ 可得驻点为

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

又 $x = 0$ 及 $x = \sqrt{3a}$ 为导数不存在的点，结合曲线图象与极值点的分析，得如下情况：

当 $2\sqrt{a} < 1$，即 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时，

$$\max f(x) = M(a) = f(1) = |1-3a| = 1-3a;$$

当 $\sqrt{a} \leqslant 1 \leqslant 2\sqrt{a}$，即 $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$ 时，

$$\max f(x) = M(a) = f(\sqrt{a}) = 2a^{\frac{3}{2}};$$

当 $\sqrt{a} > 1$，即 $1 < a < +\infty$ 时，

$$\max f(x) = M(a) = f(1) = |1-3a| = 3a-1.$$

即
$$M(a) = \begin{cases} 1-3a, & 0 < a < \frac{1}{4}; \\ 2a^{\frac{3}{2}}, & \frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1; \\ 3a-1, & 1 < a < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

又
$$M'(a) = \begin{cases} -3, & 0 < a < \frac{1}{4}; \\ 3\sqrt{a}, & \frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1; \\ 3, & 1 < a < +\infty. \end{cases}$$

由于 $M(a)$ 在 $0 < a < +\infty$ 上连续，且当 $a < \frac{1}{4}$ 时，$M'(a) < 0$；$a > \frac{1}{4}$ 时，$M'(a) > 0$，所以，当 $a = \frac{1}{4}$ 时，$M(a)$ 为最小，最小值为 $M(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.

3.4.69　设定义在给定区间（开、闭、半开半闭）I 上的可微函数 $f(x)$ 在 I 上只有唯一的点 x_0，使 $f'(x_0) = 0$，证明：若 x_0 是极大值点，则它必是 $f(x)$ 的最大值点.

证　用反证法. 若不然，则存在 x_1（不妨设 $x_1 > x_0$），使 $f(x_1) > f(x_0)$. 因 $f(x_0)$ 是极大值，因此，存在 $x_2 \in (x_0, x_1)$，使得

$$f(x_2) < f(x_0) < f(x_1),$$

由连续函数的介值定理可知，存在点 x_3，$x_0 < x_2 < x_3 < x_1$，使 $f(x_3) = f(x_0)$. 在 $[x_0, x_3]$ 上应用罗尔定理，存在 x_0'，$x_0 < x_0' < x_3$，使 $f'(x_0') = 0$. 这与题设矛盾.

3.4.70　设 $f(x)$，$g(x)$ 均在 x_0 点附近有定义且连续，$g(x) \neq 0$，$f(x) - g(x) \neq 0$，$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ 在 x_0 点处取得最小值，试证 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 于 x

$=x_0$ 处取得极大值.

证 由题设有 $\delta_0>0$,使 $f(x),g(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义且连续. 又有 $\delta_1>0,\delta_1<\delta_0$,使当 $x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1)$ 时,有

$$\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}\geqslant\frac{f(x_0)+g(x_0)}{f(x_0)-g(x_0)},$$

即
$$\frac{2[g(x)f(x_0)-f(x)g(x_0)]}{[f(x)-g(x)][f(x_0)-g(x_0)]}\geqslant 0.$$

由于 $f(x),g(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续,故存在 $\delta_2,0<\delta_2<\delta_1$,使当 $x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$ 时,有

$$[f(x)-g(x)][f(x_0)-g(x_0)]>0.$$

因此,
$$f(x_0)g(x)>f(x)g(x_0).$$

又由 $f(x),g(x)$ 的连续性和 $g(x_0)\neq 0$ 知,存在 $\delta>0$,且 $0<\delta<\delta_2$,使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时,有

$$g(x)g(x_0)>0,$$

因此,当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\leqslant 0,$$

即$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在 x_0 取得极大值.

3.4.71 若以 $A(k)$ 表示 x^2-2kx 在$[-1,2]$上的最大值与最小值之差,试求 $A(k)$ 的最小值($-\infty<k<+\infty$).

解 设 $f(x)=x^2-2kx(-1\leqslant x\leqslant 2)$,则 $f'(x)=2x-2k$,

(1) 当 $k\leqslant -1$ 时, 因 $-1\leqslant x\leqslant 2$, 故 $f'(x)=2(x-k)\geqslant 0$, $f(x)$ 在$[-1,2]$上单调增加,所以最大值与最小值之差为

$$A(k)=f(2)-f(-1)=(4-4k)-(1+2k)=3-6k.$$

因为 $A'(k)=-6<0$,所以,当 $k\leqslant -1$ 时,$A(k)$ 单调减少.

(2) 当 $k\geqslant 2$ 时,因 $-1\leqslant x\leqslant 2$,故 $f'(x)=2(x-k)\leqslant 0$,$f(x)$ 在$[-1,2]$上单调减少,所以

$$A(k)=f(-1)-f(2)=(1+2k)-(4-4k)=6k-3,$$

因为 $A'(k)=6>0$,所以,当 $x\geqslant 2$ 时,$A(k)$ 单调增加.

(3) 当 $-1<k<2$ 时,令 $f'(x)=0$,即 $2(x-k)=0$,得 $x=k$(驻点). 而 $f''(x)=2>0$,故 $f(x)$ 在 $x=k$ 处取得极小值 $f(k)=-k^2$,它也是最小值.

$f(x)$ 的最大值需对端点值 $f(2)$、$f(1)$ 进行比较.

若 $f(2) \geqslant f(-1)$，则 $4-4k \geqslant 1+2k$，即 $k \leqslant \frac{1}{2}$，结合(3)，应有 $-1 < k \leqslant \frac{1}{2}$，所以，在 $-1 < k \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$f(x) = x^2 - 2kx$ 的最大值是 $f(2) = 4 - 4k$，最小值是 $f(k) = -k^2$，于是

$$A(k) = (4-4k) - (-k^2) = (2-k)^2,\ A'(k) = -4 + 2k.$$

故在 $-1 < k \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$A'(k) < 0$，所以，$A(k)$ 在 $(-1, \frac{1}{2}]$ 上单调减少.

若 $f(2) \leqslant f(-1)$，则 $4-4k \leqslant 1+2k$，即 $k \geqslant \frac{1}{2}$，结合(3)，应有 $\frac{1}{2} \leqslant k < 2$，这时 $f(x)$ 的最大值是 $f(-1) = 1+2k$，最小值是 $f(k) = -k^2$，于是 $A(k) = (1+2k) - (-k^2) = (1+k)^2 \quad (\frac{1}{2} \leqslant k < 2)$，

$$A'(k) = 2 + 2k,$$

故在 $[\frac{1}{2}, 2)$ 上 $A'(k) > 0$. 所以，$A(k)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2)$ 上单调增加.

综上所述，

$$A(k) = \begin{cases} 3-6k, & k \leqslant -1, & \text{单调减少;} \\ (2-k)^2, & -1 < k \leqslant \frac{1}{2}, & \text{单调减少;} \\ (1+k)^2, & \frac{1}{2} < k < 2, & \text{单调增加;} \\ 6k-3, & k \geqslant 2, & \text{单调增加.} \end{cases}$$

故 $A(k)$ 的最小值是

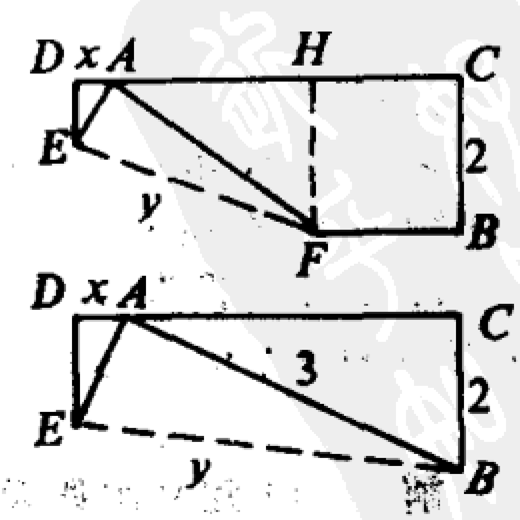
$$A(\frac{1}{2}) = (2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}.$$

(3) 几何方面的极值问题

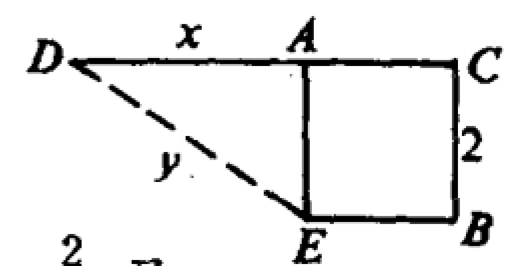
3.4.72 矩形纸片 $ABCD$ 的尺寸为 2×3，将 A 点所在的一角折起，使 A 落在对边 DC 上，问怎样的折法才能使折痕取得最大(小)值.

解 折法如图〈1〉中所示，令 $AD = x, EF = y$(折痕长度).

若折法如图中〈2〉所示，则



3.4.72 题图



$$AD = x = 3 - \sqrt{5},$$

若折法如图中(3) 所示,则

$AD = AE = 2$,可见 $3 - \sqrt{5} \leqslant x \leqslant 2$.

在图(1) 中,由 $\Delta ADE \backsim \Delta AHF$,故 $\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{2}{x}$,又

$$AE + DE = 2,\ AE^2 = DE^2 + x^2,$$

所以,$AE^2 = (2 - AE)^2 + x^2$, $AE = 1 - \dfrac{x^2}{4}$,于是,

$$y = \sqrt{AE^2 + AF^2} = AE \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{AF}{AE}\right)^2} = (1 + \frac{x^2}{4})\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}},$$

即 $$y = \frac{(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{4x},\ (3 - \sqrt{5} \leqslant x \leqslant 2).$$

现在求 y 的最大值与最小值.

$$y' = \frac{\frac{3}{2}(4 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot 4x - 4(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{16x^2}$$

$$= \frac{(4 + x^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)}{2x^2},$$

由 $y' = 0$ 得,$x_1 = \sqrt{2}$,$x_2 = -\sqrt{2}$(舍去).

又 $$y|_{x=3-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{2},\ y|_{x=2} = 2\sqrt{2},$$

$$y|_{x=\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

所以,当 $x = \sqrt{2}$ 时,折痕最小,$x = 3 - \sqrt{5}$,即折法如图(2) 所示时,折痕最大.

注　对于求最大值和最小值的应用题,关键是根据题设条件,建立函数关系,本题中重要的是对几种折法所出现的几何关系的分析.

3.4.73　设直线 OP 与 OQ 分别与水平线 EF 成 30° 及 45° 角.一长度为 $2l$ 的直线段 AB 的端点 A 及 B 分别在直线 OP 与 OQ 上移动(如图所示).试求 AB 的中点 M 到直线 EF 的最远与最近的距离.

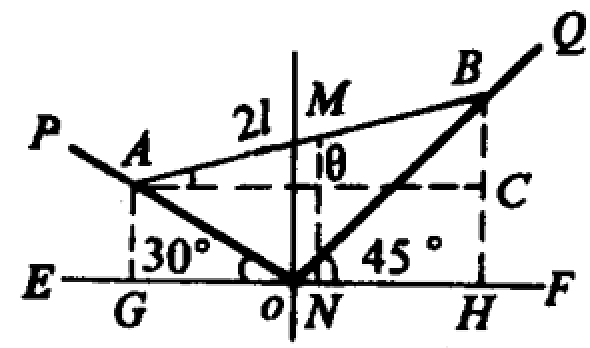
解　(1) 建立函数关系,如图引各虚线.

设 $\angle BAC = \theta$,$NM = d$.而 $CB = 2l\sin\theta$,

$$GH = AC = 2l\cos\theta,\ IM = \frac{1}{2}BC = l\sin\theta.$$

另一方面

$$\begin{aligned}GH &= GO + OH\\ &= GA\text{ctg}30° + HB\text{ctg}45°\\ &= NI\cdot\sqrt{3} + (NI + CB)\\ &= \sqrt{3}NI + NI + 2l\sin\theta\\ &= (\sqrt{3}+1)NI + 2l\sin\theta,\end{aligned}$$



3.4.73 题图

即 $(\sqrt{3}+1)NI + 2l\sin\theta = 2l\cos\theta.$

所以 $NI = \dfrac{2l}{\sqrt{3}+1}(\cos\theta - \sin\theta).$

故 $d = d(\theta) = NI + IM = \dfrac{2l}{\sqrt{3}+1}(\cos\theta - \sin\theta) + l\sin\theta,$

$$(-\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}).$$

(2) 求最远距离 $d_{\max}$ 和最近距离 $d_{\min}$.

$$\begin{aligned}d' &= \frac{-2l}{\sqrt{3}+1}(\sin\theta + \cos\theta) + l\cos\theta\\ &= l\cos\theta[-\frac{2}{\sqrt{3}+1}(\text{tg}\theta + 1) + 1],\end{aligned}$$

令 $d' = 0$,因为 $-\dfrac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}$,故 $\cos\theta \neq 0$,所以

$$-\frac{2}{\sqrt{3}+1}(\text{tg}\theta + 1) + 1 = 0,$$

即 $\text{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,由此可得唯一的驻点 $\theta = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,

又由 $$\begin{aligned}d'' &= -\frac{2l}{\sqrt{3}+1}(\cos\theta - \sin\theta) - l\sin\theta\\ &= -l\cos\theta[\frac{2}{\sqrt{3}+1}(1 - \text{tg}\theta) + \text{tg}\theta],\end{aligned}$$

而在 $\theta = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 处,$\cos\theta > 0$,且

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1}(1-\mathrm{tg}\theta)+\mathrm{tg}\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\left(1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0,$$

故
$$d''\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)<0\ .$$

所以 $d(\theta)$ 在 $\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 处取得最大值.

由 $\mathrm{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，得

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}},\quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}},$$

代入函数 $d(\theta)$ 得

$$d_{\max}=\frac{2l}{\sqrt{3}+1}\left(\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}\right)$$

$$+l\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1}l.$$

比较 $d(\theta)$ 在 $\theta=-\frac{\pi}{6},\theta=\frac{\pi}{4}$ 的值，并从图上得知

$$d(-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}l,\ d(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}l,$$

故 $d_{\min}=\frac{l}{2}$.

3.4.74　作边长为 a、b、c 的三角形 ABC 的外接等边三角形 DEF，使之有最大面积.

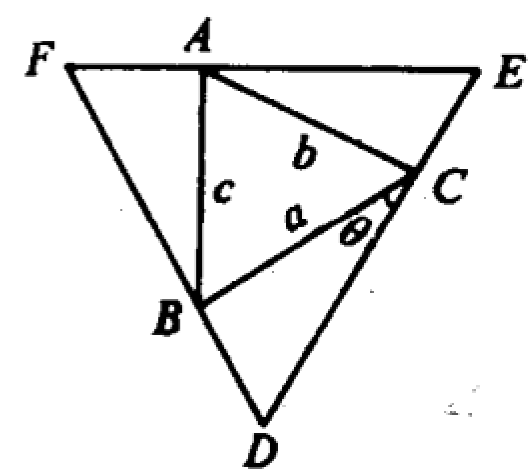
解　令 $\angle BCD=\theta$，则由 $\triangle BCD$ 可知

$$CD=\frac{a\sin(180^\circ-60^\circ-\theta)}{\sin 60^\circ}=\frac{2a}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ+\theta),$$

又由 $\triangle ACE$ 可知

$$CE=\frac{b\sin[180^\circ-60^\circ-(180^\circ-C-\theta)]}{\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{2b}{\sqrt{3}}\sin(C+\theta-60^\circ),$$



3.4.74 题图

于是所作的等边三角形的一边长 DE 为

$$l=\frac{2}{\sqrt{3}}[a\sin(60^\circ+\theta)$$

$$+b\sin(C+\theta-60^\circ)],$$

$$(0<\theta<180^\circ-C).$$

对等边三角形而言，使面积取得最大值的条件与使边长取得最大值的条件是一样的.因此我们来研究函数 $l(\theta)$.

$$l'(\theta)=\frac{2}{\sqrt{3}}[a\cos(60^\circ+\theta)+b\cos(C+\theta-60^\circ)],$$

$$l''(\theta)=-\frac{2}{\sqrt{3}}[a\sin(60^\circ+\theta)+b\sin(C+\theta-60^\circ)]$$

$$=-l<0.$$

令 $l'(\theta)=0$，得 $a\cos(60^\circ+\theta)+b\cos(C+\theta-60^\circ)=0$，求得唯一的驻点 θ^*（为什么?注意条件 $0<\theta<180^\circ-C$，$\theta^*=$? 请读者考虑），且$l''(\theta^*)<0$，因此当 $\theta=\theta^*$ 时，$l(\theta)$ 取得极大值，从而取得在$(0,180^\circ-C)$ 上的最大值.

$$l_{\max}=l(\theta^*)=\frac{2}{\sqrt{3}}[a\sin(60^\circ+\theta^*)+b\sin(C+\theta^*-60^\circ)]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\{[a\sin(60^\circ+\theta^*)+b\sin(C+\theta^*-60^\circ)]^2+$$

$$+[a\cos(60^\circ+\theta^*)+b\cos(C+\theta^*-60^\circ)]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

这是因为所加的一项 $a\cos(60^\circ+\theta^*)+b\cos(C+\theta^*-60^\circ)=0$!

于是

$$l_{\max}=\frac{2}{\sqrt{3}}\{a^2+b^2+2ab[\sin(60^\circ+\theta^*)\sin(C+\theta^*-60^\circ)$$

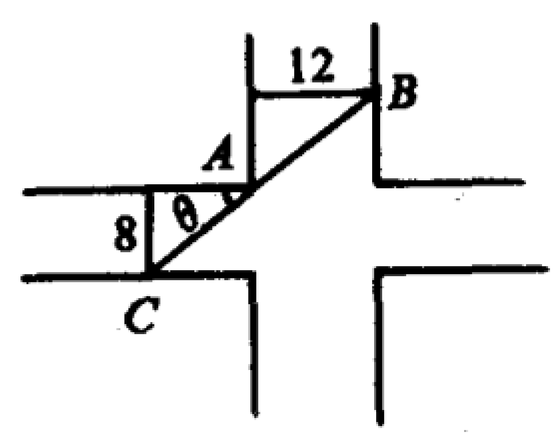
$$+\cos(60^\circ+\theta^*)\cos(C+\theta^*-60^\circ)]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos[(60° + \theta^*) - (C + \theta^* - 60°)]}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(120° - C)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + C)}.$$

3.4.75　两条道路垂直相交，一条宽 12m，一条宽 8m，要把一根细长的铁杆水平地由一条路转到另一条路上去，问铁杆的最大长度能是多少？



3.4.75 题图

解　如图所示，过街角 A 作一条直线与两条路的另一边相交于 B、C，它与一条街的夹角为 θ，则 BC 的长度为 θ 的函数.

$$f(\theta) = \frac{B}{\sin\theta} + \frac{12}{\cos\theta}. \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

由于 $f(\theta) \to +\infty(\theta \to 0^+)$，$f(\theta) \to +\infty$ $(\theta \to \frac{\pi^-}{2})$，所以铁杆长度的最大值应当是 $f(\theta)$ 的最小值.

$$f'(\theta) = \frac{-8\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{12\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

令 $f'(\theta) = 0$，得 $\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{2}{3}$. 因此临界点是 $\xi = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

这时 $\frac{1}{\sin\xi} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^2 + 1}$，　$\frac{1}{\cos\xi} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1}$；

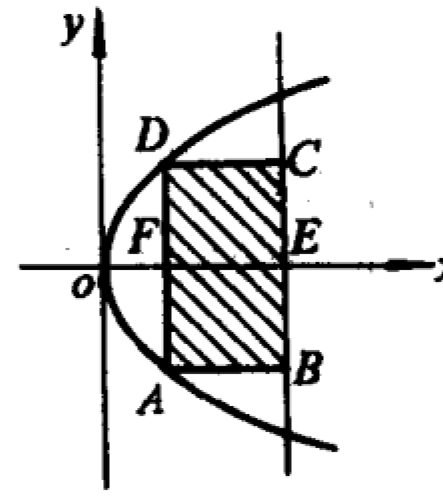
因而 $f(\xi) = 8\sqrt{\frac{(\sqrt[3]{3})^2 + (\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{2})^2}} + 12\sqrt{\frac{(\sqrt[3]{2})^2 + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{3})^2}}$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4}}\left(\frac{8}{\sqrt[3]{2}} + \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\right)$$

$$= 4(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}} \approx 28.09(\text{m}).$$

ξ 是 $f(\theta)$ 唯一的驻点，也是最小值点，因此，铁杆的长度最大不能超过 28.09m.

3.4.76　设一矩形内接于以抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{m^2}{2p}(m,p>0)$ 为界的抛物弓形，求矩形的最大面积.



3.4.76 题图

解　如图所示，设 D 点的坐标为 $(x,\sqrt{2px})$，则

$$AD=2FD=2\sqrt{2px},$$

$$FE=OE-OF=\frac{m^2}{2p}-x,$$

于是内接矩形 $ABCD$ 的面积为

$$S(x)=AD\cdot EF=2\sqrt{2px}\left(\frac{m^2}{2p}-x\right)=2\sqrt{2p}\left(\frac{m^2\sqrt{x}}{2p}-x^{\frac{3}{2}}\right).$$

现在问题归结为求函数 $S(x)$ 在 $(0,\frac{m^2}{2p})$ 内的最大值. 由于

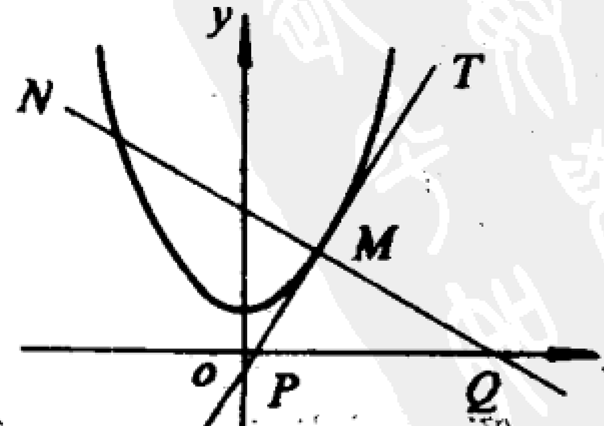
$$S'(x)=\sqrt{2p}\left(\frac{m^2}{2p\sqrt{x}}-3\sqrt{x}\right),$$

$$S''(x)=-\sqrt{\frac{p}{2}}\left(\frac{m^2}{2px^{3/2}}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right).$$

令 $S'(x)=0$，得 $\frac{m^2}{2p\sqrt{x}}-3\sqrt{x}=0$，从中解得唯一的驻点为 $x=\frac{m^2}{6p}$，且 $S''\left(\frac{m^2}{6p}\right)<0$，因此 $S(x)$ 在 $x=\frac{m^2}{6p}$ 时取得极大值，即在 $(0,\frac{m^2}{2p})$ 内取得最大值

$$S_{\max}=S(\frac{m^2}{6p})=2\sqrt{2p}\left[\frac{m^2}{2p}\sqrt{\frac{m^2}{6p}}-\sqrt{\left(\frac{m^2}{6p}\right)^3}\right]=\frac{2m^3}{3\sqrt{3}p}.$$

3.4.77　如图所示，在抛物线 $y=x^2+\frac{1}{4}$ 上异于顶点的点 M 处作切线与法线，分别和 x 轴交于点 P 与 Q，求 PQ 的最小值.



3.4.77 题图

解　设抛物线上任一异于顶点 $(0,\frac{1}{4})$ 的点 M 的坐标 $(x_1,x_1^2+\frac{1}{4})$，则切线 MT 与法线 MN 的方程分别是

$$MT:\ y-\left(x_1^2+\frac{1}{4}\right)=2x_1(x-x_1),$$

$$MN:\ y-\left(x_1^2+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2x_1}(x-x_1),$$

把它们分别与 x 轴的方程 $y=0$ 联立，便可分别求出切线 MT 与法线 MN 和 x 轴的交点 P 与 Q 的横坐标：

$$x_P=\frac{0-\left(x_1^2+\frac{1}{4}\right)}{2x_1}+x_1=\frac{x_1}{2}-\frac{1}{8x_1},$$

$$x_Q=\frac{0-\left(x_1^2+\frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{2x_1}}+x_1=2x_1^3+\frac{3}{2}x_1.$$

由于抛物线关于 y 轴是对称的，只需就 $x_1>0$ 的情形进行讨论，这时

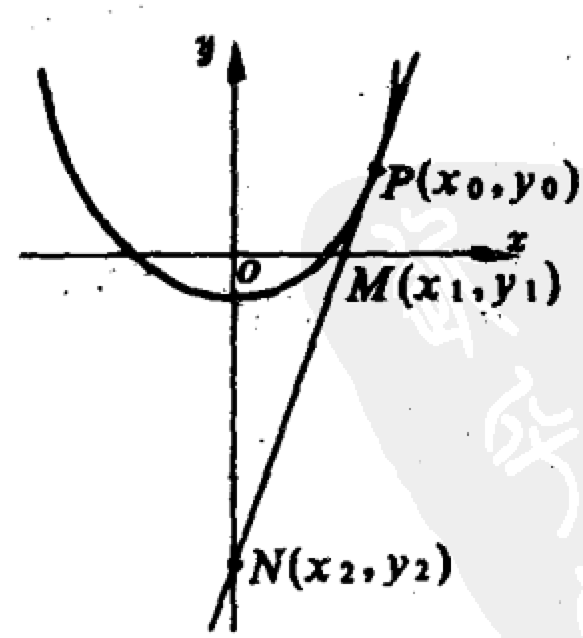
$$l(x_1)=PQ=x_Q-x_P=2x_1^3+x_1+\frac{1}{8x_1},$$

$$l'(x_1)=6x_1^2+1-\frac{1}{8x_1^2},\ l''(x_1)=12x_1+\frac{1}{4x_1^3}.$$

令 $l'(x_1)=0$，得 $(12x_1^2-1)(4x_1^2+1)=0$. 由此解得唯一驻点为 $x_1=\frac{1}{\sqrt{12}}$. 又因 $l''\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)>0$，因此当 $x_1=\frac{1}{\sqrt{12}}$ 时，$l(x_1)$ 取得极小值，也就是取得最小值

$$l_{\min}=l\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=\frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

3.4.78　过曲线 $l: y=x^2-1(x>0)$ 上的点 P 作 l 的切线，与坐标轴交于点 M,N（见右图），确定 P 点的位置，使 $\triangle OMN$ 的面积最小.



3.4.78 题图

分析　$\triangle OMN$ 的面积由点 M 和 N 确定，而 M 和 N 又由 P 点所确定. 故应把 $\triangle OMN$ 的面积 s 写为 P 点坐标 x_0,y_0 的函数.

解　设点 $P(x_0,y_0)$，过 P 点的切线方程为

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0),$$

$(y'(x_0) = 2x_0, 2x_0$ 为斜率).

解
$$\begin{cases} y - y_0 = 2x_0(x - x_0), \\ y = 0, \end{cases}$$

得
$$x_1 = \frac{2x_0^2 - y_0}{2x_0}. \tag{1}$$

解
$$\begin{cases} y - y_0 = 2x_0(x - x_0), \\ x = 0, \end{cases}$$

得
$$y_2 = y_0 - 2x_0^2. \tag{2}$$

因(x_0, y_0)在曲线上，所以 $y_0 = x_0^2 - 1$. 代入(1)，(2)，得

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0},\ y_2 = -(x_0^2 + 1),$$

于是，$\triangle OMN$ 的面积

$$s = \frac{1}{2}x_1|y_2| = \frac{1}{2}\cdot\frac{x_0^2 + 1}{2x_0}\cdot(x_0^2 + 1) = \frac{(x_0^2 + 1)^2}{4x_0}.$$

把 P 点看作动点，把(x_0, y_0)换写为(x, y)，则

$$s = \frac{(x^2 + 1)^2}{4x},$$

$$s' = \frac{1}{4}\frac{2(x^2 + 1)2x\cdot x - (x^2 + 1)^2}{x^2} = \frac{1}{4}\frac{(x^2 + 1)(3x^2 - 1)}{x^2}$$

解 $s'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，($-\frac{1}{\sqrt{3}}$不合题意，舍去)，当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$s'(x) < 0$；当 $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty$ 时，$s'(x) > 0$，因而 s 在 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 处取极小值，且为最小值. 则所求的 P 点的坐标为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3}\right)$.

注　若不判别在 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 处取极小值，可用下法：

当 P 点沿曲线趋于 ∞ 时，$\triangle OMN$ 的面积愈来愈大，所以最大值不存在，故得到的值为最小值.

3.4.79　求由 y 轴上的定点$(0, b)$到抛物线 $x^2 = 4y$ 上的点的最短距离.

解　设(x, y)为抛物线 $x^2 = 4y$ 上任一点. 作函数

$$u = d^2 = x^2 + (b - y)^2 = x^2 + \left(b - \frac{x^2}{4}\right)^2,$$

则 $$\frac{du}{dx}=x(2-b+\frac{x^2}{4}),\ \frac{d^2u}{dx^2}=2-b+\frac{3}{4}x^2.$$

令 $\frac{du}{dx}=0$,得 $x_1=0,x_2=\pm 2\sqrt{b-2}$,对应得 $y_1=0,y_2=b-2$.

考虑点 $P_1(0,0)$, $P_2(2\sqrt{b-2},-2)$, $P_3(-2\sqrt{b-2},b-2)$.

若 $b=2$,则 $u=x^2+(2-\frac{x^2}{4})^2=4+\frac{x^4}{16}$,显然,当且仅当 $x=0$ 时 u 取最小值,故这时由点$(0,b)$即$(0,2)$到 $x^2=4y$ 上的点的最短距离为 2.

若 $b>2$,由于

$$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{p_1}=2-b<0;\ \frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{p_2、p_3}=2(b-2)>0.$$

故此时 u 在 $x=\pm 2\sqrt{b-2}$ 处取最小值,因此由点$(0,b)$到 $x^2=4y$ 上的点的最短距离为 $d=2\sqrt{b-1}$.

若 $0<b<2$,由于

$$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{p_1}=2-b>0;\ \frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{p_2、p_3}=2(b-2)<0.$$

故此时 u 在 $x=0$ 处取最小值,因此由点$(0,b)$到 $x^2=4y$ 上的点的最短距离为 b.

综上所述,所求的最短距离

$$d=\begin{cases}b, & 0<b\leqslant 2,\\ 2\sqrt{b-1}, & b>2.\end{cases}$$

3.4.80　曲线 $y=4-x^2$ 与 $y=1+2x$ 相交于 A、B 两点,c 为抛物线上任一点,求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

解　由 $y=4-x^2$ 与 $y=1+2x$ 求得抛物线与直线的交点为 $A(-3,-5)$,$B(1,3)$;设抛物线上任一点 C 的横坐标为 x,则 C 点的坐标可表示为 $C(x,4-x^2)$,于是 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & 4-x^2 & 1\\ -3 & -5 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=6-4x-2x^2.$$

又 $\frac{ds}{dx}=-4(1+x)$, $\frac{d^2s}{dx^2}=-4$. 令 $\frac{ds}{dx}=0$,求得唯一驻点 $x=-1$,故当 $x=-1$ 时,面积 S 取得极大值 $S(-1)=8$,即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 8.

3.4.81　由 $y=0, x=8, y=x^2$ 围成曲边三角形 OAB，在曲边 $\widehat{OB}$ 上求一点，过此点作 $y=x^2$ 的切线，使该切线与 OA, AB 所围成的三角形面积最大.

解　设过曲线 $y=x^2$ 上的点 (x,y) 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

将 $y=x^2$ 代入上式，得

$$Y-x^2=2x(X-x).$$

此切线与 $X=8, Y=0$ 的交点的纵坐标与横坐标分别为

$$Y=2x(8-x)+x^2,\quad X=\frac{x}{2}.$$

故切线与 $x=8, y=0$ 所围成的三角形的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}(8-\frac{x}{2})[2x(8-x)+x^2],$$

$$S'(x)=\frac{3}{4}x^2-16x+64.$$

令 $S'(x)=0$，得 $x=\frac{16}{3}$ 及 $x=16$（舍去）.

故当 $x=\frac{16}{3}$ 时，$S(x)$ 取得最大值，所求的点为 $(\frac{16}{3},\frac{256}{9})$.

3.4.82　在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解　因椭圆在所给直线的下方，故此椭圆上任一点 $A(x,y)$ 满足 $2x+3y-6<0$，因此 A 点到所给直线的距离为

$$d=|2x+3y-6|/\sqrt{13}=(6-2x-3y)/\sqrt{13}.$$

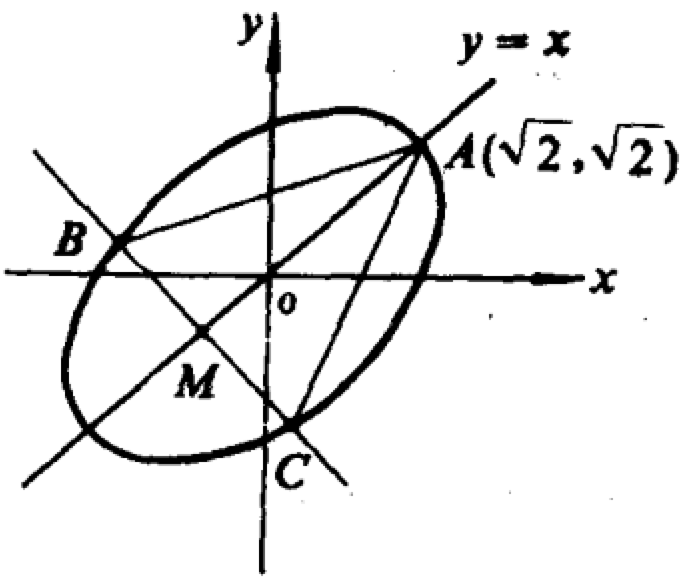
设 $y>0$，即 $y=\sqrt{4-x^2}/2$，则

$$d=(6-2x-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2})/\sqrt{13},$$

且 $d'=\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3x-4\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{4-x^2}}$，$d''=\frac{6}{\sqrt{13}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0$.

令 $d'=0$，得 $x=\frac{8}{5}$，即在 $x=\frac{8}{5}$ 处 d 取得极小值. 而对于 $y<0$，可得 $d''<0$，故 d 不会取得极小值. 因此，在椭圆上的点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 到已知直线的距离最短.

3.4.83　直线 $y=-x+k$ 与椭圆 $5x^2+6xy+5y^2=32$ 相交于 B、C 两点，且点 $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 为该椭圆的顶点，问 k 取何值时，才能使 $\triangle ABC$ 的面积为最大？



3.4.83 题图

解　如图所示，椭圆的顶点 $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 在直线 $y=x$ 上，由于椭圆方程中 x^2 和 y^2 项的系数相等，因此，直线 $y=x$ 是椭圆的一条轴所在的直线，又直线 $y=-x+k$ 与直线 $y=x$ 垂直，所以交点 B、C 关于直线 $y=x$ 对称，再设二直线的交点为 M，则 $\triangle ABC$ 的面积 $s=|AM|\cdot|MB|$.

现在分别求 $|AM|$ 和 $|MB|$ 如下：

解方程组

$$\begin{cases}y=-x+k,\\ y=x.\end{cases}$$

得 M 点的坐标为 $(\frac{k}{2},\frac{k}{2})$.

解方程组

$$\begin{cases}5x^2+6xy+5y^2=32,\\ y=-x+k,\end{cases}$$

得 B、C 两点的坐标为

$$C(\frac{k+\sqrt{-4k^2+32}}{2},\frac{k-\sqrt{-4k^2+32}}{2}),$$

$$B(\frac{k-\sqrt{-4k^2+32}}{2},\frac{k+\sqrt{-4k^2+32}}{2}),$$

$$(-4k^2+32>0,\text{即 } k<2\sqrt{2})$$

从而求得

$$|AM|=\sqrt{(\sqrt{2}-\frac{k}{2})^2+(\sqrt{2}-\frac{k}{2})^2}$$
$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}-\frac{k}{2}),$$

$$|MB| = \sqrt{\left(\frac{k}{2} - \frac{k - \sqrt{-4k^2+32}}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} - \frac{k - \sqrt{-4k^2+32}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{-2k+16} .$$

所以，$s = |AM| \cdot |MB| = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \frac{k}{2}\right)\sqrt{-2k^2+16}$，

令　$s' = -\sqrt{2}\,\frac{-2k^2 + 2\sqrt{2}k + 8}{\sqrt{-2k^2+16}} = 0$，得

$$k = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2},$$

因为 $k < 2\sqrt{2}$，故正号舍去，于是，$k = -\sqrt{2}$.

由此即得，当 $k = -\sqrt{2}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，其最大值为

$$S_{\max} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{-2(-\sqrt{2})^2 + 16} = 6\sqrt{3}.$$

3.4.84　求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 而面积最大的矩形的各边之长.

解法 1　设 $M(x,y)$ 为椭圆在第一象限内的任意一点，则内接矩形的面积为

$$s(x) = 2x \cdot 2y = 4x \cdot b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$s'(x) = 4b\left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + x\frac{-\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\right] = 4b\frac{1 - \frac{2x^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

令 $s'(x) = 0$，求得驻点为 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 又当 $0 \leqslant x < \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时，$s'(x) > 0$；当 $\frac{a}{\sqrt{2}} < x < a$ 时，$s'(x) < 0$，所以

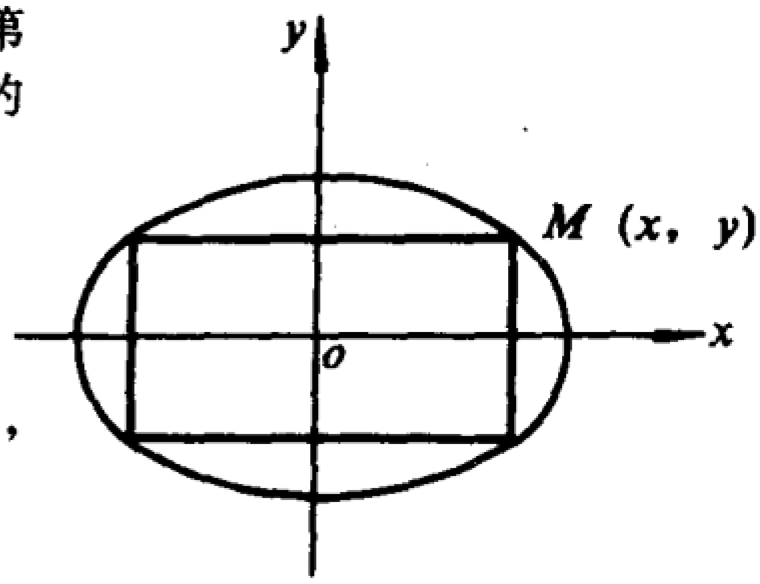
$$\max_{0 \leqslant x \leqslant a} s(x) = s\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

故求矩形的长为 $2x = \sqrt{2}a$，宽为 $2y = 2b\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}b$.

解法 2　设 $M(x,y)$ 为椭圆在第一系限内的任意一点，则内接矩形的面积为

$$s(x) = 2x \cdot 2y,\ 0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$s^2(x) = 16b^2x^2(1 - \frac{x^2}{a^2}).$$



3.4.84题图

所以　$(s^2(x))' = 16b^2(2x - \frac{4x^3}{a^2}),$

令 $(s^2(x))' = 0$，求得驻点为

$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 又

$$(s^2(x))'' = 32b^2(1 - \frac{12x^2}{a^2}),\ (s^2(\frac{a}{\sqrt{2}}))'' = 32b^2(1-6) < 0.$$

所以　$$\max_{0\leqslant x\leqslant a} s^2(x) = s^2(\frac{a}{\sqrt{2}}),$$

故　$$\max_{0\leqslant x\leqslant a} s(x) = s(\frac{a}{\sqrt{2}}).$$

于是，所求矩形的长为 $2x = \sqrt{2}\,a$，宽为 $2y = \sqrt{2}\,b$.

解法 3　设 $M(x,y)$ 为椭圆在第一象限内的任一点，则内接矩形面积为

$$s(x) = 2x \cdot 2y,\quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$s^2(x) = 16x^2y^2 = 16\,\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot a^2b^2,$$

而 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，所以，当 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$，即 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 时，$s^2(x)$ 最大，这时 $s(x)$ 亦最大.

将 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 中，即可求得所求矩形的长和宽分别为 $2x = \sqrt{2}\,a$，$2y = \sqrt{2}\,b$.

解法 4　设 $M(x,y)$ 为椭圆在第一象限内的任一点，则内接矩形的面积为

$$s(x) = 2x \cdot 2y,\quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

令 $F(x,y) = A(x) + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$，则由

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 4y + \lambda \dfrac{2x}{a^2} = 0, \\ F_y(x,y) = 4x + \lambda \dfrac{2y}{b^2} = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases} \text{得} \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

解之得 $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$，即驻点为$(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}})$.

又面积最大的矩形存在，所以所求矩形的长为 $2x = \sqrt{2}a$，宽为 $2y = \sqrt{2}b$.

解法 5 设 $M(x,y)$ 为椭圆在第一象限内的任一点，则内接矩形的面积为

$$s(\theta) = 2x \cdot 2y = 4ab\sin\theta\cos\theta = 2ab\sin\theta\cos\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$s'(\theta) = 4ab\cos2\theta,$$

令 $s'(\theta) = 0$ 求得唯一驻点 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$，又当 $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{4}$ 时，$s'(\theta) > 0$；当$\dfrac{\pi}{4} < \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，$s'(\theta) < 0$（或 $s''(\dfrac{\pi}{4}) = -8ab\sin\dfrac{\pi}{2} < 0$），所以

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}} s(\theta) = A(\frac{\pi}{4}).$$

故所求矩形的长和宽分别为

$$2x = 2a\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}a,\ 2y = 2b\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}b.$$

3.4.85 已知平面曲线 l 的方程为$(x^2 + y^2)^2 = 8x$，求把 l 围在内部且各边平行于坐标轴的矩形中面积最小者，并求其面积.

解 由$(x^2 + y^2)^2 = 8x$，知 $x \geqslant 0$，解出 $y^2 = \sqrt{8x} - x^2$，由 $\sqrt{8x} - x^2 \geqslant 0$ 得 $x \leqslant 2$，故定义域为$[0,2]$.

又曲线关于 x 轴对称，令 $y = 0$，得 $x_1 = 0, x_2 = 2$；令 $x = 0$，得 $y = 0$；即曲线与 x 轴的交点为$(0,0)$，$(2,0)$；与 y 轴的交点只有$(0,0)$.

对曲线方程两边求导，得

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 8,$$

即
$$yy' = \frac{2}{x^2+y^2} - x, \tag{1}$$

令(1) 式右边等于 0 与$(x^2+y^2)^2 = 8x$ 联立，解得驻点 $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，对应 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$. 又对(1) 式两边求导并与$(x^2+y^2)^2 = 8x$ 联立求解，得

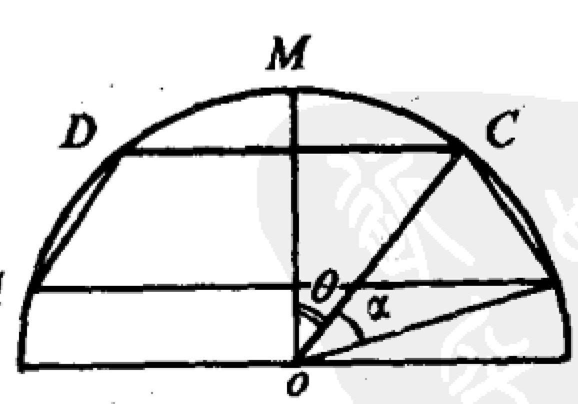
$$y'^2 + yy'' = -2\cdot\frac{2x+2yy'}{(x^2+y^2)^2} - 1,$$

在点 $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$ 处，$y''<0$；而在点$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$ 处，$y''>0$. 于是，曲线 l 在 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 处取极大值，即最大值$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$；又在该处取极小值，即最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

过点$(0,0)$，$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$，$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})$，$(2,0)$ 作平行于坐标轴的直线所围成的矩形即为所求，这矩形的面积为 $4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.

3.4.86 在定半圆内作内接等腰梯形，其下底是平行于直径的定底，另二顶点位置如何才能使等腰梯形有最大的面积？

解 如图所示，与定底 AB 垂直的半径为 OM，令 $\angle COM = \theta$，$\angle BOM = \alpha$，其中 α 与圆半径 a 都是常数，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，等腰梯形的面积为



3.4.86 题图

$$s(\theta) = \frac{1}{2}(a\cos\theta - a\cos\alpha)\cdot 2(a\sin\theta + a\sin\alpha)$$
$$= a^2[(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\cos\alpha) + \sin\theta\cos\theta - \sin\alpha\cos\alpha]$$

$$= a^2[-\sin(\theta - \alpha) + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\alpha] \quad (0 < \theta < \alpha).$$

而 $$s'(\theta) = a^2[-\cos(\theta - \alpha) + \cos 2\theta],$$

$$s''(\theta) = a^2[\sin(\theta - \alpha) - 2\sin 2\theta].$$

令 $s'(\theta) = 0$，得 $\cos 2\theta - \cos(\theta - \alpha) = 0$，

或 $$\sin\frac{3\theta - \alpha}{2}\sin\frac{\theta + \alpha}{2} = 0,$$

由此求得唯一的驻点为 $\theta = \frac{\alpha}{3}$，且

$$s''(\frac{\alpha}{3}) = a^2[\sin(-\frac{2}{3}\alpha] - 2\sin\frac{2}{3}\alpha] < 0,$$

因此当 $\theta = \frac{\alpha}{3}$ 时，$s(\theta)$ 取得极大值，从而取得最大值 $s_{max} = s(\frac{\alpha}{3})$.

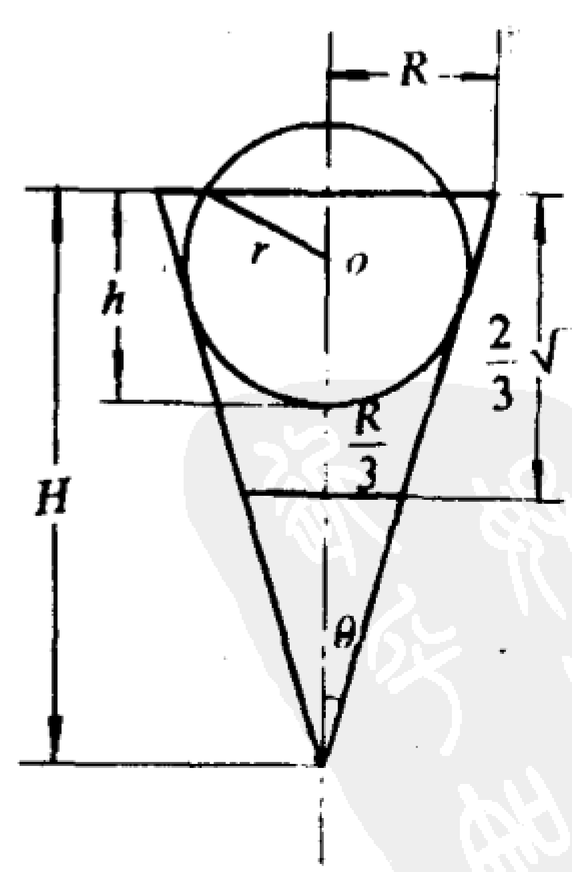
所以顶点 C 应按 $\angle COM = \frac{\alpha}{3}$ 选取（D 与 C 关于 OM 对称）才能使等腰梯形面积最大.

3.4.87　设有正圆台形桶，尺寸如图所示，里面盛满水. 现有一铁球放入桶内，试问球半径为多大时，溢出的水最多？

解　设截得圆台的圆锥的顶角为 2θ，则

$$\text{tg}\theta = \frac{R - \frac{R}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}R} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

由此得 $\theta = \frac{\pi}{6}$.



3.4.87 题图

设半径为 r 的球浸入水中部分的高为 h，则有

$$h = R\text{ctg}\theta - (r\csc\theta - r)$$
$$= \sqrt{3}R - r.$$

由于当铁球不与桶的侧面相切以后，溢出的水随 r 的增大而减少，因此只需考虑

$$r \geqslant R\sec\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

球浸入水中部分是一球缺，其体积为

$$V=\pi(h^2r-\frac{h^3}{3})=\pi[(\sqrt{3}R-r)^2r-\frac{1}{3}(\sqrt{3}R-r)^3]$$

$$=\pi(\frac{4}{3}r^3-3\sqrt{3}Rr^2+6R^2r-\sqrt{3}R^3),$$

而
$$\frac{dV}{dr}=\pi(4r^2-6\sqrt{3}Rr+6R^2),$$

$$\frac{d^2V}{dr^2}=\pi(8r-6\sqrt{3}R).$$

令 $\frac{dV}{dr}=0$，得 $(2r-\sqrt{3}R)(r-\sqrt{3}R)=0$，从而求得驻点为 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，另一解 $r=\sqrt{3}R\notin(0,\frac{2\sqrt{3}R}{3})$，应舍去. 当 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 时，$\frac{d^2V}{dr^2}=-2\sqrt{3}R<0$，所以 V 在 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 时取得极大值. 且因在 $(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}R)$ 内只有一个驻点，所以 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 时溢出的水最多.

3.4.88　对于已知半径为 R 的球，求具有最小体积的外切圆锥的体积.

解　通过正圆锥轴的截面为一等腰三角形，设三角形的顶角为 2α，则圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot(1+\frac{1}{\sin\alpha})^2\mathrm{tg}^2\alpha\cdot R\cdot(1+\frac{1}{\sin\alpha})$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\cos^2\alpha\sin\alpha},$$

$$V'=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{(1+\sin\alpha)^2[3\sin\alpha\cos^3\alpha-(1+\sin\alpha)\cdot(\cos^3\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha)]}{\sin^2\alpha\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{(1+\sin^2\alpha)[3\sin\alpha\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)\cdot(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)]}{\sin^2\alpha\cos^3\alpha}.$$

令 $V'=0$，由于 $1+\sin\alpha\neq0$，得

$$3\sin\alpha\cos^2\alpha-(1+\sin\alpha)(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)=0.$$

故
$$\sin\alpha=\frac{1}{3},\ \sin\alpha=-1(\text{舍去}),$$

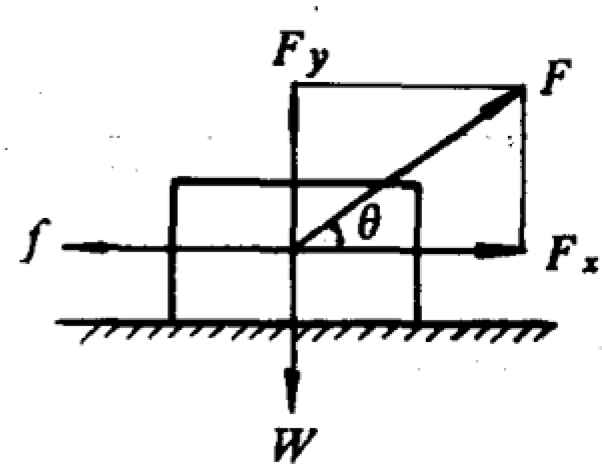
所以，当 $\alpha=\arcsin\alpha\frac{1}{3}$ 时，$V'=0$. 由于驻点唯一，故必在该驻点取得最小值，且

$$V_{\min}=\frac{1}{3}\pi R^3\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}}=\frac{8}{3}\pi R^3.$$

(4) 物理方面的极值问题

3.4.89 一重量为 W 的物体放在一粗糙平面上，加力使它恰能移动，问作用力应与平面成何角度时最为省力？

解 如图所示，设作用力 F 与水平面成 θ 角，摩擦力的方向为 f 的方向. 将 F 沿水平方向及铅直方向分解，得 $F_x=F\cos\theta, F_y=F\sin\theta$，于是正压力为 $W-F_y=W-F\sin\theta$，而摩擦力 $f=\mu(W-F\sin\theta)$，为使物体恰能移动，F_x 应恰好与它平衡，即有 $\mu(W-F\sin\theta)=F\cos\theta$（式中 μ 为摩擦系数），于是



3.4.89 题图

$$F=\frac{\mu W}{\cos\theta+\mu\sin\theta}.$$

现在求 θ 取 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 中何值时，才能使 F 最小，也就是使

$$g(\theta)=\cos\theta+\mu\sin\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$$

为最大？由于 $g'(\theta)=-\sin\theta+\mu\cos\theta$，令 $g'(\theta)=0$，从中解得唯一驻点为 $\theta=\mathrm{arctg}\mu$. 又由于 $g''(\theta)=-\cos\theta-\mu\sin\theta<0$，所以当 $\theta=\mathrm{arctg}\mu$ 时，$g(\theta)$ 最大，这时 F 最小.

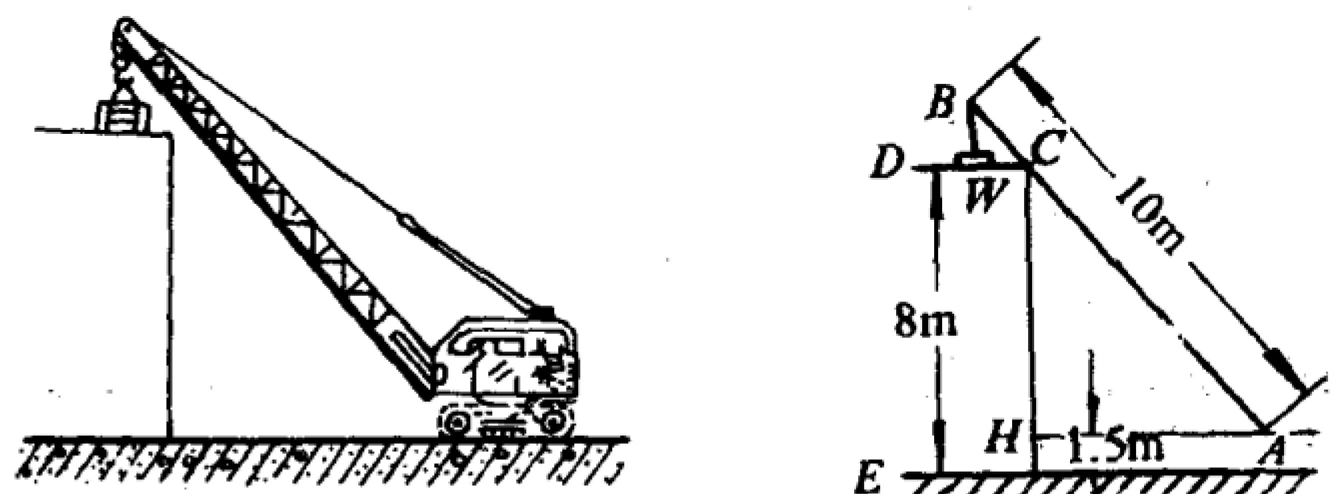
3.4.90 AB 为履带式起重机的吊杆，CD 为平台（尺寸如图(b)所示）. W 为起吊的重物，在工作时起重机可沿地面 EF 移动，吊杆 AB 可绕 A 旋转，这架起重机能将重物吊往平台上某点，问该点离 C 点的最大距离是多少？

解 令 $AC=x$(m)，$WC=y$(m)（这里同时用 W 表示确定重物 W 的位置的点），则有

$$BC=10-x,\quad HA=\sqrt{x^2-(8-1.5)^2}=\sqrt{x^2-6.5^2}.$$

由于 $\triangle ACH\backsim\triangle CBW$，则

$$\frac{AC}{HA}=\frac{CB}{WC} \quad 或 \quad \frac{x}{\sqrt{x^2-6.5^2}}=\frac{10-x}{y},$$



(a)　(b)

3.4.90 题图

于是得到函数为

$$y(x)=\frac{10-x}{x}\sqrt{x^2-6.5^2}=(\frac{10}{x}-1)\sqrt{x^2-6.5^2},$$

而
$$y'(x)=(\frac{10}{x}-1)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-6.5^2}}-\frac{10}{x^2}\sqrt{x^2-6.5^2}$$
$$=\frac{-x^3+6.5^2\times 10}{\sqrt{x^2-6.5^2}}.$$

令 $y'(x)=0$，得 $-x^3+6.5^2\times 10=0$，从中求得唯一驻点为 $x=\sqrt[3]{6.5^2\times 10}$（不难用第一充分条件判定是极大值点），这时取得最大值

$$y_{\max}=y(\sqrt[3]{6.5^2\times 10})$$
$$=(\frac{10}{\sqrt[3]{6.5^2\times 10}}-1)\sqrt{(6.5^2\times 10)^{\frac{2}{3}}-6.5^2}$$
$$\approx 1.25(\mathrm{m}).$$

因此最大距离约为 1.25m.

3.4.91　已知一容器由一圆筒与两个相同的圆锥构成(见图)，容器的表面积 $s=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi \mathrm{m}^2$，且圆筒和圆锥的高都是 h，为了要使容器的容积 v 最大，圆筒的半径 r 和高 h 应如何选择.

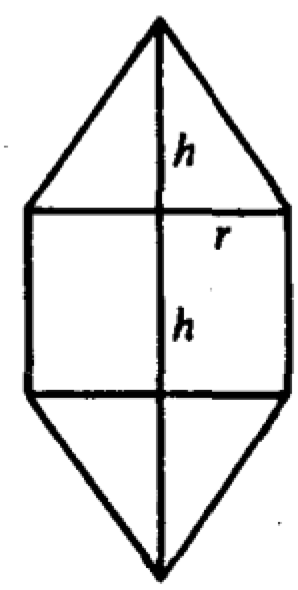
解　按题意，容器的容积为

$$V=\pi r^2h+2\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{5}{3}\pi r^2h,\quad(1)$$

容器的表面积为

$$2\pi rh+2(\pi r\sqrt{h^2+r^2})=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi,\ (2)$$

或
$$h=\frac{\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{1}{r}-\frac{2\sqrt{5}}{5}r^3.\ (3)$$



3.4.91 题图

把(3)代入(1),得

$$V=\frac{\sqrt{5}\pi}{24}(5r-16r^5),\ (0,\frac{\sqrt[4]{5}}{2}).$$

求导,得 $\frac{dv}{dr}=\frac{5\sqrt{5}\pi}{24}(1-16r^4)$,

令 $\frac{dV}{dr}=0$,得 $r=\frac{1}{2}$. 而 $\frac{d^2V}{dr^2}\Big|_{r=\frac{1}{2}}=-\frac{40\sqrt{5}\pi}{3}r^3\Big|_{r=\frac{1}{2}}<0$,

因此,$r=\frac{1}{2}$ 是函数 V 的极大值点,且在连续区间$(0,\frac{\sqrt[4]{5}}{2})$内仅有此一个极大值点,故 V 在 $r=\frac{1}{2}$ 时取最大值.

由(3)有,$r=\frac{1}{2}$ 时,$h=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以,圆筒的半径 $r=\frac{1}{2}$m,高 $h=\frac{\sqrt{5}}{5}$m 时,容积 V 最大.

3.4.92　要做一个容积为定值 V 的带盖的圆柱形铁桶,怎样设计才能使铁皮最省?

解　设圆柱的底半径为 R,高为 h,全表面积为 s,则

$$s=2\pi Rh+2\pi R^2.$$

要使铁皮最省就是 s 最小,但据题设,容积为定值 V,即 $\pi R^2h=V$,于是

$$h=\frac{V}{\pi R^2},$$

将其代入 s 的表达式,得

$$s=2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2\quad(R>0).$$

而
$$s'=4\pi R-\frac{2V}{R^2},\quad s''=4\pi+\frac{4V}{R^3}.$$

令 $s' = 0$，得 $4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0$，从而求得唯一的驻点为 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，且当 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$s'' = 4\pi + \frac{4V}{R^3} > 0$，因此在 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，s 取得最小值，这时

$$h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$

即在 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时 s 最小.

顺便指出，这时 $h = 2R$，即当高等于底面直径时，所用铁皮最省.

3.4.93　作一个上端开口的圆柱形容器，它的净容积是 V，壁厚为 a（V 和 a 为常数），问容器内壁半径为多少，才能使所用的材料最省？

解　设容器内壁的半径为 $x(x > 0)$，高为 h，则 $h = V/\pi x^2$. 所用材料为

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{底部所用的材料} + \text{侧壁所用的材料} \\ &= \pi(x+a)^2 \cdot a + \pi(x+a)^2 \cdot h - V \\ &= \pi a(x+a)^2 + V\left(1 + \frac{a}{x}\right)^2 - V, \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2a\pi(x+a) - 2aV\left(\frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^3}\right)$$

$$= \frac{2a\pi(x+a)}{x^3}\left(x - \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)\left[x^2 + \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \cdot x + \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}\right].$$

令 $f'(x) = 0$，得唯一驻点 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$，而

$$f''(x) = 2a\pi - 2aV\left(-\frac{2}{x^3} - \frac{3a}{x^4}\right),$$

且当 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 时，$f''(x) > 0$，故在 $x = \sqrt[3]{V/\pi}$ 处，$f(x)$ 取极小值，即最小值. 因此，所求内壁半径为 $\sqrt[3]{V/\pi}$.

3.4.94　一个器皿铅直侧面的高度为 h，盛满了水放在水平面上，一股水流从侧面的小孔中射出，速度等于 $\sqrt{2gx}$，x 是小孔的深度，求小孔的位置，使得水射出的距离最远.

解　水从小孔射出后作平抛物体运动，水平方向作速度为 $\sqrt{2gx}$ 的匀速运动，沿铅直方向作自由落体运动，下落的距离为

$$h - x = \frac{1}{2}gt^2.$$

则水从小孔射出到落地的时间为 $t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$. 水平射出的距离为

$$s = \sqrt{2gx} \cdot t = \sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} = 2\sqrt{x(h-x)},$$

$$s'(x) = \frac{h-2x}{\sqrt{x(h-x)}}.$$

令　$s'(x) = 0$. 得 $x = \frac{h}{2}$.

当 $x < \frac{h}{2}$ 时，$s' > 0$；当 $x > \frac{h}{2}$ 时 $s' < 0$. 故当 $x = \frac{h}{2}$ 时，s 取最大值，即射出的距离最远.

3.4.95　炮弹的弹道曲线方程(不计空气阻力)为

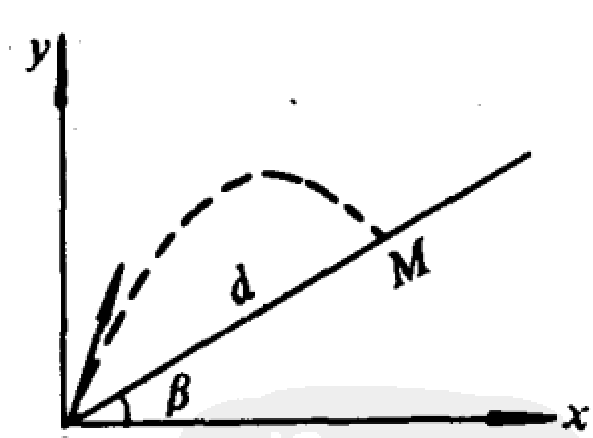
$$y = kx - \frac{k^2+1}{800}x^2,$$

这里原点取在炮弹的发射点，k 为弹道曲线在原点处的切线的斜率.

(1) k 为多少时，水平射程最远？

(2) 在离发射点 300m 处有一直立墙壁，k 为多少时，炮弹击中该墙的高度最大？

(3) 如有一倾角为 β 的斜面($\beta < \frac{\pi}{2}$)，如图所示，k 为多少时，沿斜面的射程最远？



3.4.95 题图

解　(1) 为求水平射程，在弹道曲线方程中，令 $y = 0$，即 $x(k - \frac{k^2+1}{800}x) = 0$，其中 $x = 0$ 对应发射点，$k - \frac{k^2+1}{800}x = 0$，或 $x = \frac{800k}{k^2+1}$ 对应落弹点，因此问题归结为求函数 $x = \frac{800k}{k^2+1}$ $(k > 0)$ 的最大值.

$$\frac{dx}{dk}=\frac{(k^2+1)\cdot 800-800k\cdot 2k}{(k^2+1)^2}=\frac{800(1-k^2)}{(k^2+1)^2},$$

令$\frac{dx}{dk}=0$，得$1-k^2=0$，从中求得唯一的驻点为$k=1$，且当$k<1$时，$\frac{dx}{dk}>0$；当$k>1$时，$\frac{dx}{dk}<0$，因此x在$k=1$时取得极大值，也就是当$k=1$时，水平射程最远.

(2) 为求在离发射点300m处炮弹击中的高度，在弹道曲线方程中令$x=300$，便得到击中高度为

$$y=300k-\frac{k^2+1}{800}\times(300)^2=300k-\frac{900}{8}(k^2+1),(k>0),$$

$$y'=300-\frac{900}{4}k,\quad y''=-\frac{900}{4}<0.$$

令$y'=0$，得$300-\frac{900}{4}k=0$，从中求得唯一驻点为$k=\frac{4}{3}$，且当$k=\frac{4}{3}$时，$y''<0$，因此，当$k=\frac{4}{3}$时，y取得极大值，也就是当$k=\frac{4}{3}$时，在离发射点300m处炮弹击中高度最大.

(3) 设沿斜面的射程为d，则落弹点M的坐标为

$$x_0=d\cos\beta,\quad y_0=d\sin\beta.$$

由于$M(x_0,y_0)$在弹道曲线上，故有

$$d\sin\beta=kd\cos\beta-\frac{k^2+1}{800}d^2\cos^2\beta,$$

从中解出函数$d(k)$，得

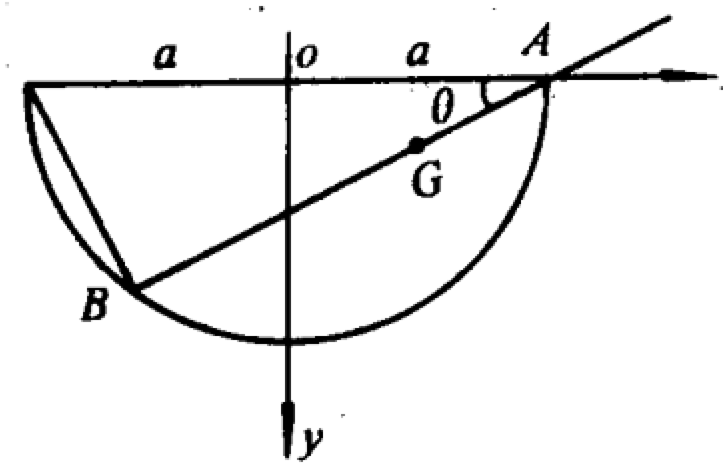
$$d(k)=\frac{800}{\cos^2\beta}\cdot\frac{k\cos\beta-\sin\beta}{k^2+1},$$

$$\begin{aligned}d'(k)&=\frac{800}{\cos^2\beta}\cdot\frac{(k^2+1)\cdot\cos\beta-(k\cos\beta-\sin\beta)\cdot 2k}{(k^2+1)^2}\\&=\frac{800}{\cos\beta}\cdot\frac{-k^2+2k\mathrm{tg}\beta+1}{(k^2+1)^2}\\&=\frac{800}{\cos\beta}\cdot\frac{-(k-\mathrm{tg}\beta-\sec\beta)(k-\mathrm{tg}\beta+\sec\beta)}{(k^2+1)^2},\end{aligned}$$

令$d'(k)=0$，得$k_1=\mathrm{tg}\beta+\sec\beta$，$k_2=\mathrm{tg}\beta-\sec\beta$. 由于$k>0$，而$k_2=\mathrm{tg}\beta-\sec\beta=\frac{\sin\beta-1}{\cos\beta}<0$（因$0<\beta<\frac{\pi}{2}$），故$k_2$应舍去. 因此仅有唯一的驻点$k_1=\mathrm{tg}\beta+\sec\beta$，且$d(k)$在$k_1$处取得极大值（留给读者验

证)，也就是当 $k=\text{tg}\beta+\sec\beta$($\beta$ 为斜面的倾角) 时，炮弹沿斜面的射程最远.

3.4.96　有一个碗，其内壁形状是半径为 a 的半球，在碗内放一根长为 $l(l>2a)$ 的棒，求棒的平衡位置.



3.4.96 题图

解　设棒是均匀的，则其重心在棒的中心. 设棒与碗口平面交角为 θ，棒的中心为 G(如图)，$AB=2a\cos\theta$.

若 $l>4a$，则对于无论怎样的角度 θ，G 总落在碗外，因而不可能有平衡位置，故设 $2a<l\leqslant 4a$.

G 点的纵坐标为

$$y=AG\sin\theta=(AB-GB)\sin\theta=(2a\cos\theta-\frac{l}{2})\sin\theta.$$

棒的平衡位置即是使重心最低的位置，也即是求 y 的最大值.

$$y'=2a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\frac{l}{2}\cos\theta=4a\cos^2\theta-\frac{l}{2}\cos\theta-2a.$$

令 $y'=0$，得 $8a\cos^2\theta-l\cos\theta-4a=0$. 由此求得

$$\cos\theta=\frac{l\pm\sqrt{l^2+128a^2}}{16a},$$

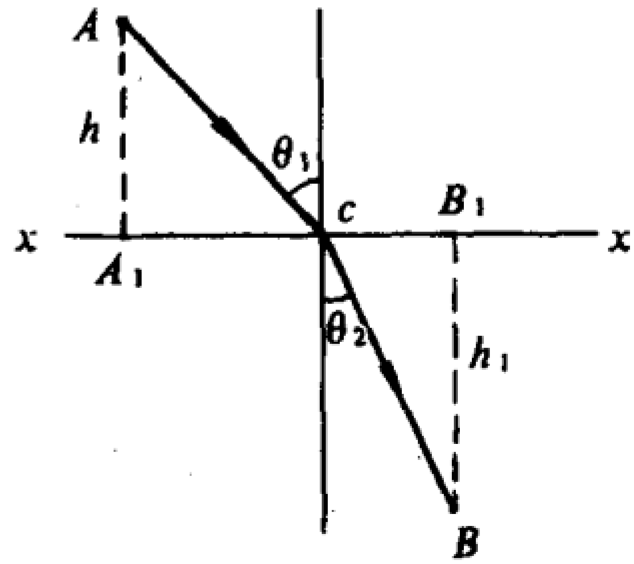
其中取负号时不合题意，故舍去，于是

$$\cos\theta=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}.$$

由题意知，y 有极大值，故当 $\theta=\arccos\dfrac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 时，棒处于平衡位置.

3.4.97　设有两种均匀介质，XX' 是它们的界面. 光线由一种介质中的某点 A 射向另一介质中的某点 B 时(设当光线经过 XX' 时，它的速度由 v_1 变到 v_2). 光线所走路径如何？

解　由于两种介质都是均匀的，v_1 与 v_2 都是常数，从而光线在两种介质中所走的路径是两段直线 AC、CB，C 是光线到达界面时与界面的交点. 如果 AB 不与 XX' 垂直，ACB 一般不是直线. 要求光线所走的路



3.4.97 题图

径，只要求出 C 点的位置. 标志点 C 的位置，一种办法是用 A_1C 的长度；一种办法是用 AC,CB 与 XX' 的夹角.

令 $AA_1=h,BB_1=h_1,A_1B_1=a$，$A_1C=x$. 由于 A 与 B 是定直线 XX' 两侧的两个定点，h,h_1 和 a 都是常数. 则光线从 A 经 C 到 B 所需时间为

$$T(x)=\frac{AC}{v_1}+\frac{CB}{v_2}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}{v_2},\quad (0\leqslant x\leqslant a),$$

于是问题归结为求 $T(x)$ 在$[0,a]$上的最小值.

由于 $T'(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}$，

$$T''(x)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{h^2}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{h_1^2}{[h_1^2+(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}}>0,$$

既然 $T''(x)>0$，$T'(x)$ 必是单调增加的，且

$$T'(0)=-\frac{1}{v_2}\cdot\frac{a}{\sqrt{h_1^2+a^2}}<0,T'(a)=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}>0,$$

因此在$(0,a)$内必有唯一驻点，且因 $T''(x)>0$，$T(x)$ 必在驻点处取得极小值，也就是取得在$[0,a]$上的最小值. 驻点可由 $T'(x)=0$，即由

$$\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+a^2}}=\frac{1}{v_2}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}$$

求出. 这里不采取求 x 以确定 C 的位置，而是用如下办法. 由图可见，

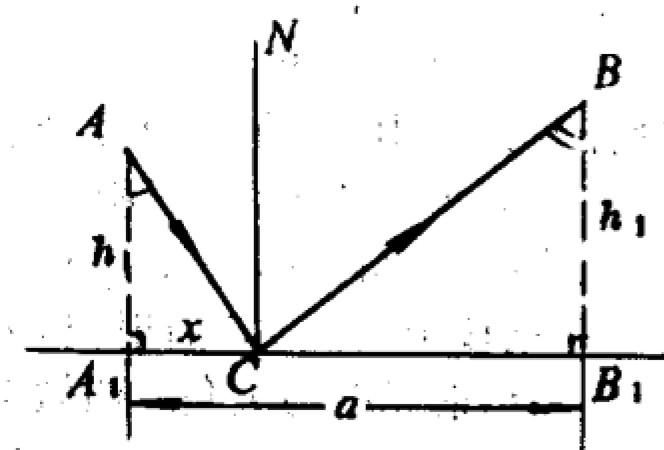
$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\sin A,\quad \frac{a-x}{\sqrt{h_1^2+(a-x)^2}}=\sin B,$$

因此 $$\frac{1}{v_1}\sin A=\frac{1}{v_2}\sin B,\quad \frac{\sin A}{\sin B}=\frac{v_1}{v_2},$$

即 $$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

式中 θ_1 是入射角，θ_2 是折射角，上式正是光的折射定律，光线沿上式所确定的路线由 A 到 B.

3.4.98 设在定直线的一侧有两个定点 A 与 B. 试在定直线上找一点 C,使 C 到 A 与 B 的距离之和为最小.



3.4.98 题图

解 令 $AA_1 = h, BB_1 = h_1, A_1B_1 = a, A_1C = x$(见图). 由于 A 与 B 是定直线一侧的两个定点,所以 h, h_1 和 a 都是常数. C 到 A 与 B 的距离之和为

$$L(x) = AC + CB$$
$$= \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}, \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

于是问题归结为求 $L(x)$ 在$[0,a]$上的最小值.

由于 $L'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \dfrac{a - x}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}}$,

$$L''(x) = \frac{\sqrt{h^2 + x^2} \cdot 1 - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}}{h^2 + x^2}$$
$$- \frac{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2} \cdot (-1) - (a - x)\dfrac{(a - x) \cdot (-1)}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}}}{h_1^2 + (a - x)^2}$$
$$= \frac{h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h_1^2}{[h_1^2 + (a - x)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

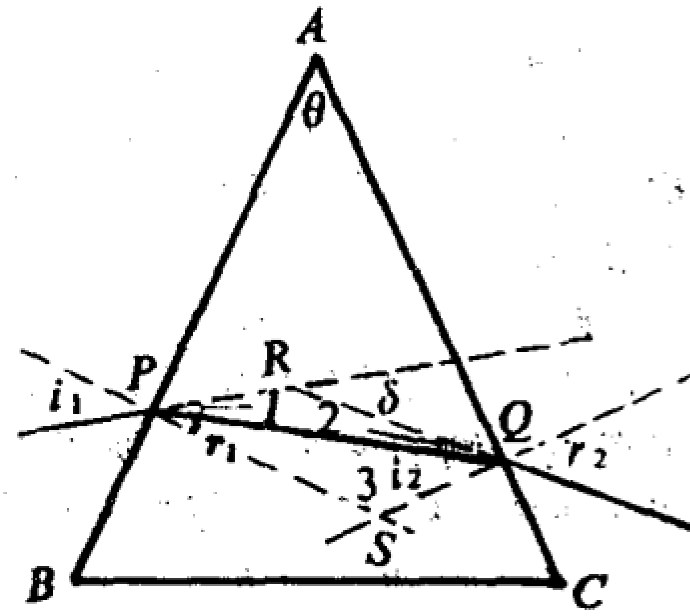
令 $L'(x) = 0$,得 $\dfrac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \dfrac{a - x}{\sqrt{h^2 + (a - x)^2}}$,由此直接求驻点比较繁难. 由图可见,

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \sin A, \quad \frac{a - x}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}} = \sin B.$$

于是 $\sin A = \sin B$. 现 A 与 B 都是锐角,所以 $A = B$,从而 $\triangle AA_1C \backsim \triangle BB_1C$,由此推得 $\dfrac{h}{x} = \dfrac{h_1}{a - x}$,或 $h(a - x) = h_1x$,从而求得唯一的驻点为 $x = \dfrac{ah}{h + h_1}$,且 $L''(\dfrac{ah}{h + h_1}) > 0$,因此 $L(x)$ 在 $x = \dfrac{ah}{h + h_1}$ 时取得极小值,也就是取得$[0,a]$上的最小值. 因此,距 A_1 为 $\dfrac{ah}{h + h_1}$ 的点 C 到 A 与 B

的距离之和为最小.

3.4.99　在摄谱仪或分光光度计的设计中，通常要把棱镜放在最小偏向角的位置，如图所示，ABC 为三棱镜，顶角为 θ，光线从 AB 面射入，穿过棱镜后从 AC 面射出，入射光线和出射光线的夹角 δ 叫做偏向角. 试证：当折射角等于棱镜顶角的一半时，偏向角最小（这时，光线在棱镜内部与棱镜底边平行，入射角 i_1 等于出射角 γ_2）.



3.4.99 题图

证　如图，在 $\triangle PQR$ 中，外角 δ 等于不相邻的两个内角之和：$\delta = \angle 1 + \angle 2$，而 $\angle 1 = i_1 - \gamma_1$，$\angle 2 = \gamma_2 - i_2$，于是

$$\delta = (i_1 - \gamma_1) + (\gamma_2 - i_2),$$

根据光的折射定律应有

$$\frac{\sin i_1}{\sin\gamma_1} = k,\quad \frac{\sin\gamma_2}{\sin i_2} = k,$$

或
$$i_1 = \arcsin(k\sin\gamma_1),\ \gamma_2 = \arcsin(k\sin i_2),$$

由四边形 $APSQ$ 可知：$\theta + \angle 3 = 180°$，而 $\angle 3 + \gamma_1 + i_2 = 180°$，所以 $\theta = \gamma_1 + i_2$ 或 $i_2 = \theta - \gamma_1$，于是

$$\begin{aligned}\delta(\gamma_1) &= i_1 - \gamma_1 + \gamma_2 - i_2 \\ &= \arcsin(k\sin\gamma_1) - \gamma_1 + \arcsin[k\sin(\theta - \gamma_1)] - (\theta - \gamma_1),\end{aligned}$$

而
$$\delta'(\gamma_1) = \frac{k\cos\gamma_1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma_1}} - 1 + \frac{-k\cos(\theta - \gamma_1)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\theta - \gamma_1)}} + 1,$$

令 $\delta'(\gamma_1) = 0$，得

$$\frac{\cos\gamma_1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\gamma_1}} = \frac{\cos(\theta - \gamma_1)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\theta - \gamma_1)}},$$

或
$$\begin{aligned}&[\cos^2\gamma_1 - \cos^2(\theta - \gamma_1)] \\ &\quad - k^2[\cos^2\gamma_1\sin^2(\theta - \gamma_1) - \sin^2\gamma_1\cos^2(\theta - \gamma_1)] = 0,\end{aligned}$$

$$\frac{1 + \cos 2\gamma_1}{2} - \frac{1 - \cos(2\theta - 2\gamma_1)}{2} - k^2\sin\theta\sin(\theta - 2\gamma_1) = 0,$$

$$-\sin\theta\sin(2\gamma_1 - \theta) - k^2\sin\theta\sin(\theta - 2\gamma_1) = 0,$$

$$(1 - k^2)\sin\theta\sin(\theta - 2\gamma_1) = 0,$$

因为 $1-k^2\neq 0,\sin\theta\neq 0$，所以 $\sin(\theta-2\gamma_1)=0$，从而求得確一的驻点为 $\gamma_1=\frac{\theta}{2}$，且在 $\gamma_1=\frac{\theta}{2}$ 时，$\delta(\gamma_1)$ 取得极小值(读者自行验证)，于是取得最小值.

3.4.100 当 $0<x<1$ 时，有近似公式 $\sqrt{x}\approx\frac{4}{15}+\frac{4}{5}x$，问 x 取得何值时，该近似公式有最大误差？

解 设在 x 处误差为 $f(x)$，则有

$$f(x)=\sqrt{x}-\frac{4}{15}-\frac{4}{5}x,\quad (0<x<1),$$

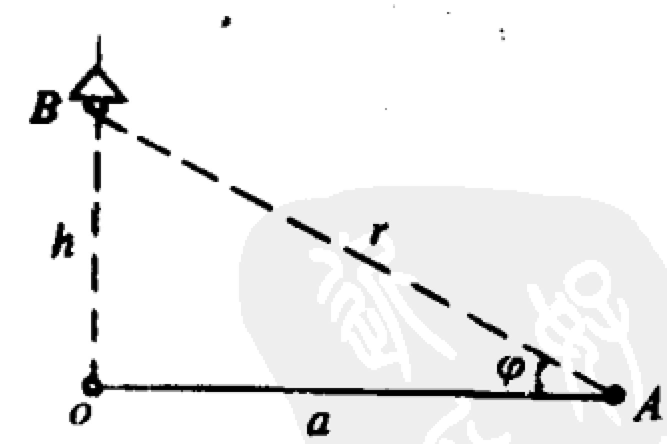
这样，问题归结为讨论 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上哪一点取得最大值？

由于 $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{5},\quad f''(x)=-\frac{1}{4x^{3/2}},$$

令 $f'(x)=0$，得 $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{5}=0$，从而求得唯一的驻点 $x=\frac{25}{64}$，且 $f''(\frac{25}{64})<0$，因此，$f(x)$ 在 $x=\frac{25}{64}$ 处取得最大值，也就是当 $x=\frac{25}{64}$ 时有最大误差，最大误差为

$$f_{\max}=f(\frac{25}{64})=\sqrt{\frac{25}{64}}-\frac{4}{15}-\frac{4}{5}\times\frac{25}{64}=\frac{11}{240}\approx 0.0458.$$

3.4.101 设圆桌面的半径为 a，应该在桌面中央上方多高的地方安置电灯，才可使桌子边缘上的照度最大？(照度 $I=k\frac{\sin\varphi}{r^2}$，式中 φ 为光线倾斜的角度，r 为光源与被照处的距离，k 为光源强度).



3.4.101 题图

解 如图所示，设高度 $OB=h$ 时的照度为 $I(h)$，则有

$$I(h)=k\frac{\sin\varphi}{r^2}=k\frac{\frac{h}{r}}{r^2}=\frac{kh}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\quad (h>0),$$

$$I'(h)=k\frac{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\cdot 1-h\cdot\frac{3}{2}(h^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h}{(h^2+a^2)^3}$$

$$= k\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $I'(h) = 0$，得 $a^2 - 2h^2 = 0$，从而求得唯一的驻点为 $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$，且当 $h < \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 $I'(h) > 0$；当 $h > \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 $I'(h) < 0$，因此，当 $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 $I(h)$ 取得极大值，也就是取得最大值. 因此灯离桌面高度应为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

也可选取 φ 作自变量，这时

$$I(\varphi) = k\frac{\sin\varphi}{r^2} = k\frac{\sin\varphi}{(a\sec\varphi)^2} = \frac{k}{a^2}\sin\varphi\cos^2\varphi,\ (0 < \varphi < \frac{\pi}{2}),$$

$$I'(\varphi) = \frac{k}{a^2}(\cos\varphi \cdot \cos^2\varphi - \sin\varphi \cdot 2\cos\varphi\sin\varphi)$$

$$= \frac{k}{a^2}(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi),$$

$$I''(\varphi) = \frac{k}{a^3}(-3\cos^2\varphi\sin\varphi - 4\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi + 2\sin^2\varphi \cdot \sin\varphi)$$

$$= \frac{k}{a^2}\sin\varphi(-7\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi).$$

令 $I'(\varphi) = 0$，得 $\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi = \cos\varphi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi) = 0$，因为 $\cos\varphi \neq 0$，所以 $\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi = 0$，从而解得唯一的驻点为 $\varphi^* = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $I''(\varphi^*) = \frac{k}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-7 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3}) < 0$，因此当 $\varphi^* = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 $I(\varphi)$ 取得极大值，也就是取得最大值，这时

$$h = \operatorname{arctg}\varphi = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

3.4.102　对量 A 做了 n 次测量，测得 n 个数值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 通常将与这 n 个数差的平方和为最小的一个数 x 作为 A 的值，试求 x.

解　设 $Q = \sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2$

$$= (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2,\ (x > 0)$$ 则

$$\frac{dQ}{dx}=\sum_{i=1}^{n}2(x-x_i)=2[(x-x_1)+(x-x_2)+\cdots+(x-x_n)],$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2}=\sum_{i=1}^{n}2=2n>0,$$

令$\frac{dQ}{dx}=0$，得$x-x_1+x-x_2+\cdots+x-x_n=0$.

从而求得唯一的驻点$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$. 当$x=\bar{x}$时，$\frac{d^2Q}{dx^2}>0$，因此当$x=\bar{x}$时，$Q$取极小值，也就是取得最小值. 即

$$x=\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

3.4.103 一颗雨滴因重力作用而下降，同时均匀地蒸发着. 假定不计空气阻力，问下降多少秒钟后，动能最大？

解 设下降t秒后的动能为E，则$E=\frac{1}{2}mv^2$. 由于雨滴均匀地蒸发，设下降开始时的质量$m=m_0$，并设蒸发的速率为k，则t秒后的质量$m=m_0-kt$. 因雨滴作自由落体运动，故$v=gt$（g是重力加速度），把m与v代入E，得动能与时间之间的函数关系为

$$E=\frac{1}{2}(m_0-kt)g^2t^2.$$

设雨滴降到地面所需的时间为t_0秒，则该函数的定义域是$0\leqslant t\leqslant t_0$. 该问题即为所求函数$E$在$[0,t_0]$上的最大值.

对t求导，得

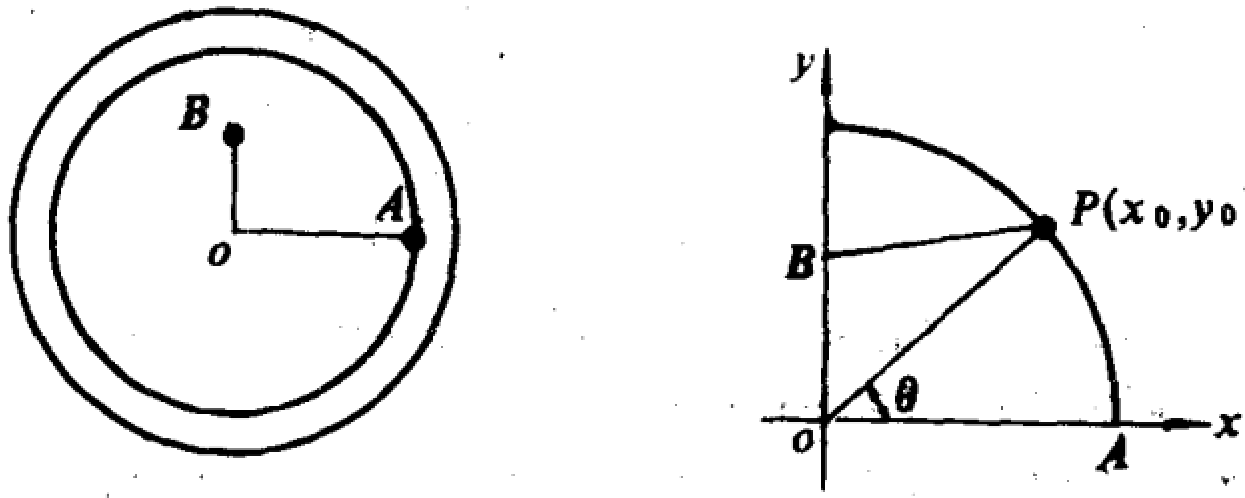
$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}g^2(2m_0t-3kt^2),\ \frac{d^2E}{dt^2}=g^2(m_0-3kt).$$

令$\frac{dE}{dt}=0$得$t_1=0$，$t_2=\frac{2m_0}{3k}$，t_1不合要求，可以不必考虑. 对于t_2可分两种情况讨论：

(1) $0<t_2<t_0$. 由于$\frac{d^2E}{dt^2}\big|_{t=t_2}=g^2(m_0-3kt)_{t=t_2}=-m_0g^2<0$，故在$t=t_2$时，$E$取得极大值. 又因$E$只有唯一的极值，该极大值也就是$E$的最大值. 即雨滴下降$t_2=\frac{2m_0}{3k}$秒后，动能最大.

(2) $t_2 > t_0$，这时 t_2 不在 E 的定义域内，$\frac{dE}{dt}$ 在 $0 < t < t_0$ 内永远大于零，故 E 是单调增加的函数，因此在 $t = t_0$ 时具有最大值. 即雨滴落地时刻动能最大.

3.4.104　在直径为 4km 的圆形湖面上有一个亭子 B，距湖心 O 为 1km，如图所示，沿湖岸有一条环湖公路，公路上摩托车的速度为湖中划船速度的 4 倍. 现在有人要从 A 点到亭 B 去，先乘摩托车，然后换乘船，问应在何处换乘船，才能以最短的时间到达亭 B？



(a)　　　　3.4.104 题图　　　　(b)

解　如图建立坐标系. 设 APB 为所走的路线. 点 $P(x_0, y_0)$ 为换乘点. $\angle AOP = \theta$，设船速为 $v$km/h.

由题设知，$OA = OP = 2$(km)，$OB = 1$(km)，设 t 为走完 APB 路线所需的时间，则

$$t = \frac{2\theta}{4v} + \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sin\theta}}{v} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}),$$

即
$$t = \frac{\theta}{2v} + \frac{\sqrt{5 - 4\sin\theta}}{v} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}),$$

求导数，得 $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2v}(1 - \frac{4\cos\theta}{\sqrt{5 - 4\sin\theta}})$，令 $\frac{dt}{d\theta} = 0$，得

$$1 - \frac{4\cos\theta}{\sqrt{5 - 4\sin\theta}} = 0,$$

即 $\sqrt{5 - 4\sin\theta} = 4\cos\theta$，化简得，$16\sin^2\theta - 4\sin\theta - 11 = 0$，由此解得

$$\sin\theta = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}, \quad \sin\theta = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{8}\text{(舍去)},$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{8}.$$

$P(x_0,y_0)$ 点的坐标为

$$x_0=2\cos\theta=\frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{4},\ y_0=2\sin\theta=\frac{1+3\sqrt{5}}{4}.$$

又 $$\frac{d^2t}{d\theta^2}=-\frac{2}{v}\left(\frac{1}{\sqrt{5-4\sin\theta}}\cos\theta\right)'$$

$$=-\frac{2}{v}\left[-\frac{1}{2}\frac{-4\cos^2\theta}{(\sqrt{5-4\sin\theta})^3}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\sin\theta}}\right]$$

$$=\frac{2}{v}\left(\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}-\frac{2\cos^2\theta}{(4\cos\theta)^3}\right)=\frac{1}{2v}\frac{8\sin\theta-1}{8\cos\theta}.$$

故 $$\left.\frac{d^2t}{d\theta^2}\right|_{\theta=\arcsin\frac{1+3\sqrt{5}}{8}}=\frac{1}{2v}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}>0,$$

所以，当 $\theta=\arcsin\dfrac{1+3\sqrt{5}}{8}$ 时，$t(\theta)$ 取极小值. 又因极值点唯一，这即为最小值.

于是，换乘点为 $P\left(\dfrac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{4},\dfrac{1+3\sqrt{5}}{4}\right)$ 时，才能以最短的时间达到亭 B.

4. 曲线的凹凸性与拐点

3.4.105 如果 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的凸函数，则 $f(x)$ 在 I 的任一闭子区间上有界.

证 设 $[A,B]$ 是 I 的任一闭子区间. 任给 $x\in[A,B]$，总存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $x=\lambda A+(1-\lambda)B$，因此，由凸函数的定义，得

$$f(x)\leqslant\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)\leqslant\max[f(A),f(B)],\qquad(*)$$

所以 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上有上界，设 M 是 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上的一个上界.

再证 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上有下界. 设 $x\in[A,B]$，令 $t=x-\dfrac{1}{2}(A+B)$，则 $x=\dfrac{1}{2}(A+B)+t$，且 $\dfrac{1}{2}(A+B)-t=A+B-x$. 因 $A\leqslant x\leqslant B$，

所以 $A \leqslant A+B-x \leqslant B$,故$\frac{1}{2}(A+B)-t \in [A,B]$. 于是

$$f(\frac{A+B}{2}) = f[\frac{1}{2}(\frac{A+B}{2}+t)+\frac{1}{2}(\frac{A+B}{2}-t)]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[f(\frac{A+B}{2}+t)+f(\frac{A+B}{2}-t)]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[f(x)+M],$$

从而 $\quad f(x) \geqslant 2 \cdot f(\frac{A+B}{2}) - M,$

综上所述,可知 $f(x)$ 在$[A,B]$上既有上界又有下界,因此有界.

注 从 $f(x)$ 是开区间 I 上的凸函数,得不出 $f(x)$ 在整个区间 I 上有界的结论. 例如:$f(x)=\frac{1}{x}$,$x \in (0,\infty)$,不难验证 $f(x)$ 满足(*)式,但 $f(x)$ 在$(0,\infty)$中是无界的.

3.4.106 如果 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的凸函数,证明:对于 I 中任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{1}$$

证 令 $\lambda = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$,则 $0<\lambda<1$,且 $1-\lambda=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$ 及 $x_2=\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. 由凸函数的定义,有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3),$$

即 $\quad f(x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3),$

从而 $\quad f(x_2)-f(x_1) \leqslant (1-\lambda)[f(x_3)-f(x_1)],$

$$f(x_3)-f(x_2) \geqslant \lambda[f(x_3)-f(x_1)].$$

于是 $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \geqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

将以上两式合并,即得(1)式.

3.4.107 设函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内两次可微,证明:$f(x)$ 在(a,b)内为凸函数的充要条件是:对任何 $x \in (a,b)$,总有

$$f''(x) \geqslant 0. \tag{1}$$

证 必要性. 设 $f(x)$ 是(a,b)内可微分二次的凸函数,则对于(a,b)内的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

成立.对任意的 $a < x_1 < x_2 < b$,取 h 使得

$$|h| < \min(x_1 - a, \frac{x_2 - x_1}{2}, b - x_2),$$

则总有　$a < x_1 + h < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 + h < b$. 于是有

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \leqslant \frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})-f(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{f(x_2)-f(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{x_2-x_1}{2}} \leqslant \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}. \tag{2}$$

在(2)式中令 $h \to 0$,得 $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. 即 $f'(x)$ 是 (a,b) 内的不减函数,故对任意的 $x \in (a,b)$,都有 $f''(x) > 0$.

充分性.设对任意的 $x \in (a,b)$,都有 $f''(x) > 0$,假若 $f(x)$ 不是凸函数,则存在 $x_1 \in (a,b)$,$x_2 \in (a,b)$,$x_1 \neq x_2$,$0 < \lambda < 1$,使得

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < 0. \tag{3}$$

令 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$,由泰勒公式,有

$$f(x_1) = f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \frac{f''(\theta_1)}{2}(x - x_1)^2, \tag{4}$$

$$f(x_2) = f(x) + f'(x)(x_2 - x) + \frac{f''(\theta_2)}{2}(x - x_2)^2, \tag{5}$$

其中 $\theta_1 \in (a,b)$,$\theta_2 \in (a,b)$.给(4)式乘以 λ,(5)式乘以 $(1-\lambda)$,然后相加得

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$$
$$+ \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2[\lambda f''(\theta_1) + (1-\lambda)f''(\theta_2)]. \tag{6}$$

将(6)式代入(3)式,得

$$\lambda f''(\theta_1) + (1-\lambda)f''(\theta_2) < 0.$$

所以,$\min[f''(\theta_1), f''(\theta_2)] \leqslant \lambda f''(\theta_1) + (1-\lambda)f''(\theta_2) < 0$. 这与条件 $f''(x) \geqslant 0, x \in (a,b)$ 矛盾.充分性证毕.

注　由证明可知:$f(x)$ 在区间 (a,b) 内可微两次且严格凸的充要条件是:

$$f''(x) > 0,\quad x \in (a,b).$$

3.4.108　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且在 (a,b) 内有 $f''(x) > 0$，证明：$f(x)$ 的图象位于 (a,b) 内任意点 c 对应的点 $(c,f(c))$ 处切线的上方.

证　令 $c \in (a,b)$，$x \in [a,b]$，且 $x \neq c$，把 $f(x)$ 在 c 点作泰勒展开，得

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,\quad a < \xi < b.$$

由题设知 $f''(\xi) > 0$，故

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x-c),$$

因为 $y = f(c) + f'(c)(x-c)$ 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(c,f(c))$ 处的切线方程，故 $f(x)$ 的图象位于该切线的上方.

3.4.109　设函数 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续可微函数，并设对于 (a,b) 内的任何 x,y，都存在唯一的点 z，使得 $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$. 证明：$f(x)$ 或者是严格上凸函数，或者是严格下凸函数.

证　若不然，则存在点 $\alpha,\beta \in (a,b)$，使得通过点 $(\alpha,f(\alpha))$ 和 $(\beta,f(\beta))$ 的直线与函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图象交于异于 $(\alpha,f(\alpha))$ 和 $(\beta,f(\beta))$ 的点 $(\gamma,f(\gamma))$，为确定起见，设 $\alpha < \gamma < \beta$，在 $[\alpha,\gamma]$ 和 $[\gamma,\beta]$ 上应用拉格朗日中值定理，即得到矛盾.

3.4.110　证明凸函数基本不等式：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是下（上）凸的，则对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in (a,b)$，分别有

(1) $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$;

(2) $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqslant \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

其中等号只能在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或 $f(x)$ 为一次函数时成立.

以下凸为例证明之.

证　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内是下凸的，则对任意的 $x_0,x \in (a,b)$，有

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in (a,b)$，取 $x_0 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$，当然有

$$f(x_i) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_i-x_0),\ (i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant nf(x_0) + f'(x_0)(\sum_{k=1}^{n} x_i - nx_0)$$

$$= n[f(x_0) + f'(x_0)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i - x_0)] = nf(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i),$$

故 $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

注 这是凸函数的一个重要性质,在证明不等式时经常用到.

3.4.111 当 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 时,证明

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

证 设 $f(x) = -\ln x,\ (x > 0)$,则 $f'(x) = -\frac{1}{x}, f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$,所以有

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geqslant f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}).$$

即 $$\frac{-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n}{n} \geqslant -\ln\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

$$\frac{\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n} \leqslant \ln\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

亦即 $$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

3.4.112 设 $x > 0, y > 0$,证明

$$x\ln x + y\ln y \geqslant (x + y)\ln\frac{x + y}{2},$$

等号仅当 $x = y$ 时成立.

证 取 $f(x) = x\ln x$,则

$$f'(x) = \ln x + 1,\ f''(x) = \frac{1}{x}.$$

因 $f''(x) > 0$,故 $f(\frac{x + y}{2}) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$,即

$$\frac{x + y}{2}\ln\frac{x + y}{2} \leqslant \frac{1}{2}(x\ln x + y\ln y).$$

显然,当 $x = y$ 时等号成立.

3.4.113 设 $x_k > 0(k = 1,2,\cdots,n)$,证明

$$\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)\leqslant \ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

等号仅在 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

证　令 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$,当 $x<0$ 时, $f''(x)<0$,故

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)),$$

把 $f(x)=\ln x$ 代入得

$$\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$$

显然,等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

3.4.114　求函数 $y=x^5+5x-6$ 图形的上、下凸区间.

解　因 $y'=5x^4+5,y''=20x^3$,当 $x<0$ 时,有 $y''<0$,所以,函数的图形在 $(-\infty,0)$ 内是上凸的;当 $x>0$ 时,有 $y''>0$,所以函数的图形在 $(0,+\infty)$ 内是下凸的. 于是,函数图形的上凸区间是 $(-\infty,0)$,下凸区间是 $(0,+\infty)$.

3.4.115　讨论下列函数的凹凸性.

(1) e^x;　(2) $\ln x$,　(3) $x\ln x$.

解　(1) $f(x)=e^x,f''=e^x>0,x\in(-\infty,\infty)$. 故 e^x 在 $(-\infty,\infty)$ 内下凸.

(2) $f(x)=\ln x,f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,x>0$. 故 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内上凸.

(3) $f(x)=x\ln x,f'(x)=\ln x+1,f''(x)=\frac{1}{x}>0,x>0$,故函数 $x\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内下凸.

3.4.116　讨论幂函数 $f(x)=x^a$ 的凹凸性.

解　当 $x\in(0,+\infty)$ 时,对于任意实数 a,我们有:

x^a　$x\in(0,+\infty)$	$a>0$		$a<0$
	$a>1$	$a<1$	
$f''(x)=a(a-1)x^{a-2}$	>0	<0	>0
$f(x)=x^a$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

在$(-\infty,0)$中的凸性讨论，留给读者练习(只讨论α为有理数的情形).

3.4.117 求函数$y=(x+1)^2(x-2)$的极值和图象的拐点.

解 $y'=3(x^2-1)$，令$y'=0$，求得驻点为$x_1=-1,x_2=1$.

又$y''=6x$，$y''|_{x=-1}=-6<0$，$y''|_{x=1}=6>0$，

因此，在$x=-1$时函数y有极大值$y(-1)=0$；在$x=1$时函数y有极小值$y(1)=-4$.

为求拐点，令$y''=0$，得$x=0$，当x由负渐增的变为正时，y''的值也由负变为正，因此，$(0,-2)$是函数图象的拐点.

3.4.118 求曲线$y=(x-5)^{5/3}+2$的拐点.

解 $y'=\dfrac{5}{3}(x-5)^{2/3}$，$y''=10/9\sqrt[3]{x-5}$.

函数的二阶导数处处不等于0，但是在$x=5$处不存在. 由于$y''|_{x=5-h}<0$，$y''|_{x=5+h}>0$，所以曲线在$x=5$处有拐点$(5,2)$.

3.4.119 已知平面曲线$y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$，

(1) 求出曲线的全部拐点；

(2) 证明曲线的全部拐点位于同一直线上.

解 (1) $y'=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$，$y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^2}$.

令$y''=0$，即得$x^3+3x^2-3x-1=(x-1)(x^2+4x+1)=0$，

由此解得$x_1=-2-\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=1$.

由于 $-2-\sqrt{3}<-2+\sqrt{3}<1$，

$$y''=\frac{2(x-1)[x-(-2-\sqrt{3})][x-(-2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^2},$$

故当$x<-2-\sqrt{3}$时，$y''<0$；$-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3}$时，$y''>0$；$-2+\sqrt{3}<x<1$时，$y''<0$；$x>1$时，$y''>0$.

由此可知，$x_1=-2-\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=1$都是曲线拐点的横坐标，对应的纵坐标分别为

$$y_1=\frac{-\sqrt{3}+1}{4},\quad y_2=\frac{\sqrt{3}+1}{4},\quad y_3=1.$$

于是，曲线共有三个拐点：$\left(-2-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}+1}{4}\right)$，$\left(-2+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)$ 和(1,1).

(2) 由

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\sqrt{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{4} & 1 \\ -2+\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}+1}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{-(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)}{4}+\frac{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)}{4}=0,$$

可得，三个拐点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)在同一条直线上.

3.4.120 确定曲线 $y=(x+1)^4+e^x$ 的凹向与拐点.

解 $y'=4(x+1)^3+e^x$，$y''=12(x+1)^2+e^x>0$，因此曲线在$(-\infty,+\infty)$内是凹的，没有拐点.

3.4.121 确定正态曲线 $y=e^{-x^2}$ 的凹向与拐点.

解 $y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

令 $y''=0$，解得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''>0$；当 $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''<0$；当 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''>0$. 因此曲线在 $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 内是凹的；在 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 内是凸的；在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ 内是凹的. 而点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 与 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 都是曲线的拐点.

3.4.122 确定曲线 $y=\frac{x^3}{x^2+3a^2}\ (a>0)$ 的凹向与拐点.

解 $y'=\frac{(x^2+3a^2)\cdot 3x^2-x^3\cdot 2x}{(x^2+3a^2)^2}=\frac{x^4+9a^2x^2}{(x^2+3a^2)^2}$；

$$y''=\frac{(x^2+3a^2)^2\cdot(4x^3+18a^2x)-(x^4+9a^2x^2)\cdot 2(x^2+3a^2)\cdot 2x}{(x^2+3a^2)^4}$$

$$= \frac{-6a^2x(x^2-9a^2)}{(x^2+3a^2)^3}.$$

令 $y''=0$,得 $-6a^2x(x^2-9a^2)=0$,从中解得 $x=0, x=\pm 3a$,这三个点把$(-\infty,+\infty)$分成四个子区间,讨论 y'' 的符号如下表:

x	$(-\infty,-3a)$	$-3a$	$(-3a,0)$	0	$(0,3a)$	$3a$	$(3a,+\infty)$
$y''=\frac{-6a^2x(x^2-9a^2)}{(x^2+3a^2)^3}$	+	0	−	0	+	0	−
曲线 $y=f(x)$	⌣	$-\frac{9a}{4}$	⌢	0	⌣	$\frac{9a}{4}$	⌢

点$(-3a,-\frac{9a}{4})$,$(0,0)$与$(3a,\frac{9}{4}a)$为曲线的拐点.

3.4.123 确定 $y=a-\sqrt[3]{x-b}$ 的凹向与拐点.

解 $y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-b)^2}}$, $y''=\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-b)^5}}$.在 $x=b$ 处 y'' 不存在.$x=b$ 把$(-\infty,+\infty)$分成两个子区间$(-\infty,b)$与$(b,+\infty)$.

在$(-\infty,b)$内,$y''<0$,曲线是凸的;

在$(b,+\infty)$内,$y''>0$,曲线是凹的.

故点(b,a)是曲线的拐点.

3.4.124 确定 $y=\text{tg}x$ 的凹向与拐点.

解 $y'=\sec^2 x$, $y''=2\sec^2 x\text{tg}x$.

令 $y''=0$,得 $\sec^2x\text{tg}x=0$,解得 $x=k\pi$,而在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处 y'' 不存在,因此

在$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi)$内,$y''<0$,曲线是凸的;

在$(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$内,$y''>0$,曲线是凹的.

由于在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 处函数无定义,曲线间断;而点$(k\pi,0)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$是曲线的拐点.

3.4.125 试证:曲线 $y=x\sin x$ 的拐点必在曲线 $y^2(4+x^2)=4x^2$ 上.

证　$y' = x\cos x + \sin x$,

$y'' = (\cos x - x\sin x) + \cos x = 2\cos x - x\sin x$,

拐点的横坐标应满足 $y'' = 0$ 或 $2\cos x - x\sin x = 0$. 显见 $x \neq 0$, 从而 $x = 2\mathrm{ctg}x$, 而纵坐标 $y = x\sin x = 2\cos x$. 于是, 问题便归结为验证 $x = 2\mathrm{ctg}x, y = 2\cos x$ 是否满足 $y^2(4 + x^2) = 4x^2$. 为此, 将 $x = 2\mathrm{ctg}x$, $y = 2\cos x$ 代入, 得

左边 $= 4\cos^2 x(4 + 4\mathrm{ctg}^2 x) = 4\cos^2 x \cdot 4\csc^2 x = 16\mathrm{ctg}^2 x$,

右边 $= 4 \cdot 4\mathrm{ctg}^2 x = 16\mathrm{ctg}^2 x$,　左边 = 右边,

因此拐点必在曲线 $y^2(4 + x^2) = 4x^2$ 上.

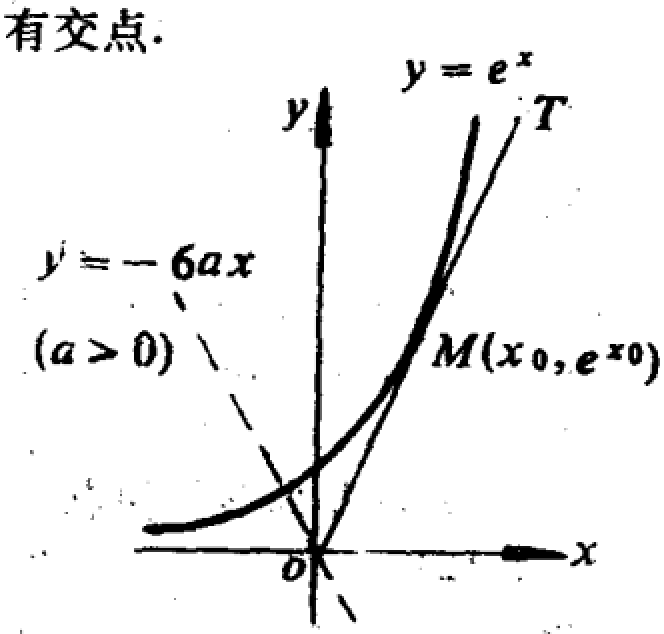
3.4.126　如果曲线 $y = e^x + ax^3$ 有拐点, 试求 a 之值.

解　$y' = e^x + 3ax^2$, $y'' = e^x + 6ax$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

要使曲线有拐点, 首先要使 $y'' = 0$ 或 $e^x + 6ax = 0$, 即 $e^x = -6ax$ 有解. 这相当于曲线 $y = e^x$ 与 $y = -6ax$ 有交点.

如果 $a > 0$(从而 $-6a < 0$), 直线 $y = -6ax$ 必与 $y = e^x$ 相交, 且容易验证交点的横坐标 x 所对应的曲线上的点是拐点.

如果 $a < 0$(从而 $-6a > 0$), 直线 $y = -6ax$ 与曲线 $y = e^x$ 相交的极限位置就是该直线与曲线相切时的位置. 为此求该切线 OT 所对应的 a 值, 设切点 M 的坐标为 (x_0, e^{x_0}).



3.4.126 题图

因为曲线 $y = e^x$ 的切线斜率为 $y' = e^x$, 所以 OT 的斜率 $k = e^{x_0}$, 于是 OT 的方程为 $y = e^{x_0}x$. 又 M 在 OT 上, 故有 $e^{x_0} = e^{x_0}x_0$, 即 $x_0 = 1$, 因此 $-6a = k = e^1 = e$, 即直线 OT 所对应的 a 值为 $-\frac{e}{6}$. 故当 $a \leqslant -\frac{e}{6}$ 时, 直线 $y = -6ax$ 与曲线相交, 且容易验证交点横坐标 x 所对应的曲线上的点是拐点.

总之, 当 $a \leqslant -\frac{e}{6}$ 或 $a > 0$ 时曲线有拐点.

3.4.127　设函数 $y = f(x)$ 的二阶导数连续, 且点 $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}.$$

解 原式$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(a+h)+f''(a-h)}{2}=f''(a)=0.$$

5. 渐近线

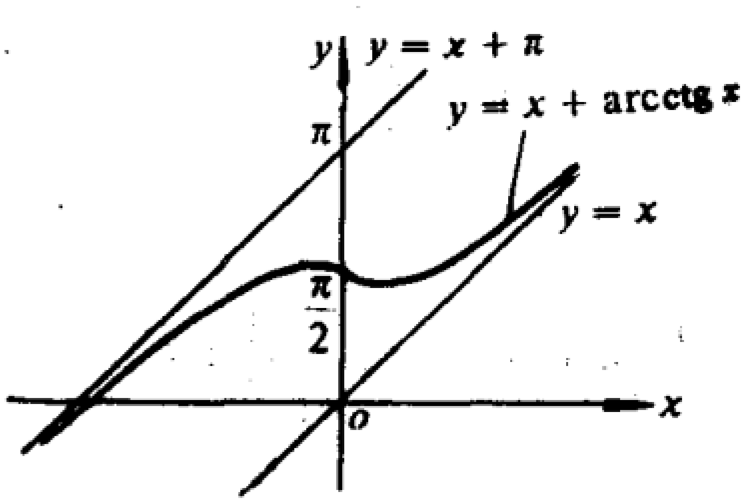
3.4.128 求 $f(x)=x+\operatorname{arcctg}x$ 的斜渐近线.

解 因 $\dfrac{f(x)}{x}=1+\dfrac{\operatorname{arcctg}x}{x}\to 1\quad(x\to\infty)$,

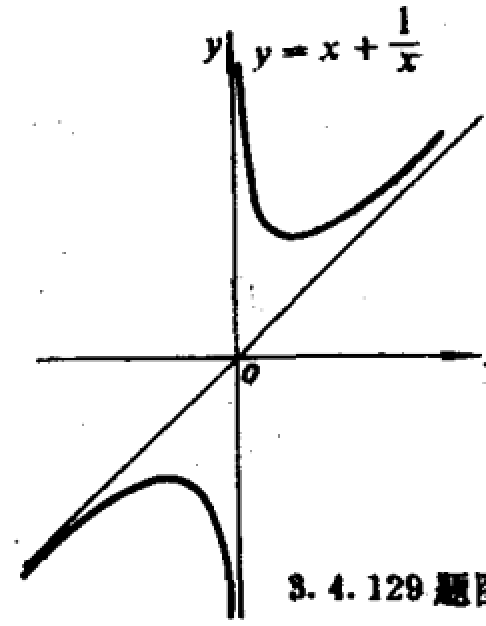
$$f(x)-x=\operatorname{arcctg}x\begin{cases}\to 0 & (x\to+\infty),\\ \to\pi & (x\to-\infty).\end{cases}$$

故曲线 $y=x+\operatorname{arcctg}x$ 有两条斜渐近线:

$$y=x;\quad y=x+\pi.$$



3.4.128 题图



3.4.129 题图

3.4.129 讨论函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 图形的渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\dfrac{1}{x})=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(x+\dfrac{1}{x})=-\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+\frac{1}{x})-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的竖直渐近线,$y=x$ 是 $f(x)$ 的斜渐近线. $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图象为双曲线.

斜渐近线可以用以下的方法来求.

设 $f(x)$ 的图象存在斜渐近线 $y=ax+b$，那么

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}=0,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}]=0$，

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-a]=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$.

反之，若最后这两个极限存在，那么 $f(x)$ 的图象就一定有斜渐近线 $y=ax+b$.

3.4.130 求曲线 $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$，$(x>0)$ 的渐近线.

解 设渐近线方程为 $y=kx+b$，则

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0,$$

由此可知，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{e},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}-\frac{x}{e})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}x(e-(1+\frac{1}{x})^x)$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to0^+}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=-\frac{1}{e^2}\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)]$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln x}{x(1+x)}=-\frac{1}{e}\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}=\frac{1}{2e}.$$

因此，渐近线方程为

$$y=\frac{x}{e}+\frac{1}{2e}=\frac{2x+1}{2e}.$$

3.4.131 已知 $y=f(x)$ 有倾斜渐近线，并且 $f''(x)>0$，证明：函数 $y=f(x)$ 的图象从上方接近这条渐近线.

解 设渐近线的方程为 $y=ax+b$，讨论函数 $g(x)=f(x)-ax-$

b，显然，当 $x\to\infty$ 时，$g(x)\to 0$，$g''(x)=f''(x)>0$，假定在某个点 x_0 有 $g'(x_0)=c>0$，那么当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>c$，由此可得 $g(x)>g(x_0)+c(x-x_0)$，$(x>x_0)$，因而与条件 $g(x)\to 0(x\to\infty)$ 矛盾. 所以处处有 $g'(x)\leqslant 0$，故 $g(x)$ 单调不增. 如果对于某个 x_1 有 $g(x_1)=k<0$，那么当 $x>x_1$ 时，$g(x)\leqslant k$，但因 $g(x)\to 0$，故这不可能. 所以 $g(x)\geqslant 0$，当 $g(x_1)=0$ 时，我们有 $g(x)=0(x>x_1$ 时)，这与条件 $g''(x)>0$ 矛盾. 因此，对于任何 x，$g(x)>0$，即 $f(x)>ax+b$，亦即 $f(x)$ 的图象位于渐近线 $y=ax+b$ 的上方.

3.4.132 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2，试确定系数 a、b，并求出 $y=f(x)$ 的所有极大、极小、拐点及单调、凹向区间.

解 由假设有 $f'(1)=3+2a+b=0$，$f(1)=1+a+b=-2$，由此解得 $a=0$，$b=-3$. 从而 $y=f(x)=x^3-3x=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$. 于是，$y'=3(x+1)(x-1)$，$y''=6x$. 由此即知 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处有极小值 -2，在 $x=-1$ 处有极大值 2，且 $(0,0)$ 为拐点.

函数 $f(x)=x^3-3x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由上面求得的一、二阶导数知道，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 内下凹单调增加；在 $(-1,0)$ 内下凹单调减少；在 $(0,1)$ 内上凹单调减少，在 $(1,+\infty)$ 内上凹单调增加.

6. 曲率

3.4.133 设 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 为二函数，解释

(1) $\begin{cases}f(a)=g(a),\\ f'(a)>g'(a),\end{cases}$ (2) $\begin{cases}f(a)=g(a),\\ f'(a)=g'(a),\\ |f''(a)|>|g''(a)|,\end{cases}$

的几何意义.

解 (1) 对于函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$，在 $x=a$ 点，

$$\begin{cases}f(a)=g(a),\\ f'(a)>g'(a)\end{cases}$$

表示两函数的图象在 $x=a$ 点处相交，且在该点曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率大于曲线 $y=g(x)$ 的切线斜率. 于是，在 $x=a$ 点，曲线 $y=f(x)$ 比曲线 $y=g(x)$ 更陡峭.

(2) 对于函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$，在 $x=a$ 点有

$$\begin{cases} f(a)=g(a), \\ f'(a)=g'(a), \\ |f''(a)|>|g''(a)| \end{cases}$$

表示两函数的图象在 $x=a$ 点处相交，且在该点两曲线的切线斜率相等，同时，当 $|f''(a)|>|g''(a)|$ 时，有

$$\left|\frac{f''(a)}{(1+f'^2(a))^{3/2}}\right|>\left|\frac{g''(a)}{(1+g'^2(a))^{3/2}}\right|,$$

即在 $x=a$ 点处，曲线 $y=f(x)$ 的曲率大于曲线 $y=g(x)$ 的曲率，也就是在 $x=a$ 点处，曲线 $y=f(x)$ 比曲线 $y=g(x)$ 更加弯曲些.

3.4.134　已知曲线 c 的方程为 $y=x^2(0\leqslant x<+\infty)$，求 $\frac{dk}{ds}$，其中 k 是曲线 c 在 x 处的曲率，s 是对应于区间 $[0,x]$ 上曲线 c 的一段弧长.

解　由 $y=x^2, y'=2x, y''=2$ 可得，

$$k=\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}},\ \frac{dk}{ds}=\frac{-24x}{(1+4x^2)^{5/2}},\ \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+4x^2},$$

于是　$$\frac{dk}{ds}=-\frac{24x}{(1+4x^2)^{3/2}}\Big/\sqrt{1+4x^2}=-\frac{24x}{(1+4x^2)^3}.$$

3.4.135　试证：如果曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出，则曲率公式为 $k=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$.

证　由 $r=r(\theta)$ 可得曲线的参数方程为 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，而

$$\frac{dx}{d\theta}=r'\cos\theta-r\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=r'\sin\theta+r\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta,\ \frac{d^2y}{d\theta^2}=r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta.$$

于是

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\theta} & \frac{dy}{d\theta} \\ \frac{d^2x}{d\theta^2} & \frac{d^2y}{d\theta^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r'\cos\theta-r\sin\theta & r'\sin\theta+r\cos\theta \\ r''\cos\theta-2r'\sin\theta-r\cos\theta & r''\sin\theta+2r'\cos\theta-r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$=r^2+2r'^2-rr'',$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2=r^2+r'^2.$$

所以　$K = \left| \dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\theta} & \dfrac{dy}{d\theta} \\ \dfrac{d^2x}{d\theta^2} & \dfrac{d^2y}{d\theta^2} \end{vmatrix}}{\left[\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}} \right| = \dfrac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$

3.4.136　求椭圆 $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ $(a > b)$ 的曲率的最大值与最小值.

解　先求椭圆上任一点的曲率.

由 $\dfrac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$, $\dfrac{d^2x}{d\theta^2} = -a\cos\theta$, $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} = -b\sin\theta$,

得　$K = \left| \dfrac{\begin{vmatrix} -a\sin\theta & b\cos\theta \\ -a\cos\theta & -b\sin\theta \end{vmatrix}}{[(-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \right| = \dfrac{ab}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$

其次求 $K_{\max}$ 与 $K_{\min}$.

$$\frac{dK}{d\theta} = -\frac{3ab}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta + b^2 \cdot 2\cos\theta \cdot (-\sin\theta)}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $\dfrac{dK}{d\theta} = 0$,求得 K 在 $(0, 2\pi)$ 的驻点为 $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi$. 由此可得

x	0	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	π	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$\frac{3}{2}\pi$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$	2π
$\frac{dK}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$K = f(\theta)$	$f(0) = \frac{a}{b^2}$	↘	极小值 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{b}{a^2}$	↗	极大值 $f(\pi) = \frac{a}{b^2}$	↘	极小值 $f(\frac{3}{2}\pi) = \frac{b}{a^2}$	↗	$f(2\pi) = \frac{a}{b^2}$

所以　$K_{\max} = \dfrac{a}{b^2}$,　$K_{\min} = \dfrac{b}{a^2}$.

3.4.137　求曲线 $F(x, y) = 0$ 在 $M(x, y)$ 处的曲率半径.

解　将 $F(x, y) = 0$ 两边对 x 求导,得 $F_x + F_y \cdot y' = 0$. 故

$y' = -\frac{F_x}{F_y}$,从而

$$y'' = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}\cdot y') - F_x(F_{yx} + F_{yy}\cdot y')}{F_y^2}$$

$$= -\frac{F_{xx}F_y - F_{xy}F_x + (F_{xy}F_y - F_{yy}F_x)y'}{F_y^2}$$

$$= -\frac{F_{xx}F_y^2 - F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

又 $$1 + y'^2 = 1 + \left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2 = \frac{F_x^2 + F_y^2}{F_y^2},$$

于是,曲率半径

$$R = \left|\frac{(1 + y')^{\frac{3}{2}}}{y''}\right| = \left|\frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}\right|.$$

3.4.138　试求 $y = \sin x$ 在$(\frac{\pi}{2}, 1)$点的曲率圆方程.

解　因为 $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$. 所以 $y'(\frac{\pi}{2}) = 0, y''(\frac{\pi}{2}) = -1$,

于是曲线在点$(\frac{\pi}{2}, 1)$的曲率半径为

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1 + 0^2)^{3/2}}{1} = 1,$$

而曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = 1 + \frac{1}{-1} = 0,$$

因此曲线在点$(\frac{\pi}{2}, 1)$的曲率圆方程为

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = 1 \quad 即 \quad \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

3.4.139　求曲线 $y = \mathrm{tg}x$ 在点$(\frac{\pi}{4}, 1)$处的曲率圆的方程.

解　$y' = \sec^2 x$, $y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2$, $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$.

故在点$(\frac{\pi}{4}, 1)$处的曲率及曲率半径分别为

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{25}, R = \frac{1}{K} = \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

曲率中心为

$$\xi = [x - y' \frac{1+y'^2}{y''}]_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{5}{2},$$

$$\eta = [y + \frac{1+y'^2}{y''}]_{(\frac{\pi}{4},1)} = \frac{9}{4}.$$

于是,所求的曲率圆的方程为

$$(x - \frac{\pi}{4} + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{9}{4})^2 = \frac{125}{16}.$$

7. 函数的作图

3.4.140 讨论函数 $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ 并作图.

解 (1) $f(x)$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 内定义的奇函数,因此图象是关于原点 O 对称的.

(2) $f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = -15x^2(x-1)(x+1)$,

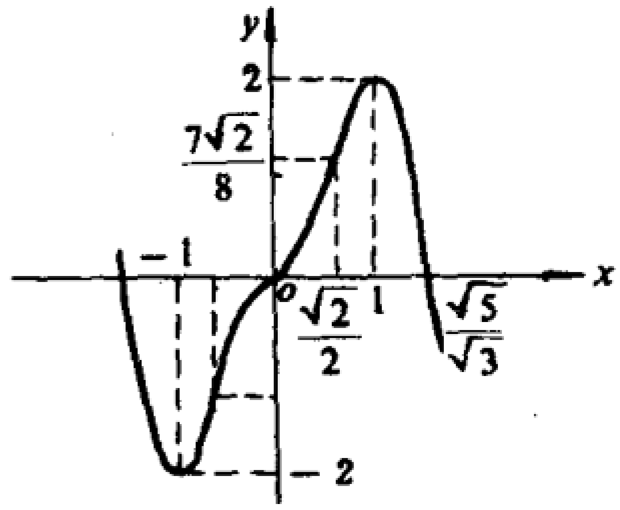
$f''(x) = -60x^3 + 30x = -30x(2x^2-1)$.

令 $f'(x) = 0$,得 $x = 0, \pm 1$;令 $f''(x) = 0$,得 $x = 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

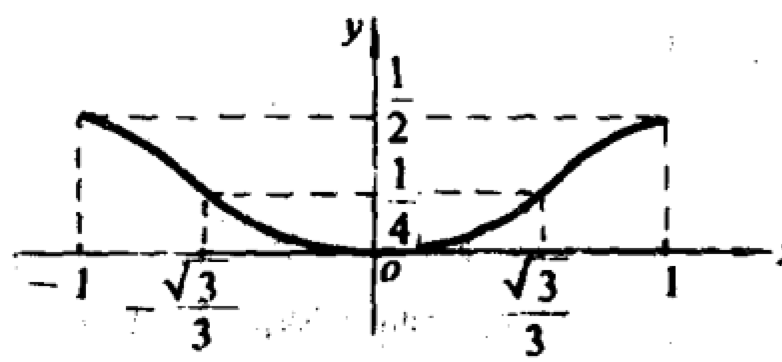
(3) $f(x)$ 没有间断点,也没有 $f'(x)$,$f''(x)$ 不存在的点. $x = -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ 把 $(-\infty, +\infty)$ 分为六个区间,在各区间上的情况列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$	0	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
y	↘	-2 极小值	↗	$-\frac{7\sqrt{2}}{8}$ 拐点	↗	0 拐点	↗	$\frac{7\sqrt{2}}{8}$ 拐点	↗	2 极大值	↘

综合以上讨论结果,作出函数图象如图示.



3.4.140 题图



3.4.141 题图

3.4.141　画出 $x^2 - x^4 + x^6 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n} + \cdots$ 所确定的函数的图象.

解　因 $x^2 - x^4 + x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \cdots = \frac{x^2}{1+x^2}$, $(|x| < 1)$,故设 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ $(|x| < 1)$,则有

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}.$$

令 $f'(x) = 0$,可求得驻点 $x = 0$,再令 $f''(x) = 0$,得 $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 函数变化情况列表如下:

x	$(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$	0	$(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$
$f'(x)$	−		−	0	+		−
$f''(x)$	−	0	+	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$\frac{1}{4}$ 拐点	↘	0 极小值	↗	$\frac{1}{4}$ 拐点	↗

由此可画出草图如上.

3.4.142　求出 $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的单调、凹向区间,极值点、拐点,并作 $f(x)$ 的图形.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$.

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},\ f''(x)=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

令 $f''(x)=0$，求得驻点为 $x=-5,1$.

求渐近线，因 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\infty$，故 $x=-1$ 为铅直渐近线. 无水平渐近线. 由

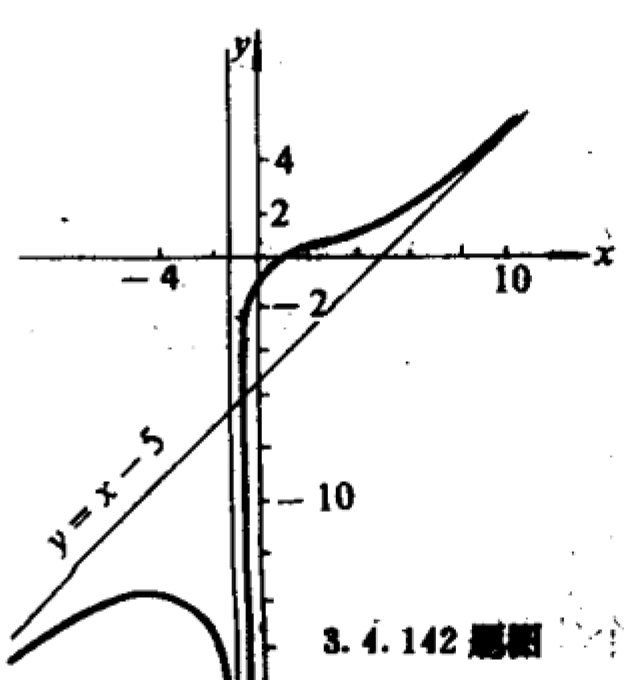
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1=a.$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=-5=b.$$

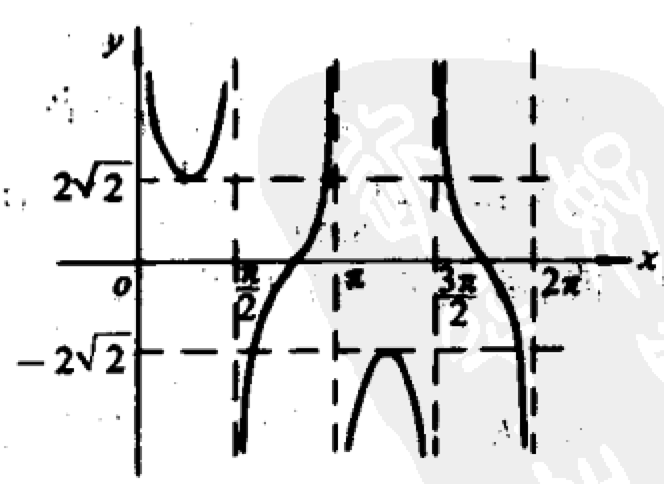
故斜渐近线为 $y=ax+b=x-5$. 列表如下：

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−		+	0	+
$f''(x)$	−	−	−		−	0	+
$f(x)$	↗	极大值点 -13.5	↘	间断	↗	拐点，零点	↗

函数 $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形如下图所示.



3.4.142 题图



3.4.143 题图

3.4.143 当自变量 θ 由 0 到 2π 变化时，

(1) 讨论函数 $y=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$ 的单调性与极值，并画出草图；

(2) 当 k 取不同值时，讨论方程 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=k$ 实根的个数.

解 (1) 函数 $y=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ 的零点为 $\theta=\frac{3}{4}\pi$，$\theta=\frac{7}{4}\pi$；无定义的点为 $\theta=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，2π，且均为无穷间断点.

对 y 求导数，得

$$y'=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

令 $y'=0$，得驻点为 $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$.

显然，当 θ 由 0 到 2π 变化时，

若 $0<\theta<\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}<\theta<2\pi$，则 $\sin\theta<\cos\theta$；

若 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5}{4}\pi$，则 $\sin\theta>\cos\theta$，

又因 $\sin^2\theta\cos^2\theta\geqslant0$，故函数 y 除无定义的点外，在 $0<\theta<\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi<\theta<2\pi$ 时 $y'<0$，这时 y 单调减少；在 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5}{4}\pi$ 时，$y'>0$，这时 y 单调增加. 由此可得极值点为 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\theta=\frac{5}{4}\pi$. 其相应的极值为

$y_{极小值}=y(\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$，$y_{极大值}=y(\frac{5}{4}\pi)=-2\sqrt{2}$.

根据上述讨论，即可画出草图如上.

(2) 在方程 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=k$ 中，k 的值相当于函数 $y=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$ 中的 y 值，故由其函数图形可以观察出方程的实根关于 k 值的分布情况为

当 $|K|<2\sqrt{2}$ 时，方程有两个实根；

当 $|K|=2\sqrt{2}$ 时，方程有三个实根；

当 $|K|>2\sqrt{2}$ 时，方程有四个实根.

3.4.144 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}\quad(-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

(1) 求 $f(x)$ 的增减区间；

(2) 求 $f(x)$ 的极值、最大值和最小值；

(3) 作出函数 $f(x)$ 的图象.

提示　$\mathrm{tg}x-x=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内有唯一的根 $x\approx 4.50$，$\sin 4.50\approx -0.978$.

解　由于在 $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时有 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故只需考虑在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上的情形，当 $x=0$ 时，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0,$$

当 $x\neq 0$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,

由 $f'(x)=0$ 可知，$x\cos x-\sin x=0$，由于 $\mathrm{tg}x-x=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内有唯一的根 $x=4.50$，所以 $x\cos x-\sin x=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内有唯一的根 $x=4.50$. 由 $f(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的对称性，$f(x)$ 的性态列表如下：

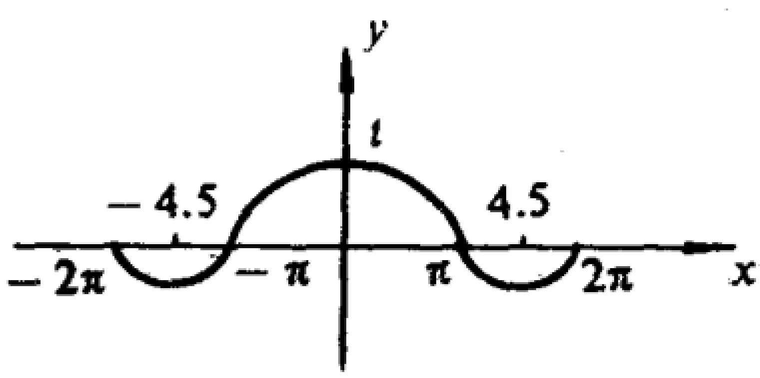
x	$(-2\pi,-4.50)$	-4.50	$(-4.50,0)$	0	$(0,4.50)$	4.50	$(4.50,2\pi)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

因此，$f(x)$ 在 $x=0$，± 4.50 处达到极值. 又当 $x=\pm 2\pi$ 时，$f(x)=0$，所以

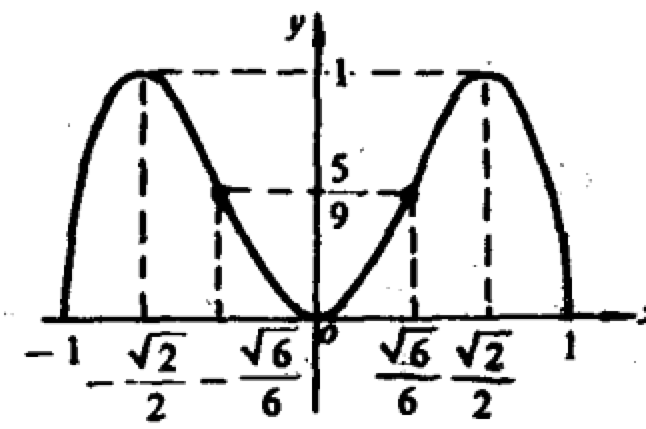
$$\max_{[-2\pi,2\pi]}f(x)=f(0)=1,$$

$$\min_{[-2\pi,2\pi]} f(x) = f(\pm 4.50) = \frac{\sin 4.50}{4.50} \approx -0.217.$$

$f(x)$ 的图象如下.



3.4.144 题图



3.4.145 题图

3.4.145　作函数 $y(x) = [\sin(2\arcsin x)]^2$ 的图象.

解　因为 $\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$，所以 $y(x) = 4x^2(1-x^2)$，$-1 \leqslant x \leqslant 1$，由此可见，$y(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

$$y'(x) = 8x(1-2x^2) = 8x(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x),$$

当 $-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y' > 0$，这时 $y(x)$ 单调增加；当 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ 时，$y' < 0$，这时 $y(x)$ 单调减少，因而在 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，y 取极大值 1，再由对称性可见，在 $x = 0$ 处，y 取极小值 0.

又因 $y''(x) = 8 - 48x^2$，由 $y'' = 0$ 求得 $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$，当 $-1 < x < -\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时，$y'' < 0$，图形上凸；当 $-\frac{\sqrt{6}}{6} < x < \frac{\sqrt{6}}{6}$ 时，$y'' > 0$，图形上凹，故 y 有两个拐点 $A(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{9})$ 和 $B(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{9})$. 由上面讨论可作出 $y(x)$ 的图形如上.

3.4.146　讨论函数 $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ 并作图.

解　(1) $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内定义的偶函数，因此它的图象

是关于 y 轴对称的.

(2) $f'(x) = -\dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \dfrac{(e^{-x} + e^x)}{(e^x - e^{-x})^2}$,

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 \cdot (-e^{-x} - e^x) - (e^{-x} - e^x) \cdot 2(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^4}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 6}{(e^x + e^{-x})^3}.$$

令 $f'(x) = 0$,得 $e^{-x} = e^x$ 或 $e^{2x} = 1$, $x = 0$;

令 $f''(x) = 0$,得 $e^{2x} + e^{-2x} - 6 = 0$ 或 $(e^{2x})^2 - 6e^{2x} + 1 = 0$,

$$e^{2x} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1}}{2} = 3 \pm \sqrt{2},$$

$$x = \frac{1}{2}\ln(3 \pm 2\sqrt{2}),$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\ln(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + 1)^2 = \ln(\sqrt{2} + 1),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\ln(3 - 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = -\ln(\sqrt{2} + 1).$$

(3) $f(x)$ 没有间断点,也没有 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 不存在的点.

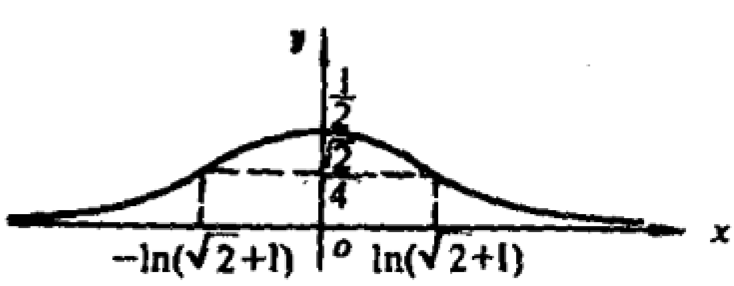
$x = -\ln(\sqrt{2} + 1)$, 0, $\ln(\sqrt{2} + 1)$ 把 $(-\infty, +\infty)$ 分为四个小区间,在各区间上函数及其导数的情况列表如下:

x	$(-\infty, -\ln(\sqrt{2}+1))$	$-\ln(\sqrt{2}+1)$	$(-\ln(\sqrt{2}+1), 0)$
$f'(x)$	+		+
$f''(x)$	+	0	−
$y = f(x)$	↗	拐点 $\left(-\ln(\sqrt{2}+1), \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$	↘

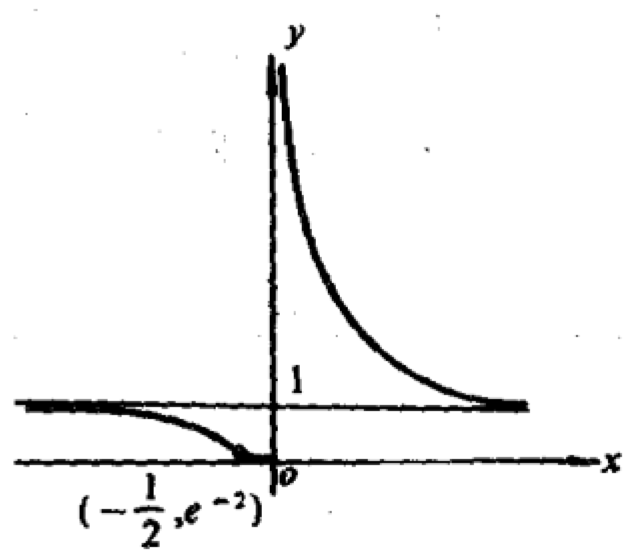
x	0	$(0,\ln(\sqrt{2}+1))$	$\ln(\sqrt{2}+1)$	$(\ln(\sqrt{2}+1),+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$		$-$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$y=f(x)$	极大值 $\frac{1}{2}$	↘	拐　点 $(\ln(\sqrt{2}+1),\frac{\sqrt{2}}{4})$	↗

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=0$ 可知，$y=0$ 是水平渐近线.

综合以上讨论，即可作出 $f(x)$ 的图象.



3.4.146 题图



3.4.147 题图

3.4.147　讨论函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 并作图.

解　(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内有定义.

(2) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\ (x\neq 0)$,

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)+\frac{2}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^4}(1+2x)e^{\frac{1}{x}}$$

$$(x\neq 0).$$

令 $f'(x)=0$，得 $-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=0$，无解，即无驻点.

令 $f''(x)=0$，得 $1+2x=0$，$x=-\dfrac{1}{2}$.

(3) $x=0$ 是间断点，除此再没有 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 不存在的点. $x=-\dfrac{1}{2}$，0 把 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个小区间，在各区间上函数及导数的情况列表如下：

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−		−		−
$f''(x)$	−	0	+		+
$y=f(x)$	↘	拐点 $(-\frac{1}{2},e^{-2})$	↗	间断	↘

(4) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ 可知，$x=0$ 是铅直渐近线. 又因 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$，故 $y=1$ 是水平渐近线.

综合以上讨论，即可作出函数 $f(x)$ 的图象如上.

3.4.148 (1) 求出函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调凹向区间、极值点、拐点、渐近线，作函数 y 的图形；

(2) 比较 e^{π} 和 π^{e} 的大小并说明理由；

(3) 证明：当 $0<x<1$ 或 $x=e$ 时，只有 $y=x$ 满足 $x^y=y^x$；当 $x>1$ 且 $x\neq e$ 时，对于任意一个 x 都可以找到唯一的一个 $y\neq x$，满足 $x^y=y^x$.

解 (1) 函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad y''=\frac{-3+2\ln x}{x^3}.$$

令 $y'=0$，得唯一的驻点 $x=e$. $y''=0$ 得 $x=e^{\frac{3}{2}}$. 下面求渐近线方程.

因$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$,故 $x=0$ 为铅直渐近线. 又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0,$$

故 $y=0$ 是水平渐近线,无斜渐近线.

按题目的要求,列表讨论如下:

x	$(0,e)$	e	$(e,e\sqrt{e})$	$e\sqrt{e}$	$(e\sqrt{e},+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	极大值 $1/e$	↘	拐点$(e\sqrt{e},3/2e\sqrt{e})$	↘

由上面讨论即可作出图形.

(2) **解法 1**　由(1)可知,$y=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$内单调减少,因 $\pi>e$,故 $\frac{\ln\pi}{\pi}<\frac{\ln e}{e}$,即 $e\ln\pi<\pi\ln e$, $\ln\pi^e<\ln e^\pi$, 所以 $\pi^e<e^\pi$.

解法 2　设 $u(x)=\frac{e^x}{x^e}(x>0)$,则当 $x>e$ 时,

$$u'(x)=\frac{e^xx^{e-1}\cdot(x-e)}{(x^e)^2}>0,$$

故 $\frac{e^x}{x^e}>u(e)=1$,即 $e^x>x^e$. 令 $x=\pi$,即得 $e^\pi>\pi^e$.

(3) 设 $u=x^y,v=y^x$,再令

$$w=\frac{\ln u}{\ln v}=\frac{y\ln x}{x\ln y}=\frac{\ln x}{x}\Big/\frac{\ln y}{y}.$$

显然,当 $y=x$ 时,$w=1$,$u=v$,即 $x^y=y^x$.

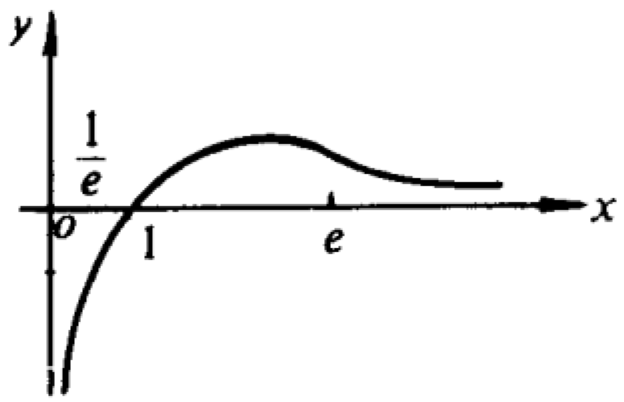
当 $0<x<1$ 时,由(1)可知,$\frac{\ln x}{x}$是单调增加函数,故若 $y\neq x$,则 $w\neq 1$,$u\neq v$,即 $x^y\neq y^x$.

又由(1)知,当 $x=e$ 时,$\frac{\ln x}{x}$取最大值,故若 $y\neq x=e$,则 $w\neq 1$,u

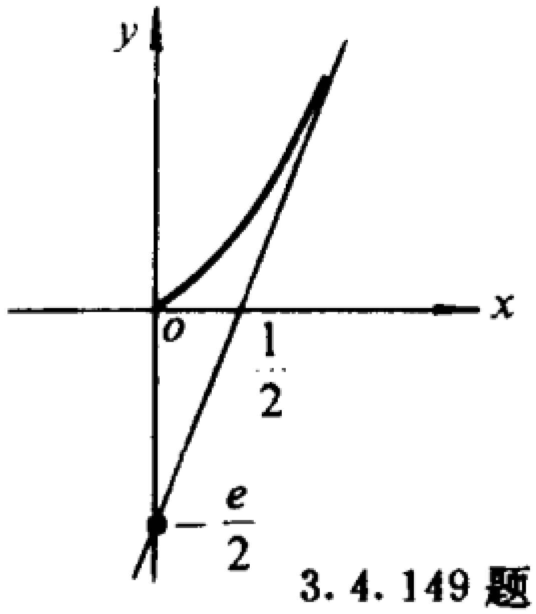
$\neq v$,即 $x^y \neq y^x$.

因此,当 $0 < x < 1$ 或 $x = e$ 时,只有 $y = x$ 时才有 $x^y = y^x$.

当 $x > 1$ 且 $x \neq e$ 时,由(1)知,当 $1 < x < e$ 时,$\frac{\ln x}{x}$ 为单调增加函数. $e < x < +\infty$ 时,$\frac{\ln x}{x}$ 为单调减少函数,故函数$\frac{\ln x}{x}$ 的反函数是双值的. 即对任意一个 x,满足 $w = 1$ 或$\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x}$ 的 y 有两个值,一个是 $y = x$,另一个是 $y \neq x$,即总可以找到唯一的一个 $y \neq x$,满足 $x^y = y^x$.



3. 4. 148 题图



3. 4. 149 题图

3. 4. 149 作函数 $y = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (x > 0)$ 的图象.

解 由于 $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$,故 $\lim\limits_{x \to 0^+} y = 0$. 当 $x > 0$ 时,$y > 0$,曲线在 x 轴上方.

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x}\right] > 0 \quad (x > 0),$$

故函数单调增加.

又
$$y'' = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right],$$

上式右端第一项显然大于零,若能证得当 $x > 0$ 时,

$$2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

则有 $y''>0$. 为此作变换 $x=\frac{1}{t}$，则

$$f(x)=2\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$=2\ln(1+t)-\frac{2t}{1+t}-\frac{t^2}{(1+t)^2},$$

若令 $\varphi(t)=2\ln(1+t)-\frac{2t}{1+t}-\frac{t^2}{(1+t)^2}$，则

$$\varphi'(t)=\frac{2}{1+t}-\frac{2}{(1+t)}+\frac{2t}{(1+t)^2}-\frac{2t}{(1+t)^2}+\frac{2t^3}{(1+t)^3}$$
$$=\frac{2t^3}{(1+t)^3}>0\quad(t>0),$$

且 $\varphi(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$\varphi(t)>0$，即当 $x>0$ 时，$f(x)>0$. 由此可知，y 的图象是上凹的.

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1+\frac{1}{x})^x=+\infty$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,$$
$$\lim_{x\to+\infty}x[(1+\frac{1}{x})^x-e]=\lim_{x\to+\infty}x(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e)=-\frac{e}{2},$$

故当 $x\to+\infty$ 时，曲线有渐近线 $y=ex-\frac{e}{2}$.

由以上讨论即可作出图形.

§5 导数的应用

问 题 与 解 答

1. 曲线的切线和法线

3.5.1 在 $y = x^3$ 的图形上,哪一点的切线斜率等于 3?

解 由导数的几何意义,即求 $y' = (x^3)' = 3x^2 = 3$ 的解. 其解为 $x = \pm 1$.

当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 当 $x = -1$ 时, $y = -1$, 因而在 $y = x^3$ 的图形上,点 $(1,1)$ 及 $(-1, -1)$ 的切线斜率等于 3.

3.5.2 求圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 与第一、四象限的角平分线交点处的切线斜率.

解 圆上任一点处的切线方程为

$$xx_0 + yy_0 = R^2,$$

该切线的斜率为 $k = -\frac{x_0}{y_0}$. 圆与第一、四象限角平分线的交点分别为 $P_1(R\cos\frac{\pi}{4}, R\sin\frac{\pi}{4})$ 和 $P_2(R\cos\frac{7\pi}{4}, R\sin\frac{7\pi}{4})$, 过 P_1 点的圆的切线斜率为

$$k_1 = -\frac{R\cos\frac{\pi}{4}}{R\sin\frac{\pi}{4}} = -1.$$

同样,过 P_2 点的圆的切线斜率为

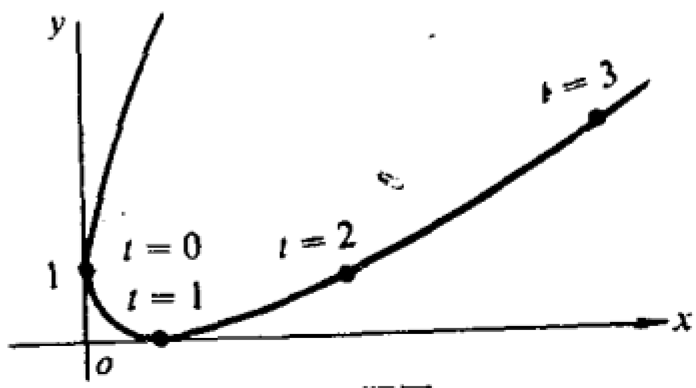
$$k_2 = -\frac{R\cos\frac{7\pi}{4}}{R\sin\frac{7\pi}{4}} = 1.$$

3.5.3 求曲线 $x = t^2, y = (t-1)^2, t \in R$ 的切线斜率.

解 $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 2(t-1)$.

当 $t \neq 0$ 时，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(t-1)}{2t} = \dfrac{t-1}{t}$. 在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$处的切线是 $y-(t_0-1)^2 = \dfrac{t_0-1}{t_0}(x-t_0^2)$.

当 $t=0$ 时，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2t}{2(t-1)} = 0$，在点$(\varphi(0),\psi(0)) = (0,1)$处的切线是 $x-0 = 0(y-1)$，即 $x=0$.



3.5.3 题图

如果从 $x=t^2$ 和 $y=(t-1)^2$ 中消去 t，得

$$x-y=2t-1,$$

$$t=\frac{x-y+1}{2},$$

$$x=t^2=\left(\frac{x-y+1}{2}\right)^2,$$

即 $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$. 这是一条关于 $y=x$ 对称的抛物线.

3.5.4　求曲线 $y=\cos\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

解　$$y'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right]^2 = -\frac{1}{2},$$

又 $y(0)=1$. 故所求的切线方程为

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-0)，即\ x+2y-2=0.$$

3.5.5　求曲线 $y=(x-\pi)[x+|\sin x|]$ 在 $x=\pi$ 处的切线方程.

解　由于 $|\sin x|$ 在 $x=\pi$ 处不可导，故不能应用求导法则来求 y'，但 $|\sin x|$ 在 $x=\pi$ 处是连续的，按求导的定义，有

$$y'\Big|_{x=\pi} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\{[(\pi+\Delta x)-\pi][(\pi+\Delta x) + |\sin(\pi+\Delta x)|] - (\pi-\pi)[\pi+|\sin\pi|]\}$$

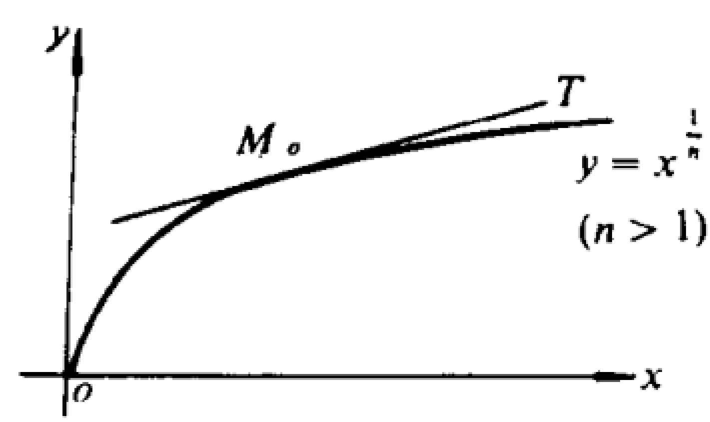
$$= \lim_{\Delta x \to 0}[\pi + \Delta x + |-\sin\Delta x|] = \pi,$$

因而 $y|_{x=\pi} = 0$. 因此，所求的切线方程是 $y = \pi(x - \pi)$.

3.5.6 求曲线 $y = x^{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数，$x > 0$) 在点 $M_0(x_0, x_0^{\frac{1}{n}})$ 处的切线方程.

解 $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$$= \frac{(x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{\Delta x}$$



3.5.6 题图

为了求它当 $\Delta x \to 0$ 时的极限，令

$$u = (x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{n}},\ v = x_0^{\frac{1}{n}},$$

于是 $u^n = x_0 + \Delta x$, $v^n = x_0$,

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{\Delta x} = \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1}}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，$u \to v$，因为上式分母中的每一项都趋于 v^{n-1}，于是上式趋于 $\dfrac{1}{nv^{n-1}}$，即 $\dfrac{1}{n}v^{1-n}$. 由于 $v = x_0^{\frac{1}{n}}$，$\dfrac{1}{n}v^{1-n} = \dfrac{1}{n}x_0^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}$，因此

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1},$$

由此得曲线 $y = x^{\frac{1}{n}}$ 在点 $(x_0, x_0^{\frac{1}{n}})$ 处的切线 M_0T 的方程为

$$y - x_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}(x - x_0).$$

3.5.7 设曲线 $f(x) = x^3 + ax$ 与 $g(x) = bx^2 + c$ 都通过点 $(-1, 0)$，且在该点有公共切线，求 $f(x)$ 与 $g(x)$.

解 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都过点 $(-1,0)$，所以

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1) = 0, g(-1) = b\cdot(-1)^2 + c = 0.$$

即 $a = -1,\ b + c = 0$.

又 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $(-1,0)$ 有公共切线，所以

$$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 + a = g'(-1) = 2b\cdot(-1).$$

即 $3 + a = -2b$，于是 $b = -1, c = -b = 1$. 因此可得

$$f(x) = x^3 - x, g(x) = -x^2 + 1.$$

3.5.8　求下面曲线在指定点的切线方程和法线方程.

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$,点 $M(6,6.4)$;

(2) 摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时;

(3) 对数螺线 $r=ae^{\theta}$(a 是常数),当 $\theta=0$ 时.

解　(1) 由隐函数的求导法则,有$\frac{2x}{100}+\frac{2yy'}{64}=0$,于是有

$$y'|_M=-\frac{64x}{100y}\Big|_M=-\frac{3}{5}.$$

故过 M 点的切线方程为 $y-6.4=-\frac{3}{5}(x-6)$,法线方程为 $y-6.4=\frac{5}{3}(x-6)$.

(2) 由参数方程的求导法则,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

所以有 $\frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$.

又当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时,$x=(\frac{\pi}{2}-1)a$,$y=a$,故当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时,

摆线的切线方程为 $y-a=x-(\frac{\pi}{2}-1)a$,

法线方程为 $y-a=-x+(\frac{\pi}{2}-1)a$.

(3) 由极坐标与直角坐标的关系:$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 把 θ 作为参数,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}.$$

再把 $r(\theta)=ae^{\theta}$ 及 $r'(\theta)=ae^{\theta}$ 代入,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ae^{\theta}\sin\theta+ae^{\theta}\cos\theta}{ae^{\theta}\cos\theta-ae^{\theta}\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}.$$

所以有$\frac{dy}{dx}|_{\theta=0}=1$.

又当 $\theta=0$ 时,$x=a$,$y=0$,故当 $\theta=0$ 时,对数螺线的切线方程为 $y=x-a$,法线方程为 $y=-x+a$.

3.5.9 求曲线 $x=\frac{3t}{1+t^2}, y=\frac{3t^2}{1+t^2}$ 在 $t=2$ 处的切线方程及法线方程.

解 当 $t=2$ 时, $x=\frac{6}{5}, y=\frac{12}{5}, \frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-\frac{4}{3}$.
故所求的切线方程为 $y-\frac{12}{5}=-\frac{4}{3}(x-\frac{6}{5})$, 即 $4x+3y-12=0$.
法线方程为 $y-\frac{12}{5}=\frac{3}{4}(x-\frac{6}{5})$, 即 $3x-4y+6=0$.

3.5.10 曲线 $x^3+y^3-3axy=0$ 可由参数方程

$$\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases} (-\infty<t<+\infty)$$

表示, 试求当 $t_1=1, t_2=0$ 时曲线的切线方程.

解 在 $(1+t^3)x=3at$ 两边对 t 求导, 得

$$3t^2x+(1+t^3)x'_t=3a,\ x'_t=\frac{3a-3t^2x}{1+t^3}.$$

同样可求得 $y'_t=\frac{6at-3t^2y}{1+t^3}$, 于是, $\frac{dy}{dx}=\frac{6at-3t^2y}{3a-3t^2x}$.

当 $t_1=1$ 时, $x_1=y_1=\frac{3}{2}a$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-1$, 这时, 曲线在点 $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$ 处的切线方程为 $y-\frac{3}{2}a=-(x-\frac{3}{2}a)$, 即 $x+y=3a$.

当 $t_2=0$ 时, $x_2=y_2=0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=0$, 这时, 曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=0$.

3.5.11 求曲线 $\begin{cases} x+t(1-t)=0, \\ te^y+y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程.

解 $x(0)=0, y(0)=-1$,

由 $\frac{dx}{dt}=2t-1, \frac{dy}{dt}=-\frac{e^y}{te^y+1}$ 得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{e^y}{te^y+1}}{2t-1}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1}{e}.$$

故所求的切线方程为 $y+1=\frac{1}{e}x$.

3.5.12　求极坐标方程 $r = 1 + \cos\theta$ 的图象上，点 $A(2,0)$，$B(1,\frac{\pi}{2})$，$C(0,\pi)$ 处切线的斜率.

解　由极坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

把 θ 作为参数，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}.$$

再把 $r = 1 + \cos\theta$ 代入，得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\theta + \cos2\theta}{\sin\theta + \sin2\theta}.$$

于是，点 A,B,C 处曲线的斜率为 $\frac{dy}{dx}\Big|_A = \infty$，$\frac{dy}{dx}\Big|_B = 1$，$\frac{dy}{dx}\Big|_C = 0$.

3.5.13　求曲线 $r = a\sin2\theta$（a 为常数）在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线及法线方程.

解　将极坐标方程化为参数方程，得

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = a\sin2\theta\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = a\sin2\theta\sin\theta. \end{cases}$$

于是，$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{2a\cos2\theta\sin\theta + a\sin2\theta\cos\theta}{2a\cos2\theta\cos\theta - a\sin2\theta\sin\theta} = \mathrm{tg}\theta \cdot \frac{\cos2\theta + \cos^2\theta}{\cos2\theta - \sin^2\theta}$,

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -1$$

又 $x\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，$y\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，故当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时曲线上的点在直角坐标中的坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a)$，过该点的切线方程为

$y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = -(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a)$，即 $x + y = \sqrt{2}a$；

法线方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = x - \frac{\sqrt{2}}{2}a$，即 $x - y = 0$.

3.5.14　**求心形线 $r = a(1 - \cos\theta)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.**

解　由极坐标与直角坐标的关系，把极坐标方程化为参数方程，得

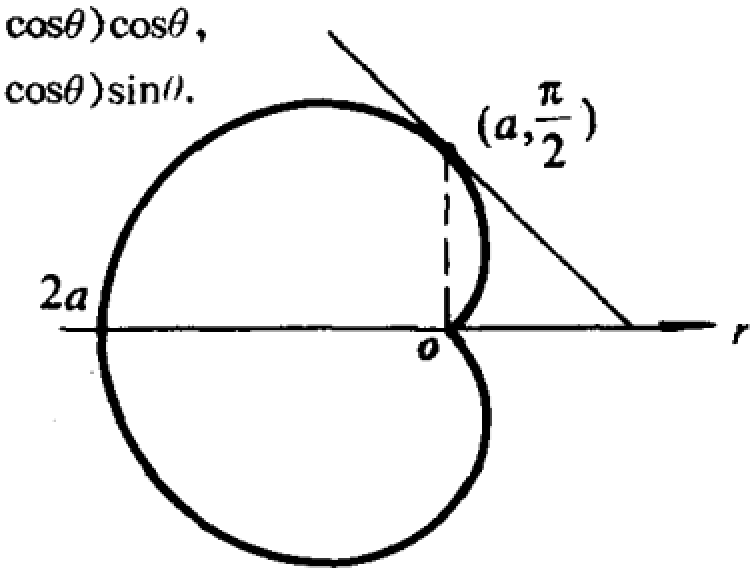
$$\begin{cases} x = a(1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y = a(1-\cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

由参数方程的求导公式，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos\theta - \cos2\theta}{-\sin\theta + \sin2\theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1.$$

又当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，$x = 0, y = a$，



3.5.14 题图

所以曲线在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y - a = -x$，即 $x + y = a$.

3.5.15　求曲线 $r = a\sin2\theta$（a 为常数）在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线及法线方程.

解　将极坐标方程化为参数方程，得

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = a\sin2\theta\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = a\sin2\theta\sin\theta, \end{cases}$$

故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a\cos2\theta\sin\theta + a\sin2\theta\cos\theta}{2a\cos2\theta\cos\theta - a\sin2\theta\sin\theta} = \frac{\cos2\theta\sin\theta + \sin3\theta}{\cos2\theta\cos\theta + \cos3\theta}.$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}} = -1.$$

又　$x\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，$y\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，

故所求的切线方程为　$y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，

法线方程为　$y - \frac{\sqrt{2}}{2}a = x - \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

3.5.16　证明：过二次曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ 上任一点 (x_0, y_0) 的切线方程为

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x_0 + x) + E(y_0 + y) + F = 0.$$

证　对方程 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ 关于 x 求导，

得
$$2Ax+2B(y+xy')+2Cyy'+2D+2Ey'=0.$$
解出 y'，得
$$y'=-\frac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}.$$
于是，过 (x_0,y_0) 点的切线斜率为
$$k=-\frac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}.$$
切线方程为 $y-y_0=-\dfrac{Ax_0+By_0+D}{Bx_0+Cy_0+E}(x-x_0)$，

即 $$(Bx_0+Cy_0+E)y-Bx_0y_0-Cy_0^2-Ey_0+(Ax_0+By_0+D)x-Ax_0^2-Bx_0y_0-Dx_0=0.$$
又因为点 (x_0,y_0) 在曲线上，故
$$Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2=-2Dx_0-2Ey_0-F,$$
代入上式，即得切线方程为
$$(Ax_0+By_0+D)x+(Bx_0+Cy_0+E)y+Dx_0+Ey_0+F=0,$$
即 $Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0.$

3.5.17　求与曲线 $4x^2+9y^2-8x+18y=59$ 相切且与直线 $3x-2y=6$ 垂直的直线方程.

解　已知直线 $3x-2y=6$ 的斜率 $k_1=\dfrac{3}{2}$，设所求直线的斜率为 k_2，则由 $k_1k_2=-1$ 得 $k_2=-\dfrac{2}{3}$.

又设所求直线与曲线
$$F(x,y)=4x^2+9y^2-8x+18y-59=0 \tag{1}$$
相切于点 (x,y)，则应有
$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{8x-8}{18y+18}=-\frac{2}{3},$$
整理得　$2x-3y-5=0$，　(2)

联立(1)，(2)式，解得 $(-2,-3)$ 及 $(4,1)$，故所求直线方程为
$$y+3=-\frac{2}{3}(x+2)\ 和\ y-1=-\frac{2}{3}(x-4).$$

3.5.18　试证明抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点的切线所截两坐标轴的截距之和等于 a.

证 设 $F(x,y)=x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\sqrt{\frac{y}{x}},$$

过切点 (x,y) 的切线方程为

$$Y-y=-\sqrt{\frac{y}{x}}(X-x),$$

把上式化为截距式方程可得

$$\frac{X}{x+\sqrt{xy}}+\frac{Y}{y+\sqrt{xy}}=1.$$

于是,截距之和为

$$\begin{aligned}(x+\sqrt{xy})+(y+\sqrt{xy})&=x+2\sqrt{xy}+y\\&=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=a.\end{aligned}$$

3.5.19 证明:星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任一点的切线介于二坐标轴间的一段长度等于常数 a.

证 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两边关于 x 求导,得 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$,

由此求得 $y'=-x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

于是,星形线上点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为 $k=-x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}$,过 (x_0,y_0) 的切线方程为

$$y-y_0=-x_0^{-\frac{1}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}(x-x_0).$$

令 $y=0$,得 $x=x_0+x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}$,即切线与 x 轴交于点 $A(x_0+x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}},0)$,令 $x=0$,得 $y=y_0+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}$,即切线与 y 轴交于点 $B(0,y_0+x_0^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}})$,而 A 与 B 之间的距离

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_0+x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}})^2+(y_0+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})^2}\\&=\sqrt{x_0^2+3x_0^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+y_0^2}=\sqrt{(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})^3}\\&=\sqrt{(a^{\frac{2}{3}})^3}=a.\end{aligned}$$

3.5.20 证明:曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴所围成

的三角形的面积为一常数.

证 曲线方程为 $y=\frac{a^2}{x}$,故 $y'=-\frac{a^2}{x^2}=-\frac{y}{x}$.

设(x_0,y_0)是曲线上的任一点,则过该点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0),$$

即 $x_0y=-y_0x+2x_0y_0$,又由于 $x_0y_0=a^2$,所以 $x_0y=-y_0x+2a^2$.

当 $x=0$ 时,$y=\frac{2a^2}{x_0}$,当 $y=0$ 时,$x=\frac{2a^2}{y_0}$,所以过(x_0,y_0)点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为

$$s=\frac{1}{2}\left|\frac{2a^2}{x_0}\cdot\frac{2a^2}{y_0}\right|=2a^2.$$

3.5.21 证明:双曲线 $xy=a^2$ 介于二坐标轴间的任一切线为其切点所平分.

证 双曲线方程为 $y=\frac{a^2}{x}$,故 $y'=-\frac{a^2}{x}$,由此可知,双曲线上任一点$(x_0,\frac{a^2}{x_0})$处的切线斜率为 $k=-\frac{a^2}{x_0}$. 于是过该点的切线方程为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0}(x-x_0),\quad 或 \quad \frac{x}{2x_0}+\frac{y}{\frac{2a^2}{x_0}}=1.$$

于是,切线在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 $2x_0$ 与$\frac{2a^2}{x_0}$,即切线与 x 轴、y 轴的交点分别是 $A(2x_0,0)$,$B(0,\frac{2a^2}{x_0})$,而 AB 的中点坐标为

$$\bar{x}=\frac{2x_0+0}{2}=x_0,\quad \bar{y}=\frac{0+\frac{2a^2}{x_0}}{2}=\frac{a^2}{x_0}=y_0,$$

这说明 AB 的中点恰好为切点,即 AB 被切点所平分.

3.5.22 当 a,b 取不同值时,证明双曲线簇 $x^2-y^2=a^2$ 与 $xy=b$ 构成正交网(即两簇曲线相交成直角).

证 由 $x^2-y^2=a^2$ 与 $xy=b$ 解得在交点处有 $\pm\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{x}$,两曲线的切线斜率分别为

$$y'_1=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x^2}{b},\ y'_2=-\frac{b}{x^2}.$$

在交点处有 $y'_1 \cdot y'_2 = -1$，因此两簇双曲线构成正交网.

3.5.23　证明：曲线 $y = e^{-ax}\sin bx$ 与 $y = e^{-ax}$ 在 $x_0 = \frac{2k\pi}{b} + \frac{\pi}{2b}$（$k$ 为整数，a,b 为实数）处相切.

证　先求二曲线的交点，由

$$\begin{cases} y = e^{-ax}\sin bx, \\ y = e^{-ax} \end{cases}$$

得 $\sin bx = 1$，故交点的横坐标为 $x_0 = \frac{1}{b}(2k\pi + \frac{\pi}{2})$（$k$ 为整数），又

$$\frac{d}{dx}e^{-ax}\sin bx\Big|_{x=x_0} = e^{-ax}(b\cos bx - a\sin bx)\Big|_{x=x_0} = -ae^{-\frac{a}{b}(2k\pi+\frac{\pi}{2})},$$

$$\frac{d}{dx}e^{-ax}\Big|_{x=x_0} = -ae^{-ax}\Big|_{x=x_0} = -ae^{-\frac{a}{b}(2k\pi+\frac{\pi}{2})},$$

于是，两曲线在 $x = x_0$ 处的切线斜率相等，故它们在交点 x_0 处相切.

3.5.24　证明：曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(x)\sin ax$ 在其公共点处相切（其中 $f(x)$ 为可微函数，a 为常数）

证　令 $f(x) = f(x)\sin ax$，则 $\sin ax = 1$，故当 $x = \frac{1}{a}(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(x)\sin ax$ 有公共点. 又

$$[f(x)\sin ax]'_{x=\frac{1}{a}(2k\pi+\frac{\pi}{2})} = [f'(x)\sin ax + af(x)\cos ax]_{x=\frac{1}{a}(2k\pi+\frac{\pi}{2})}$$

$$= f'(x)\big|_{x=\frac{1}{a}(2k\pi+\frac{\pi}{2})},$$

所以，曲线 $y = f(x)$ 与 $y = f(x)\sin ax$ 在公共点处的切线斜率相等，故它们在公共点处相切.

3.5.25　在曲线 $y = x^3 + x - 2$ 上哪一点处的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行？

解　直线 $y = 4x - 1$ 的斜率为 4，为使曲线的切线与之平行，应有 $y' = 3x^2 + 1 = 4$，从中解得 $x = \pm 1$. 当 $x = 1$ 时，$y = 1^3 + 1 - 2 = 0$；当 $x = -1$ 时，$y = (-1)^3 + (-1) - 2 = -4$. 因此在曲线上 $(1,0)$ 和 $(-1,-4)$ 处的切线平行于直线 $y = 4x - 1$.

3.5.26　证明：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的弦与其所对的弧在区间的中点处的切线平行.

证　$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的弦的斜率为

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x_2 - x_1}$$

$$= a(x_1 + x_2) + b.$$

又 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 在$[x_1, x_2]$的中点$\frac{x_1 + x_2}{2}$处的切线斜率为$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)} = (2ax + b)\Big|_{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)} = a(x_1 + x_2) + b.$

所以，抛物线在$[x_1, x_2]$上的弦与其所对的弧在区间中点处的切线平行.

3.5.27　a取何值时，曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 相切，并求出切点的坐标.

解　设切点的横坐标为 x_0，要使曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 在 $x = x_0$ 处相切，必须

$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0, \\ \frac{d}{dx}a^x\Big|_{x=x_0} = \frac{dx}{dx}\Big|_{x=x_0}. \end{cases} \text{即} \begin{cases} a^{x_0} = x_0, \\ a^{x_0}\ln a = 1. \end{cases}$$

由此解得$\begin{cases} x_0\ln a = \ln x_0, \\ \ln a = \frac{1}{x_0}. \end{cases}$　即 $x_0 = e, a = e^{\frac{1}{e}}$.

于是，当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时，$y = a^x$ 与 $y = x$ 相切，切点坐标为(e,e).

3.5.28　证明曲线$\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \\ z = e^t \end{cases}$在锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上，且曲线上任一点的切线与锥面的母线交成相同的角.

证　由于所给曲线方程对一切 t 值满足 $x^2 + y^2 = z^2$，即知所给曲线在锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上.

曲线上任一点(x,y,z)的切线方向数为

$$x'_t = e^t(\cos t - \sin t),\ y'_t = e^t(\sin t + \cos t),\ z'_t = e^t,$$

而在该点处与曲线相交的锥面母线的方向数为

$$x - 0 = e^t\cos t,\ y - 0 = e^t\sin t,\ z - 0 = e^t.$$

故曲线与锥面母线交角的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{t^{2t}\cos t(\cos t - \sin t) + e^{2t}\sin t(\sin t + \cos t) + e^{2t}}{\sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2(e^t)^2}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(e^t\cos t)^2 + (e^t\sin t)^2 e^{2t}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

由于点(x,y,z)的任意性，这表明所给曲线与锥面母线交成相同的

角 $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3.5.29 证明圆的渐伸线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$$

上所有法线与原点的距离相等.

证 设 $t = t_0$ 时曲线上相应的点为 (x_0, y_0)，曲线在点 (x_0, y_0) 处的切线斜率为

$$k = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{at\sin t}{at\cos t}\Big|_{t=t_0} = \operatorname{tg} t_0,$$

故曲线在点 (x_0, y_0) 处的法线斜率是 $k' = -\operatorname{ctg} t_0$，法线方程是

$$y - y_0 = -\operatorname{ctg} t_0 \cdot (x - x_0).$$

化简得 $\qquad x\cos t_0 + y\sin t_0 - y_0\sin t_0 - x_0\cos t_0 = 0.$

由此可得法线到原点的距离

$$d = |x_0\cos t_0 + y_0\sin t_0|,$$

注意到 $x_0 = a(\cos t_0 + t_0\sin t_0)$，$y_0 = a(\sin t_0 - t_0\cos t_0)$，则有

$$d = |a\cos^2 t_0 + at_0\cos t_0\sin t_0 + a\sin^2 t_0 - at_0\cos t_0\sin t_0| = |a|.$$

3.5.30 若曲线 $y = x^n$ 上点 $(1,1)$ 处的切线交 x 轴于 $(\xi, 0)$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty} y(\xi)$.

解 过 $(1,1)$ 点的切线方程为 $y - 1 = n(x - 1)$，令 $y = 0$，得切线与 x 轴交点的横坐标 $\xi = 1 - \dfrac{1}{n}$，于是，

$$y(\xi) = \xi^n = (1 - \frac{1}{n})^n,\ \lim_{n\to\infty} y(\xi) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1}.$$

3.5.31 在曲线 $y = x^n$ 上求一点 (x_0, y_0)，使过该点的切线平行于通过点 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 的割线？又，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_0| = ?$

解 通过点 $(0,0)$ 与 $(1,1)$ 的割线的斜率 $k = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$，因此 x_0 与 y_0 应满足

$$y'|_{x=x_0} = 1 \text{ 或 } nx_0^{n-1} = 1.$$

当 n 为偶数时，$n - 1$ 便是奇数，这时有一个解 $x_0 = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，相应

地，$y_0=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$，即点$\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)$为所求．

当 n 为奇数时，$n-1$ 便是偶数，这时有两个解 $x_0=\pm\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，相应地，$y_0=x_0^n=\left[\pm\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]^n=\pm\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}$，即点
$\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)$ 和$\left(-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)$处的切线都平行于通过点(0,0) 与(1,1) 的割线，而欲求的极限为

$$\lim_{n\to\infty}|x_0|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}=1.$$

3.5.32　确定一个 6 次有理函数，使其曲线关于 y 轴对称，点(1，1) 为其拐点，且在该点处有水平切线，并在原点处与横轴相切．

解　由于曲线为 6 次有理函数，且关于纵轴对称，故可设

$$f(x)=ax^6+bx^4+cx^2+d,$$

又由题设可知

$$f(0)=d=0,\ f(1)=a+b+c=1,$$

$$f'(1)=6a+4b+2c=0,\ f''(1)=30a+12b+2c=0.$$

解上面方程组得

$$a=1,\quad b=-3,\quad c=3,\quad d=0,$$

故所求的有理函数为 $f(x)=x^6-3x^4+3x^2$.

3.5.33　已知直线 TT' 与光滑曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 相切于任意点 M，证明：矢径 OM 的延长线与 TT' 所成之角为

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

证　由极坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho(\theta)\sin\theta.\end{cases}$$

设直线 TT' 的倾角为 α，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta}{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta}=\frac{\rho'(\theta)\operatorname{tg}\theta+\rho(\theta)}{\rho'(\theta)-\rho(\theta)\operatorname{tg}\theta}.\quad(1)$$

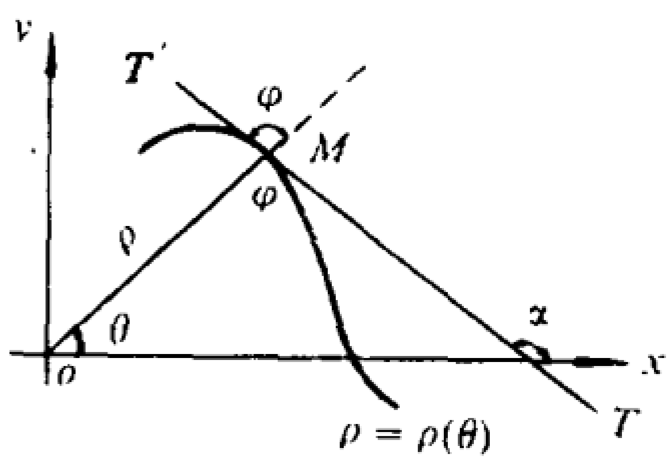
又由 $\varphi = \alpha - \theta$，得

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}. \tag{2}$$

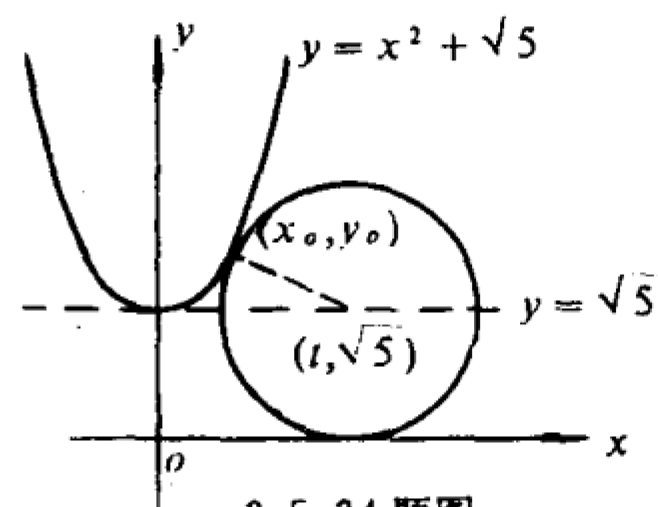
将(1)代入(2)有

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{\rho'(\theta)\operatorname{tg}\theta + \rho(\theta)}{\rho'(\theta) - \rho(\theta)\operatorname{tg}\theta} - \operatorname{tg}\theta}{1 + \dfrac{\rho'(\theta)\operatorname{tg}\theta + \rho(\theta)}{\rho'(\theta) - \rho(\theta)\operatorname{tg}\theta}\cdot\operatorname{tg}\theta} = \frac{\rho(\theta)(1 + \operatorname{tg}^2\theta)}{\rho'(\theta)(1 + \operatorname{tg}^2\theta)} = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

所以 $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.



3.5.33 题图



3.5.34 题图

3.5.34　半径为 $\sqrt{5}$ 的圆与 x 轴相切，它沿 x 轴滚向抛物线 $y = x^2 + \sqrt{5}$，问此圆在何处与抛物线相切？这时圆心的坐标为何？

解　设相切时圆心坐标为 $(t, \sqrt{5})$，切点为 (x_0, y_0)，于是有

$$\begin{cases} y_0 = x_0^2 + \sqrt{5}, & (1) \\ (x_0 - t)^2 + (y_0 - \sqrt{5})^2 = 5, & (2) \\ 2x_0 = -\dfrac{x_0 - t}{y_0 - \sqrt{5}}. & (3) \end{cases}$$

由(1)有 $y_0 - \sqrt{5} = x_0^2$，代入(3)有

$$(x_0 - t)^2 = 4x_0^2(y - \sqrt{5})^2 = 4x_0^2 \cdot x_0^4 = 4x_0^6,$$

代入(2)得

$$4x_0^6 + x_0^4 = 5,\ \text{即}\ x_0^4(4x_0^2 + 1) = 5,$$

$$x_0 = \pm 1,\ y_0 = 1 + \sqrt{5}.$$

再由(3)即可求出

$$\pm 2 = -\frac{\pm 1 - t}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{5}}, \quad t = \pm 3.$$

故得所求之圆心坐标为$(-3, \sqrt{5})$与$(3, \sqrt{5})$.

2. 物理应用

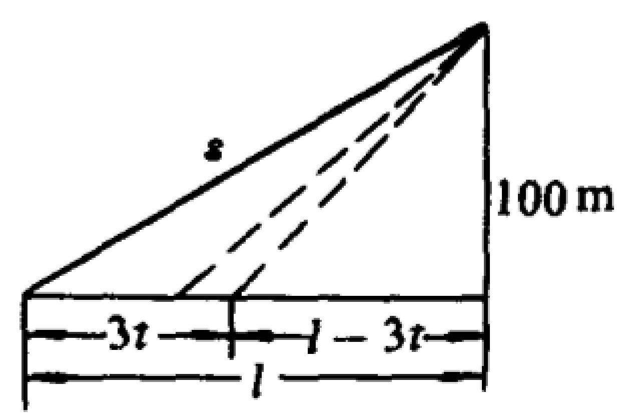
3.5.35　竿高100m，一人以3m/s的速度向竿前进，当此人距竿脚50m时，他与竿顶的距离的改变率为多少？

解　要求距离s的改变率，即求s对t的变化率，即s对t的导数. 因此，必须把s表示成t的函数.

设人由距竿脚l处开始向竿走，则

$$s(t) = \sqrt{(l-3t)^2 + 100^2},$$

$$s'(t) = \frac{1}{2}\frac{2(l-3t)(-3)}{\sqrt{(l-3t)^2+(100)^2}} = \frac{-3(l-3t)}{\sqrt{(l-3t)^2+100^2}}.$$



3.5.35 题图

当$l - 3t = 50$时，$t_0 = \frac{l-50}{3}$，故

$$s'(t_0) = \frac{-3\left(l - 3\frac{l-50}{3}\right)}{\sqrt{(50)^2+(100)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}\text{m/s},$$

其中负号表示s是t的减函数.

注　解此类问题，采用所谓的“相关变化率法”往往简单得多.

设人与竿脚的距离为x，则$s = \sqrt{x^2+(100)^2}$，两边对t求导，得

$$s'(t) = \frac{1}{2}\frac{2xx'}{\sqrt{x^2+100^2}} = \frac{xx'}{\sqrt{x^2+100^2}}.$$

把$x = 50$，$x_t' = -3$m/s代入，得

$$s'(t_0) = \frac{50\cdot(-3)}{\sqrt{50^2+100^2}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}\text{m/s}.$$

这里的x必须和s一样，同是t的函数.

3.5.36　一人以每秒2m的速度通过一座高20m的桥，他的正下方有一小船以每秒4/3m的速度与桥垂直的方向前进，求第5秒末人与小船的分离速率.

解　设人走过的距离 $x = 2t$，船走过的距离为 $y = \frac{4}{3}t$，则 t 秒时人与船的距离 s 为

$$s^2 = 20^2 + (\frac{4t}{3})^2 + (2t)^2, \tag{1}$$

两端对 t 求导数，得

$$2s\frac{ds}{dt} = 32t/9 + 8t, \tag{2}$$

由(1)，(2)式得 $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=5} = \frac{26}{21}$. 即所求的分离速率为 $\frac{26}{21}$m/s.

3.5.37　一质点 M 从 A 出发，已知两分钟后，与出发点的距离为 $AM = 12$m，设 M 与 A 点的距离与通过这段距离所需时间的平方成正比，求质点离开出发时间5分钟时的速度.

解　据题意，$s = kt^2$，由 $t = 2$ 时 $s = 12$ 可求得 $k = 3$，于是 $s = 3t^2$. 求 s 对 t 的导数，即可得任一时刻 t 时的速度为 $\frac{ds}{dt} = 6t$. 以 $t = 5$ 代入 $\frac{ds}{dt}$，即得 M 离开出发时间5分钟时的速度为

$$v = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=5} = 6 \times 5 = 30(\text{m/s}).$$

3.5.38　已知曲柄连杆机构的滑块运动规律为

$$s = r\cos\omega r + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t},$$

式中 r, l 与 ω 均为常数，试求滑块的运动速度.

解　由 $s = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin\omega t}$ 得

$$v = \frac{ds}{dt} = -r\omega\sin\omega t + \frac{1}{2}\cdot\frac{-2r^2\sin\omega t\cdot\cos\omega t\cdot\omega}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}}$$

$$= -r\omega\sin\omega t - \frac{r^2\omega\sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}}.$$

注　v 的这个表达式比较繁，由于

$$\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t} = l\sqrt{1 - (\frac{r}{l}\sin\omega t)^2},$$

而在一般的实际机构中，连杆长 l 比曲柄长 r 要大得多，从而 $(\frac{r}{l}\sin\omega t)^2$ 比1小得多，把它略去，便得到 v 的近似表达式为

$$v \approx -\left(r\omega\sin\omega t + \frac{r^2\omega\sin 2\omega t}{2l}\right).$$

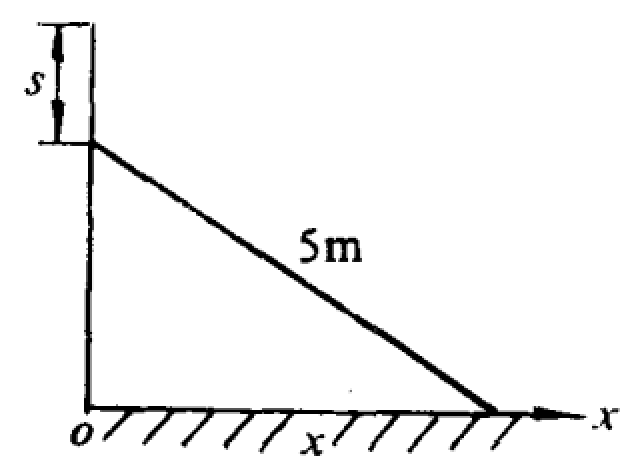
3.5.39　有一个长度为 5m 的梯子贴靠在铅直的墙上，假设其下端沿地板以 3m/s 的速率离开墙角而滑动.

(1) 当其下端离开墙脚 1.4m 时，梯子的上端下滑之速率为多少？

(2) 何时梯子的上下端以相同的速率移动？

(3) 何时其上端下滑之速率为 4m/s？

解　设梯子上端下滑之距离为 s(m)，下端离开墙角为 x(m)，如图所示，则有 $s = \sqrt{5^2 - x^2}$，于是



3.5.39 题图

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x}{2\sqrt{5^2 - x^2}}\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

(1) 当 $x = 1.4$(m) 时，上端下滑之速率为

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3 \times 1.4}{\sqrt{25 - 1.4^2}} = \frac{3 \times 1.4}{4.8} = 0.875\text{(m/s)}.$$

(2) 上下端移动的速率相同，即

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3x}{\sqrt{25 - x^2}} = 3,$$

解得 $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$(m)，即下端离墙$\frac{5\sqrt{2}}{2}$m 时（这时 $t = \frac{5\sqrt{2}}{2} \div 3 = \frac{5\sqrt{2}}{6}$(s)），上下端移动的速率相同.

(3) 上端下滑之速率为 4m/s，即

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3x}{\sqrt{25 - x^2}} = 4,$$

解得 $x = 4$(m)，即下端离墙 4m 时（这时 $t = \frac{4}{3}$(s)）上端下滑之速率为 4m/s.

3.5.40　飞轮转动的旋转角与时间的平方成正比，飞轮转动第一

圈经过 8 秒钟，求运动开始 32 秒钟后的角速度 ω.

解　设 t 秒时的旋转角为 θ，则 $\theta = kt^2$. 由 $t = 8$ 时，$\theta = 2\pi$，可求得 $k = \frac{\pi}{32}$，于是 $\theta = \frac{\pi}{32}t^2$.

对 t 求导，并以 $t = 32$ 代入，得

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=32} = \left(\frac{\pi}{16}t\right)_{t=32} = 2\pi \approx 6.28(\text{次} / \text{秒}).$$

3.5.41　一块石子落在平静的水面上，激起许多同心圆波纹，若最外面一圈波纹增大的速度为 2m/s，问在 2 秒末时，被波纹扰动的水面面积的增大速度如何？

解　被波纹扰动的水面面积的增大速度即是最外面一圈的面积增大的速度，设圆的半径为 r，面积为 A，则 $r = 2t$，$A = \pi r^2$，故 $A = 4\pi t^2$. 对 t 求导，得 $\frac{dA}{dt} = 8\pi t$，把 $t = 2$ 代入，即得被波纹扰动的水面面积的增大速度为

$$\frac{dA}{dt}\Big|_{t=2} = 8\pi t \approx 50.3(\mathrm{m^2/s}).$$

3.5.42　设有一段直径为 200mm，长为 600mm 的圆钢，放在加热炉加热，直径增大的速度为 0.08 mm/分，长度增大的速度为 0.25 mm/分，求体积增大的速度.

解　由 $V = \frac{\pi}{4}D^2h$ 得，$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4}(h \cdot 2D\frac{dD}{dt} + D^2\frac{dh}{dt})$，

以 $D = 200, h = 600, \frac{dD}{dt} = 0.08, \frac{dh}{dt} = 0.25$ 代入上式得

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\pi}{4}[2 \times 600 \times 200 \times 0.08 + 40000 \times 0.25] \\ &= 7300\pi(\mathrm{mm^3}/\text{分}).\end{aligned}$$

3.5.43　一个高为 10m 的正圆锥通过增加底面半径以改变其形状，在底面半径达到 5m 的时候，试问它要有多快的增长率才能使圆锥体积以 20m³/分的速度增长？

解　设圆锥的底面半径为 r，体积为 V，则有

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times 10 = \frac{10\pi}{3}r^2,$$

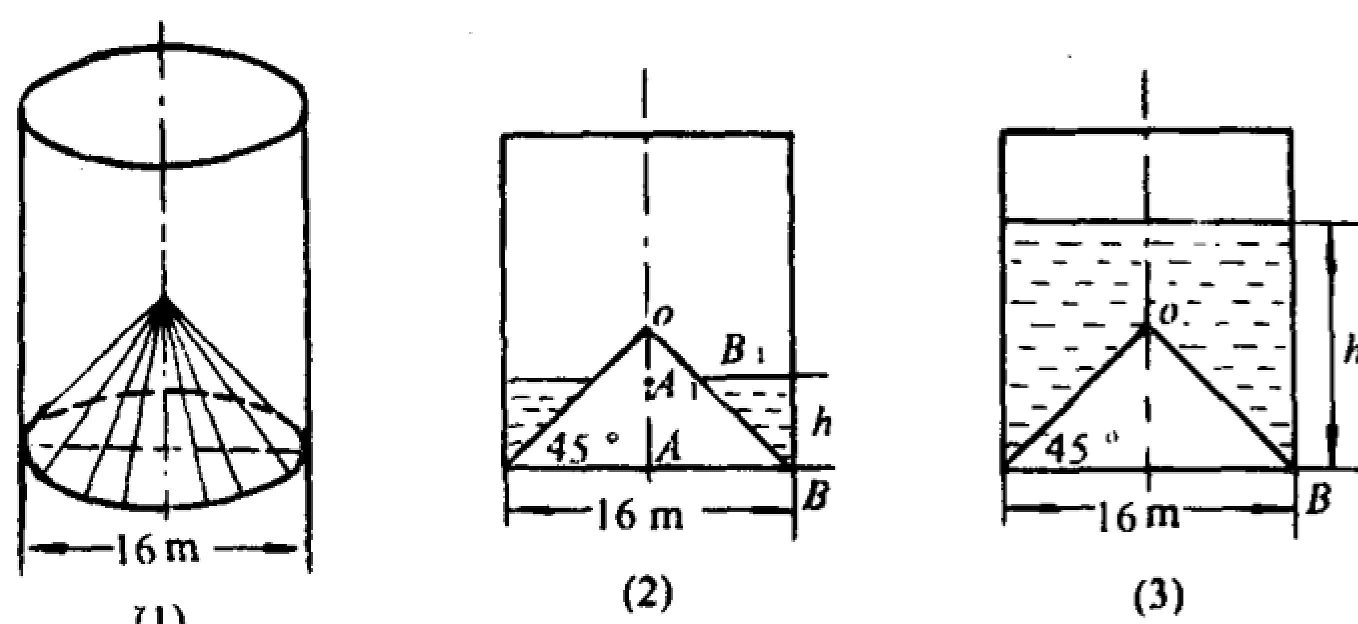
于是　　$\frac{dV}{dt}=\frac{10\pi}{3}\cdot 2r\frac{dr}{dt}=\frac{20\pi}{3}r\frac{dr}{dt}$　或　$\frac{dr}{dt}=\frac{3}{20\pi r}\frac{dV}{dt}$.

以 $r=5(\mathrm{m})$，$\frac{dV}{dt}=20(\mathrm{m}^3/\text{分})$ 代入，得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{3}{20\pi\times 5}\times 20=\frac{3}{5\pi}(\mathrm{m}/\text{分}).$$

3.5.44　一圆柱形快速澄清池，底部是圆锥形，圆锥母线与圆柱母线成 45° 角，圆柱直径为 16m. 如果以每分钟 $5\mathrm{m}^3$ 的速度把水灌入水池中，试分别求当水面高为 4m 和 9m 时，水位线上升的速度.

解　设水面高为 $h(\mathrm{m})$，水的体积为 $V(\mathrm{m}^3)$，先建立 V 与 h 之间的函数关系式.



3.5.44 题图

由于圆锥母线与圆柱母线成 45° 角，且圆柱直径为 16m，所以圆锥高为 8 米 m.

当 $0\leqslant h<8$ 时(参见图(2))，$A_1B_1=OA_1=8-h$，这时

$V=$ 底面半径为 8m 高为 hm 的圆柱体积 −

　− 底面半径分别为 $(8-h)$m 和 8m，高为 hm 的圆台体积

$$=\pi\times 8^2\times h-\frac{1}{3}\pi h[(8-h)^2+8^2+8(8-h)]$$

$$=\pi(8h^2-\frac{h^3}{3});$$

当 $h\geqslant 8$ 时(参见(3))，

$$V=\pi\times 8^2\times h-\frac{1}{3}\pi\times 8^2\times 8=8^2\pi h-\frac{8^3}{3}\pi,$$

因此
$$V=\begin{cases}\pi(8h^2-\dfrac{h^3}{3}), & \text{当 } 0\leqslant h<8;\\ 8^2\pi h-\dfrac{8^3}{3}\pi, & \text{当 } h\geqslant 8.\end{cases}$$

于是
$$\frac{dV}{dt}=\begin{cases}\pi(16h-h^2)\dfrac{dh}{dt}, & \text{当 } 0<h<8;\\ 64\pi\dfrac{dh}{dt}, & \text{当 } h\geqslant 8.\end{cases}$$

现已知$\dfrac{dV}{dt}=5(\text{m}^3/\text{分})$,因此
$$\frac{dh}{dt}=\begin{cases}\dfrac{5}{\pi(16h-h^2)}, & \text{当 } 0<h<8;\\ \dfrac{5}{64\pi}, & \text{当 } h\geqslant 8.\end{cases}$$

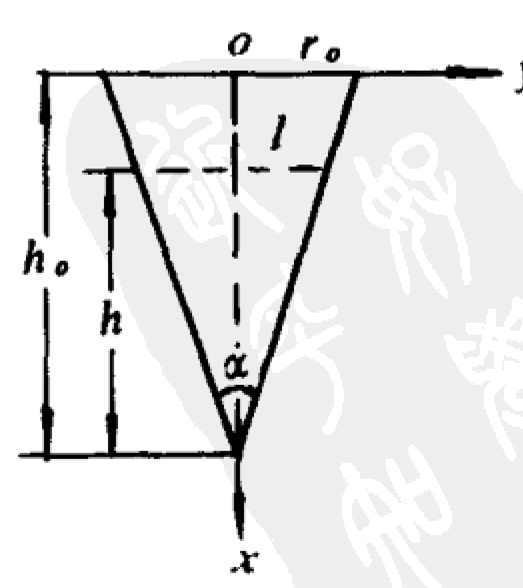
当 $h=4(\text{m})$ 时,水位线上升速度为
$$\frac{dh}{dt}\Big|_{h=4}=\frac{5}{\pi(64-4^2)}=\frac{5}{48\pi}(\text{m}/\text{分}).$$

当 $h=9(\text{m})$ 时,水位线上升速度为
$$\frac{dh}{dt}\Big|_{h=9}=\frac{5}{64\pi}(\text{m}/\text{分}).$$

3.5.45 顶角为 α 的正圆锥形漏斗(如图),开始时水深为 h_0. 现往外抽水,已知水面下降速率与水深 h 成反比(比例系数 $k>0$),当水深为 h_1 时停上抽水,求抽水速率与时间的函数关系(抽水速率是指抽出的水的体积对时间的变化率).

解 设时刻 t 时,水深为 h,则

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi h_0r_0^2-\frac{1}{3}\pi hr^2\\&=\frac{1}{3}\pi h_0(h_0\text{tg}\,\frac{\alpha}{2})^2-\frac{1}{3}\pi h(h\text{tg}\,\frac{\alpha}{2})^2\\&=\frac{1}{3}\pi\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}(h_0^3-h^3).\end{aligned}$$



3.5.45 题图

而由题意得
$$\frac{dh}{dt}=-\frac{k}{h}\ (k>0),h\Big|_{t=0}=h_0,$$

由此解得 $h^2=h_0^2-2kt$.

所以 $V = \frac{1}{3}\pi \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}[h_0^3 - (h_0^2 - 2kt)^{\frac{3}{2}}]$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(3k\sqrt{h_0^2 - 2kt}\right)$$

$$= k\pi \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{h_0^2 - 2kt}.$$

3.5.46　抛射物体在任一时刻 t(s) 的位置由下式给出

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\theta, \\ y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

其中 v_0 是初速度(m/s)，θ 是抛射角，$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$.

(1) 求在直角坐标系中的运动方程，并指出运动轨迹的形状；

(2) 求射程(当 $t \neq 0$ 时由 $y = 0$ 确定)；

(3) 求抛物体所达到的最大高度；

(4) 求水平射程为最大时的抛射角.

解　(1) 在直角坐标系中的运动方程为

$$y = v_0\frac{x}{v_0\cos\theta}\sin\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta} = x\mathrm{tg}\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2. \tag{1}$$

可见运动轨迹的形状为一抛物线.

(2) 令 $y = 0$，有 $v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 当 $t \neq 0$ 时有，$t = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$，此时

$$x = v_0\frac{2v_0\sin\theta}{g}\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta.$$

即为所求的射程.

(3) 当抛射体达到最大高度时，即

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}2x = 0.$$

故得 $x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta$，代入(1)式即得抛射体达到的最大高度为

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta\mathrm{tg}\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot\frac{v_0^4}{4g}\sin^2 2\theta = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}.$$

(4) 因为 $x = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$，显然当 $\sin 2\theta = 1$ 时 x 最大，由此解得 $2\theta = \frac{\pi}{2}$，$\theta = \frac{\pi}{4}$. 故当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时为最大射程的抛射角.

3.5.47 将一物体从地面用初速度 v_0(m/s) 铅直上抛，则物体开始上升，到达一定高度又下降返回地面，如果忽略空气阻力的影响，试求：

(1) 物体运动过程的瞬时速度；

(2) 上升的最大高度；

(3) 从上升到返回地面所需的时间；

(4) 落到地面时的速度.

解 取地面上的起抛点为坐标原点，向上为 s 轴正向，于是运动方程为 $s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$.

(1) 时刻 t 的瞬时速度为 $v = \frac{ds}{dt} = v_0 - gt$.

(2) 当物体达到最大高度时，上升速度应为 0，即 $v_0 - gt = 0$ 或 $t = \frac{v_0}{g}$. 这就是说，物体达到最大高度时所需的时间为 $\frac{v_0}{g}$ 秒，从而上升的最大高度应为

$$s\Big|_{t=\frac{v_0}{g}} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}(\text{m}).$$

(3) 物体返回地面时 $s = 0$，即 $v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$，解得 $t = 0, t = \frac{2v_0}{g}$. 显见，$t = 0$ 属上抛开始的时间，而物体从上抛开始到返回地面所需时间为 $\frac{2v_0}{g}$(s).

(4) 落到地面时的速度就是 $t = \frac{2v_0}{g}$ 时的瞬时速度

$$v_1 = v_0 - g \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0,$$

这就是说，如果不计空气阻力的影响，物体返回地面的速度与上抛的速度大小相等而方向相反.

3.5.48 一个锥形的细铁杆，它在 $[0,x]$ 一段的质量为 $M = \frac{1}{3}(\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2})x^3$，其中 ρ,θ 为常数，求它在 $x = 2$ 处的线密度.

解 由题意可知，在长度为 x 时，铁杆的质量为

$$M = \frac{1}{3}(\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2})x^3.$$

当长度从 x 变到 $x + \Delta x$ 时，铁杆的质量 M 对长度 x 的平均线密度为

$$\frac{\Delta M}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{3}(\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2})[(x+\Delta x)^3-x^3]}{\Delta x}$$
$$=\frac{1}{3}(\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2})(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2).$$

因此,在长度为 x 时铁杆的线密度为

$$\delta(x)=\frac{dM}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta M}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{3}(\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2})(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)$$
$$=(\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2})x^2,$$

所以,在点 $x=2$ 处的线密度 $\delta(2)=4\pi\rho\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}$.

3.5.49　一块金属圆板因加热而膨胀,其半径以 0.01cm/s 的变化率均匀地增加着,问当半径为 2cm 时,圆板面积的增加率是多少?

解　设圆半径为 r(cm),面积为 s(cm²),则有

$$s=\pi r^2.$$

求圆面积的增加率就是求面积 s 对于时间 t 的变化率$\frac{ds}{dt}$. 由于 s 是 r 的函数,而 r 又是 t 的函数,从而 s 是 t 的函数. 因此

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt},$$

以 $r=2$(cm),$\frac{dr}{dt}=0.01$(cm/s) 代入得

$$\frac{ds}{dt}=2\pi\times2\times0.01\approx0.126(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}),$$

即圆板面积增加率约是 0.126cm²/s.

这个问题也可以这样解决,既然 s 与 r 都是 t 的函数,可将 $s=\pi r^2$ 的两端分别对 t 求导,则得

$$\frac{ds}{dt}=\pi\cdot2r\cdot\frac{dr}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt},$$

所得结果相同.

3.5.50　某物质在化学反应中分解的规律是 $m=m_0e^{-kt}$,其中 m 是在时刻 t 时物质的量,m_0 是开始时刻物质的量,k 是正的常数,证明分解的速率与物质的质量成正比.

证　设分解的速率为 v,则

$$v = \frac{dm}{dt} = - m_0ke^{-kt},$$

但 $m_0e^{-kt} = m$，故 $v = - km$，即 v 与 m 成正比，负号表示 m 随时间的增加而减小.

3. 函数的零点及方程的根

3.5.51 已知函数 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$，证明：导函数 $f'(x)$ 有两个零点 ξ_1, ξ_2，且 $-3 < \xi_1 < -2 < \xi_2 < -1$.

证 利用罗尔定理来讨论方程 $f'(x) = 0$ 的根的范围.

由 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$，

故 $f(-1) = f(-2) = f(-3) = 0$，

且显然 $f(x)$ 在任何区间上连续可导，因此，在区间 $[-3, -2]$ 上应用罗尔定理，则可知至少存在一个数 ξ_1，$-3 < \xi_1 < -2$，使

$$f'(\xi_1) = 0;$$

再在区间 $[-2, -1]$ 上应用罗尔定理，则至少存在一个数 ξ_2，$-2 < \xi_2 < -1$，使

$$f'(\xi_2) = 0.$$

由于 $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11 = 0$ 只有两个根，所以，$f'(x)$ 只有上述确定的两个零点 ξ_1, ξ_2，且 $-3 < \xi_1 < -2 < \xi_2 < -1$.

一般地，如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有 n 个不同的实根

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b,$$

分别对 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上应用罗尔定理，则可推得 $f'(x) = 0$ 在 (a,b) 内有 $n-1$ 个不同的实根 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}$，且

$$a < x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n < b.$$

3.5.52 设 a,b,c,d 皆为实数，$a > b > c > d$，且 $f(x) = (x-a)\cdot(x-b)(x-c)(x-d)$. 证明方程 $f'(x) = 0$ 必有三个实根.

证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续、可导，且 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$，在区间 $[a,b]$、$[b,c]$、$[c,d]$ 上分别使用罗尔定理，则存在 $a < \xi_1 < b$，$b < \xi_2 < c$，$c < \xi_3 < d$，使 $f'(\xi_i) = 0$，$(i = 1,2,3)$.

$f'(x) = 0$ 为三次方程，故它有且仅有三个根，于是 $f'(x) = 0$ 有且仅有三个实根，它们分别位于区间 (a,b)、(b,c)、(c,d) 内.

3.5.53 如果 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为满足

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

的实数，证明方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证　设 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，它显然在任何区间上是连续而且可导的，此外还有

$$f(0)=0,\ f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理，故知在 $(0,1)$ 内必至少存在一点 ξ，使

$$f'(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0.$$

3.5.54　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足

$$a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{a_n}{2n-1}=0$$

的实数，试证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个实根.

证　设 $f(x)=a_1\sin x+\frac{1}{3}a_2\sin 3x+\frac{1}{5}a_3\sin 5x+\cdots$

$$+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x,$$

它显然在任何区间上是连续而且可导的，此外还有

$$f(0)=0,$$

$$f(\frac{\pi}{2})=a_1-\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{5}a_3-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{a_n}{2n-1}=0,$$

故由罗尔定理知，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内必至少存在一点 ξ，使

$$f'(\xi)=a_1\cos\xi+a_2\cos 3\xi+a_3\cos 5\xi+\cdots+a_n\cos(2n-1)\xi=0.$$

3.5.55　设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

证明：必存在一点 $\xi(a<\xi<+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$.

证　首先，由于 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内连续.

如果在 $(a,+\infty)$ 内，$f(x)\equiv$ 常数，则 $f'(x)\equiv 0$，从而结论成立（实

际上,若在某个子区间内 $f(x) \equiv$ 常数,结论也成立).

否则,必可取一点 $x_0 \in (a, +\infty)$,使 $f(x_0) \neq A$. 不妨设 $f(x_0) > A$,进而必存在二点 $x_1 \in (a, x_0)$,$x_2 \in (x_0, +\infty)$,使 $f(x_0) > f(x_1)$,$f(x_0) > f(x_2)$.

因为 $f(x)$ 在$[x_1, x_2]$上连续,故必取得最大值,但由于在其内点 x_0 处的函数值 $f(x_0) > f(x_1)$,$f(x_0) > f(x_2)$,因此至少在(x_1, x_2)内的点 ξ 处取得最大值. 又 $\xi \in (x_1, x_2)$,ξ 必是极大值点,所以 $f'(\xi) = 0$,而 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, +\infty)$.

3.5.56 设 $f(x)$ 在$(x_0, +\infty)$内两次可微,并且 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$,$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,证明:存在一点 $\xi \in (x_0, +\infty)$,使 $f''(\xi) = 0$.

证 若不然,设对任意的 $x \in (x_0, +\infty)$,$f''(x) \neq 0$,则 $f''(x) < 0$ 或 $f''(x) > 0$. 不妨设 $f''(x) > 0$. 由广义罗尔定理知,存在一点 $x_0 < x_1 < +\infty$,使 $f'(x_1) = 0$. 因此,存在 $x_2 > x_1 > x_0$,使 $f'(x_2) > 0$,再由泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_2) \\ &\geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),\ (x > x_2). \end{aligned}$$

由此可知,$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 这与题设矛盾.

3.5.57 设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内二次可微,且 $|f(x)| < M$,M 是常数,证明:存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$,使 $f''(x_0) = 0$.

证 用反证法,若不然,设对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,$f''(x) \neq 0$,则有 $f''(x) > 0$ 或 $f''(x) < 0$. 不妨设 $f''(x) > 0$,则必有 $c \in (-\infty, +\infty)$,使 $f'(c) \neq 0$,不妨再设 $f'(c) > 0$,由泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2 \\ &> f(c) + f'(c)(x - c), \quad c < \xi < x. \end{aligned}$$

由此可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,这与题设矛盾.

3.5.58 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上二阶可导,x_1, x_2, x_3 为$[a, b]$内的三个点,$x_1 < x_2 < x_3$,且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$,证明:在$[a, b]$内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi) = 0$.

证 $f(x)$ 在$[a, b]$上可导,而 x_1, x_2 及 x_3 为区间$[a, b]$内的三点,所以有

(1) $f(x)$ 在$[x_1,x_2]$及$[x_2,x_3]$上连续；

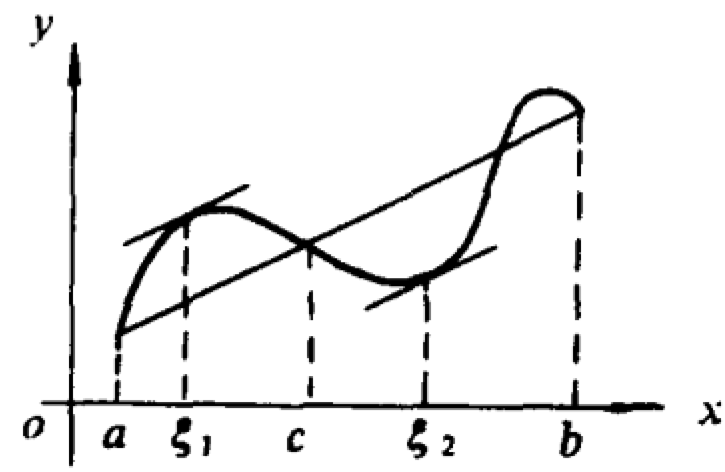
(2) $f(x)$ 在(x_1,x_2)及(x_2,x_3)内可导；

(3) $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$.

据罗尔定理可知，分别在(x_1,x_2)及(x_2,x_3)内至少各有一点ξ_1及ξ_2：$x_1<\xi_1<x_2$，$x_2<\xi_2<x_3$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

又$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且ξ_1,ξ_2为$[a,b]$内的两个点，于是$f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，在(ξ_1,ξ_2)内可导，且$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，再由罗尔定理得，在(ξ_1,ξ_2)内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$. 从而在$[a,b]$内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$.

3.5.59　设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内$f''(x)$存在，连结$(a,f(a))$与$(b,f(b))$的直线段与曲线$y=f(x)$相交于点$(c,f(c))$，其中$a<c<b$. 证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$.



3.5.59 题图

证　为了直观，作图如右，$f(x)$在(a,b)内可导，当然也在(a,c)，(c,b)内可导，在(a,c)，(c,b)内分别用拉格朗日定理，存在$\xi_1\in(a,c)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

存在$\xi_2\in(c,b)$，使

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

所以$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理，则在区间(ξ_1,ξ_2)内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$.

3.5.60　设函数$f(x)$在区间$[1,2]$上有二阶导数，且$f(2)=0$，又$F(x)=(x-1)^2f(x)$，那么，在区间$(1,2)$内至少有一点ξ存在，使得$F''(\xi)=0$.

证　由题设可知$F(1)=0$，$F(2)=0$，又$f(x)$在$[1,2]$上有二阶导数，故$F(x)=(x-1)^2f(x)$也有二阶导数，由罗尔定理，在$(1,2)$内至少存在一点η，使得$F'(\eta)=0$，又由

$$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$$

可知，$F'(1)=0$，再由罗尔定理，在$(1,\eta)$内至少有一点ξ，使

$$F''(\xi)=0,\quad 1<\xi<\eta.$$

即说明在$(1,2)$内至少有一点ξ存在，使得$F''(\xi)=0$.

3.5.61 若$f(x)$于$[0,1]$上有三阶导数，且$f(0)=f(1)=0$，试证：对$F(x)=x^3f(x)$，在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使$F'''(\xi)=0$.

证 显然，$F(x)=x^3f(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理的三个条件，所以有

$$F'(\xi_1)=\xi_1^3f'(\xi_1)+3\xi_1^2f(\xi_1)=0,\ 0<\xi_1<1.$$

再考虑$F'(x)=x^3f'(x)+3x^2f(x)$，它在$[0,\xi_1]$上也满足罗尔定理的三个条件，从而又有ξ_2，使

$$F''(\xi_2)=\xi_2^3f''(\xi_2)+6\xi_2^2f'(\xi_2)+6\xi_2f(\xi_2)=0,\ 0<\xi_2<\xi_1.$$

最后再在$[0,\xi_2]$上对

$$F''(x)=x^3f''(x)+6x^2f'(x)+6xf(x)$$

应用罗尔定理，则在$(0,1)$内至少存在一点ξ，使

$$F'''(\xi)=0,0<\xi<\xi_2<\xi_1<1.$$

3.5.62 设函数$f(x)$满足：

(1) 在闭区间$[x_0,x_n]$上有定义且有$(n-1)$阶连续导数$f^{(n-1)}(x)$；

(2) 在开区间(x_0,x_n)内有n阶导数$f^{(n)}(x)$；

(3) $f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)$，$(x_0<x_1<\cdots<x_n)$，

证明：在区间(x_0,x_n)内至少存在一点ξ，使$f^{(n)}(\xi)=0$.

证 在每一个闭区间$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$上，$f(x)$满足罗尔定理的条件，所以存在n个点$\xi_1^0,\xi_2^0,\cdots,\xi_n^0$，$\xi_i^0\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使

$$f'(\xi_1^0)=f'(\xi_2^0)=\cdots=f'(\xi_n^0)=0.$$

又在$[\xi_1^0,\xi_2^0]$，$[\xi_2^0,\xi_3^0]$，$\cdots$，$[\xi_{n-1}^0,\xi_n^0]$上应用罗尔定理（$f'(x)$是连续的且$f''(x)$存在），存在$(n-1)$个点$\xi'_1,\xi'_2,\cdots\xi'_{n-1}$，使$f''(\xi'_1)=f''(\xi'_2)=\cdots=f''(\xi'_{n-1})=0$. 继续上述步骤，经$n-1$次后，得到一个区间

$$[\xi_1^{n-1},\xi_2^{n-1}]\subset[x_0,x_n]$$

且$f^{(n-1)}(\xi_1^{n-1})=f^{(n-1)}(\xi_1^{n-2})=0$. 在此区间上应用罗尔定理（$f^{(n-1)}(x)$连续，$f^{(n)}(x)$存在），则至少存在一点$\xi$，使$f^{(n)}(\xi)=0$.

3.5.63 已知多项式

$$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的一切根均为实数（其中$a_0\neq0$，a_k为实系数，$k=0,1,2,\cdots,n$）. 证明：各

阶导函数 $p'_n(x), p''_n(x), \cdots, p_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

证　设 $p_n(x)$ 的 n 个实根为 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}$，则

$$p_n(x_{11}) = p_n(x_{12}) = \cdots = p_n(x_{1n}) = 0,$$

故 $p_n(x)$ 在$[x_{11}, x_{12}], [x_{12}, x_{13}], \cdots, [x_{1,n-1}, x_{1n}]$上满足罗尔定理的条件，故在$(x_{11}, x_{12})$，$(x_{12}, x_{13})$，$\cdots$，$(x_{1,n-1}, x_{1n})$ 内存在 $n-1$ 个点 $x_{21}, x_{22}, \cdots x_{2,n-1}$，使

$$p_n'(x_{21}) = p_n'(x_{22}) = \cdots = p_n'(x_{2,n-1}) = 0,$$

即 $x_{2i}\,(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 是 $p_n'(x)$ 的 $n-1$ 个实根，而 $p'(x)$ 只能有 $n-1$ 个根，所以 $p_n'(x)$ 仅有实根.

同理可证 $p_n''(x), p_n'''(x), \cdots, p_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

3.5.64　设 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上无穷多次可微，且 $f(x) = o(x^n)(|x| \to +\infty)$，证明：对每个 $r \geqslant n+1$，$f^{(r)}(x)$ 都有零点.

证　由题设知，$f(x) = o(x^k), k \geqslant n$，故只须证明 $f^{(n+1)}(x)$ 有零点，若不然，$f^{(n+1)}(x)$ 无零点，则 $f^{(n)}(x)$ 是严格单调函数，所以至多有一个零点，令

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{若 } f^{(n)}(x) \text{ 无零点；} \\ z_0 + 1, & \text{若 } f^{(n)}(z_0) = 0. \end{cases}$$

由泰勒展式知，对 $x > x_0$，存在 $\theta = \theta(x) > x_0$，使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(\theta)(x - x_0)^n}{n!}.$$

因为 $f(x) = o(x^n)$，故 $f^{(n)}(\theta(x)) \to 0\ (|x| \to +\infty)$. 又因为 $f^{(n)}(x)$ 是严格单调的，而且 $\theta(x) > z_0 + 1$，由此可知，$\theta(x) \to +\infty$，所以 $f^{(n)}(x) \to 0(|x| \to +\infty)$. 同理可知，$f^{(n)}(x) \to 0\ (x \to -\infty)$. 这与 $f^{(n)}(x)$ 的严格单调性矛盾，故 $f^{(n+1)}(x)$ 必有零点.

3.5.65　证明方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根.

证　将方程改写为

$$f(x) = 2^x - x^2 - 1 = 0,$$

显然，$f(x)$ 为任何阶可导函数，且 $f(0) = f(1) = 0$，故 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为两个实根.

由于 $f(4) = -1$，$f(5) = 6$，根据介值定理，存在一点 $\xi\ (4 < \xi < 6)$，使 $f(\xi) = 0$. 即已知方程有三个实根：$0, 1, \xi$.

若方程有四个实根，即 $f(x)$ 有四个零点，根据罗尔定理可知，$f''(x)$

至少有两个零点，但是

$$f'(x) = 2^x\ln 2 - 2x,\ f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2.$$

由 $f''(x) = 0$ 可得 $x = \log_2\left(\frac{2}{(\ln 2)^2}\right)$. 即 $f''(x)$ 只有唯一的零点. 故方程至多只有三个根，即方程有且仅有三个实根.

3.5.66　设 $a^2 - 3b < 0$，证明：函数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

在实轴上仅有一个实根.

证　因为 $f(x)$ 是奇次多项式，故至少有一个实根；另一方面，$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$，它的判别式

$$\Delta = 4a^2 - 12b = 4(a^2 - 3b) < 0.$$

故 $f'(x)$ 无实根，即 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒为正或恒为负. 又 $f'(x) \to +\infty\ (x \to +\infty)$，故 $f'(x) > 0, (|x| < +\infty)$. 这表明 $f(x)$ 是严格单调增加函数，从而在实轴上有唯一实根.

3.5.67　在什么条件下

(1) 方程 $x^3 + px + q = 0$ 有一个实根?

(2) 方程 $x^3 + px + q = 0$ 有三个实根?

(3) 画出 p、q 应适应的区域.

解　设 $f(x) = x^3 + px + q$，当 $x \to \pm\infty$ 时，$f(x) \to \pm\infty$. 于是，

$f_{\min} > 0$ 或 $f_{\max} < 0$ 或 $f'(x) \geqslant 0$ 时，方程有一个实根；

$f_{\max} > 0$ 且 $f_{\min} \leqslant 0$ 时，有三个实根.

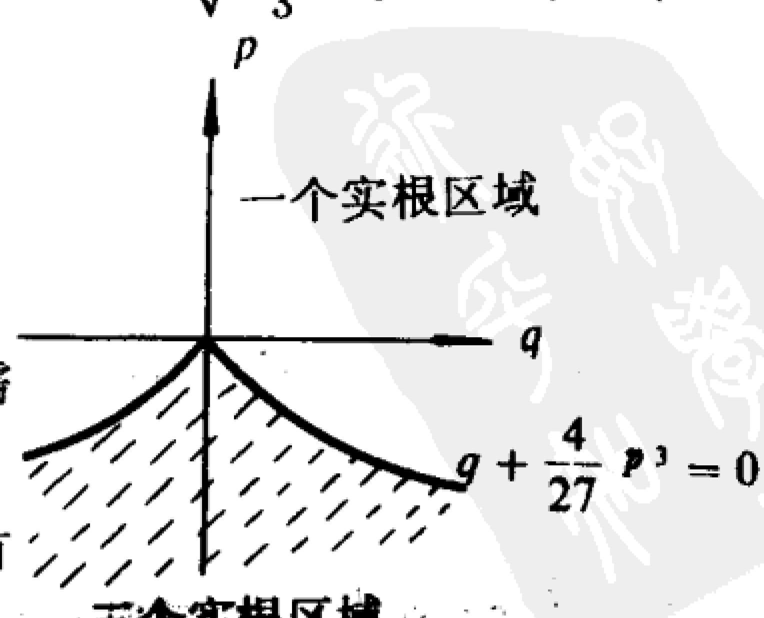
$f'(x) = 3x^2 + p = 0$ 的根是 $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$，$(p < 0)$. 在 x_1 和 x_2 处，由 $f''(x)$ 的符号可知

$$f_{\max} = q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

$$f_{\min} = q + \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}.$$

(1) 要使方程只有一个实根，则需 $q^2 + \frac{4}{27}p^3 > 0$（包含 $p > 0$ 的情形）；

(2) 要使方程有三个实根，则必有 $|q| \leqslant \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{-p}{3}}$ 或 $q^2 + \frac{4}{27}p^3 \leqslant 0$；



3.5.67 题图

(3) (p,q) 平面上相应的区域如图.

3.5.68 设 $f(x)$ 为三次多项式,且 $f(a)=f(b)=0$,求证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内不变号的充要条件是 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$.

证 先证必要性.

因为 $f(x)$ 为三次多项式,且 $f(a)=f(b)=0$,所以可设

$$f(x)=A(x-a)(x-b)(x-c),$$

其中 A 为常数系数,c 为 $f(x)$ 的另一个零点.

对于任意的 $x\in(a,b)$,$(x-a)(x-b)$ 恒小于零,故 $A(x-a)(x-b)$ 有定号.

现设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内不变号,则 $x-c$ 必有定号,从而 c 不属于 (a,b) 由

$$f'(x)=A[(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)]$$

得 $$\begin{aligned}f'(a)f'(b)&=A^2[(b-a)(b-c)(a-b)(a-c)]\\&=-A^2(a-b)^2(a-c)(b-c),\end{aligned}$$

而 $(a-c)(b-c)\geqslant 0$,所以 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$.

至于充分性,将上述的证明过程倒推上去即可得证.

3.5.69 在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上讨论方程 $\sin^3x\cos x=a$,$(a>0)$ 实根的个数.

解 设 $f(x)=\sin^3x\cos x-a$,则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin^2x(3\cos^2x-\sin^2x)\\&=\sin^2x(\sqrt{3}\cos x+\sin x)(\sqrt{3}\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=0,\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\pi$,从而得 $f(0)=-a$,

$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a$,$f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a$,$f(\pi)=-a$,

当 $a<\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时,$f(0)<0$,$f(\frac{\pi}{3})>0$,$f(\frac{2\pi}{3})<0$,而在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 内 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 单调增加;在 $(\frac{\pi}{3},\pi)$ 内 $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 单调减少,由介值定理知,$f(x)=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 及 $(\frac{\pi}{3},\pi)$ 内各有一个根,当 $a=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时,$f(\frac{\pi}{3})=0$,这时 $x=\frac{\pi}{3}$ 是方程唯一的根,当 $a>\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时,

方程无根.

3.5.70 用分析法讨论方程 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 实根的个数.

解 令 $f(x)=xe^{-x}-a$,则 $f'(x)=e^{-x}(1-x)$. 令 $f'(x)=0$,求得唯一的驻点 $x=1$,又当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(1)=e^{-1}-a$ 是 $f(x)$ 的极大值且是最大值.

若 $a>e^{-1}$,则 $f(x)$ 恒小于零,即 $f(x)$ 无零点,从而原方程无实根;若 $a<e^{-1}$,则 $f(1)>0$,又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$,且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内均严格单调,故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内分别有唯一的实根,这时原方程在 $(-\infty,+\infty)$ 内有两个实根;若 $a=e^{-1}$,则 $f(1)=0$,且当 $x<1$ 时,$f(x)<f(1)=0$,当 $x>1$ 时,$f(x)<f(1)=0$,故 $f(x)=0$ 只有唯一的实根 $x=1$,这时原方程在 $(-\infty,+\infty)$ 内只有唯一的实根 $x=1$.

3.5.71 证明:多项式 $p(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 没有实根.

证 若 $p(x)$ 有实根 y,则由于 $p(x)$ 的常数项不为 0,且各项系数均为正,故必有 $y<0$. 设 $y=-z\ (z>0)$,则有

$$0=p(-z)=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}>e^{-z}>0,$$

产生矛盾,从而 $p(x)$ 无实根.

3.5.72 证明:方程 $1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$ 当 n 为奇数时有一个实根,当 n 为偶数时无实根.

证 当 $x\leqslant 0$ 时,方程左端为正,因此方程不可能有非正根,所以只须考虑 $x>0$ 时的情形,令

$$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n},$$

当 n 为奇数时,因 $f(0)=1$,$f(x)\to-\infty\ (x\to+\infty)$,且

$$f'(x)=-\frac{1-(-1)^nx^n}{1+x}=-\frac{1+x^n}{1+x}<0\ (x>0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x>0$ 时单调下降,故 $f(x)=0$ 仅有一个实根.

当 n 为偶数时,有

$$f'(x)=-\frac{1-(-1)^nx^n}{1+x}=-\frac{1-x^n}{1+x}\begin{cases}\geqslant 0, & x\geqslant 1;\\ <0, & 0<x<1.\end{cases}$$

又因　　$f(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k}$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2k-2}-\frac{1}{2k-1})+\frac{1}{2k}>0,$$

所以，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>f(1)>0$，故 $f(x)=0$ 无实根.

3.5.73　证明：多项式方程 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ 当 n 为偶数时无实根，而当 n 为奇数时恰有一个实根.

证　记 $p_k(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}$，则

$$p'_k(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=p_{k-1}(x),$$

原方程即为 $p_n(x)=0$.

显然，$p_1(x)=0$ 即 $1+x=0$ 有一个实根；$p_2(x)=0$ 即 $1+x+\frac{x^2}{2}=0$ 的判别式 $\Delta=1^2-4\times\frac{1}{2}\times1<0$，故无实根. 现在用数学归纳法，设 $p_{2k-1}(x)=0$ 恰有一个实根，$p_{2k}(x)$ 无实根，证明 $p_{2k+1}(x)$ 恰有一个实根而 $p_{2k+2}(x)$ 无实根.

事实上，显然有 $p_{2k}(0)=1>0$，故当 $x_0\neq0$ 时，必有 $p_{2k}(x_0)>0$，因为若不然，则 $p_{2k}(x_0)\leqslant0$，由连续性可知，$p_{2k}(x)=0$ 在 0 与 x_0 之间有根，这与假设矛盾. 于是，$p_{2k}(x)$ 恒取正值，又因为 $p'_{2k+1}(x)=p_{2k}(x)$，故 $p_{2k+1}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，于是 $p_{2k+1}(x)=0$ 有唯一实根，把该实根记为 c，则 $-\infty<c<0$，即有 $c\neq0$.

因 $p'_{2k+1}(x)=p_{2k}(x)$ 只有一个实零点，又当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时都有 $p_{2k+1}(x)\to+\infty$，于是多项式 $p_{2k+2}(x)$ 在 $p_{2k+1}(x)=0$ 的唯一实根 $x=c$ 处取得最小值，由于

$$p_{2k+2}(x)=p_{2k+1}(c)+\frac{c^{2k+2}}{(2k+2)!}=\frac{c^{2k+2}}{(2k+2)!}>0,$$

即 $p_{2k+2}(x)$ 的最小值(在 $x=c$ 处取得)为正，故方程 $p_{2k+2}(x)=0$ 无实根.

3.5.74　证明对于所有的整数 $m\geqslant0$，

$$p(x,n,m)=\frac{x^n}{(n+1)^m}+\frac{x^{n-1}}{n^m}+\cdots+\frac{x}{2^m}+1$$

当 n 为偶数时无实根，当 n 为奇数时仅有一个实根.

证　当 $m=0$ 时，显然

$$p(x,n,0)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1,$$

当 n 为偶数时无实根，当 n 为奇数时仅有一个实根 -1. 下面对 m 用归纳法. 设结论对于 m 成立，则由

$$[xp(x,n,m+1)]'=\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{m+1}}\right]'+\left[\frac{x^n}{n^{m+1}}\right]'+\cdots+x'$$

$$=\frac{x^n}{(n+1)^m}+\frac{x^{n-1}}{n^m}+\cdots+\frac{x}{2^m}+1=p(x,n,m)$$

知，当 $p(x,n,m)$ 仅有一实根时，$xp(x,n,m+1)$ 仅有两个实根，从而 $p(x,n,m+1)$ 仅有一个实根；当 $p(x,n,m)$ 无实根时，$xp(x,n,m)$ 仅有一个实根，从而 $p(x,n,m+1)$ 无实根.

注 更一般地，我们有下述结果：当

$$a_0,\quad\begin{vmatrix}a_0 & a_1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\end{vmatrix},\quad\cdots,\quad\begin{vmatrix}a_0\,a_1\cdots\,a_n\\ a_1\,a_2\cdots\,a_{n+1}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_n\,a_{n+1}\cdots\,a_{2n}\end{vmatrix}$$

为正时，$p_{2n}(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{2n}z^{2n}$ 无实零点；

$p_{2n+1}(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{2n+1}z^{2n+1}$ 仅有一实零点.

请读者自己给出证明.

3.5.75 设多项式

$$p(x)=a_nx^n+\cdots+a_{k+1}x^{k+1}+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0 \tag{1}$$

的一切根皆为互异的实根，且 $a_k=0$，$a_{k+1},a_{k-1}\neq 0$，求证 $a_{k+1}a_{k-1}<0$，其中 $0<k<n$.

证 对(1)求 $k-1$ 阶导数，并记

$$f(x)=p^{(k-1)}(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_2x^2+b_0, \tag{2}$$

其中 $m=n-k+1$，易知

$$\operatorname{sgn}(a_{k+1})=\operatorname{sgn}(b_2),\ \operatorname{sgn}(a_{k-1})=\operatorname{sgn}(b_0),$$

又因 $p(x)$ 有 n 个互异的实根，由罗尔定理知，$p(x)$ 每两个根之间存在 $p'(x)$ 的一个根，故 $p'(x)$ 的 $n-1$ 个根也是互异的，依此类推，$p^{(k-1)}(x)=f(x)$ 的 $m=n-k+1$ 个根也是互异的. 此时可证 $f(x)$ 必有负根. 因若不然，则诸系数 b_k 应不为零，这与 $b_1=0$ 矛盾，故不妨设为

$$x_1<x_2<\cdots<x_s<0<x_{s+1}<\cdots<x_m,$$

因为 $a_{k-1}\neq 0$，故 $b_0\neq 0$，因此 0 不是 $f(x)$ 的根，且由韦达定理知 $\operatorname{sgn}(b_0)=(-1)^s$. 再对 $f(x)$ 求导数，由 $f'(x)$ 的常数项为 0 可知，$f'(x)$ 有一个

零根，此外在区间(x_1,x_2)，(x_2,x_3)，$\cdots(x_{s-1},x_s)$中各有一负根，共$s-1$个负根，设为

$$y_1<y_2<\cdots<y_{s-1}<0.$$

再对$f'(x)$求导数，则知$f''(x)$在区间(y_1,y_2)，$\cdots$，(y_{s-2},y_{s-1})，$(y_{s-1},0)$之间各有一负根，共$s-1$个负根.而$f''(x)$的常数项为$2b_2$，即知$\operatorname{sgn}(b_2)=(-1)^{s-1}$，因此

$$\operatorname{sgn}(b_0)\operatorname{sgn}(b_2)=(-1)^{2s-1}=-1.$$

即是$b_2b_0<0$，因而$a_{k+1}a_{k-1}<0$.

3.5.76　证明契比雪夫—埃尔米特(Чебышев-Hermite)多项式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

证　不难验证，$H_n(x)$确为n次多项式，设$f(x)=e^{-x^2}$，则由$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$及广义罗尔定理知，存在$x_1^{(1)}\in(-\infty,+\infty)$，使得$f'(x_1^{(1)})=0$，又因$f^{(k)}(x)=p_k(x)e^{-x^2}$，其中$p_k(x)$为一多项式，并设$f^{(k)}(x)$有$k$个实零点：

$$-\infty<x_1^{(k)}<x_2^{(k)}\cdots<x_k^{(k)}<+\infty,$$

则由$\lim\limits_{x\to-\infty}f^{(k)}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$及广义罗尔定理知，存在

$$x_1^{(k+1)}\in(-\infty,x_1^{(k)}),x_2^{(k+1)}\in(x_1^{(k)},x_2^{(k)}),\cdots,x_{k+1}^{(k+1)}\in(x_k^{(k)},+\infty),$$

使得　　$f^{(k+1)}(x_i^{(k+1)})=0,\ i=1,2,\cdots,k+1.$

故知$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=f^{(n)}(x)$有$n$个实零点，而$(-1)^n e^{x^2}$恒不为零，故$H_n(x)$有$n$个实零点，但$H_n(x)$为$n$次多项式，故知$H_n(x)$仅有$n$个实零点.

注　用同样的方法可以证明勒让德(Legendre)多项式

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数，且含于区间$(-1,1)$中.

3.5.77　证明契比雪夫—拉盖尔(Чебышев-Laguerre)多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

所有的根都是正根.

证　首先不难验证$L_n(x)$确为n次多项式，设$f(x)=x^n e^{-x}$，则$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，由广义罗尔定理知，存在$x^{(1)}\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(x_1^{(1)}) = 0.$$

今设 $f^{(k)}(x)$ 有 k 个零点 $x_i^{(k)}, i = 1,2,\cdots,k,\ k < n$，且

$$0 < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \cdots < x_k^{(k)} < +\infty,$$

则因 $f^{(k)}(x) = x^{n-k}p_k(x)e^{-x}$，其中 $p_n(x)$ 为多项式，故推知 $f^{(k)}(0) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$. 再用广义罗尔定理知，存在

$$x_1^{(k+1)} \in (0, x_1^{(k)}),\ x_2^{(k+1)} \in (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}),\ \cdots,\ x_{k+1}^{(k+1)} \in (x_k^{(k)}, +\infty),$$

使得 $$f^{(k+1)}(x_i^{(k+1)}) = 0, i = 1,2,\cdots,k+1.$$

由数学归纳法知，

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = f^{(n)}(x)$$

有 n 个正根. 而 e^x 恒不为零，故 $L_n(x)$ 有 n 个正根. 但由代数定理知，n 次多项式只有 n 个根，从而 $L_n(x)$ 的一切根都为正实数.

3.5.78 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) = f(b) = 0$，又 $f'(a)\cdot f'(b) > 0$，证明：(a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi) = 0$.

证法1 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$，于是总存在 $\delta_1 > 0$，使当 $x_1 \in (a, a+\delta_1)$ 时，有 $\dfrac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > 0$，所以

$$f(x_1) > f(a) = 0.$$

用类似的方法可证，存在 $\delta_2 > 0$，当 $x_2 \in (b-\delta_2, b)$ 时，有 $f(x_2) < f(b) = 0$.

取 δ_1, δ_2 充分小，使 $a + \delta_1 < b - \delta_2$，由连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使

$$f(\xi) = 0,\quad a < \xi < b.$$

证法2 反证法，设对 (a,b) 内的任一点 x，都有 $f(x) \neq 0$，则由连续函数的性质可知，在 (a,b) 内 $f(x)$ 恒大于 0 或恒小于 0.

若对 (a,b) 内的任一点 x，都有 $f(x) < 0$，则

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} < 0,$$

所以 $$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \leqslant 0.$$

这与 $f'(a) > 0$ 矛盾.

若对 (a,b) 内的任一点 x，都有 $f(x) > 0$，则

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \frac{f(x)}{x - b} < 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)\leqslant 0$,这也与 $f'(b)>0$ 矛盾.

故在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

3.5.79　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微,且 $f(a)=f(b)$,$f'(a)\cdot f'(b)>0$. 证明:方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个解.

证法 1　不妨设 $f'(a)>0$,$f'(b)>0$. 于是总存在 $\delta_1>0$,使当 $\xi_1\in(a,a+\delta)$ 时,有 $\dfrac{f(\xi_1)-f(a)}{\xi_1-a}>0$,所以有

$$f(\xi_1)>f(a), \tag{1}$$

同样,存在 $\delta_2>0$,使当 $\xi_2\in(b-\delta_2,b)$ 时,有

$$f(\xi_2)<f(b). \tag{2}$$

取 δ_1,δ_2 充分小,使 $a<\xi_1<\xi_2<b$. 又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,由连续函数的介值定理知,在 (ξ_1,ξ_2) 内至少存在一点 c,使 $f(c)=f(a)=f(b)$.

在 (a,c) 和 (c,b) 中应用罗尔定理可知,在 (a,c) 中至少存在一点 η_1,使 $f'(\eta_1)=0$;在 (c,b) 中至少存在一点 η_2,使 $f'(\eta_2)=0$.

故 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个解.

证法 2　由证法 1 中的(1)、(2) 两式可知,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少达到最大值、最小值各一次,那么其值必在 (a,b) 内达到. 又由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内的可微性,在最值点必有 $f'(x)=0$,所以,$f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个解.

3.5.80　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$. 又存在一点 x_0,使 $f(x_0)<0$. 证明:方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内必有且只有两个实根.

证　由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数可知,$f'(x)$、$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$,给定 $\varepsilon>0$,必存在 $X_0(>x_0)$,当 $x>X_0$ 时,$|f'(x)-\alpha|<\dfrac{\alpha}{2}$,即有 $f'(x)>\dfrac{\alpha}{2}$.

在 $[X_0,x]$ 上应用拉格朗日定理,得

$$\frac{f(x)-f(X_0)}{x-X_0}=f'(\xi),\ X_0<\xi<x.$$

当 $x>X_0$ 时,

$$f(x) = f(X_0) + f'(\xi)(x - X_0) > f(X_0) + \frac{a}{2}(x - X_0),$$

当 $x \to +\infty$ 时，上式右端趋向于 $+\infty$，因而 $f(x)$ 也趋向于 $+\infty$，即 $f(+\infty) > 0$，而 $f(x_0) < 0$. 由连续函数的介值定理知道，$f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一个零点，即 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一个实根.

同理可证，$f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 内至少有一个实根.

但是，$f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的实根不能多于两个，否则，设 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ 为 $f(x) = 0$ 的三个实根，分别在 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上应用罗尔定理，就有

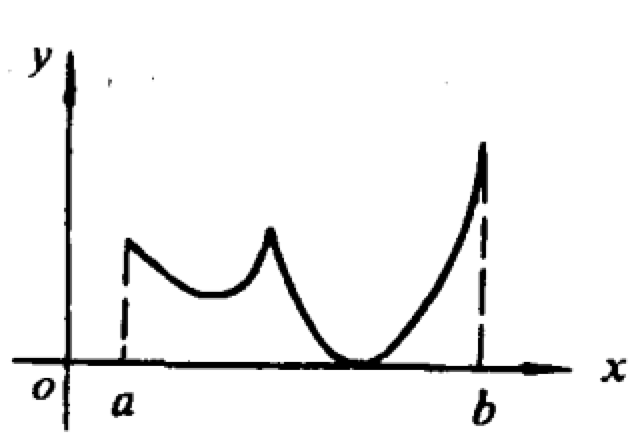
$$f'(\xi_1) = 0,\ x_1 < \xi_1 < x_2,$$
$$f'(\xi_2) = 0,\ x_2 < \xi_2 < x_3.$$

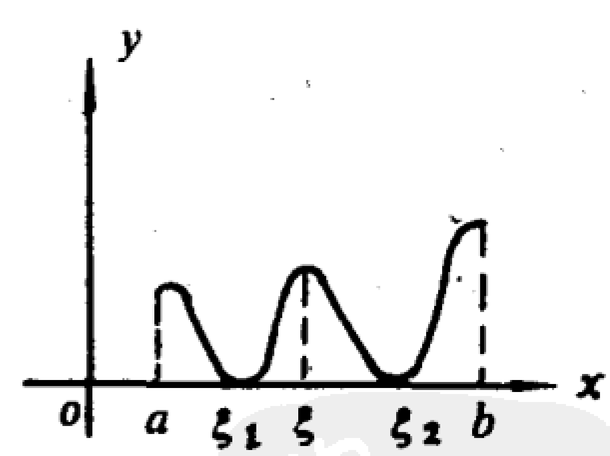
再在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理，就有

$$f''(\eta) = 0,\ \xi_1 < \eta < \xi_2.$$

这就与条件 $f''(x) > 0$ 相矛盾.

3.5.81 设 $f(x)$ 为非负函数，它在 $[a,b]$ 的任一子区间内不恒为零，在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \geqslant 0$，证明：方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内如果有根，就只能有一个.





3.5.81 题图

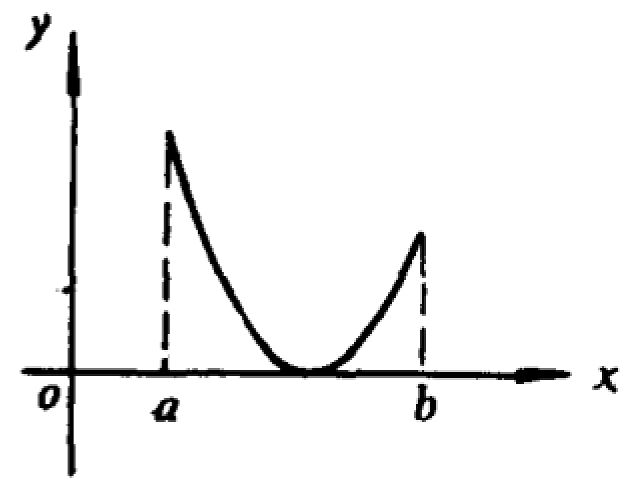
分析 因 $f(x)$ 非负不恒为 0，二阶导数 $f''(x) \geqslant 0$，所以 $f(x)$ 的图形上凹且不出现尖点，即图中(1)、(2) 的情况不可能出现，如 $f(x) = 0$ 有根，只可能是图中(3) 的情况.

证 用反证法证明. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个根 $\xi_1, \xi_2 (\xi_1 < \xi_2)$，那么，$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$(图中(2))

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上，$f(x)$ 非负连续，且不恒为零，故最小值在 (ξ_1, ξ_2) 内某

点 ξ 处达到，且有 $f'(\xi)=0$. 把 $f(x)$ 在 ξ 处展开，就有

$$f(\xi_2)=f(\xi)+f'(\xi)(\xi_2-\xi)+\frac{1}{2}f''(c)(\xi_2-\xi)^2$$
$$=f(\xi)+\frac{1}{2}f''(c)(\xi_2-\xi)^2$$
$$>0,\ \xi<c<\xi_2,$$



(3)

这与 $f(\xi_2)=0$ 矛盾，命题得证.

3.5.82 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次可微，且对任意的 $x\in[a,b]$，$f(x)$ 与 $f''(x)$ 恒同号或者同时为零；又 $f(x)$ 在任何子区间不恒为零，证明：$f(x)=0$ 与 $f'(x)=0$ 中任何一个若在 (a,b) 内有根，则必唯一.

证　不妨设 $f(x)\geqslant 0$，$f''(x)\geqslant 0$，否则，若 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有根且不唯一，令 $x_1<x_2$ 是这样两个根，由罗尔定理有 $c\in(x_1,x_2)$，使 $f'(c)=0$，又 $f(x)$ 在 (c,x_2) 内不恒为零，故存在 $x_0\in(c,x_2)$，使 $f(x_0)>0$，在 $[x_0,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=-\frac{f(x_0)}{x_2-x_0}<0,$$

因此 $c<\xi$，且 $f'(c)>f'(\xi)$，这与 $f''(\xi)\geqslant 0$ 矛盾，故 $f(x)=0$ 若有根，则必唯一.

又若 $f'(x)=0$ 有两个根 $x_1<x_2$，由 $f''(x)\geqslant 0, x\in(a,b)$，可知，$f'(x)$ 在 (a,b) 内不减，从而有 $f'(x)\equiv 0, x\in[x_1,x_2]$. 于是 $f''(x)=0$，$x\in[x_1,x_2]$. 由泰勒公式得

$$f(x)\equiv 0,\quad x\in[x_1,x_2]$$

与题设矛盾.

3.5.83　设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且对于 (a,b) 内的一切 x 均有 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$. 证明：如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点，则在这两个零点之间，$g(x)$ 至少还有一个零点.

证　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的两个零点为 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，即 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$.

用反证法证明. 设 $g(x)$ 在 (x_1,x_2) 内不存在零点，即对于 (x_1,x_2) 内任何一点 x，都有 $g(x)\neq 0$. 则由条件 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$ 可知，对于 (x_1,x_2) 内的任一点 x，都有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \neq 0, \tag{1}$$

而 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 知，$\frac{f(x_1)}{g(x_1)}=0$，$\frac{f(x_2)}{g(x_2)}=0$. 由罗尔定理可得，对于 (x_1,x_2) 内某一点 ξ，有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=\xi} = 0,$$

即
$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{[g(\xi)]^2} = 0. \tag{2}$$

显然，(2) 与 (1) 矛盾，所以在两个零点 x_1,x_2 之间至少存在一点 x_0，使 $g(x_0)=0$.

3.5.84 设在 $1 \leqslant x < +\infty$ 上有 $f''(x) < 0$，且 $f(1)=2$，$f'(1) = -3$，证明：在 $1 < x < +\infty$ 内方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根.

证 因为在 $1 \leqslant x < +\infty$ 上 $f''(x) < 0$，所以，当 $x \geqslant 1$ 时，有 $f'(x) < f'(1)$. 而 $f'(1) = -3$，故 $f'(x) < 0$，即 $f(x)$ 在 $1 \leqslant x < +\infty$ 上单调递减. 因此，$f(x)$ 在 $1 \leqslant x < +\infty$ 上最多只有一个零点，即方程 $f(x)=0$ 在 $1 \leqslant x < +\infty$ 上最多只有一个实根.

把 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处作一阶泰勒展开，得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2,$$

其中 ξ 在 1 与 x 之间，由于 $f(1)=2$，$f'(1)=-3$，$f''(x)<0$，所以当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$. 于是，由 $f(1)=2>0$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$ 和连续函数的介值定理可知，$f(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 内至少有一个零点，即方程 $f(x)=0$ 在 $1 < x < +\infty$ 内至少有一个实根.

综上所述，在 $1 < x < +\infty$ 内方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根.

3.5.85 设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续，当 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$. 其中 k 为常数，证明：如果 $f(a) < 0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $[a, a-\frac{f(a)}{k}]$ 上有且仅有一个实根.

证 由拉格朗日定理，有

$$f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) = f(a) + f'(\xi)\left(-\frac{f(a)}{k}\right) = f(a)\left(1 - \frac{f'(\xi)}{k}\right).$$

由题设知，$f'(\xi) > k > 0$，故 $1 - \frac{f'(\xi)}{k} < 0$，又 $f(a) < 0$，故 $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right)$

>0. 由连续函数的介值定理知，在区间$\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$中至少存在一点$x_0$，使$f(x_0)=0$. 但当$x>a$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$上是单调递增的，故在此区间上至多只有一点$x_0$，使$f(x_0)=0$. 所以，方程$f(x)=0$在$\left[a,a-\frac{f(a)}{k}\right]$上有且仅有一个实根.

3.5.86　设$f(x)$在$[a,b]$上二次可微，且$f''(x)>0$，$f(a)>0$，$f(b)<0$. 证明：$f(x)$在(a,b)内有唯一的零点ξ，而且数列

$$a_1=a,\quad a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},\quad \cdots,\quad a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)},\cdots$$

收敛于ξ，即

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\xi.$$

证　由连续函数的介值定理可知，$f(x)=0$在(a,b)内有根，若$f(x)$在(a,b)内有两个根x_1,x_2，则不妨设$a<x_1<x_2<b$，由罗尔定理知，存在$x_0\in(x_1,x_2)$，使$f'(x_0)=0$.

又由题设知，在$[a,b]$上$f''(x)>0$，故$f'(x)$在(a,b)内单调增加，当$x>x_0$时，$f'(x)>f'(x_0)=0$，因此，$f(x)$在(x_0,b)内单调增加，$f(b)>f(x_2)>0$，这与题设$f(b)<0$矛盾. 于是，$f(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个根，设为ξ，由$f(\xi)=0$，$f(a)>0$可知，连接点$(a_1,f(a_1))$与$(\xi,f(\xi))$的直线斜率为负，即$f'(x)<0$ $(a_1\leqslant x\leqslant\xi)$，曲线$f(x)$在$(a_1,f(a_1))$点的切线方程为

$$y=f(a_1)+f'(a_1)(x-a_1),$$

该切线与x轴的交点为

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

又由题设知，$f(x)$位于切线的上方，故$a_1<a_2<\xi$. 类似地可证得

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots<\xi,$$

据极限存在准则可知$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=c\leqslant\xi$，且$c=c-\frac{f(c)}{f'(c)}$，故$f(c)=0$.

由$f(x)$在(a,b)内有唯一的零点即知$\xi=c$.

3.5.87　设$f(x)$在$[0,1]$上可导，$0<f(x)<1$，且对于$(0,1)$内所有的x都有$f'(x)\neq1$，证明：在$(0,1)$内有且只有一个x_0，使

$$f(x_0)=x_0.$$

证 先证存在性.作辅助函数 $F(x)=f(x)-x$,那么

$$F(0)=f(0)-0=f(0)>0,\ F(1)=f(1)-1<0.$$

由连续函数的介值定理知,在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x_0,使 $F(x_0)=0$,即 $f(x_0)=x_0$.

再证唯一性.用反证法.设在 $(0,1)$ 内存在两点 x_0,x_1 使 $f(x)=x$,即有 $f(x_0)=x_0,f(x_1)=x_1$.按题设条件,由拉格朗日定理知道,在 x_0 与 x_1 之间存在一点 ξ,使

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(\xi)\neq 1;$$

而由假设却有

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{x_1-x_0}{x_1-x_0}=1.$$

显然,上面两式相矛盾,所以假设不成立,故只有唯一的一点 x_0,使 $f(x_0)=x_0$.

3.5.88 设函数 $f(x)$ 在半轴 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数,且 $f(0)=1$,对于所有的 $x\geqslant 0$,有 $|f(x)|\leqslant e^{-x}$,证明:存在一点 x_0,使 $f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

证 考察函数 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$,显然有 $\varphi(0)=0$,当 $x\geqslant 0$ 时,$\varphi(x)\leqslant 0$;当 $x\to+\infty$ 时,$\varphi(x)\to 0$.所以,存在点 x_0,使 $\varphi(x)$ 在该点达到最小值.于是 $\varphi'(x_0)=0$,即 $f'(x_0)+e^{-x_0}=0$,亦即
$f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

4.有关函数及导数的等式

3.5.89 证明:在 $[-1,1]$ 上恒有 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证 在左端点 $x=-1$ 处,

$$\arcsin(-1)+\arccos(-1)=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2};$$

在右端点 $x=1$ 处,

$$\arcsin 1+\arccos 1=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2};$$

在 $(-1,1)$ 内,

$$(\arcsin x+\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

于是 $\arcsin x+\arccos x=c$（c 是常数），$x\in(-1,1)$. 为求出 c 值，可在 $(-1,1)$ 内任取一点，比如取 $x=0$，则有 $0+\frac{\pi}{2}=c$，即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ x\in(-1,1).$$

于是，在 $[-1,1]$ 上恒有 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

3.5.90　设 x 不是整数，求证：

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)=[x].$$

证　令 $f(x)=\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)$，则 $f(x)$ 除在整数点 $x=n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处间断外，在每一个区间 $(n,n+1)$ 内，即当 $n<x<n+1$，或 $(n-\frac{1}{2})\pi<\frac{2x-1}{2}\pi<(n+\frac{1}{2})\pi$ 时，$f(x)$ 连续且可导，

$$f'(x)=1-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sec^2\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)\cdot\pi}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)}=0,$$

所以 $f(x)=c_n$（c_n 是常数），$x\in(n,n+1)$.

为求出 c_n，可在 $(n,n+1)$ 内任取一点，比如取 $x=n+\frac{1}{2}$，从而 $\frac{2x-1}{2}=x-\frac{1}{2}=(n+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=n$，于是

$$f(n+\frac{1}{2})=n-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}n\pi)=n-0=n,$$

所以 $c_n=n=[x]$（因为 $n<x<n+1$），

故　$$\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right)=[x],$$

式中 x 不是整数.

3.5.91　设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(x>0)$，求证

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$$

并求 A,B.

解　当 $x>0$ 时，有

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{1}{x}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))}$$

$$=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)+\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2\right)$$

$$=e(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+o(x^2))$$

$$=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2).$$

由此可得 $A=-\frac{e}{2}$，　$B=\frac{11}{24}e$.

3.5.92　设 $x>0$,证明：

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中$\frac{1}{4}<\theta(x)<\frac{1}{2}$.

证　设 $f(x)=\sqrt{x}$,由拉格朗日中值定理,得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}\ (0<\theta(x)<1).$$

由此得　$2\sqrt{x+\theta(x)}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$,

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x],$$

$$\theta'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x(x+1)}}-1\right].$$

当 $x>0$ 时,$(x+\frac{1}{2})^2>x(x+1)$,即知 $\theta'(x)>0$,故 $\theta(x)$ 单调递增,又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\theta(x)=\frac{1}{4}$,所以

$$\frac{1}{4}<\theta(x)<\frac{1}{2}.$$

3.5.93　设 $x_1,x_2>0$,求证：

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2),$$

其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间.

证　因 $x_1,x_2>0$,故以 x_1,x_2 为端点的区间不包含原点,令 $f(x)=$

$\dfrac{e^x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2},\quad \varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

在$[x_1,x_2]$上应用柯西中值定理，得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=\frac{\dfrac{e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{x_1}}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\dfrac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}.$$

其中ξ在x_1与x_2之间，化简之，即得

$$x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2).$$

3.5.94　设函数$f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上可微，且$x_1x_2>0$，证明：

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)\ (x_1<\xi<x_2).$$

证　因为$x_1x_2>0$，故在$[x_1,x_2]$上，$x\neq 0$. 作$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，

$g(x)=\dfrac{1}{x}$，则

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

在$[x_1,x_2]$上应用柯西中值定理，得

$$\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2}-\dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}\quad (x_1<\xi<x_2),$$

即
$$\frac{1}{x_1-x_2}[x_1f(x_2)-x_2f(x_1)]=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

故原式成立.

3.5.95　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$ab>0$. 证明：在(a,b)内存在一点ξ，使等式

$$\frac{ab}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)]$$

成立.

证　将上式左边变形，得

$$\frac{ab}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \frac{ab}{b-a}[bf(b) - af(a)] = \frac{bf(b) - af(a)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}.$$

在$[a,b]$上令 $F(x) = xf(x)$,$G(x) = \frac{1}{x}$. 由已知条件可知,$F(x)$,$G(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $G'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$. 由柯西定理,有

$$\frac{bf(b) - af(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \left.\frac{[xf(x)]'}{(\frac{1}{x})'}\right|_{x=\xi} = \frac{f(\xi) + \xi f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}$$
$$= -\xi^2[f(\xi) + \xi f'(\xi)], \quad (a < \xi < b),$$

即 $$\frac{ab}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2[f(\xi) + \xi f'(\xi)].$$

注　先将要证的等式左端变形,再应用中值定理解决问题就比较清楚了,这是解决证明问题的一种方法,此题的关键仍是选择两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$.

3.5.96　证明下列各题:

(1) 设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上满足 $f''(x) > 0$,证明存在唯一的点 c,$a < c < b$,使 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

(2) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导$(a > 0)$,证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使等式 $n\xi^{n-1}[f(b) - f(a)] = (b^n - a^n)f'(\xi)$ 成立.

(3) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有 n 阶导数存在,且

$$f(a) = f(b) = f'(b) = f''(b) = \cdots = f^{(n-1)}(b) = 0,$$

则在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$,其中 $a < \xi < b$.

证　(1) 由拉格朗日中值定理,存在 $c \in [a.b]$,使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

成立,又因为 $f''(x) > 0$,导函数 $f'(x)$ 在$[a,b]$上严格单调递增,于是满足 $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ 的 c 是唯一的.

(2) 设 $F(x) = x^n$,则 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件,故在(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^n - a^n} = \frac{f'(\xi)}{n\xi^{n-1}},$$

即　　$n\xi^{n-1}[f(b)-f(a)]=(b^n-a^n)f'(\xi)$.

(3) 因 $f(x)$ 在$[a,b]$上有 n 阶导数,故可在 $x=b$ 处展成$(n-1)$阶泰勒公式

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi_1)(x-b)^n,$$

其中 ξ_1 在 x 与 b 之间,由已知条件,则上式化为

$$f(x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi_1)(x-b)^n,$$

当 $x=a$ 时,有 $f(a)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(a-b)^n$,($\xi$ 在 a、b 之间),由 $f(a)=0$,$(a-b)^n\neq 0$,故得知在(a,b)内必存在一点 ξ,使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

3.5.97　若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导$(a>0)$,证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$ 成立.

证　设 $F(x)=x^2$,$f(x)$ 及 $F(x)$ 在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件,故在(a,b)内至少存在一点 ξ,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即有　　$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

注　本题是 3.2.82 题当 $n=2$ 的情形.

3.5.98　设 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty)$上可导,且 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$. 证明:存在 $\xi>0$,使 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

证法 1　作函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{1+x^2}-f(x).$$

因为 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$,$x\in[0,+\infty)$,显然有 $f(0)=0$,又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$,根据夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,因此有 $\varphi(0)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ 与 $\varphi(x)\geqslant 0$.

若在$[0,+\infty)$上 $\varphi(x)\equiv 0$,则处处有 $\varphi'(x)=0$,即

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}-f'(x)=0,$$

故 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 处处成立.

若在$[0,+\infty)$上,$\varphi(x)\not\equiv 0$,则必存在一点 $x_0\in[0,+\infty)$,使 $\varphi(x_0)>0$,由于 $\varphi(x)$ 在$[x_0,+\infty)$上的连续性,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$,故必存在一点 $b\in(x_0,+\infty)$,使 $\varphi(x_0)>f(b)>0$. 又由于 $\varphi(x)$ 在$[0,x_0]$上的连续性,由介值定理可知,至少存在一点 $a\in(0,x_0)$,使 $\varphi(a)=\varphi(b)$.

函数 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $\varphi(a)=\varphi(b)$,根据罗尔定理知,至少存在一点 $\xi\in(a,b)\subset(0,+\infty)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

证法 2　因为 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$, $x\in[0,+\infty)$,显然有 $f(0)=0$,又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$,根据夹逼定理知,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 下面分三种情况讨论:

(1) 若 $f(x)\equiv 0$,这时显然处处有 $f'(x)=0$,取 $\xi=1$,则有

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\Big|_{\xi=1}=0,$$

因而结论成立.

(2) 若 $f(x)\equiv\dfrac{x}{1+x^2}$,这时显然处处有 $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,因而结论成立.

(3) 若 $f(x)\not\equiv 0$,且 $f(x)\not\equiv\dfrac{x}{1+x^2}$,作函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$,类似于证法 1 的讨论即得结论成立.

3.5.99　设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(a^+)$ 与 $f'(b^-)$ 存在,$f'(a^+)\neq f'(b^-)$. 证明:对 $f'(a^+)$ 与 $f'(b^-)$ 之间的任意数 c,都存在 $x\in(a,b)$,使得 $f'(x)=c$.

证　定义函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a;\\ f'(a^+), & x=a.\end{cases}$$

$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,对 $f'(a^+)$ 与 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 之间的任何数,$g(x)$ 皆可

取到，又由拉格朗日定理知，对于任意的 $x \in [a,b]$，存在 $y \in (a,x)$，使得 $g(x) = f'(y)$，因此，$f'(x)$ 在 (a,b) 内取遍 $f'(a^+)$ 与 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 之间的每个实数.

再定义函数

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}, & x \neq b; \\ f'(b^-), & x = b. \end{cases}$$

类似上面的讨论，$f'(x)$ 在 (a,b) 内取遍 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 与 $f'(b^-)$ 之间的每个实数.

故 $f'(x)$ 可取遍 $f'(a^+)$ 与 $f'(b^-)$ 之间的一切实数.

3.5.100　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$，$|f'(x)| \leqslant M|f(x)|$ （M 是非负常数），证明：$f(x) \equiv 0$.

证　若 $M=0$，则结论显然成立.

设 $0 < M \leqslant 1$，由拉格朗日中值定理，得

$$f(x) - f(0) = f'(\theta_1 x)x,\ 0 < \theta_1 < 1,$$

于是有

$$|f(x)| = |f'(\theta_1 x)|x \leqslant M|f(\theta_1 x)|x,$$

再由拉格朗日中值定理，得

$$f(\theta_1 x) - f(0) = f'(\theta_2\theta_1 x)\theta_1 x,\quad 0 < \theta_2 < 1,$$

于是有

$$|f(\theta_1 x)| \leqslant |f'(\theta_2\theta_1 x)|\theta_1 x \leqslant M|f(\theta_2\theta_1 x)|\theta_1 x,$$

依次类推，存在 $0 < \theta_i < 1,(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant M^2|f(\theta_2\theta_1 x)|\theta_1 x^2 \leqslant \cdots \\ &\leqslant M^n|f(\theta_n\theta_{n-1}\cdots\theta_1 x)|\theta_{n-1}\theta_{n-2}\cdots\theta_1 x^n,\end{aligned}$$

又 $0 < M \leqslant 1, 0 \leqslant x < 1$，令 $n \to +\infty$，则有

$$f(x) = 0,\ 0 \leqslant x < 1.$$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，得 $f(x) \equiv 0, 0 \leqslant x < 1$.

若 $M > 1$，如前有

$$|f(x)| \leqslant M^n|f(\theta_n\theta_{n-1}\cdots\theta_1 x)|\theta_{n-1}\theta_{n-2}\cdots\theta_1 x^n,$$

当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{M}$ 时，仍有 $f(x)=0$，于是在 $[\frac{1}{M},1]$ 上仿前面的证明，且

$f(\frac{1}{M})=0$，故当$\frac{1}{M}\leqslant x\leqslant\frac{2}{M}$时，$f(x)=0$.

由归纳法不难证明，当$\frac{[M]}{M}\leqslant x<\frac{[M]+1}{M}$时，$f(x)=0$. 于是，一般地有，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)\equiv 0$.

3.5.101 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内两次可微，且$f(a)=f(b)=0$，$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，其中$g(x)$是给定的函数，证明：在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$.

证 若不然，则必有$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)>0$或$m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)<0$，当$M>0$时，由题设可知，存在$x_0\in(a,b)$，使$f(x_0)=M$，因此，$f(x_0)$是极大值，故$f'(x_0)=0$，再由$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$可知

$$f''(x_0)+f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)=0,$$

即$f''(x_0)=f(x_0)>0$，由极值的充分条件知，$f(x_0)$是极小值，与假设矛盾.

用类似方法可证$m<0$的情形.

3.5.102 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内无穷次可微的函数，且满足

(1) $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$，$M>0$是常数，$n=0,1,2,\cdots$；

(2) $f(\frac{1}{n})=0$，$n=1,2,\cdots$.

证明：$f(x)\equiv 0$.

证 先证对任意的整数$k\geqslant 0$，存在收敛于零的点列$\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$，$x_n^{(k)}>x_{n+1}^{(k)}$，使$f^{(k)}(x_n^{(k)})=0$，$n=1,2,\cdots$.

由条件(2)知，$k=0$时结论成立，设$k=m$时结论成立，即存在点列$\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$，$x_n^{(m)}\to 0$，$x_1^{(m)}>x_2^{(m)}>\cdots>x_n^{(m)}>\cdots$，使$f^{(m)}(x_n^{(m)})=0$，$n=1,2,\cdots$. 由罗尔定理可知，存在$x_n^{(m+1)}\in(x_{n+1}^{(m)},x_n^{(m)})$，使$f^{(m+1)}(x_n^{(m+1)})=0$，$n=1,2,\cdots$. 并且点列$\{x_n^{(m+1)}\}_{n=1}^{\infty}$也收敛于零，故$k=m+1$时，结论也成立.

由$f^{(k)}(x)$的连续性可知，$f^{(k)}(0)=0$，$k=0,1,2,\cdots$. 取任意的x，根据泰勒公式可得

$$|f(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right|\leqslant\frac{M|x|^n}{n!},$$

由n的任意性知，$|f(x)|=0$，即$f(x)\equiv 0$.

3.5.103 设$f(x)$在$[0,1]$上可微，且$f(\lambda x)=f'(x)$，$x\in(0,1)$，

$0 < \lambda \leqslant 1$ 是常数，又设 $f(0) = 0$，证明：$f(x) \equiv 0$.

证　由题设 $f'(x) = \lambda x$ 可得

$$f''(x) = \lambda f'(\lambda x) = \lambda f(\lambda^2 x),$$
$$f'''(x) = \lambda^3 f'(\lambda^2 x) = \lambda^3 f(\lambda^3 x),$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = \lambda^{\theta(n)} f(\lambda^n x), \cdots$$

其中 $\theta(n)$ 是与 n 有关的整数，再由 $f(0) = 0$ 可知，

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots$$
$$|f^{(n)}(x)| < M, \quad x \in [0,1].$$

由泰勒公式可得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,$$
$$0 < \theta < 1.$$

由此可得，$x \in [0,1]$ 时，有

$$|f(x)| = \frac{|f^{(n)}(\theta x)|}{n!}x^n \leqslant \frac{M}{n!} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

因此 $f(x) \equiv 0$.

3.5.104　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$g(a) = 0$，λ 是非零常数，且

$$|g(x)f(x) + \lambda g'(x)| \leqslant |g(x)|, \ x \in [a,b],$$

则在 $[a,b]$ 上，$g(x) \equiv 0$.

证法 1　用反证法. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零，则存在 $(a_1,b_1) \subset [a,b]$，使得

$$g(x) \neq 0, \ x \in (a_1,b_1),$$

而 $g(a_1) = 0$，由题设知，在 (a_1,b_1) 中有 $\left|f(x) + \lambda\frac{g'(x)}{g(x)}\right| \leqslant 1$.

令 $h(x) = \ln|g(x)|$，$x \in (a_1,b_1)$，且设 $|f(x)| < A$，$x \in [a,b]$，则有

$$|h'(x)| \leqslant \frac{1 + A}{|\lambda|}, \tag{1}$$

但由 $\lim\limits_{x \to a_1} h(x) = -\infty$ 及 (a_1,b_1) 为有限区间，可以证得 $h'(x)$ 无界，与(1)式矛盾.

证法 2　由证法 1，设在 $[a,b]$ 上 $|f(x)| < A$，所以在 $[a,b]$ 上有，

$$|g'(x)| = \frac{1}{|\lambda|}(|\lambda g'(x)| - |g(x)f(x)|) + \frac{1}{|\lambda|}|f(x)g(x)|$$
$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|}|g(x)f(x) + \lambda g'(x)| + \frac{A}{|\lambda|}|g(x)|$$
$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|}|g(x)| + \frac{A}{|\lambda|}|g(x)| = \frac{1+A}{|\lambda|}|g(x)|,$$

令 $B = \frac{1+A}{|\lambda|}$,则 $|g'(x)| \leqslant B|g(x)|,\ x \in [a,b]$.

记 $b^* = \sup\{x | g(\xi) = 0, \xi \in (a,x), x \leqslant b\}$,即 b^* 是由 a 为左端点时能使 $g(x) = 0$ 成立的最大区间的右端点,那么 $b^* \leqslant b$,且 $g(b^*) = 0$. 否则与 b^* 的定义矛盾,由 $g(a) = 0$ 知 $b^* \geqslant a$,若 $b^* < b$,在(b^*, b) 中任取一点 c,使得 $c - b^* \leqslant \frac{1}{2B}$,那么

$$|g(c)| = |g(c) - g(b^*)| = |g'(c_1)|(c - b^*)$$
$$\leqslant B|g(c_1)|\frac{1}{2B} = \frac{1}{2}|g(c_1)|,$$

其中 $c_1 \in (b^*, c)$. 因此 $c_1 - b^* \leqslant \frac{1}{2B}$,继续采用上面的方法可推出

$$|g(c_1)| \leqslant \frac{1}{2}|g(c_2)|,\ c_2 \in (b^*, c_1).$$

所以 $$|g(c)| \leqslant \frac{1}{2^2}|g(c_2)|$$

反复采用此法,一般地有

$$|g(c)| \leqslant \frac{1}{2^n}|g(c_n)|,\ c_n \in (b^*, c_{n-1}) \subset (b^*, c),\ n = 1,2,\cdots.$$

又因 $g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,故必有界,设在$[a,b]$ 上 $|g(x)| \leqslant M$,于是

$$|g(c)| \leqslant \frac{1}{2^n}M,\quad n = 1,2,\cdots,$$

令 $n \to \infty$,得 $|g(c)| = 0$,故 $g(c) = 0$,这与 b^* 的定义矛盾,故 $b^* = b$. 于是对于 $x \in [a,b]$, $g(x) = 0$.

注 令 $f(x) \equiv 0$,则得到葛隆瓦(Gronwall) 定理,即

设 $g(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上可微,$g(a) = 0$,且 $|g'(x)| \leqslant g(x)$,则有 $g(x) \equiv 0$.

3.5.105 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续,在(a,b) 内可导,若 $a \geqslant 0$,证明:在(a,b) 内存在三个数 x_1, x_2, x_3,使下式成立:

$$f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ba + a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

分析　注意到 $2x_2, 3x_3^2$ 实际上就是 $(x^2)'_{x=x_2}, (x^3)'_{x=x_3}$，所要证的等式即为

$$(b - a)f'(x_1) = (b^2 - a^2)\frac{f'(x_2)}{(x^2)'_{x=x_2}} = (b^3 - a^3)\frac{f'(x_3)}{(x^2)'_{x=x_3}}.$$

问题就迎刃而解了.

证　由拉格朗日定理可知，存在 $x_1(a < x_1 < b)$，使得

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_1),$$

在区间 $[a,b]$ 上对 x^2 与 $f(x)$ 应用柯西中值定理，存在 $x_2(0 \leqslant a < x_2 < b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{(x^2)'_{x=x_2}},$$

再在区间 (a,b) 上对 x^3 与 $f(x)$ 应用柯西中值定理，存在 $x_3(0 \leqslant a < x_3 < b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{(x^3)'_{x=x_3}},$$

即

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b - a)f'(x_1) = (b^2 - a^2)\frac{f'(x_2)}{2x_2} \\ &= (b^3 - a^3)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}, \end{aligned}$$

也就是在区间 (a,b) 内存在三个数 x_1, x_2, x_3，使得

$$f'(x_1) = (b + a)\frac{f'(x_2)}{2x^2} = (b^2 + ba + a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

3.5.106　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且对该区间内的任意 x_1，x_2 均有 $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant (x_2 - x_1)^2$，求证：$f(x)$ 在该区间内是一个常数.

证　设 x_0 是 (a,b) 内任一点，根据题设，对 (a,b) 内任意异于 x_0 的 x 均有

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |x - x_0|^2$$

或

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant |x - x_0|;$$

对于任意指定的正数 ε，取 $\delta = \varepsilon$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-0\right|\leqslant|x-x_0|<\delta=\varepsilon,$$

即有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\text{ 或 }f'(x_0)=0.$$

由于 x_0 是 (a,b) 内任一点，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 内处处可导，且 $f'(x)=0$，从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内是一个常数.

3.5.107 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足利普希茨条件，即存在正常数 M，对于任意的 $x,y\in[a,b]$，有
$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^a,$$
则当 $a>1$ 时，$f(x)\equiv c$（c 为常数）.

证 设 $a=1+\beta\ (\beta>0)$，任取一点 $x_0\in[a,b]$，有
$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant M|x-x_0|^a,\quad x\neq x_0,\quad x\in[a,b],$$
即
$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M|x-x_0|^{\beta}.$$
令 $x\to x_0$，则 $f'(x_0)=0$，由 x_0 的任意性，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

3.5.108 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且存在常数 k 与 $a>1$，使 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|^a$ 对任意 x_1,x_2 成立，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是常数.

证 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，不妨设 $x_1\neq x_2$，由题设有
$$0\leqslant\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant k|x_1-x_2|^{a-1}.$$
因 $a>1$，故 $a-1>0$，则 $\lim\limits_{x_1\to x_2}k|x_1-x_2|^{a-1}=0$，因而有
$$\lim_{x_1\to x_2}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0,\text{即 }f'(x_2)=0.$$
由 x_1,x_2 的任意性知，在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f'(x)\equiv0$，从而 $f(x)$ 是常数.

3.5.109 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在每一点局部为常数（即对每一点 $x\in[a,b]$，存在着 x 的邻域，在该邻域内 $f(x)$ 为常数），证明：$f(x)\equiv A$（常数），$a\leqslant x\leqslant b$.

证 依题意，对任意的 $x_0\in(a,b)$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\equiv$ 常数，故

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0}=0,$$

即对任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)=0$.

对任意的 $x\in[a,b]$，因 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上连续，且在 (a,x) 内可导，根据拉格朗日中值定理，必存在一点 $\xi\in(a,x)$，使

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)=0,$$

即 $f(x)=f(a)$. 因 x 是 $[a,b]$ 上的任意点，故 $f(x)\equiv f(a)$，$x\in[a,b]$，其中 $f(a)$ 即题中的 A.

5. 不等式的证明

(1) 用中值定理证明不等式

3.5.110　证明不等式 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$，

$(a>b>0,\ n>1)$.

证　令 $f(x)=x^n$，在 $[b,a]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=n\xi^{n-1},\ b<\xi<a,$$

因为 $0<b<\xi<a$，且 $n-1>0$，所以 $b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$，

$nb^{n-1}<n\xi^{n-1}<na^{n-1}$，从而有 $nb^{n-1}<\dfrac{a^n-b^n}{a-b}<na^{n-1}$，

即
$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

3.5.111　证明不等式 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.

证　当 $x=y$ 时，显然有 $|\sin x-\sin y|=|x-y|$.

当 $x\neq y$ 时，令 $f(x)=\sin x$，在 $[y,x]$（或 $[x,y]$）上应用拉格朗日中值定理，得

$$\sin x-\sin y=(x-y)\cos\xi,\ (\xi\text{ 在 }x,y\text{ 之间})$$

于是有
$$|\sin x-\sin y|=|x-y|\cdot|\cos\xi|,$$

又 $|\cos\xi|\leqslant1$，故 $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$.

3.5.112　当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明不等式 $\dfrac{\mathrm{tg}x_2}{\mathrm{tg}x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$.

证法1　令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$，在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日定理，有

$$\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}-\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi\in(x_1,x_2),$$

因 $f'(x)>0$,所以 $f'(\xi)(x_2-x_1)>0$. 故 $\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}-\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}>0$,

即 $\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}>\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}$,所以 $\frac{\mathrm{tg}x_2}{\mathrm{tg}x_1}>\frac{x_2}{x_1}$.

证法 2 令 $f(x)=\mathrm{tg}x$,在 (x_1,x_2) 上应用拉格朗日定理,有

$$\mathrm{tg}x_2-\mathrm{tg}x_1=f'(\xi)(x_2-x_1)=\frac{1}{\cos^2\xi}(x_2-x_1)>(x_2-x_1),$$

即 $x_2-\mathrm{tg}x_2<x_1-\mathrm{tg}x_1$,由 $x_2>x_1>0$ 得

$$\frac{x_2-\mathrm{tg}x_2}{x_2}<\frac{x_1-\mathrm{tg}x_1}{x_1},$$

即 $1-\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}<1-\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}$, $\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}>\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}$, 所以$\frac{\mathrm{tg}x_2}{\mathrm{tg}x_1}>\frac{x_2}{x_1}$.

证法 3 把 $\frac{\mathrm{tg}x_2}{\mathrm{tg}x_1}>\frac{x_2}{x_1}$ 改写为 $\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}>\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}$, 即 $\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}-\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}>0$.

令 $f(x)=\frac{\mathrm{tg}x}{x}$,则

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{1}{\cos^2x}-\mathrm{tg}x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x},$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时,有 $0<\sin x<x$, $0<\cos x<1$,于是有

$$f'(x)=\frac{1-\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x}{x\cos^2x}>0,$$

由此即得,$f(x)=\frac{\mathrm{tg}x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调增加,故当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}>\frac{\mathrm{tg}x_1}{x_1},\ 即\ \frac{\mathrm{tg}x_2}{\mathrm{tg}x_1}>\frac{x_2}{x_1}.$$

3.5.113 设 $a>b>c$,求证不等式 $\mathrm{arctg}a-\mathrm{arctg}b<a-b$.

证 设 $y=\mathrm{arctg}x$,显然 y 在 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,所以有

$$\mathrm{arctg}a-\mathrm{arctg}b=y'(\xi)(a-b),\quad(b<\xi<a)$$

即
$$\mathrm{arctg}a-\mathrm{arctg}b=\frac{1}{1+\xi^2}(a-b),$$

因为 $\frac{1}{1+\xi^2}<1$,所以 $\mathrm{arctg}a-\mathrm{arctg}b<a-b$.

3.5.114　证明不等式 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，$(0<b<a)$.

证　设 $f(x)=\ln x$，在 $[b,a]$ 上利用拉格朗日中值定理，有

$$\ln a-\ln b=(a-b)\frac{1}{\xi},\ (b<\xi<a).$$

当 $b<\xi<a$ 时，有 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，从而有

$$\frac{a-b}{a}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{b},$$

即

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

3.5.115　已知 $x>-1$ 且 $x\neq 0$，求证：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证　在区间 $[0,x]$ 上对 $\ln(1+x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}\cdot x,\quad 0<\xi<x.$$

当 $x>0,0<\xi<x$ 时，有 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$，从而有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

当 $-1<x<0$ 时，$x<\xi<0$ 时，故

$$1<\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{1+x},$$

注意到 $x<0$，得 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$，从而仍有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

3.5.116　设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上可导，$f'(x)$ 单调递减且 $f(0)=0$. 证明：对于 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$，有

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

证　当 $a=0$ 时，结论显然成立.

设 $a>0$，在 $[0,a]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\xi_1),0<\xi_1<a。$$

又在 $[b,a+b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}=\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}=f'(\xi_2),\ b<\xi_2<a+b.$$

显然，$0<\xi_1<a\leqslant b<\xi_2<a+b\leqslant c$，又 $f'(x)$ 单调递减，故有

$$f'(\xi_2)\leqslant f'(\xi_1).$$

因此 $\dfrac{f(a+b)-f(b)}{a}\leqslant\dfrac{f(a)}{a}$，

注意到 $a>0$，即有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

当 $a=0$ 或 $b=0$ 时，不等式中的等号成立.

3.5.117 用微分中值定理证明：当 $s>0$ 时，

$$\frac{n^{s+1}}{s+1}<1^s+2^s+\cdots+n^s<\frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}.$$

证 令 $F(x)=x^{s+1}$，则 $F'(x)=(s+1)x^s$，$F''(x)=s(s+1)x^{s-1}$. 在$[0,1]$，$[1,2]$，$\cdots$，$[n-1,n]$ 上对 $F(x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$1^{s+1}-0^{s+1}=(s+1)\xi_1^s\cdot(1-0),\quad 0<\xi_1<1,$$

$$2^{s+1}-1^{s+1}=(s+1)\xi_2^s\cdot(2-1),\quad 1<\xi_2<2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$n^{s+1}-(n-1)^{s+1}=(s+1)\xi_n^s\cdot[n-(n-1)],$$

$$n-1<\xi_n<n,$$

$$(n+1)^s-n^s=(s+1)\xi_{n+1}^s[(n+1)-n],n<\xi_{n+1}<n+1.$$

因 $s>0$，x 取自然数，所以 $F''(x)>0$，即 $F'(x)$ 是严格增函数，故

$$F'(i-1)<F'(\xi_i)<F'(i),\ i=1,2,\cdots,n+1,$$

即 $\quad(s+1)(i-1)^s<(s+1)\xi_i^s<(s+1)i^s,\quad i=1,2,\cdots,n+1.$

把它代入上面的 $n+1$ 个式子，得

$$(s+1)\cdot 0^s<1^{s+1}-0^{s+1}<(s+1)\cdot 1^s,$$

$$(s+1)\cdot 1^s<2^{s+1}-1^{s+1}<(s+1)\cdot 2^s,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(s+1)\cdot(n-1)^s<n^{s+1}-(n-1)^s<(s+1)n^s,$$

$$(s+1)\cdot n^s<(n+1)^{s+1}-n^s<(s+1)(n+1)^s.$$

把上面 $n+1$ 个不等式的左边一半相加，得

$$(s+1)[0^s+1^s+\cdots+(n-1)^s+n^s]<(n+1)^{s+1},$$

即 $$1^s+2^s+\cdots+n^s<\frac{(n+1)^{s+1}}{s+1},\tag{1}$$

再把上面前 n 个不等式的右边一半相加，得

$$n^{s+1}<(s+1)[1^s+2^s+\cdots+n^s],$$

即 $$\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s. \tag{2}$$

联立(1)、(2)，即得需证的结论.

3.5.118 设 $x > -1$，证明：在 $0 < a < 1$ 时，$(1+x)^a \leqslant 1 + ax$；在 $a < 0$ 或 $a > 1$ 时，$(1+x)^a \geqslant 1 + ax$.

证法 1 设 $f(x) = (1+x)^a$，则

$$f(0) = 1,\quad f'(x) = a(1+x)^{a-1},\quad f'(0) = a,$$
$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2},$$

所以 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$（$\xi$ 在 0 与 x 之间）.

当 $x > -1$，$0 < a < 1$ 时，则 $a(a-1) < 0$，$1 + \xi > 0$，这时

$$\frac{a(a-1)(1+\xi)^{a-2}}{2!}x^2 \leqslant 0,\ (x \text{ 可能为 } 0).$$

所以 $$f(x) = (1+x)^a \leqslant f(0) + f'(0)x = 1 + ax.$$

当 $x > -1$，$a < 0$ 或 $a > 1$ 时，$a(a-1) > 0$，$1 + \xi > 0$，这时

$$\frac{a(a-1)(1+\xi)^{a-2}}{2!}x^2 \geqslant 0,$$

所以有 $f(x) = (1+x)^a \geqslant f(0) + f'(0)x = 1 + ax$.

证法 2 令 $f(x) = 1 + ax - (1+x)^a$，则

$$f'(x) = \frac{a}{(1+x)^{1-a}}[(1+x)^{1-a} - 1],\ (x > -1).$$

当 $0 < a < 1$ 时，因 $f'(0) = 0$，当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 内当 $x = 0$ 时取得唯一的极小值 $f(0) = 0$，即 $f(x) \geqslant 0$. 所以，$(1+x)^a \leqslant 1 + ax$.

若 $a < 0$，或 $a > 1$，类似地可证得 $(1+x)^a \geqslant 1 + ax$.

3.5.119 证明严格不等式 $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < e^n$，$n = 1, 2, \cdots$

证 由泰勒公式，得

$$\begin{aligned} e^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!} + R_n(n) + \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!} + \frac{n^n - (n+1)^n}{n!} + R_n(n) \\ &= \frac{(n+1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!} - \frac{1}{n!}\Big[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}n^k - n^n\Big] + R_n(n) \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} - \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!k!} n^k + R_n(n)$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{(n-k)!k!} + R_n(n)$$

$$\geqslant \frac{(n+1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} + R_n(n)$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n!} + R_n(n) > \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

3.5.120 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 内具有二阶导数，其中 $a>1$. 且在 $(-a,a)$ 内有 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$. 证明：在区间 $(-1,1)$ 内有 $|f'(x)|\leqslant 2$.

证 设 x_0 是 $(-1,1)$ 内的任意一点，由泰勒公式，当 x 在 $(-a,a)$ 内时，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(\xi),$$

其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 取 $x=1$，则有

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 f''(\xi_1),$$

ξ_1 在 x_0 与 1 之间. 取 $x=-1$，则有

$$f(-1) = f(x_0) + f'(x_0)(-1-x_0) + \frac{1}{2}(-1-x_0)^2 f''(\xi_2),$$

ξ_2 在 -1 与 x_0 之间. 因此，

$$f(1) - f(-1) = 2f'(x_0) + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 f''(\xi_1) - \frac{1}{2}(1+x_0)^2 f''(\xi_2),$$

或 $$2f'(x_0) = f(1) - f(-1) - \frac{1}{2}(1-x_0)^2 f''(\xi_1) + \frac{1}{2}(1+x_0)^2 f''(\xi_2).$$

但在 $(-a,a)$ 内，有 $|f(x)|\leqslant 1$ 及 $|f''(x)|\leqslant 1$，$-1<x_0<1$，故

$$2|f'(x_0)| \leqslant |f(1)| + |f(-1)| + \frac{1}{2}(1-x_0)^2 |f''(\xi_1)| + \frac{1}{2}(1+x_0)^2 |f''(\xi_2)|$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}(1-x_0)^2\frac{1}{2}(1+x_0)^2=3+x_0^2\leqslant 4.$$

即 $|f'(x_0)|\leqslant 2$.

由 x_0 在 $(-1,1)$ 内的任意性,所以在 $(-1,1)$ 内,均有

$$|f'(x)|\leqslant 2.$$

3.5.121 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内两次可微,且对任意的 $x\in(0,+\infty)$,有 $|f(x)|\leqslant A$, $|f''(x)|\leqslant B$, A,B 为大于 0 的常数,证明: $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}\ (x>0)$.

证 对任意的 $x\in(0,+\infty)$, $h>0$,由泰勒公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2,\quad 0<\theta<1,$$

可得
$$|f'(x)|=\left|\frac{f(x+h)-f(x)-\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2}{h}\right|$$
$$\leqslant\frac{2|f(x+h)|+2|f(x)|+|f''(x+\theta h)|h^2}{2h},$$

特别地,取 $h=2\sqrt{\frac{A}{B}}$,得

$$|f'(x)|\leqslant\frac{4A+B\cdot 4\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2}{4\sqrt{\frac{A}{B}}}=2\sqrt{AB}.$$

3.5.122 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二次可微,且 $M_k=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty$, $(k=0,1,2)$. 证明不等式

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

证 由题设可知, $M_2\neq 0$. 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,当 $h>0$ 时,由泰勒公式得

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+f''(x+\theta_1 h)\frac{h^2}{2},$$

$$f(x-h)=f(x)+(-h)f'(x)+f''(x-\theta_2 h)\frac{h^2}{2},$$

$$0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1,$$

两式相减,得

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) + [f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)] \cdot \frac{h^2}{2},$$

因此,对任意的 $h > 0$,有

$$M_1 < M_0 h^{-1} + \frac{h}{2} M_2,$$

特别地,取 $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M}}$,则有 $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_1}$,即 $M_2^2 \leqslant 2M_0 M_2$.

3.5.123 设 $f(x)$ 是 $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ $(a > 0)$ 上两次连续可微的函数,令 $M_k = \sup\limits_{-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}} |f^{(k)}(x)|, k = 0,1,2.$ 证明

(1) $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{a} M_0 + \frac{4x^2 + a^2}{4a} M_2,\ x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$;

(2) 当 $a \geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ 时,$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

证 (1) 当 $-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ 时,由泰勒公式得

$$f(\frac{a}{2}) - f(x) = f'(x)(\frac{a}{2} - x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a}{2} - x)^2, \quad x \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{a}{2},$$

$$f(-\frac{a}{2}) - f(x) = f'(x)(-\frac{a}{2} - x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(-\frac{a}{2} - x)^2, \quad -\frac{a}{2} \leqslant \xi_2 \leqslant x$$

两式相减,得

$$f(\frac{a}{2}) - f(-\frac{a}{2}) = af'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a}{2} - x)^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{a}{2} + x)^2,$$

由此可得

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{a} M_0 + \frac{M_2}{2a}[(\frac{a}{2} - x)^2 + (\frac{a}{2} + x)^2]$$
$$= \frac{2}{a} M_0 + \frac{4x^2 + a^2}{4a} M_2, \quad (-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}).$$

(2) 由(1) 即可推出.

3.5.124 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内二阶可导,且有最大值 1,最小值 0,证明:在 $(0,1)$ 中至少有一点 ξ,使 $f''(\xi) > 2$.

证　设$f(x_1)=1, f(x_2)=0$，因x_2是$f(x)$在$(0,1)$内的极小值点，故$f'(x_2)=0$. 由泰勒定理可知，

$$1=f(x_1)=f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x_1-x_2)^2$$
$$=\frac{f''(\xi)}{2!}(x_1-x_2)^2.$$

其中ξ位于x_1与x_2之间，从而有$\xi\in(0,1)$，又由$(x_1-x_2)^2<1$得

$$1<\frac{f''(\xi)}{2},$$

即$f''(\xi)>2$.

3.5.125　设$f(x)$的二阶导数连续，且$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，求证：$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geqslant 8$.

证　设$f(x)$在$x=a\ (0<a<1)$处取得最小值，则$f'(a)=0$，$f(a)=-1$，依泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''[a+\theta_x(x-a)]}{2!}(x-a)^2$$
$$=-1+\frac{f''[a+\theta_x(x-a)]}{2}(x-a)^2,\ (0<\theta_x<1).$$

因$f(0)=f(1)=0$，故当$x=0, x=-1$时分别有

$$0=-1+\frac{f''[a+\theta_0(-a)]}{2}a^2,$$
$$0=-1+\frac{f''[a+\theta_1(1-a)]}{2}(1-a)^2.$$

记$f''[a+\theta_i(i-a)]=c_i\ (i=0,1)$，则

$$c_0=\frac{2}{a^2},\quad c_1=\frac{2}{(1-a)^2},$$

故$a<\frac{1}{2}$时$c_0>8$，$a\geqslant\frac{1}{2}$时$c_1\geqslant 8$. 由此知$\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geqslant 8$.

3.5.126　设$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=2$. 证明：在$(0,1)$内存在一点$\xi$，使$f''(\xi)\leqslant -16$.

证　设$f(x)$在x_0处达到区间$[0,1]$上的最大值，即$f(x_0)=2$. 由假设条件$0<x_0<1$，从而$f(x)$在x_0处达到极大值，故$f'(x_0)=0$. 由泰勒公式有

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''[x_0+\theta_1(1-x_0)]}{2}(1-x_0)^2,$$

$$0 < \theta_1 < 1.$$

即 $$0 = 2 + f''[x_0 + \theta_1(1 - x_0)] \cdot \frac{(1 - x_0)^2}{2},$$

或 $$f''[x_0 + \theta_1(1 - x_0)] = -\frac{4}{(1 - x_0)^2}.$$

类似地有

$$0 = f(0) = f(x_0) + \frac{f''(x_0 - \theta_0 x_0)}{2!}x_0^2, \quad 0 < \theta_0 < 1,$$

于是 $$f''(x_0 - \theta_0 x_0) = -\frac{4}{x_0^2}.$$

注意到 $0 < x_0 - \theta_0 x < x_0 < x_0 + \theta_1(1 - x_0) < 1$,当 $0 < x_0 \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$-\frac{4}{x_0} \leqslant -16$;当$\frac{1}{2} < x_0 < 1$ 时,$\frac{-1}{(1 - x_0)^2} < -16$. 故当 $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ 时,取 $\xi = x_0 - \theta_0 x_0$;当$\frac{1}{2} < x_0 < 1$ 时,取 $\xi = x_0 + \theta_1(1 - x_0)$ 即可.

3.5.127 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上二次可微,且满足 $|f(x)| \leqslant 1$ 及 $|f''|(x) \leqslant 1$ $(x \in [0,2])$. 证明:对一切 $x \in [0,2]$,$|f'(x)| \leqslant 2$ 成立.

证 对任意的 $x \in [0,2]$,由二阶泰勒公式有

$$f(0) = f(x) + f'(x) \cdot (0 - x) + \frac{f''(t_1)}{2}x^2, \ (0 < t_1 < x),$$

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2 - x) + \frac{f''(t_2)}{2}(2 - x)^2, \ (x < t_2 < 2).$$

将上面二式相减并整理,得

$$2f'(x) = f(2) - f(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(t_1) - \frac{1}{2}(2 - x)^2 f''(t_2),$$

由此有 $$2|f'(x)| \leqslant |f(0)| + |f(2)| + \frac{1}{2}x^2|f''(t_1)| + \frac{1}{2}(2 - x)^2|f''(t_2)|,$$

又由题设得

$$2|f'(x)| \leqslant 2 + \frac{x^2 + (2 - x)^2}{2}.$$

容易证明,二次函数 $g(x) = x^2 + (2 - x)^2$ 在$[0,2]$上的最大值是 4,因而 $2|f'(x)| \leqslant 4$, 即 $|f'(x)| \leqslant 2$, $x \in [0,2]$.

3.5.128 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上存在二阶导数,且 $f(0) = f(1) = 0$,

$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x) = -1$，则存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi) \leqslant \frac{1}{8}$.

证　易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故存在 x_1 使得

$$f(x_1) = \min_{x\in[0,1]} f(x) = -1, \quad x_1 \in (0,1),$$

所以有 $f'(x_1) = 0$. 由泰勒公式得

$$f(0) = f(x_1) - f'(x_1)x_1 + \frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1), \xi_1 \in (0,x_1),$$

$$f(1) = f(x_1) + f'(x_1)(1-x_1) + \frac{(1-x_1)^2}{2}f''(\xi_2), \xi_2 \in (x_1,1),$$

注意到题设条件及 $f(x_1) = -1$，从而

$$\frac{x_1^2}{2}f''(\xi_1) = \frac{(1-x_1)^2}{2}f''(\xi_2) = 1, \tag{1}$$

若 $x_1 \leqslant \frac{1}{2}$，令 $\xi = \xi_1$，由(1)式得 $f(\xi) \leqslant \frac{1}{8}$，

若 $x_1 > \frac{1}{2}$，令 $\xi = \xi_2$，由(1)式也得 $f(\xi) \leqslant \frac{1}{8}$.

3.5.129　汽车从 A 点开始行驶，到 B 点停止，它在时间 T 内通过这两点之间的距离 s. 证明：在某个时刻，它的加速度（按绝对值计）不小于 $\frac{4s}{T^2}$.

解　设 $s(t)$ 是时间 t 内通过的距离，$0 \leqslant t \leqslant T$. 讨论下面两种情况：(1) $s(\frac{T}{2}) \geqslant \frac{s}{2}$，(2) $s(\frac{T}{2}) < \frac{s}{2}$.

在第一种情况下，在 $t=0$ 点作 $s(t)$ 的泰勒展开式，并考虑到 $s(0) = s'(0) = 0$，即有

$$s(\frac{T}{2}) = \frac{s''(\xi)}{2}\cdot(\frac{T}{2})^2 \geqslant \frac{s}{2}, \ \xi \in (0,\frac{T}{2}).$$

亦即 $s''(\xi) \geqslant \frac{4s}{T^2}$.

在第二种情况下，在 $t=T$ 点作 $s(t)$ 的泰勒展开式，并考虑到 $s(T) = s, s'(T) = 0$，即有

$$s(\frac{T}{2}) = s + \frac{s''(\xi)}{2}(\frac{T}{2})^2 < \frac{s}{2}, \quad \xi \in (\frac{T}{2},T).$$

亦即 $-s''(\xi) > \frac{4s}{T^2}$.

3.5.130　如果质点在一单位时间内通过一单位距离，且在起点

和终点均为静止状态，则在这个单位时间间隔内的某一时刻，此质点运动的加速度按绝对值必定大于或等于 4.

证法 1 设距离 s 和时间 t 的函数关系为 $s=f(t)$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$. 依题意知，$f(t)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且

$$f(0)=0, f(1)=1,\ f'(0)=f'(1)=0.$$

把 $f(t)$ 在 $t=0$ 点作泰勒展开，得

$$f(t)=\frac{f''(\xi_1)}{2}t^2,\quad (0<\xi_1<t<1). \tag{1}$$

再把 $f(t)$ 在 $t=1$ 作泰勒展开，得

$$\begin{aligned} f(t) &= f(1)+f'(1)(t-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(t-1)^2 \\ &= 1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(t-1)^2,\ (t<\xi_2<1) \end{aligned} \tag{2}$$

把 $t=\frac{1}{2}$ 代入(1)、(2)式，可知存在 ξ_1 及 ξ_2 $(0<\xi_1<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<\xi_2<1)$，使

$$f(\frac{1}{2})=\frac{f''(\xi_1)}{8},\quad f(\frac{1}{2})=1+\frac{f''(\xi_2)}{8},$$

消去 $f(\frac{1}{2})$，得 $f''(\xi_1)-f''(\xi_2)=8$，

$$\begin{aligned} 8=|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)| &\leqslant |f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)| \\ &\leqslant 2\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}. \end{aligned} \tag{3}$$

当 $|f''(\xi_1)|\leqslant|f''(\xi_2)|$ 时，取 $t_0=\xi$，当 $|f''(\xi_1)|>|f''(\xi_2)|$ 时，取 $t_0=\xi_2$，则

$$|f''(t_0)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\},$$

故由(3)式得

$$|f''(t_0)|\geqslant 4,\quad t_0\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1).$$

故在时刻 t_0 的加速度按绝对值大于或等于 4.

3.5.131 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内存在四阶导数，且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M$. 证明：对于该邻域内异于 x_0 的任何 x，均有

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x)-2f(x_0)+f(x')}{(x-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{M}{12}(x-x_0)^2,$$

其中 x' 是与 x 关于 x_0 对称的点.

证 由泰勒展开式有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4,$$

由于 x' 与 x 关于 x_0 对称,故

$$f(x') = f(x_0) + f'(x_0)(x' - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x' - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi')}{4!}(x' - x_0)^4,$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间,ξ' 在 x_0 与 x' 之间.

将上面两式相加,注意到 $x - x_0 = -(x' - x_0)$,有

$$f(x) + f(x') = 2f(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{4!}[f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\xi')](x - x_0)^4,$$

因为 $x \neq x_0$,故由上式有

$$\left|f''(x_0) - \frac{f(x) - 2f(x_0) + f'(x)}{(x - x_0)^2}\right| = \frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\xi')|(x - x_0)^2,$$

又因为 $|f^{(4)}(x)| \leqslant M$. 所以

$$|f^{(4)}(\xi) + f^{(4)}(\xi')| \leqslant 2M,$$

于是有

$$\left|f''(x_0) - \frac{f(x) - 2f(x_0) + f(x')}{(x - x_0)^2}\right| \leqslant \frac{1}{12}M(x - x_0)^2.$$

3.5.132　若在 (a,b) 内函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x) < 0$,试证:对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 及任意实数 $0 < \lambda < 1$,有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

并由此证明 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

证法 1　用拉格朗日定理.

设 $x_1 < x_2$,则 $x_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < x_2$ (因 $x_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_1$, $x_2 = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2$). 在 $[x_1, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2]$ 和 $[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, x_2]$ 上应用拉格朗日定理,有

$$\frac{f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] - f(x_1)}{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1} = \frac{f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] - f(x_1)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} = f'(\xi_1),$$

$$\frac{f(x_2) - f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]}{x_2 - [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]} = \frac{f(x_2) - f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]}{\lambda(x_2 - x_1)} = f'(\xi_2),$$

其中 $x_1 < \xi_1 < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < \xi_2 < x_2$.

因 $f''(x) < 0$,$f'(x)$ 单调递减,所以有 $f'(\xi_1) \geqslant f'(\xi_2)$,即

$$\frac{f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] - f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \geqslant \frac{f(x_2) - f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]}{\lambda(x_2 - x_1)}.$$

因 $x_2 - x_1 > 0$,故

$$\lambda f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] - \lambda f(x_1) \geqslant (1-\lambda)f(x_2) - (1-\lambda)f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2],$$

即 $$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

若取 $\lambda = \frac{1}{2}$,则有 $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

证法 2 用泰勒展式.

$f(x)$ 在 (a,b) 内满足泰勒定理的条件,在 (a,b) 内可展开,因 x_1,x_2 在 (a,b) 内,$0 < \lambda < 1$,所以 $x_0 = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$ 也在 (a,b) 内,将函数 $f(x)$ 在 x_0 处展开,得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

ξ 在 x 与 x_0 之间,分别令 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ $(x_1 \neq x_2)$,得

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2,$$

ξ_1 在 x_1 与 x_0 之间,

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2,$$

ξ_2 在 x_2 与 x_0 之间.

由假设,$f''(\xi_1) < 0$,$f''(\xi_2) < 0$,ξ_1,ξ_2 在 a 与 b 之间,所以有

$$f(x_1) < f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$
$$f(x_2) < f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0),$$

则 $$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1-\lambda)f'(x_0)(x_2 - x_0),$$

即 $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) < f(x_0) + f'(x_0)[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0]$.

因 $x_0 = x_2 + \lambda(x_1 - x_2) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$,故

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) < f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] + f'(x_0)\cdot 0,$$

即　　$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

当 $x_1=x_2$ 时，不等号变为等号，所以有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

3.5.133　设 $F(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上且具有非负的二阶导数的函数，证明

$$F\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n},$$

等号仅在 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

证　记 $a=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，则 $na=x_1+x_2+\cdots+x_n$，由泰勒公式有

$$F(x_i)=F(a)+(x_i-a)F'(a)+\frac{(x_i-a)^2}{2}F''[a+\theta_i(x_i-a)],$$
$$0<\theta_i<1,$$

因 $F''(x)\geqslant 0$，故

$$F(x_i)\geqslant F(a)+(x_i-a)F'(a)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\geqslant nF(a)+F'(a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=nF(a).$$

即
$$\frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n}\geqslant F(a),$$
$$\frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n}\geqslant F\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=a$ 时，

$$\frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n}=F\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

3.5.134　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上存在二阶导数，且 $f''(x)<0$，证明：

(1) 若 $x_0\in(a,b)$，则对于 (a,b) 内的任何点 x，都有

$$f(x_0)\geqslant f(x)-f'(x_0)(x-x_0),$$

当且仅当 $x=x_0$ 时等号成立；

(2) 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$，且 $x_i<x_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i),$$

其中 $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}k_i=1$.

证　(1) 设 $x_0 \in (a,b)$，则对于 (a,b) 内任何 x，有二阶泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间，$\xi \in (a,b)$.

由于 $\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \leqslant 0$，所以

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

即
$$f(x_0) \geqslant f(x) - f'(x_0)(x - x_0).$$

因为 $f''(\xi) < 0$，故上面不等式当且仅当 $x = x_0$ 时成为等式.

(2) 令 $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i$，由 $k_i > 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = 1$ 及

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b,$$

则有 $a < x_1 = (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)x_1$

$$< \sum_{i=1}^{n} k_i x_i < (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)x_n = x_n < b.$$

对于每个 $f(x_i)$，利用二阶泰勒公式得

$$f(x_i) = f(x_0) + (x_i - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x_i - x_0)^2 f''(\xi_i).$$

$$(a < \xi_i < b).$$

注意到 $f''(\xi_i) < 0, (i = 1,2,\cdots,n)$，由上式可得

$$\sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i) < \sum_{i=1}^{n} k_i f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (k_i x_i - k_i x_0) f'(x_0)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) f(x_0) + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right) f'(x_0) - \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) x_0 f'(x_0)$$

$$= f(x_0) + x_0 f'(x_0) - x_0 f'(x_0) = f(x_0),$$

即
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\right) > \sum_{i=1}^{n} k_i f(x_i).$$

(2) 的证法 2　用数学归纳法证明. 先证当 $f''(x) < 0$ 时，有

$$f(k_1 x_1 + k_2 x_2) > k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2),\ (a < x_1 < x_2 < b). \quad (1)$$

其中 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_1 + k_2 = 1$.

令 $x = k_1 x_1 + k_2 x_2$，显然有 $a < x_1 < x < x_2 < b$，由此可得

$$k_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad k_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

此时欲证的不等式为

$$f(x)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),\tag{2}$$

将它改写为

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.\tag{3}$$

由中值定理得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1),\ \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2).$$

其中 $a<x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2<b$. 于是

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$
$$=f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0,$$

即(3) 式成立,于是(1) 式获证.

再证 $f\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)$, $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}k_i=1$.

设 $f\left(\sum_{i=1}^{m}k_ix_i\right)>\sum_{i=1}^{m}k_if(x_i)$, $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,m)$, $\sum_{i=1}^{m}k_i=1$,则

$$f\left(\sum_{i=1}^{m+1}k_ix_i\right)=f\left[\sum_{i=1}^{m-1}k_ix_i+(k_m+k_{m+1})\left(\frac{k_mx_m}{k_m+k_{m+1}}+\frac{k_{m+1}x_{m+1}}{k_m+k_{m+1}}\right)\right]$$
$$>\sum_{i=1}^{m-1}k_if(x_i)+(k_m+k_{m+1})f\left(\frac{k_mx_m}{k_m+k_{m+1}}+\frac{k_{m+1}x_{m+1}}{k_m+k_{m+1}}\right),$$

再把上面结果用到最后一项,即得

$$f\left(\sum_{i=1}^{m+1}k_ix_i\right)>\sum_{i=1}^{m+1}k_if(x_i),$$

其中 $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,m+1)$, $\sum_{i=1}^{m+1}k_i=1$.

于是对任何自然数 n,都有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i),$$

其中 $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}k_i=1$.

3.5.135　设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可微,且 $f(0)=0$, $|f'(x)|<M$,证明:在 $[-1,1]$ 上有 $|f(x)|<M$ (M 是大于零的常数).

证 由题设知 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$，任取 $x \in [-1,1]$，若 $x=0$，则 $f(0)=0<M$；若 $-1 \leqslant x < 0$，在 $[x,0]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(0)-f(x)=-xf'(\xi_1),\ \xi_1 \in (x,0),$$

即
$$f(x)=xf'(\xi_1)>xM>-M;$$

若 $0<x\leqslant 1$，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi_2),\quad \xi_2 \in (0,x),$$

即 $f(x)=xf'(\xi_2)<xM<M.$

综上所述，在 $[-1,1]$ 上有 $|f(x)|<M$.

3.5.136 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上两次连续可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$|f''(x)| \leqslant M, x \in (0,1)$. 证明：

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}M,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,（其中 M>0 是常数）.$$

证 由泰勒公式得

$$f(0)=f(x)-f'(x)\cdot x+f''(\xi_1)\frac{x^2}{2},\ 0<\xi_1<x\leqslant 1,$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2},$$
$$0<x\leqslant\xi_2<1.$$

由此可得 $f'(x)=\dfrac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2],\ 0<x<1,$

于是有 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M}{2}|2x^2-2x+1| \leqslant \dfrac{M}{2},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

(2) 用单调性证明不等式

3.5.137 求证：$2^n \geqslant 1+n\sqrt{2^{n-1}}$，（$n \geqslant 1$ 自然数）.

证 设 $f(x)=2^x-1-x\sqrt{2^{x-1}}$，$(x \geqslant 1)$，则

$$f'(x)=2^{\frac{x-1}{2}}\cdot\left(2^{\frac{x+1}{2}}\cdot\ln 2-1-\frac{x}{2}\ln 2\right).$$

再设 $F(x)=2^{\frac{x+1}{2}}\ln 2-1-\dfrac{x}{2}\ln 2\ (x \geqslant 1)$，则

$$F(1)=\frac{3}{2}\ln 2-1=\ln\sqrt{8}-\ln e=\ln\frac{2\sqrt{2}}{e}>0.$$

又 $F'(x)=e^{\frac{x+1}{2}}(\ln 2)^2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2>0$，故 $F(x) \geqslant F(1)>0\ (x \geqslant 1)$，从而 $x \geqslant 1$ 时 $f'(x)>0$，因此，$f(x) \geqslant f(1)=0$，即

$$2^x \geqslant 1 + x\sqrt{2^{x-1}}.$$

由此可得　$2^n \geqslant 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$，($n \geqslant 1$ 自然数).

3.5.138　比较 $\sqrt{2} - 1$ 与 $\ln(1+\sqrt{2})$ 的大小.

解　令 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$，则 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$，故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，若 $x > 2$，则 $f(x) > f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$. 现令 $x = 1 + \sqrt{2} > 2$，即得

$$\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{1+\sqrt{2}} > 0,$$

即　$\ln(1+\sqrt{2}) > \sqrt{2} - 1$.

3.5.139 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $f(a) = f(b) = 0$，又设在 $[a,b]$ 内的每一点处存在右导数 $f'_+(x)$，试证在 (a,b) 中存在一点 c，使 $f'(c) \leqslant 0$ 成立.

证　若 $f(x) \equiv 0$，命题显然为真，若 $f(x)$ 不恒为 0，分两种情形讨论：

(1) 若 $f(c)$ 是极大值，因 $c \in (a,b)$，则当 $x > c$ 时(在 c 的一个充分小的邻域内) 有

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$

故
$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0.$$

(2) 若 $f(x)$ 无极值，即函数的最大值只能在 a 或 b 取得，且存在 $x_0 \in (a,b)$，使 $f(x_0)$ 为最小值，则 $f(x)$ 必在 $[a, x_0]$ 内单调减少，任取 $c \in (a, x_0)$，则 $c < x < x_0$ 时，$f(c) > f(x)$，所以

$$f'_+(c) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0.$$

3.5.140　若 $0 < \alpha \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$，求证不等式

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2\alpha} \leqslant \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha \leqslant \frac{\beta - \alpha}{\cos^2\beta}.$$

证　令 $f(x) = \mathrm{tg}x$，$x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \frac{\pi}{2})$，则 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. 在区间

$(0,\frac{\pi}{2})$ 内，它是单调递增的，故当 $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$ 时，有

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\leqslant\frac{1}{\cos^2\xi}\leqslant\frac{1}{\cos^2\beta}.$$

在区间$[\alpha,\beta]$上对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha=\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi},\quad(\alpha<\xi<\beta).$$

于是
$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}\leqslant\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha\leqslant\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

3.5.141 证明不等式：

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x,\ (x>0).$$

证 令 $f(x)=x-\sin x$, $g(x)=\sin x-(x-\frac{x^3}{6})$，则

$$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0,\ f(0)=0.$$

由于仅当 $x=2n\pi$ 时，$f'(x)=0$，故对于 $x>0$，$f(x)$ 单调增加，因此，$f(x)>0$. 又

$$g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\ g(0)=0,$$

$$g''(x)=-\sin x+x,\ g'(0)=0.$$

当 $x>0$ 时，因 $g''(x)=f(x)>0$，故 $g'(x)$ 单调增加，$g'(x)>0$，因此，$g(x)$ 为单调增加，且 $g(x)>0$，故有

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x.$$

3.5.142 证明：$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

证法一 先证 $\sin x<x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 考虑函数 $f(x)=\sin x-x$，它在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，$f(0)=0$，当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f'(x)=\cos x-1<0$，即 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$ 内是递减的，因此 $f(x)<f(0)=0$，即

$$\sin x<x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

再证$\frac{2}{\pi}x<\sin x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 考虑函数$g(x)=\frac{\sin x}{x}$，它在$(0,\frac{\pi}{2}]$上

连续，$g(\frac{\pi}{2})=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$，且当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x}<0$$

（这里用到不等式 $\operatorname{tg}x>x$，它可与不等式 $\sin<x$ 类似地证明），即 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 是递减的，因此，$g(x)>g(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$ 或 $\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$，即

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x.$$

证法 2 设 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$，则 $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$.

由于 $f'(x)=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内仅有唯一的根 $x=\arccos\frac{2}{\pi}$，又 $f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{2})=0$，$f(\arccos\frac{2}{\pi})>0$，所以

$$\min_{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}}f(x)=0,$$

故当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$，即 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$.

3.5.143 利用函数的单调性证明：$e^x>1+x$，$(x\neq 0)$.

证 设 $f(x)=e^x-(1+x)$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，故 $f(x)$ 为单调增加函数，从而有 $f(x)>f(0)=0$，即 $e^x-(1+x)>0$，亦即 $e^x>1+x$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1=\frac{1}{e^{-x}}-1<0$，故 $f(x)$ 为单调减少函数，从而当 $x<0$ 时有 $f(x)>f(0)=0$，这时仍有 $e^x>1+x$.

3.5.144 当 $0<x<1$ 时，证明不等式 $e^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$.

证 令 $f(x)=(1-x)e^{2x}-(1+x)$，则

$$f'(x)=(1-2x)e^{2x}-1,\ f''(x)=-4xe^{2x}.$$

当 $0<x<1$ 时，$f''(x)<0$，故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，又 $f'(0)=0$，所以在 $(0,1)$ 内 $f'(x)<0$. 由此又知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调减少，再由 $f(0)=0$ 知，在 $(0,1)$ 内有 $f(x)<0$，即

$$(1-x)e^{2x}-(1+x)<0.$$

亦即 $$e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}.$$

3.5.145 证明不等式 $2x\text{arctg}x \geqslant \ln(1+x^2)$.

证 令 $f(x) = 2x\text{arctg}x - \ln(1+x^2)$,则 $f'(x) = 2\text{arctg}x$. 当 $x > 0$ 时,由 $\text{arctg}x > 0$ 可知,$f'(x) > 0$,故 $f(x)$ 是单调增加的,又 $f(0) = 0$,所以 $f(x) > f(0) = 0$.

当 $x < 0$ 时,由 $\text{arctg}x < 0$ 可知,$f'(x) < 0$,这时 $f(x)$ 是单调减少的,又 $f(0) = 0$,所以也有 $f(x) > f(0) = 0$.

综上所述,对一切 $x \in R$ 均有 $f(x) \geqslant 0$,即

$$2x\text{arctg}x \geqslant \ln(1+x^2).$$

3.5.146 证明:$\ln(1+x) \geqslant \frac{\text{arctg}x}{1+x}$, $x \in [0, +\infty)$.

证 考虑函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\text{arctg}x}{1+x}$,它在$[0, +\infty)$上连续,$f(0) = 0$,且当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)\cdot\frac{1}{1+x^2} - \text{arctg}x\cdot 1}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{1}{1+x}(1 - \frac{1}{1+x^2} + \frac{\text{arctg}x}{1+x})$$
$$= \frac{1}{1+x}\left(\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{\text{arctg}x}{1+x}\right) > 0,$$

(因为当 $x > 0$ 时,$\frac{1}{1+x} > 0$, $\frac{x^2}{1+x^2} > 0$, $\frac{\text{arctg}x}{1+x} > 0$). 即 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,因此 $f(x) > f(0) = 0$,于是,在$[0, +\infty)$上,$f(x) \geqslant 0$,即

$$\ln(1+x) \geqslant \frac{\text{arctg}x}{1+x}, \quad x \in [0, +\infty).$$

3.5.147 已知 $x > 0$,证明 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

证 设 $f(x) = \ln(1+x) - x$,则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$.

当 $x > 0$ 时,$f'(x) < 0$, $f(x)$ 在$(0, +\infty)$内是单调减少的,又 $f(0) = 0$,故当 $x > 0$ 时,$f(x) < f(0) = 0$,即 $\ln(1+x) < x$. (1)

又设 $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$,则

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x,\quad g''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+1.$$

当 $x>0$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，又 $g'(0)=0$，故 $g'(x)>g'(0)=0$. 由此又知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，再由 $g(0)=0$ 知，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}. \tag{2}$$

由(1)、(2)式即得

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

3.5.148　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，若 ξ 为 (a,b) 内一定点且 $f(\xi)>0$，$(x-\xi)f'(x)\geqslant 0$，证明：在 $[a,b]$ 上必有 $f(x)>0$.

证　由 $(x-\xi)f'(x)\geqslant 0$ 知，当 $x>\xi$ 时必有 $f'(x)\geqslant 0$，从而知 $f(x)$ 是单调增加的，即有

$$f(x)\geqslant f(\xi)>0.$$

当 $x<\xi$ 时有 $f'(x)\leqslant 0$，从而知 $f(x)$ 是单调下降的，即有

$$f(x)\geqslant f(\xi)>0.$$

于是，对 $[a,b]$ 上的任何 x，都有 $f(x)>0$.

3.5.149　设 $f(0)=g(0)$，$f'(0)=g'(0)$，且当 $x>0$ 时，有 $f''(x)<g''(x)$，证明：当 $x>0$ 时有 $f(x)<g(x)$.

证　令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F''(x)=f''(x)-g''(x)$. 由题设知，当 $x>0$ 时，$F''(x)<0$. 故 $F'(x)$ 单调减少，$F'(x)<F'(0)=0$. 由此又知 $F(x)$ 单调减少，于是当 $x>0$ 时，$F(x)<F(0)=0$，即

$$f(x)<g(x).$$

3.5.150　用求极值的方法证明：当 $|x|\leqslant 2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$.

分析　要证明的不等式即为 $-2\leqslant 3x-x^3\leqslant 2$，所以若能证明 -2，2 分别为 $y=3x-x^3$ 的最小值和最大值即可.

证　设 $f(x)=3x-x^3$，则 $f'(x)=3-3x^2=3(1-x)(1+x)$，解 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 和 $x=-1$.

由 $f(2)=-2$，$f(-2)=2$，$f(1)=2$，$f(-1)=-2$ 知，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 2，最小值为 -2. 所以，

$$-2\leqslant 3x-x^3\leqslant 2,\ x\in[-2,2],$$

即

$$|3x-x^3|\leqslant 2.$$

3.5.151 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$p > 1$ 时，证明

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

证 先求函数 $f(x) = x^p + (1-x)^p$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值.

$f'(x) = px^{p-1} + p(1-x)^{p-1}(-1) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$，

解 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$.

由 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$，$f(0) = f(1) = 1$ 知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 中的最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2^{p-1}}$. 所以 $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant f(x) \leqslant 1$，即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

3.5.152 设 $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx$，且有 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$. 利用导数定义证明：$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

证 因 $f(0) = 0$，$f'(x) = a_1\cos x + 2a_2\cos 2x + \cdots + na_n\cos nx$，

故 $\qquad f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$.

又因 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$，$|f'(0)| = \lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$，所以

$$|f'(0)| = |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

3.5.153 证明：当 $a,b,p,q > 0$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时，

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

证法1 设 $f(x) = x^\lambda - \lambda x$，$(0 < \lambda < 1, x > 0)$ 则

$$f'(x) = \lambda(x^{\lambda-1} - 1)\begin{cases} > 0, & 0 < x < 1; \\ = 0, & x = 1; \\ < 0, & x > 1. \end{cases}$$

由此可得 $\quad f(x) \leqslant \max\limits_{x>0} f(x) = f(1) = 1 - \lambda$.

令 $x = \frac{a^p}{b^q}$，$\lambda = \frac{1}{p}$，则 $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} \leqslant 1 - \frac{1}{p}$，

注意到 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，即得 $\frac{a}{b^{q-1}} - \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} \leqslant \frac{1}{q}$，两端同乘以 b^q，得

$$\frac{a}{b^{-1}}-\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q,\ 即\ ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

证法 2　设 $y=x^{p-1}$，$(x\geqslant 0)$，则由 $a>0,b>0,p>0,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，得

$$\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy\geqslant ab,$$

积分得
$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{\frac{1}{p-1}+1}b^{\frac{1}{p-1}+1}\geqslant ab,$$

即
$$\frac{1}{p}a^p+\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}\geqslant ab,$$

亦即
$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\geqslant ab.$$

3.5.154　证明不等式

$$\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\cdots+a_n|}\leqslant\frac{|a_1|}{1+|a_1|}+\frac{|a_2|}{1+|a_2|}+\cdots+\frac{|a_n|}{1+|a_n|}.$$

证法 1　设 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，则当 $x_2>x_1>-1$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}\\&=\frac{x_2(1+x_1)-x_1(1+x_2)}{(1+x_2)(1+x_1)}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}\geqslant 0.\end{aligned}$$

即当 $x_2\geqslant x_1>-1$ 时，有 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$，即 $\frac{x_2}{1+x_2}\geqslant\frac{x_1}{1+x_1}$.

令 $x_2=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，$x_1=|a_1+a_2+\cdots+a_n|$

则 $x_2\geqslant x_1$，代入上式，得

$$\begin{aligned}&\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\cdots+a_n|}\leqslant\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{1+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}\\&\leqslant\frac{|a_1|}{1+|a_1|}+\frac{|a_2|}{1+|a_2|}+\cdots+\frac{|a_n|}{1+|a_n|}.\end{aligned}$$

证法 2　设 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，则当 $x>-1$ 时，

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0,$$

故 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内为增函数，而

$$0\leqslant|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,$$

所以有

$$\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{1+|a_1+a_2+\cdots+a_n|}\leqslant\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{1+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}$$

$$\leqslant\frac{|a_1|}{1+|a_1|}+\frac{|a_2|}{1+|a_2|}+\cdots+\frac{|a_n|}{1+|a_n|}.$$

3.5.155 利用函数极值方法证明不等式

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\leqslant\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\alpha_n},$$

其中 $\alpha_i,\ \beta_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$.

证 令 $\varphi(t)=(1+t)^\alpha(1+\frac{1}{t})^\beta,\ t>0,\ \alpha,\beta>0$,则

$$\varphi'(t)=\frac{\alpha(1+t)^{\alpha+\beta-1}}{t^{\beta+1}}(t-\frac{\beta}{\alpha}).$$

容易验证,$t=\frac{\beta}{\alpha}$ 是 $\varphi(t)$ 的极小值点,故

$$\varphi(\frac{\beta}{\alpha})\leqslant\varphi(t),\ t>0,$$

令 $t=\frac{y}{x},x,y>0$,代入上式,得

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{x+y}\right)^{\alpha+\beta}\leqslant\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{y}\right)^\beta.$$

用 $\beta+\gamma$ 代替 $\beta,y+z$ 代替 y,得

$$\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{x+y+z}\right)^{\alpha+\beta+\gamma}\leqslant\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\alpha\left(\frac{\beta+\gamma}{y+z}\right)^{\beta+\gamma}\leqslant\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{y}\right)^\beta\left(\frac{\gamma}{z}\right)^\gamma,$$

由归纳法即可证明

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\leqslant\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\alpha_n}.$$

3.5.156 设 $f(x)$ 在$[0,a]$内两次可微,$|f''(x)|\leqslant M,0\leqslant x\leqslant a$,又设 $f(x)$ 在$(0,a)$内取得最大值,证明:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

证 由题设知,存在一点 $c\in(0,a)$,使 $f(c)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}f(x)$,因此,$f'(c)=0$. 由拉格朗日中值公式可得

$$f'(0)=f'(c)-f''(\xi_1)c=-f''(\xi_1)\cdot c,$$

$$f'(a)=f'(c)+f''(\xi_2)(a-c)=f''(\xi_2)\cdot(a-c).$$

由此可得 $|f'(0)|\leqslant Mc,|f'(a)|\leqslant M(a-c)$,所以,

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma.$$

3.5.157　设 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$，证明

$$yx^y(1-x) < e^{-1}.$$

证　任取 $y_0 \in (0, +\infty)$，令 $\varphi(x) = y_0 x^{y_0}(1-x)$，由此可求得 $\varphi(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{(1+\frac{1}{y_0})^{y_0+1}}$，因此，对于任意的 $y \in (0, +\infty)$，有

$$yx^y(1-x) < \frac{1}{(1+\frac{1}{y})^{y+1}},\ 0 < x < 1,\ 0 < y < +\infty.$$

又因 $(1+\frac{1}{y})^{y+1}$ 单调递减且大于 e，故有

$$yx^y(1-x) < e^{-1}.$$

6. 近似计算及误差估计

3.5.158　证明近似公式

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

其中 $|x|$ 与 a 相比充分小，并用此式计算 $\sqrt[3]{10}$.

证　考虑函数

$$f(t) = \sqrt[n]{t},\ f'(t) = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1},$$

在 $t = a^n$ 处，当 $|\Delta t|$ 较 a（从而较 $a^n = t$）充分小时，$\Delta f \approx df$，故

$$\sqrt[n]{a^n + \Delta t} - \sqrt[n]{a^n} \approx \frac{1}{n}(a^n)^{\frac{1}{n}-1}\Delta t = \frac{\Delta t}{na^{n-1}},$$

或

$$\sqrt[n]{a^n + \Delta t} \approx a + \frac{\Delta t}{na^{n-1}}.$$

如将上式中 Δt 改用 x 表之（相应地，要求 $|x|$ 较 a 充分小时），便得到近似公式

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{an^{n-1}},(a > 0).$$

在上式中，令 $n = 3, a = 2.1, x = 0.739$，则有

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2.1^3 + 0.739} \approx 2.1 + \frac{0.739}{3(2.1)^2}$$
$$= 2.1 + 0.056 = 2.156.$$

3.5.159 设 $y_1 > y_2 > 0$,记 $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$,$y^* = \frac{y_2 - y_1}{\ln y_2 - \ln y_1}$,式证明:当 $y_1 \leqslant 2y_2$ 时,用 y^* 代替 $\bar{y}$ 产生的相对误差小于 4%(已知 $\ln 2 = 0.6931$).

解 相对误差 $\delta = \left|\frac{\bar{y} - y^*}{y^*}\right|$,由于

$$Y = \frac{\bar{y}}{y^*} = \frac{(y_1 + y_2)(\ln y_2 - \ln y_1)}{2(y_2 - y_1)} > 0,$$

所以 δ 不超过 $Y(y_1)$ 在 $(y_1, 2y_2)$ 上的最大值与 1 之差的绝对值;又

$$Y'(y_1) = \frac{y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_2(\ln y_1 - \ln y_2)}{2y_1(y_1 - y_2)^2}. \tag{1}$$

上式的分母大于零,故 $Y'(y_1)$ 与分子同号,(1) 式分子对 y_1 的导数为

$$2y_1 - 2y_2(1 + \ln y_1 - \ln y_2), \tag{2}$$

(2) 式对 y_1 的导数为 $2(1 - \frac{y_2}{y_1}) > 0$,故(2) 式关于 y_1 为单调增加;而当 $y_1 = y_2$ 时,(2) 式为零,故当 $y_1 \in (y_1, 2y_2)$ 时,(2) 式大于 0,这表明(1) 的分子对 y_1 是单调增加的,而当 $y_1 = y_2$时,(1) 式分子等于零,故当 $y_1 \in (y_1, 2y_2)$ 时,(1) 式分子大于零. 于是 $Y'(y_1) \geqslant 0$,这说明 $Y(y_1)$ 单调增加,当 $y_1 = 2y_2$ 时,$Y(y_1)$ 取最大值.

$$Y(2y_2) = \frac{3y_2\ln 2}{2y_2} = \frac{3\ln 2}{2} = 1.03965.$$

所以

$$\delta \leqslant |1.03965 - 1| < 0.04 = 4\%.$$

3.5.160 测量球的体积 V,精确到 1%,据此推算球的半径 R,问相对误差如何?

解 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,取对数,得

$$\ln V = \ln\frac{4}{3}\pi + 3\ln R.$$

再求微分,得 $\frac{dV}{V} = \frac{3dR}{R}$,故 $\left|\frac{dR}{R}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{dV}{V}\right| = 0.33\%$.

3.5.161 如果利用摆的摆动来求重力加速度,分别讨论:(1) 当测量摆长的相对误差为 δ_l 时;(2) 当测量周期 T 的相对误差为 δ_T 时,对于用公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 或 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ 算出的 g 的值影响如何?

解　(1) 测量摆长 l 以求 g 时，$\frac{dg}{dl}=\frac{4\pi^2}{T^2}$，当 $|\Delta l|\ll l$ 时，

$$\Delta g\approx dg=\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l.$$

如果测量 l 的相对误差是 $\delta_l=\left|\frac{\Delta l}{l}\right|$，则 g 的相对误差是

$$\delta_g=\left|\frac{\Delta g}{g}\right|\approx\left|\frac{\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}}\right|=\left|\frac{\Delta l}{l}\right|=\delta_l,$$

即 $\delta_g=\delta_l$.

(2) 测量周期 T 以求 g 时，$\frac{dg}{dT}=-\frac{8\pi^2 l}{T^3}$，当 $|\Delta T|\ll T$ 时，

$$\Delta g\approx dg=-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\Delta T.$$

如果测量 T 的相对误差是 $\delta_T=\left|\frac{\Delta T}{T}\right|$，则 g 的相对误差

$$\delta_g=\left|\frac{\Delta g}{g}\right|\approx\left|\frac{-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\Delta T}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}}\right|=2\left|\frac{\Delta T}{T}\right|=2\delta_T,$$

即 $\delta_g=2\delta_T$.

3.5.162　求函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的最小值，并求出此最小值的近似值，使其误差不超过 10^{-3}.

解　由 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$，令 $f'(x)=0$. 得唯一的驻点 $x=0$，而 $f(0)=1$，$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$（最小值），因为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

令 $x=-\frac{1}{4}$，代入上式得

$$e^{-\frac{1}{4}}=1+(-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}+(-\frac{1}{6})\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{256}+\cdots$$

由 $\frac{1}{6\times 64}\approx 0.00261$，$\frac{1}{24\times 256}\approx 0.00016$ 可知，只取前四项就可以使误差小于 10^{-3}，故

$$e^{-\frac{1}{4}} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} \approx 0.77864.$$

因此,所求的最小值为 $f(\pm\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$,其近似值为 0.77864.

3.5.163　求函数 $y = \cos^2\varphi$,当 φ 从 60° 变到 60°30′ 时的微分值.

解　$dy = d(\cos^2\varphi) = 2\cos\varphi d(\cos\varphi) = -2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$

$= -\sin 2\varphi d\varphi.$

现 $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \Delta\varphi = (\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{360}$,此时

$$dy = -\sin(2 \times \frac{\pi}{3})\frac{\pi}{360} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{360} \approx -0.0076.$$

3.5.164　求 $(1.001)^7 - 2(1.001)^{\frac{4}{3}} + 3$ 的近似值。

解　设 $y = f(x) = x^7 - 2x^{\frac{4}{3}} + 3$,则

$$dy = f'(x)dx = (7x^6 - \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}})dx,$$

令 $x = 1$, $dx = 0.001$,又 $f'(1) = \frac{13}{3}, f(1) = 2$,则

$$dy = \frac{13}{3} \cdot 0.001 = 0.0043,\ y + dy = 2.0043.$$

于是

$$f(x + dx) = (1.001)^7 - 2(1.001)^{\frac{4}{3}} + 3 = 2.0043.$$

3.5.165　计算 sin29°.

解　令 $x_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$ 弧度,$\Delta x = 29° - 30° = -1° = -0.0175$ 弧度,则

$$\sin 29° = \sin(\frac{\pi}{6} - 0.0175) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot (-0.0175)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(-0.0175) \approx \frac{1}{2}(1 - 1.732 \times 0.0175)$$

$$\approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.0303) = \frac{1}{2} \times 0.9697 = 0.4849.$$

(由四位数学用表查出 sin29° = 0.4848.)

3.5.166　计算 $\sqrt{23}$ 和 $\sqrt{2}$.

解 考虑函数 $f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

令 $x_0=25,\Delta x=23-25=-2$，则

$$\sqrt{23}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}(-2)=5-\frac{2}{10}=4.8.$$

（由四位数学用表查出 $\sqrt{23}=4.7958.$）

令 $x_0=1.96,\Delta x=2-1.96=0.04$，

$$\sqrt{2}\approx\sqrt{19.6}+\frac{1}{2\sqrt{19.6}}\times 0.04=1.4+\frac{0.02}{1.4}$$

$$=1.4+\frac{1}{70}=1.4+0.0143=1.4143.$$

（由四位数学用表查出 $\sqrt{2}=1.4142.$）

3.5.167 利用三角函数对数表求角 φ 时，试判断应用正弦表与正切表中的哪一个更为有利.

解 所谓更有利是指当给定数值的绝对误差相等时，用哪种表查出对应角的绝对误差更小.

设 $y_1=\lg\sin\varphi$，$y_2=\lg\mathrm{tg}\varphi$，问题即是求当 $|\Delta y_1|=|\Delta y_2|$ 时，对应的 $|\Delta\varphi_1|$ 与 $|\Delta\varphi_2|$ 中的哪个较小，用 $dy_1,dy_2,d\varphi_1$ 和 $d\varphi_2$ 分别代替 $\Delta y_1,\Delta y_2,\Delta\varphi_1$ 和 $\Delta\varphi_2$，则由

$$y_1'=(\ln\sin\varphi)'=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi\cdot\ln10}=\frac{1}{\ln10}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi},$$

$$y_2'=(\lg\mathrm{tg}\varphi)'=\frac{(\mathrm{tg}\varphi)'}{\mathrm{tg}\varphi\cdot\ln10}=\frac{1}{\ln10}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi$$

可得

$$dy_1=\frac{1}{\ln10}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}d\varphi_1,\ dy_2=\frac{1}{\ln10}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}\sec^2\varphi d\varphi_2.$$

又由 $dy_1=dy_2$ 可得

$$\frac{1}{\ln10}\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}d\varphi_1=\frac{1}{\ln10}\frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}\sec^2\varphi d\varphi_2,$$

即 $$d\varphi_2=\cos^2\varphi d\varphi_1.$$

由此有 $$|d\varphi_2|=|\cos^2\varphi d\varphi_1|\leqslant d\varphi_1.$$

这表明当对数值有相同的误差时，正切表所给出的角度比正弦表给出的角度有较小的误差，因此，应用正切表更有利.

3.5.168 求弓形 ABC 的高 $h=DB$ 与弓形 AB_1B 的高 $h_1=D_1B_1$ 间

的关系.

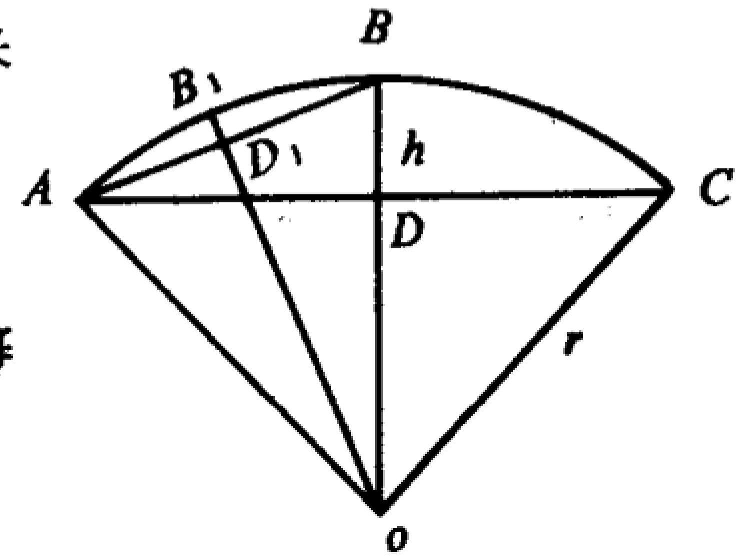
解 设圆的半径为 r，弦长 $AC=2b$，由圆幂定理得

$$h(2r-h)=b^2,$$

故 $$2r=h+\frac{b^2}{h}=\frac{h^2+b^2}{h}.$$

又由 $AB^2=h^2+b^2$，再应用圆幂定理，得

$$h_1(2r-h_1)=(\frac{AB}{2})^2=\frac{h^2+b^2}{4},$$



3.5.168 题图

即 $$h_1^2-2rh_1+\frac{h^2+b^2}{4}.$$

于是有 $$h_1=\frac{2r\pm\sqrt{4r^2-(h^2+b^2)}}{2}.$$

显然，根号前应取负号，所以

$$h_1=\frac{2r-\sqrt{4r^2-(h^2+b^2)}}{2}=r-r\sqrt{1-\frac{h^2+b^2}{4r}}$$

$$\approx r-r(1-\frac{h^2+b^2}{8r^2})=\frac{1}{4}\cdot\frac{h^2+b^2}{2r}.$$

将 $2r=\dfrac{h^2+b^2}{h}$ 代入，得 $h_1=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{h^2+b^2}{\frac{h^2+b^2}{h}}=\dfrac{h}{4}$，故当 h 较小时，有

$$h_1\approx\frac{h}{4}.$$

3.5.169 计算 $\sin 1°$ 的值(精确到 10^{-8}).

解 由 $|R_n|<\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^{2n+1}<10^{-8}$，得 $n\geqslant 2$.

取 $n=2$，于是在 $\sin x$ 的展开式中取到 x^3 项即可.

$$\sin 1°=\sin\frac{\pi}{180}\approx\frac{\pi}{180}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\approx 0.01745241.$$

3.5.170 计算 $\sin 18°$ 的值，并估计误差.

解 在 $\sin x$ 的展开式中取到 x^5 项，得

$$\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}\approx\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{10})^5\approx 0.3090171,$$

误差为：$|R_5| < \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{10})^7 \approx 5.9927 \times 10^{-8} < 10^{-7}$.

3.5.171　求 $\sqrt[3]{29}$ 的近似值，精确到 10^{-3}.

解　把 $\sqrt[3]{29}$ 表示为 $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3(1+\frac{2}{27})^{1/3}$，

利用二项展开式

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + R_n$$

可以得到近似等式

$$(1+x)^a \approx 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n.$$

其误差为

$$R_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{a-n-1}.$$

对于 $|x| < 1$，当 n 充分大时，R_n 可以充分小.

令 $x = \frac{2}{27}, a = \frac{1}{3}$. 得

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + \frac{2}{81} - \frac{2 \cdot 2}{81 \cdot 81} + \frac{2^3 \cdot 5}{81^3} - \frac{2^5 \cdot 5}{81^4} + \cdots + R_n),$$

逐步估计误差 $3|R_n|$，有

$$3|R_1| < \frac{3 \cdot 2^2}{81^2} < 0.002,\ 3|R_2| < \frac{3 \cdot 2^3 \cdot 5}{81^3} < 0.0003,$$

从而，为达到所要求的精度，只需余项之前取三项，而余项为 R_2，即

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0.024 - 0.0006) = 3.072.$$

3.5.172　求 $\sqrt{e}$ 的近似值，精确到 0.0001.

解　利用函数 e^x 的马克劳林公式，有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

其中 $R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$0 < \theta < 1$，令 $x = \frac{1}{2}$，有

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + R_n$$

其中 $R_n = \dfrac{e^{\theta/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

因为 $0<\theta<1, 2<e<3$,故 $R_n < \dfrac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$. 由于 $e^{1/2} < 2$,所以 $R_n < \dfrac{1}{2^n(n+1)!}$. 现由条件 $R_n < 0.0001$ 来求 n.

$$R_3 < \frac{1}{8\cdot 24} = \frac{1}{192} = 0.00521,$$

$$R_4 < \frac{1}{16\cdot 120} = \frac{1}{1920} = 0.000521,$$

$$R_5 < \frac{1}{32\cdot 720} = \frac{1}{23040} = 0.000043 < 0.0001,$$

这样,$\sqrt{e}$ 精确到 0.0001 的近似值为

$$\begin{aligned}\sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \frac{1}{2^4\cdot 4!} + \frac{1}{2^5\cdot 5!}\\ &= 1 + 0.50000 + 0.12500 + 0.02083 + 0.00260\\ &\quad + 0.00026\\ &= 1.64869 \approx 1.6487\end{aligned}$$

即
$$\sqrt{e} \approx 1.6487.$$

3.5.173 设 $e^x \approx 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n, 0 \leqslant x \leqslant 1$,估计该近似式的绝对误差.

解 $f(x) = e^x, 0 \leqslant x \leqslant 1$,用拉格朗日余项估计,因 $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e$,故当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时有

$$|R_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

3.5.174 设 $\sin x \approx x - \dfrac{1}{6}x^3, |x| \leqslant 0.5$,估计绝对误差.

解 设 $f(x) = \sin x$,用泰勒展开式的拉格朗日余项公式来估计误差.

因 $|f^{(5)}(\theta x)| = |\sin(\theta x + \dfrac{5\pi}{2})| < 1$,所以当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时,有

$$|R_4| \leqslant \frac{1}{5!}|x|^5 \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{3840} < 10^{-3}.$$

3.5.175 设 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1$,估计绝对误

差.

解　设 $f(x)=\sqrt{1+x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$,则

$$|f'''(x)|=\frac{3}{8}\left|\frac{1}{(1+x)^{5/2}}\right|\leqslant\frac{3}{8},$$

于是当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,有

$$|R_3|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{1}{16}=0.0625.$$

3.5.176　设 $\mathrm{tg}x\approx x+\frac{1}{3}x^3$, $|x|\leqslant 0.1$,估计绝对误差.

解　由 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 可得

$$f^{(5)}(x)=\frac{16}{\cos^2x}+\frac{120\sin^2x}{\cos^6x}.$$

当 $0\leqslant x<0.1$ 时,易知 $f^{(5)}(x)$ 在 $x=0.1$ 处可达到最大值,于是

$$|f^{(5)}(x)|\leqslant\frac{16}{\cos^2 0.1}+\frac{120\sin^2 0.1}{\cos^6 0.1}<20,\quad(0\leqslant x\leqslant 0.1)$$

故
$$|R_3(x)|\leqslant\frac{20}{5!}\cdot(0.1)^5<2\times 10^{-6}.$$

3.5.177　设 $\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2$, $|R_2|\leqslant 0.0001$,估计 x 的取值范围.

解　设 $f(x)=\cos x$,泰勒展式的余项为

$$|R_2(x)|=\left|\frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}\right|\cdot|x^4|$$
$$=\left|\frac{1}{4!}\cos\left(\theta x+\frac{4\pi}{2}\right)\right|\cdot|x^4|\leqslant\frac{1}{4!}|x^4|,$$

按题意,需满足$\frac{1}{4!}|x^4|<0.0001$,由此得 $|x|<0.221$.

3.5.178　求函数$f(x)=e^{-x^2}$在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上的最小值,并求出此最小值的近似值,使其误差不超过 10^{-3}.

解　$f'(x)=-2xe^{-x^2}$,令 $f'(x)=0$,得唯一的驻点 $x=0$.

因 $f(0)=1$, $f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$,故 $f(x)$ 在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上的最小值为 $e^{-\frac{1}{4}}$.

现在求 $e^{-\frac{1}{4}}$ 的近似值,把 $x=-\frac{1}{4}$ 代入

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

得 $e^{-\frac{1}{4}}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\cdot(-\frac{1}{64})+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{256}+\cdots$

由$\frac{1}{6\times 64}\approx 0.00261$，$\frac{1}{24}\times\frac{1}{256}\approx 0.00016$可知，只取前四项就可以使误差小于 10^{-3}，这时

$$e^{-\frac{1}{4}}\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{32}-\frac{1}{384}=0.77864.$$

7. 综合问题

3.5.179 设 $g(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$，求 $g^{(4)}(0)$.

解 由 3.2.62 题知

$$g(x)=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$$

比较马克劳林公式的系数，有

$$\frac{g^{(4)}(0)}{4!}=-2,$$

从而得 $g^{(4)}(0)=-48$.

3.5.180 求函数 $y=x^2\cos 2x$ 在 $x=0$ 处的 10 阶导数.

解 把 $\cos 2x$ 展开成幂级数，得

$$y=x^2-\frac{2^2x^4}{2!}+\frac{2^4x^6}{4!}-\frac{2^6x^8}{6!}+\frac{2^8x^{10}}{8!}-\frac{2^{10}x^{12}}{10!}+\cdots$$

由此可得 $y^{(10)}=\frac{2^8\cdot 10!}{8!}-\frac{2^{10}}{10!}\cdot\frac{12!}{2}x^2+\cdots$

故有 $y^{(10)}(0)=\frac{2^8\cdot 10!}{8!}=23040$.

3.5.181 求 $y=\operatorname{arctg}x$ 的各阶导数在 $x=0$ 处的值.

解 把 $y=\operatorname{arctg}x$ 在 $x=0$ 处展开为幂级数，有

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}x&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\\&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\\&\quad+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,\ (|x|\leqslant 1).\end{aligned}$$

比较等式两端 x 同次幂的系数，得

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-\frac{3!}{3},f^{(4)}(0)=0.$$

一般地，有

$$f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{2n+1}=(-1)^n(2n)!,\quad n=0,1,2,\cdots$$

注　若对 $y=\mathrm{arctg}x$ 直接求各阶导数在 $x=0$ 处的值，是很复杂且困难的，这里采用函数在 $x=0$ 处的幂级数的两种表示形式所建立的等式，并比较系数，则很容易达到目的，这是求一些函数的高阶导数颇为常用的方法.

3.5.182　利用恒等式 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

求下面的和：$T_n=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n}$.

解　将所给等式两边分别对 x 求导，得

$$-\Big[\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^n}\Big]$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2^n}\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}},$$

或

$$-\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos x-\frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}},$$

从中解得

$$T_n = \frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{tg}\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}$$

$$= -\frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos x - \frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}$$

$$= -\frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos x - \frac{1}{2^n}\sin x\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin^2\frac{x}{2^n}} \cdot \frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x} = \frac{1}{2^n}\text{ctg}\frac{x}{2^n} - \text{ctg}x.$$

3.5.183 已知数列$\{x_n\}$:$x_0 = 25, x_n = \text{arctg}x_{n-1}$,证明它有极限,并求其极限.

证 设$f(x) = \text{arctg}x - x$,则$f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0,$$

所以$f(x)$单调减少,当$x > 0$时,$f(x) < f(0) = 0$,即$\text{arctg}x < x$,于是有

$$x_n = \text{arctg}x_{n-1} < x_{n-1},$$

由此可知,数列$\{x_n\}$单调递减,又$x_0 = 25, x_1 = \text{arctg}25 > 0, \cdots$,且对每个$n$,都有$x_n > 0$,据极限存在准则知,$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$,对$x_{n+1} = \text{arctg}x_n$两边取极限,得

$$a = \text{arctg}a,$$

所以$a = 0$,即$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3.5.184 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

证 由3.5.115题知,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,$$

当$n \geq 2$时,分别取$x = \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots, \frac{1}{2n}$,代入上述不等式得

$$\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}} < \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \ln\frac{n}{n-1},$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n+2}<\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1},$$

……

$$\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}<\frac{1}{2n-1},$$

$$\ln\frac{2n+1}{2n}<\frac{1}{2n},$$

将上述不等式两边相加,得

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln\frac{2n}{2n-1},$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{2n+1}{2n},$$

即

$$\ln\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{n-1}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n}{n-1}=\ln2$,因而

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n})=\ln2.$$

3.5.185 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

解 $\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=\sqrt[6]{x^6(1+\frac{1}{x})}-\sqrt[6]{x^6(1-\frac{1}{x})}$

$$=x[(1+\frac{1}{x})^{1/6}-(1-\frac{1}{x})^{1/6}],$$

令 $x=\frac{1}{t}$,则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}[(1+t)^{\frac{1}{6}}-(1-t)^{\frac{1}{6}}]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}[(1+\frac{t}{6}-\frac{5}{72}t^2+o(t^2))-(1-\frac{t}{6}-\frac{5}{72}t^2+o(t^2))]$$

$$=\lim_{t\to0^+}[\frac{1}{3}+\frac{1}{t}\cdot o(t^2)]=\frac{1}{3},$$

3.5.186 求 $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{ctg}x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$.

解 由各函数的泰勒展开式可得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos x}{x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{x^3}{3!}+\cdots)(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots)}{x(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots)^2}=\frac{1}{6}.$$

3.5.187 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.

解 用洛比达法则比较麻烦，把 e^{-x}, $\sin x$, $\cos x$ 的泰勒展开式代入，得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-[1-x+o(x)]}-\sqrt{1-[1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)]}}{\sqrt{x-\frac{x^3}{3!}+o(|x|^3)}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+o(x)}-\sqrt{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}}{\sqrt{x-\frac{x^3}{3!}+o(|x|^3)}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\frac{o(x)}{x}}-\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{o(x^2)}{x}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}+\frac{o(x^3)}{x}}}=1.$$

3.5.188 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}]$.

解 当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，故有展开式

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3}),$$

$$\sqrt{x^6+1}=x^3(1+\frac{1}{x^6})^{\frac{1}{2}}=x^3[1+\frac{1}{2x^6}+o(\frac{1}{x^6})].$$

于是，$\text{原式}=\lim\limits_{x\to\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3}))$

$$-x^3(1+\frac{1}{2x^6}+o(\frac{1}{x^6}))]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[x^3+x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{6}+o(1)-x^2-x-\frac{1}{2}$$

$$-o(\frac{1}{x})+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+o(\frac{1}{x})-x^3-o(\frac{1}{x^3})]$$

$$=\lim_{x\to\infty}[\frac{1}{6}+o(1)]=\frac{1}{6}.$$

3.5.189　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解　因 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$,

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),$$

故 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$,从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{12}+o(1))=-\frac{1}{12}.$$

3.5.190　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2\sin^2 x}$.

解　利用泰勒展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^6),$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}x^2)^2+o(x^6),$$

$$\sin x=x-o(x^3),$$

$$\sin^2 x=(x-o(x^3))^2=x^2-2x\cdot o(x^3)+o(x^6)$$

$$=x^2+o(x^4).$$

可得,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^6)-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{8}+o(x^6))}{x^2(x^2+o(x^4))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^6)}{x^4+o(x^6)} = -\frac{1}{12}.$$

3.5.191 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$,$(a>0)$.

解 $a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{1}{2}x^2\ln^2 a + o(x^3)$,

$$a^{-x} = 1 - x\ln a + \frac{1}{2}x^2\ln^2 a + o(x^3),$$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\ln^2 a + o(x^3)}{x^2} = \ln^2 a.$

3.5.192 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解 令 $x = \frac{1}{t}$,则

$$\begin{aligned}原式 &= \lim_{t\to 0}[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)] \\ &= \lim_{t\to 0}[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2))] \\ &= \lim_{t\to 0}[\frac{1}{2} + \frac{1}{t^2}\cdot o(t^2)] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3.5.193 在 $x\to 0$ 的过程中,$e^x - \cos x$ 是关于 x 的几阶无穷小量?

解 由 $e^x - \cos x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots) - (1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots)$

$$= x + 2\cdot\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

得 $\frac{e^x - \cos x}{x} = 1 + 2\cdot\frac{x}{2!} + \cdots$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x}{x} = 1.$

故 $e^x - \cos x$ 在 $x\to 0$ 的过程中是关于 x 的 1 阶无穷小量.

3.5.194 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

证法 1 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$,故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = k,$$

由拉格朗日中值定理,有

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi), \quad (x < \xi < x+1).$$

注意到 $x \to +\infty$ 时，$\xi \to +\infty$，故

$$0 = \lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{\xi \to +\infty} f'(\xi),$$

即 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

证法 2 因极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ 存在，故由柯西收敛准则知，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使当 $x_1, x_2 > N$ 时，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f'(x_1) - f'(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

于是，由(1)式及拉格朗日中值定理，当 $x > N$ 时，有

$$|f(x) - f(x+1)| = |f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x < \xi < x+1,$$

即
$$-\frac{\varepsilon}{2} < f'(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

又由(1)式可得

$$|f'(x) - f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

即
$$f'(\xi) - \frac{\varepsilon}{2} < f'(x) < f'(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

再由(2)即得

$$-\varepsilon < f'(x) < \varepsilon,$$

即 $|f'(x)| < \varepsilon$，故有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

3.5.195 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内两次可微，而且满足 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$，$|f''(x)| \leqslant 1, x \in (0, +\infty)$. 证明：$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

证 设 $x \in (0, +\infty)$，$\Delta x > 0$，由泰勒公式可得

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x + \theta\Delta x)}{2!}\Delta x^2, \ 0 < \theta < 1.$$

于是有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leqslant \frac{|f(x+\Delta x)|}{\Delta x} + \frac{|f(x)|}{\Delta x} + \frac{|f''(x+\theta x)|}{2!}\Delta x \\ &\leqslant \frac{|f(x+\Delta x)|}{\Delta x} + \frac{|f(x)|}{\Delta x} + \frac{1}{2}\Delta x \end{aligned}$$

由题设可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \Delta x$，再由 Δx 的任意性得 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

3.5.196 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近有连续导数，而 $\alpha_n < x_0 < \beta_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$. 当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n \to x_0$，$\beta_n \to x_0$，证明：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点附近满足拉格朗日定理的条件，由拉格朗日定理有

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(\xi_n),\ \xi_n\in(\alpha_n,\beta_n) \tag{1}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to x_0,\beta_n\to x_0$，此时有 $\xi_n\to x_0$。

又 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 点附近连续，所以有

$$\lim_{\xi_n\to x_0}f'(\xi_n)=f'(x_0),$$

将(1)式两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{\xi_n\to x_0}f'(\xi_n)=f'(x_0).$$

3.5.197 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L>0$，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=L>0$. 故必存在充分大的正数 A，当 $x>A$ 时，$f'(x)\geqslant\frac{L}{2}$. 根据中值定理，当 $A<x_2<x_1$ 时，有等式

$$f(x_1)=f(x_2)+f'(\xi)(x_1-x_2),\ x_2<\xi<x_1.$$

即 $\quad f(x_1)\geqslant f(x_2)+\frac{L}{2}(x_1-x_2),$

固定 x_2，当 $x_1\to+\infty$ 时，$(x_1-x_2)\to+\infty$，$\frac{L}{2}>0$，故

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

3.5.198 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线方程

$$Y-f(x)=f'(x)(Z-x)$$

在 x 轴上的截距由 $0-f(x)=f'(x)(u-x)$ 所确定，即

$$u(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

又 $\lim\limits_{x\to0}u(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{u}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1-\dfrac{f'^2-ff''}{f'^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f'^2(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{f''(x)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{f'^2(x)}{f(x)}\lim_{x\to0}\frac{1}{f''(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)f''(x)}{f'(x)}\lim_{x\to0}\frac{1}{f''(x)}=2.$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(u)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f'(u)}{f'(x)}u'(x)\right]$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f'(u)}{f'(x)}\left(1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f'(u)}{f'(x)}\cdot\frac{f(x)}{f'^2(x)}\cdot f''(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(u)}{f'(x)}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'^2(x)}\lim_{x\to0}f''(x)$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f''(u)}{f''(x)}\frac{f(x)}{f'^2(x)}f''(x)\right]\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)}.$$

$$\lim_{x\to0}f''(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[f''(u)\frac{f(x)}{f'^2(x)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f''(u)\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f''(u).$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)}=\frac{1}{4}.$$

故 $\quad\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}=\dfrac{1}{2}.$

3.5.199　当 a,b 取何值时，$x-(a+b\cos x)\sin x$ 是 $x\to0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小？

解　记 $s=x-(a+b\cos x)\sin x$，其泰勒展开式为

$$s=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin2x$$

$$=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]$$

$$-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right]$$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5).$$

欲使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{s}{x^5}=k$，只须

$$\begin{cases}1-a-b=0,\\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0.\end{cases}$$

解之得 $a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$,这时有

$$\lim_{x\to 0}\frac{s}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{-[\frac{1}{120}\times\frac{4}{3}+\frac{2}{15}\times(-\frac{1}{3})]x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{30}.$$

即 s 为 $x\to 0$ 时关于 x 的五阶无穷小.

3.5.200 确定常数 a 与 b,使

$$y=x-(a+b\cos x)\sin x$$

当 $x\to 0$ 时成为尽可能高阶的无穷小?

解 利用泰勒展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^6),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^7)$$

可得

$$y=x-\{a+b[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^6)]\}[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^7)]$$

$$=(1-a-b)x+(\frac{b}{2}+\frac{a+b}{6})x^3-(\frac{b}{24}+\frac{b}{12}+\frac{a+b}{120})x^5+o(x^7).$$

令 $$\begin{cases}1-a-b=0,\\ \dfrac{b}{2}+\dfrac{a+b}{6}=0,\end{cases}$$

解之得 $a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$,代入 y,得

$$y=\frac{1}{30}x^5+o(x^7).$$

故当 $a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$ 时,可使 y 是 $x\to 0$ 时最高阶为5阶的无穷小.

第四章　不定积分

§1　不定积分的概念、基本公式及换元积分法

内 容 提 要

1. 不定积分的概念

定义 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是函数 $F(x)$ 的导数，即

$$F'(x) = f(x).$$

则称 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上为 $f(x)$ 的一个原函数；且 $F(x) + c$（c 为任意常数）就是 $f(x)$ 的原函数的一般表达式.

定义 2　函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式 $F(x) + c$ 称为 $f(x)$ 的不定积分. 记作

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

2. 不定积分的性质

性质 1　函数和的不定积分等于各个函数不定积分的和，即

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

性质 2　求不定积分时，被积函数中不为零的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.\ (k \text{ 是非零常数})$$

3. 基本积分表

1) $\int kdx = kx + c$,　(k 是常数)

2) $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$, $(\mu \neq -1)$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$,

4) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + c$,

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$,

6) $\int \cos x dx = \sin x + c$,

7) $\int \sin x dx = -\cos x + c$,

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg}x + c$,

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg}x + c$,

10) $\int \sec x \operatorname{tg}x dx = \sec x + c$,

11) $\int \csc x \operatorname{ctg}x dx = -\csc x + c$,

12) $\int e^x dx = e^x + c$,

13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, $(a > 0, 且 a \neq 1)$

14) $\int \operatorname{sh}x dx = \operatorname{ch}x + c$,

15) $\int \operatorname{ch}x dx = \operatorname{sh}x + c$,

16) $\int \operatorname{tg}x dx = -\ln|\cos x| + c$,

17) $\int \operatorname{ctg}x dx = \ln|\sin x| + c$,

18) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg}x| + c$,

19) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg}x| + c$,

20) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$, $(a > 0)$

21) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$, $(a > 0)$

22) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$, $(a > 0)$

23) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$, $(a > 0)$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$, $(a > 0)$.

4. 换元积分法

定理1　(第一类换元法,即凑微分法) 设 $f(u)$,$\varphi(x)$,$\varphi'(x)$ 都是连续函数,$f(u)$ 具有原函数 $F(u)$,$u = \varphi(x)$ 可导,则 $F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数,即有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + c = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

定理2　(第二类换元法) 设 $x = \psi(t)$ 是单调且连续可导的函数,且 $\psi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数 $\Phi(t)$,则 $\Phi[\bar{\psi}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数,即有换元公式

$$\int f(x)dx = \Phi[\bar{\psi}(x)] + c = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\bar{\psi}(x)}.$$

其中 $\bar{\psi}(x)$ 是 $x = \psi(t)$ 的反函数。

问 题 与 解 答

1. 基本概念

4.1.1　若 $f(x)$ 的某个原函数为常数,则 $f(x) = 0$.

证　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,由题意可知

$$F(x) = c,$$

故 $f(x) = F'(x) = c' = 0$.

4.1.2　试证一切初等函数在其定义区间上都有原函数.

证　因为一切初等函数在其定义区间上都是连续的,所以在该定义区间上连续的一切初等函数其原函数必定存在.

4.1.3　判定等式 $\left(\int f(x)dx\right)' = \int f'(x)dx$ 是否正确?

解　不正确. 由不定积分的定义知,

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad (\text{是函数族})$$

而
$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x), \quad (\text{是一个函数})$$

故它们不相等.

4.1.4 判断下面命题是否正确：若 $f(x)$ 在某一区间内不连续，则在该区间内 $f(x)$ 必无原函数.

解 该命题是错误的，举反例如下：

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

在$[-1,1]$上函数 $f(x)$ 是不连续的，由于 $x=0$ 是其第二类间断点，但是 $f(x)$ 仍具有原函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

即有
$$F'(x) = f(x).$$

4.1.5 试证：奇函数的原函数都是偶函数.

证 令 $f(x)$ 为奇函数且是连续的，那么，它存在原函数族

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + c,$$

由于
$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_a^{-x} f(t)dt + c \quad (\text{令 } t = -u) \\ &= -\int_{-a}^{x} f(-u)du + c = \int_{-a}^{x} f(u)du + c \\ &= \int_{-a}^{a} f(u)du + \int_a^x f(u)du + c = 0 + \int_a^x f(u)du + c \\ &= F(x). \end{aligned}$$

故奇函数的原函数都是偶函数.

注 其中原函数借用了变上限的定积分来表示.

4.1.6 判断命题"偶函数的原函数都是奇函数"是否正确.

解 不正确. 举反例如下：

令 $g(x) = x^2, (-\infty, +\infty)$，它是偶函数，其原函数族为

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

若 $c=0$ 时，有 $G_0(x)=\frac{1}{3}x^3$，是奇函数，

若 $c\neq 0$ 时，有 $G(x)=\frac{1}{3}x^3+c$，不是奇函数.

故当 c 为任意常数时，原函数 $G(x)=\frac{x^3}{3}+c$ 不是奇函数.

4.1.7　对于如下积分有两种计算方法：

$$\int \sin 2x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+c,$$

及

$$\int \sin 2x dx=\int 2\sin x\cdot\cos x dx=2\int \sin x\cdot d(\sin x)=\sin^2 x+c,$$

试说明两种结果是否矛盾？

答　不矛盾. 由 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$，有 $-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x-\frac{1}{2}$，可见 $-\frac{1}{2}\cos 2x$ 与 $\sin^2 x$ 都是 $\sin 2x$ 的原函数，它们相差一个常数 $-\frac{1}{2}$，由于积分常数 c 的任意性，故上面两种结果虽形式不同，但都表示同一个不定积分.

4.1.8　设 $\int f(x)dx=F(x)+c$，求证

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c,\ (a\neq 0).$$

证法 1　由题设知，$F'(x)=f(x)$，因而有

$$F'(ax+b)=f(ax+b),$$

且

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{a}F(ax+b)]=F'(ax+b),$$

即

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{a}F(ax+b)]=f(ax+b),$$

故

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

证法 2　$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$，

令 $(ax+b)=t$，故上式得

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(t)+c$$

$$= \frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

4.1.9 已知 $f'(\mathrm{tg}x)=\sec^2 x$,求 $f(x)$.

解 设$\mathrm{tg}x=u$,则$\sec^2 x=1+\mathrm{tg}^2 x=1+u^2$,那么

$$f'(u)=1+u^2,$$

两边对 u 作不定积分,得

$$f(u)=\int(1+u^2)du=u+\frac{1}{3}u^3+c,$$

所以函数表达式 $f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+c.$

4.1.10 设 $f(x)$ 连续,且对一切 x 均有

$$\int 2(f(x)-1)\,dx=f(x)-1$$

成立.求 $f(x)$.

解 由题设,显然 $f(x)$ 可导,等式两边对 x 求导,得

$$2(f(x)-1)=(f(x)-1)',$$

当 $f(x)\neq 1$ 时,有

$$\frac{d(f(x)-1)}{f(x)-1}=2dx,$$

两边积分,并整理得 $f(x)=1+ce^{2x}$,

其中 c 是任意常数.

4.1.11 已知 $\left(\int dx+\int ydx+\int y^2dx+\int y^3dx\right)\int\frac{1-y}{1-y^4}dx=-1$,求函数 $x=\varphi(y)$ 的关系式.

解 根据不定积分的性质,有

$$\int(1+y+y^2+y^3)dx\cdot\int\frac{1-y}{(1-y)(1+y+y^2+y^3)}dx=-1,$$

即 $$\int(1+y+y^2+y^3)dx\cdot\int\frac{1}{1+y+y^2+y^3}dx=-1.$$

所以 $$\int\frac{dx}{1+y+y^2+y^3}=\frac{-1}{\int(1+y+y^2+y^3)dx},$$

两端对 x 求导,得

$$\frac{1}{1+y+y^2+y^3}=\frac{1+y+y^2+y^3}{\left[\int(1+y+y^2+y^3)dx\right]^2},$$

$$\left[\int (1+y+y^2+y^3)dx\right]^2=(1+y+y^2+y^3)^2,$$

开方，得 $\int (1+y+y^2+y^3)dx=\pm(1+y+y^2+y^3)$，

两端对 x 再求导，有

$$1+y+y^2+y^3=\pm(y'+2yy'+3y^2\cdot y'),$$

解出 y'，得 $\dfrac{dy}{dx}=y'=\pm\dfrac{1+y+y^2+y^3}{1+2y+3y^2}$，

所以 $$dx=\pm\frac{1+2y+3y^2}{1+y+y^2+y^3}dy,$$

两端积分，得 $\int dx=\pm\int\dfrac{1+2y+3y^2}{1+y+y^2+y^3}dy$，

即 $$x=\pm\ln(1+y+y^2+y^3)+c.$$

注　容易发生的错误是

$$\int (1+y+y^2+y^3)dx\cdot\int\frac{dx}{1+y+y^2+y^3}=\int\frac{1+y+y^2+y^3}{1+y+y^2+y^3}dx.$$

4.1.12　设 $f(x)$ 的导数存在且连续，求

$$\int \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}dx.$$

解　先求极限，有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]=2f'(x),$$

再积分，得原式 $=\int 2f'(x)dx=2f(x)+c.$

4.1.13　设 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sh}(x-1), & x<1,\\ x\ln x, & x\geqslant1.\end{cases}$ 求不定积分 $\int f(x)dx$.

解法1　当 $x<1$ 时，有

$$\int f(x)dx=\int\operatorname{sh}(x-1)dx=\operatorname{ch}(x-1)+c_1.$$

当 $x\geqslant1$ 时，有

$$\int f(x)dx=\int x\ln xdx=\frac12\int\ln x\cdot dx^2=\frac12x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+c.$$

因为不定积分只能用一个任意常数来表示，故要利用不定积分 $\int f(x)dx$

连续的概念，消去一个常数 c_1(或 c). 由于 $\int f(x)dx$ 是可导函数，故必连续.

令 $F(x)=\int f(x)dx$，而 $F(1)=-\frac{1}{4}+c$，

且
$$\lim_{x\to 1^+}F(x)=-\frac{1}{4}+c,$$
$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^-}(\mathrm{ch}(x-1)+c_1)=1+c_1.$$

由于 $F(x)$ 的连续性，故须 $1+c_1=-\frac{1}{4}+c$，即 $c_1=-\frac{5}{4}+c$.

于是
$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{ch}(x-1)-\frac{5}{4}+c, x<1,\\ \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c, x\geqslant 1.\end{cases}$$

解法 2 也可以直接由关系式 $\int f(x)dx=\int_0^x f(t)dt+c$ 得
$$\int f(x)dx=\begin{cases}\mathrm{ch}(x-1)-1+c, & x<1,\\ -\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}+c, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

4.1.14 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ 1-x^2, & x>0.\end{cases}$ 求 $\int f(x)dx$.

解 用 4.1.13 的第二种解法，由关系式
$$\int f(x)dx=\int_0^x f(t)dt+c$$

得
$$\int f(x)dx=\begin{cases}x-\frac{1}{3}x^3+c, & x>0;\\ \frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}+c, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

4.1.15 设 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\geqslant 0;\\ x, & x<0.\end{cases}$ 求 $\int f(x)dx$.

解 由于在 $x=0$ 处，有
$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的，因此被积函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 一定存在，而且是连续的.

令 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，

$$F(x)=\begin{cases}\cos x+a_1, & x\geqslant 0;\\ \dfrac{x^2}{2}+a, & x<0,\end{cases}$$

其中 a_1,a 为待定常数.

由于
$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1+a_1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^-}(\frac{x^2}{2}+a)=a,$$
而 $F(x)$ 在 $x=0$ 处也连续,故 $a_1=a-1$,于是有原函数
$$F(x)=\begin{cases}\cos x-1+a, & x\geqslant 0;\\ \dfrac{x^2}{2}+a, & x<0,\end{cases}$$

故 $f(x)$ 的不定积分为
$$\int f(x)dx=F(x)=\begin{cases}\cos x-1+a, & x\geqslant 0;\\ \dfrac{x^2}{2}+a, & x<0.\end{cases}$$

4.1.16　求 $\int \max(1,x^2)dx$.

解　被积函数可分段表示为
$$f(x)=\max(1,x^2)=\begin{cases}1, & 当\ |x|\leqslant 1;\\ x^2, & 当\ |x|>1.\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的,因此 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 一定存在,且是连续的.

令 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则有
$$F(x)=\begin{cases}x+a_1 & 当\ |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{x^3}{3}+a, & 当\ x>1,\\ \dfrac{x^3}{3}+b, & 当\ x<-1.\end{cases}$$

其中 a_1,a,b 为待定常数.

由于
$$\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^+}(\frac{x^3}{3}+a)=\frac{1}{3}+a,$$
$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1+a_1.$$

而 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续,故 $a_1=a-\dfrac{2}{3}$.

同理 $F(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，得 $b=a-\frac{4}{3}$，故

$$\int \max(1,x^2)dx = F(x) = \begin{cases} x-\frac{2}{3}+a, & \text{当 } |x|\leqslant 1; \\ \frac{x^3}{3}+a, & \text{当 } x>1; \\ \frac{x^3}{3}-\frac{4}{3}+a, & \text{当 } x<-1. \end{cases}$$

2. 用基本公式求积分

4.1.17 求 $\int x^2(5-x)^4dx$.

解 原式 $=\int (625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)dx$

$$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{x^7}{7}+c.$$

注 将被积函数展开为多项式，然后逐项求积分.

4.1.18 求 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx$.

解 原式 $=\int (1-6x+11x^2-6x^3)dx$

$$=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+c.$$

4.1.19 求 $\int (\frac{1-x}{x})^2dx$.

解 原式 $=\int \frac{(1-x)^2}{x^2}dx=\int \frac{1-2x+x^2}{x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+c.$$

4.1.20 求 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

解 原式 $=\int (\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})dx$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+c.$$

4.1.21　求 $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

解　原式 $= \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c.$

4.1.22　求 $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

解　原式 $= \int [2 \cdot (\frac{1}{5})^x - \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^x] dx$

$$= -\frac{2}{\ln 5}(\frac{1}{5})^x + \frac{1}{5\ln 2} \cdot (\frac{1}{2})^x + c.$$

4.1.23　求 $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

解　原式 $= \int \frac{(e^{2x} - e^x + 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} dx$

$$= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + c.$$

4.1.24　求 $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}, (a \neq b).$

解　原式 $= \int \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)^2 dx.$

$$= \int \frac{1}{(a-b)^2}[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)}]dx$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\int [\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{2}{(a-b)} \cdot \frac{1}{(x+a)} - \frac{2}{(a-b)} \cdot \frac{1}{x+b}]dx$$

$$= \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right) + \frac{2}{(a-b)^3} \cdot \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + c.$$

4.1.25　求 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, |a| \neq |b|.$

解　原式 $= \frac{1}{a^2 - b^2}\int \left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2}\right) dx$

$$= \frac{1}{x^2 - b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + c.$$

4.1.26　求 $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$

解　原式$=\int \frac{1+2e^x+e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\int (1+\frac{2e^x}{1+e^{2x}})dx$

$=x+2\,\mathrm{arctg}(e^x)+c.$

4.1.27　求$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

解　原式$=\int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx=\int \frac{1}{x^2+1}dx+\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$

$=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^6+1}dx^3=\mathrm{arctg}x+\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3)+c.$

4.1.28　求$\int \frac{x}{x^8-1}dx.$

解　原式$=\int \frac{1}{4}\cdot\frac{(x^4+1)-(x^4-1)}{(x^4+1)\cdot(x^4-1)}d(x^2)$

$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4-1}d(x^2)-\frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4+1}d(x^2)$

$=\frac{1}{8}\ln|\frac{x^2-1}{x^2+4}|-\frac{1}{4}\mathrm{arctg}(x^2)+c.$

4.1.29　求$\int \frac{dt}{t(t^n+a)}$,其中a为常数,$n>0$.

解　若$a=0$,原式$=\int \frac{dt}{t^{n+1}}=-\frac{1}{nt^n}+c$,

若$a\neq 0$,原式$=\frac{1}{a}\int \frac{t^n+a-t^n}{t(t^n+a)}dt=\frac{1}{a}\left(\int \frac{dt}{t}-\int \frac{t^{n-1}}{t^n+a}dt\right)$

$=\frac{1}{a}(\ln|t|-\frac{1}{n}\ln|t^n+a|)+c$

$=\frac{1}{a}\ln\frac{|t|}{\sqrt[n]{|t^n+a|}}+c.$

4.1.30　求$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx.$

解　原式$=\int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}dx$

$=\int [(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]dx$

$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+c.$

4.1.31　求$\int x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^2}dx.$

解　原式$=\int[(x^2+1)-1]\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}d(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int[(1+x)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]d(1+x^2)$$

$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+c.$$

4.1.32　求 $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解　原式 $=\int\frac{1}{5}(\frac{1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+3})dx$

$$=\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

4.1.33　求 $\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.

解　原式$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2})d(x^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+c.$$

4.1.34　设 $f(x)$ 具有二阶连续导数且 $f'(x)\neq 0$,求不定积分

$$\int\left(\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f'^2(x)\cdot f''(x)}{f'^3(x)}\right)dx.$$

解　原式$=\int\frac{f(x)\cdot f'^2(x)-f^2(x)\cdot f''(x)}{f'^3(x)}dx$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)\cdot f''(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot d(\frac{f(x)}{f'(x)})=\frac{1}{2}[\frac{f(x)}{f'(x)}]^2+c.$$

注　由于 $f(x)$ 的具体表达式未知,故整个积分无法判别其所属类型.此时,往往采用通分、化简、变形,以求解决.

3.第一类换元法(凑微分法)

4.1.35　求 $\int(2x-3)^{10}dx$.

解　原式$=\int\frac{1}{2}(2x-3)^{10}\cdot d(2x-3)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}(2x-3)^{11}+c=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+c.$$

注 对被积函数可不必作二项展开，否则相当麻烦.

4.1.36 求 $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

解 原式 $=\int \sqrt[3]{1-3x}\cdot(-\frac{1}{3})d(1-3x)$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+c=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+c.$$

4.1.37 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{(5x-2)^5}}$.

解 原式 $=\int \frac{1}{5}\cdot\frac{d(5x-2)}{\sqrt{(5x-2)^5}}=\frac{1}{5}\cdot(\frac{-2}{3})(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+c$

$$=-\frac{2}{15\sqrt{(5x-2)^3}}+c.$$

注 对此类无理分式求积分，可采用凑微分法.

4.1.38 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(1+x)}$.

解 原式 $=\int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}dx}{1+x}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+c.$

4.1.39 求 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

解 原式 $=\int \mathrm{sgn}x\cdot\frac{\frac{1}{x^3}dx}{(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}}$

$$=-\frac{1}{2}\int \mathrm{sgn}x\cdot(1+\frac{1}{x^2})^{-\frac{3}{2}}d(1+\frac{1}{x^2})$$

$$=\mathrm{sgn}x\cdot(1+\frac{1}{x^2})^{-\frac{1}{2}}+c=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c.$$

4.1.40 求 $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$.

解 原式 $=\frac{1}{3}\int\frac{x^3\cdot 3x^2dx}{\sqrt{a^3-x^3}}=-\frac{1}{3}\int\frac{x^3\cdot d(a^3-x^3)}{\sqrt{a^3-x^3}}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{a^3 - x^3}{\sqrt{a^3 - x^3}} d(a^3 - x^3) - \frac{a^3}{3}\int \frac{1}{\sqrt{a^3 - x^3}} d(a^3 - x^3)$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(a^3 - x^3)^3} - \frac{2a^3}{3} \cdot \sqrt{a^3 - x^3} + c.$$

4.1.41　求 $\int \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx.$

解　原式 $= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} d(x - \frac{1}{x})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}\right) + c.$$

4.1.42　求 $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx.$

解　原式 $= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} dx$

$$= \int \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} d(x + \frac{1}{x})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + c.$$

4.1.43　求 $\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx.$

解　原式 $= \int \frac{x^4 \cdot (1 - \frac{3}{x^4})}{x \cdot x^8 (1 + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^8})} dx = \int \frac{1 - \frac{3}{x^4}}{1 + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^8}} \cdot \frac{dx}{x^5}$

$$= \int \frac{1 - \frac{3}{x^4}}{(1 + \frac{2}{x^4})(1 + \frac{1}{x^4})} \cdot (-\frac{1}{4} d \frac{1}{x^4})$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{1+\frac{2}{x^4}}-\frac{4}{1+\frac{1}{x^4}}\right)\cdot d(\frac{1}{x^4})$$

$$=-\frac{5}{8}\ln|1+\frac{2}{x^4}|+\ln|1+\frac{1}{x^4}|+c$$

$$=\frac{5}{8}\ln|\frac{x^4}{x^4+2}|-\ln|\frac{x^4}{x^4+1}|+c.$$

4.1.44 求 $\int x^3\cdot\sqrt[3]{1+x^2}dx$.

解 原式 $=\frac{1}{2}\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^2}d(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1]\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]\cdot d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{3}{7}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+c.$$

4.1.45 求 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 原式 $=\int-\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+c.$

4.1.46 求 $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}dx$.

解 原式 $=\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}d(1+x^3)=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+c.$

4.1.47 求 $\int\frac{x^3}{x^8-2}dx$.

解 原式 $=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+c.$$

4.1.48 求 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解　原式 $=\int \dfrac{\frac{1}{2}d(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)\cdot(1+\sqrt{1+x^2})}}$

$$=\int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c.$$

4.1.49　求 $\int \dfrac{x^{14}}{(x^5+1)^4}dx$.

解　原式 $=\int \dfrac{x^{14}\cdot dx}{x^{5\times 4}\cdot(1+x^{-5})^4}=\int \dfrac{dx}{x^6\cdot(1+x^{-5})^4}$

$$=-\frac{1}{5}\int (1+x^{-5})^{-4}\cdot d(1+x^{-5})$$

$$=\frac{1}{15}(1+x^{-5})^{-3}+c.$$

4.1.50　求 $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$.

解　令 $1-5x^2=t$，则 $x^2=\dfrac{1}{5}(1-t)$，

从而 $x^3dx=\dfrac{1}{2}x^2dx^2=\dfrac{-1}{50}(1-t)dt$，故

原式 $=\int \dfrac{-1}{50}(1-t)\cdot t^{10}dt=-\dfrac{1}{550}t^{11}+\dfrac{1}{600}t^{12}+c$

$$=-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}+c.$$

注　有时凑微分形式不易看出，而采用第一类换元法较方便.

4.1.51　求 $\int x^5\cdot(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$.

解　令 $2-5x^3=t$，则 $x^3=\dfrac{1}{5}(2-t)$，从而

$x^5dx=\dfrac{1}{3}x^3d(x^3)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}(2-t)(-\dfrac{1}{5})dt=-\dfrac{1}{75}(2-t)dt.$

故原式 $=-\dfrac{1}{75}\int (2-t)\cdot t^{\frac{2}{3}}\cdot dt=-\dfrac{1}{75}\int (2t^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{5}{3}})dt$

$$=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+c$$

$$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+c.$$

4.1.52　求 $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

解　被积函数的分母可变为

$$x^4+2x^2+5=(x^2+1)^2+4.$$

令 $x^2+1=t$，则 $2xdx=dt$，故

$$\text{原式}=\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{t}{2}+c$$
$$=\frac{1}{4}\text{arctg}\,\frac{x^2+1}{2}+c.$$

4.1.53　求 $\int \frac{x^3}{(3x^2+4)^7}dx$.

解　令 $u=3x^2+4$，则 $x^2=\frac{1}{3}(u-4)$，$xdx=\frac{1}{6}du$，故

$$\text{原式}=\frac{1}{6}\int \frac{\frac{1}{3}(u-4)}{u^7}du=\frac{1}{18}\int\left(\frac{1}{u^6}-\frac{4}{u^7}\right)du$$
$$=\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{u^5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{u^6}\right)+c$$
$$=\frac{1}{27(3x^2+4)^6}-\frac{1}{90(3x^2+4)^5}+c.$$

4.1.54　求 $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1-x}dx$.

解　令 $1-x=t$，则 $x=1-t$，$dx=-dt$，故

$$\text{原式}=\int(1-t)^2\cdot t^{\frac{1}{3}}(-dt)=-\int\left(t^{\frac{1}{3}}-2t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{7}{3}}\right)dt$$
$$=-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}+c$$
$$=\frac{-3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+c.$$

4.1.55　求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解　令 $1-x^2=t$，则 $x^2=1-t$，$x^5dx=\frac{1}{2}(x^2)^2d(x^2)$，故

$$\text{原式}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-t)^2dt=-\frac{1}{2}\int\left(t^{-\frac{1}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$
$$=-t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}+c$$

$$= -\frac{1}{15}(8 + 4x^2 + 3x^4) \cdot \sqrt{1 - x^2} + c.$$

4.1.56　求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2 - x}} dx$.

解　令 $\sqrt{2 - x} = t$，则 $x = 2 - t^2, dx = -2tdt$，故

$$原式 = \int \frac{(2 - t^2)^2}{t}(-2t)dt = -2\int (2 - t^2)^2 dt$$

$$= -2\int (4 - 4t^2 + t^4)dt = -2(4t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5) + c$$

$$= -2\sqrt{2 - x}[4 - \frac{4}{3}(2 - x) + \frac{1}{5}(2 - x)^2] + c.$$

4.1.57　求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 9}}$.

解　令 $t = \sqrt{2x - 9}$，则 $x = \frac{t^2 + 9}{2}, dx = tdt$，故

$$原式 = \int \frac{tdt}{\frac{t^2 + 9}{2} \cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 9}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + c = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x - 9}}{3} + c.$$

4.1.58　求 $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx$.

解　令 $t = \sqrt{1 + x^2}$，则 $x = \sqrt{t^2 - 1}$，$dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}}$，故

$$原式 = \int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1}$$

$$= \int (1 + \frac{1}{t^2 - 1})dt = t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + c$$

$$= \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}\right| + c.$$

4.1.59　求 $\int \frac{xdx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$.

解　令 $t = \sqrt{4 - x^2}$，则 $x = \sqrt{4 - t^2}$，$dx = \frac{-tdt}{\sqrt{4 - t^2}}$，故

$$原式=-\int \frac{\sqrt{4-t^2}}{t^2+t}\cdot\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt$$

$$=-\int\frac{dt}{1+t}=-\ln|1+t|+c$$

$$=-\ln(1+\sqrt{4-x^2})+c.$$

4.1.60 求 $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

解 令 $x^5=t$,则 $5x^4dx=dt, x^4dx=\frac{dt}{5}$,故

$$原式=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sqrt{t^2-2}}=\frac{1}{5}\ln|t+\sqrt{t^2-2}|+c$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x^5+\sqrt{x^{10}-2}|+c.$$

4.1.61 求 $\int(a+bx)^m dx$,其中 $b\neq 0, m$ 为实数.

解 令 $u=a+bx$,则 $x=\frac{u-a}{b}, dx=\frac{du}{b}$,故

$$原式=\int u^m\cdot\frac{1}{b}du=\frac{1}{b}\int u^m du.$$

当 $m=-1$ 时,原式 $=\frac{1}{b}\ln|u|+c=\frac{1}{b}\ln|a+bx|+c$,

当 $m\neq-1$ 时,原式 $=\frac{1}{b(m+1)}u^{m+1}+c=\frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}+c.$

4.1.62 求 $\int x\cdot(a+bx)^m dx$,其中 $b\neq 0, m$ 为实数.

解 令 $u=a+bx$,则 $x=\frac{u-a}{b}, dx=\frac{du}{b}$,故

$$原式=\int\frac{u-a}{b}\cdot u^m\cdot\frac{du}{b}=\frac{1}{b^2}\int(u^{m+1}-au^m)du$$

当 $m=-2$ 时,原式 $=\frac{1}{b^2}(\ln|u|+au^{-1})+c$

$$=\frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx|+\frac{a}{a+bx}\right)+c.$$

当 $m=-1$ 时,原式 $=\frac{1}{b^2}(u-a\ln|u|)+c$

$$= \frac{1}{b^2}[(a+bx) - a\ln|a+bx|] + c.$$

当 $m \neq -1$，且 $m \neq -2$ 时，

$$原式 = \frac{1}{b^2}[\frac{1}{m+2}u^{m+2} - \frac{a}{m+1}u^{m+1}] + c$$

$$= \frac{1}{b^2}[\frac{(a+bx)^{m+2}}{m+2} - \frac{a(a+bx)^{m+1}}{m+1}] + c.$$

4.1.63　求 $\int x^n \cdot (a+bx)^m dx$. 其中 $b \neq 0$，n 为正整数.

解　令 $u = a + bx$，则 $x = \frac{u-a}{b}$，$dx = \frac{du}{b}$，故

$$原式 = \int \frac{(u-a)^n}{b^n} \cdot u^m \frac{du}{b} = \frac{1}{b^{n+1}} \int u^m \cdot (u-a)^n du.$$

注　将上式中的 $(u-a)^n$ 按二项式展开，再逐项积分.

4.1.64　求 $\int \frac{x^n}{(a+bx)^m}dx$，其中 $b \neq 0$，n 为非负整数.

解　令 $u = a + bx$，则 $x = \frac{u-a}{b}$，$dx = \frac{du}{b}$.

$$原式 = \int \frac{(u-a)^n}{b^n} \cdot \frac{1}{u^m} \cdot \frac{du}{b} = \frac{1}{b^{n+1}} \int \frac{(u-a)^n}{u^m} du$$

注　将上式中的 $(u-a)^n$ 按二项式展开，再逐项积分.

4.1.65　求 $\int \frac{dx}{x^n \cdot (a+bx)^m}$，其中 $a \neq 0$，m 与 n 为大于 1 的整数.

解　令 $u = \frac{a+bx}{x}$，则 $x = \frac{a}{u-b}$，$dx = -\frac{adu}{(u-b)^2}$，故

$$原式 = \int \frac{(u-b)^{n+m}}{a^{n+m}} \cdot \frac{1}{u^m}[-\frac{adu}{(u-b)^2}]$$

$$= -\frac{1}{a^{n+m-1}} \int \frac{(u-b)^{n+m-2}}{u^m} du.$$

注　将上式中的 $(u-b)^{n+m-2}$ 按二项式展开，再逐项积分.

4.1.66　求 $\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^m}$. 其中 $b \neq 0$，m 为正整数.

解　令 $u = x^2$，则 $du = 2xdx$，故

$$原式 = \int \frac{\frac{1}{2}du}{(a+bu)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(a+bu)^m} = \frac{1}{2b}\int \frac{d(a+bu)}{(a+bu)^m}$$

$$= \frac{1}{2b(1-m)} \cdot \frac{1}{(a+bu)^{m-1}} + c$$

$$= \frac{1}{2b(1-m)\cdot(a+bx^2)^{m-1}} + c.$$

4.1.67 求 $\int (2\sin\frac{x}{2}+3)^2 \cdot \cos\frac{x}{2}dx$.

解法 1 令 $t = 2\sin\frac{x}{2} + 3$，则 $\cos\frac{x}{2}dx = dt$，故

原式 $= \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}(2\sin\frac{x}{2}+3)^3 + c.$

解法 2 采用凑微分法，有

原式 $= \int (2\sin\frac{x}{2}+3)^2 d(2\sin\frac{x}{2})$

$$= \int (2\sin\frac{x}{2}+3)^2 d(2\sin\frac{x}{2}+3)$$

$$= \frac{1}{3}(2\sin\frac{x}{2}+3)^3 + c.$$

4.1.68 求 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

解 原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\mathrm{tg}^2 x + 2} = \int \frac{d(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}} + c.$

4.1.69 求 $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

解 原式 $= \int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot(\mathrm{tg}x+1)^2} = \int \frac{d(\mathrm{tg}x+1)}{(\mathrm{tg}x+1)^2} = \frac{-1}{\mathrm{tg}x+1} + c.$

4.1.70 求 $\int \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

解 原式 $= \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}d(\sin x) = \int (1 - \frac{1}{1+\sin^2 x})d(\sin x)$

$$= \sin x - \mathrm{arctg}(\sin x) + c.$$

4.1.71 求 $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$.

解 原式 $= \int \frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx = \sqrt{2}\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})$

$$= \sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

4.1.72 求 $\int \frac{\operatorname{tg}x\cos^6 x}{\sin^4 x}dx$.

解 原式 $= \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}d(\sin x)$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{2}{\sin x} + \sin x\right)d(\sin x)$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{1}{2}\sin^2 x + c.$$

4.1.73 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}$.

解 原式 $= \int \sqrt[4]{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{\cos x}{\sin x}}} \cdot \frac{dx}{\frac{\cos x}{\sin x}\sin^2 x}$

$$= -\int (\operatorname{ctg}x)^{-\frac{5}{4}}d(\operatorname{ctg}x) = \frac{4}{\sqrt[4]{\operatorname{ctg}x}} + c = 4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x} + c.$$

4.1.74 求 $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx$.

解 原式 $= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x - \cos x)$

$$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1 - \sin 2x} + c.$$

4.1.75 求 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}dx$.

解 当 $|a| = |b| \neq 0$ 时,有

原式 $= \frac{1}{|a|}\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2|a|} \cdot \sin^2 x + c$;

当 $|a| \neq |b|$ 时,有

原式 $= \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 x + b^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 x + b^2}}$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2}\sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 x + b^2} + c$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} + c.$$

4.1.76 求 $\int \frac{\ln tgx}{\sin x\cos x}dx$.

解 原式 $=\int \ln tgx \cdot tgx \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \ln ctgx \cdot \frac{1}{ctgx} \cdot \csc^2 x dx$

$=\int \ln ctgx \cdot \frac{1}{ctgx}d(ctgx) = \int \ln ctgx \cdot d(\ln ctgx)$

$=\frac{1}{2}(\ln ctgx)^2 + c = \frac{1}{2}(\ln tgx)^2 + c.$

4.1.77 求 $\int \sqrt{1+\sin x}dx$.

解 原式 $=\int \sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}dx = \sqrt{2}\int \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})dx$

$=-2\sqrt{2}\int \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})d(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$

$=-2\sqrt{2}\cdot \sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + c$

$=-2\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)} + c = -2\sqrt{1-\sin x} + c.$

4.1.78 求 $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

解 原式 $=\int -\sin\frac{1}{x}d(\frac{1}{x}) = \cos(\frac{1}{x}) + c.$

4.1.79 求 $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}dx$.

解 令 $\sin x = t$，则

$\cos^5 x dx = \cos^4 x \cdot \cos x dx = (1-\sin^2 x)^2 d\sin x = (1-t^2)^2 dt$，故

原式 $=\int (1-t^2)^2 \cdot t^{\frac{1}{2}}dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}})dt$

$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} + c$

$=(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x)\sqrt{\sin x} + c.$

4.1.80 求 $\int \frac{\sin x\cdot\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

解 令 $\cos^2 x = t$，则 $\sin x\cos x dx = -\frac{1}{2}dt$，故

原式 $=\int -\frac{1}{2}\cdot\frac{tdt}{1+t} = -\frac{1}{2}\int (1-\frac{1}{1+t})dt$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) + c.$$

4.1.81　求 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

解　令 $\mathrm{tg}x = t$，则$\frac{dx}{\cos^4 x} = \sec^4 x dx = (1+t^2)dt$，故

$$\text{原式} = \int t^2(1+t^2)dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^5 + c$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + c.$$

4.1.82　求 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}.$

解　令 $t = \cos x$，则 $x = \arccos t$，$\sin x = \sqrt{1-t^2}$，

$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\text{原式} = \int \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}{(2+t)\sqrt{1-t^2}} = -\int \frac{dt}{(2+t)(1-t^2)}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{2+t} - \frac{\frac{1}{2}}{1+t} - \frac{\frac{1}{6}}{1-t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|2+t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{6}\ln|1-t| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2+\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + c$$

$$= \ln\frac{\sqrt[3]{2+\cos x}\cdot\sqrt[6]{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} + c.$$

注　上述三角函数有理式求不定积分，由于满足条件 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$，故不用“万能代换”，而用上面的变换，令 $t = \cos x$，比较方便.

4.1.83　求 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}.$

解 令 $t=\cos^2x$，则 $-2\cos x\sin x dx=dt$，即 $\sin 2x dx=-dt$，故

$$原式=\int\frac{-dt}{\sqrt{3-t^2}}=-\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+c=-\arcsin\frac{\cos^2x}{\sqrt{3}}+c.$$

4.1.84 求 $\int\frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx.$

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt$，故

$$原式=\int\frac{(\sin t+\cos t)\cdot 2t}{t\sin 2t}dt=\int\frac{\sin t+\cos t}{\sin t\cdot\cos t}dt=\int(\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t})dt$$
$$=\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|+\ln|\csc t-\mathrm{ctg}t|+c$$
$$=\ln|\sec\sqrt{x}+\mathrm{tg}\sqrt{x}|+\ln|\csc\sqrt{x}-\mathrm{ctg}\sqrt{x}|+c.$$

4.1.85 求 $\int\frac{1}{e^x+1}dx.$

解 $$原式=\int(1-\frac{e^x}{e^x+1})dx=x-\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}$$
$$=x-\ln(e^x+1)+c.$$

4.1.86 求 $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$

解 $$原式=\int(\frac{2e^x}{e^x+1}-1)dx=2\ln(e^x+1)-x+c.$$

4.1.87 求 $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx.$

解 $$原式=\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1}=\mathrm{arctg}e^x+c.$$

4.1.88 求 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$

解 $$原式=\int\frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int\frac{dx}{1+e^x}-\int\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$
$$=\int(1-\frac{e^x}{1+e^x})dx-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$
$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+c.$$

4.1.89 求 $\int e^{2x^2+\ln x}dx.$

解 $$原式=\int e^{2x^2}\cdot e^{\ln x}dx=\int e^{2x^2}\cdot xdx=\int\frac{1}{4}e^{2x^2}d(2x^2)$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x^2} + c.$$

4.1.90　求 $\int x \cdot e^{-x^2} dx$.

解　原式 $= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$.

4.1.91　求 $\int \frac{dx}{(1 + 6e^{2x} + 9e^{4x})^{1/2}}$.

解　$\frac{1}{(1 + 6e^{2x} + 9e^{4x})^{1/2}} = \frac{1}{[(1 + 3e^{2x})^2]^{1/2}} = \frac{1}{1 + 3e^{2x}}$，故

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{1 + 3e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x})}{e^{2x}(1 + 3e^{2x})}\ (\text{记}\ t = e^{2x})$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(1 + 3t)} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{t} - \frac{3}{1 + 3t})dt$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|t| - \ln|1 + 3t|) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln e^{2x} - \frac{1}{2}\ln(1 + 3e^{2x}) + c$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln(1 + 3e^{2x}) + c.$$

4.1.92　求 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1 + e^x}} dx$.

解　令 $t = \sqrt[4]{1 + e^x}$，则 $x = \ln(t^4 - 1)$，$dx = \frac{4t^3}{t^4 - 1}dt$，故

$$\text{原式} = \int \frac{(t^4 - 1)^2 \cdot 4t^3}{t(t^4 - 1)}dt = 4\int (t^6 - t^2)dt$$

$$= \frac{4}{7}t^7 - \frac{4}{3}t^3 + c$$

$$= \frac{4}{7}(1 + e^x) \cdot \sqrt[4]{(1 + e^x)^3} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{(1 + e^x)^3} + c$$

$$= (\frac{4}{7} + \frac{4}{7}e^x - \frac{4}{3})\sqrt[4]{(1 + e^x)^3} + c$$

$$= \frac{4}{21}(3e^x - 4) \cdot \sqrt[4]{(1 + e^x)^3} + c.$$

注　当凑微分不方便时，可采用对根式的变量代换等方法.

4.1.93　求 $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx$.

解 令 $t = e^x$, 则 $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$,故

$$\text{原式} = \int \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt = \int (1 - \frac{1}{1+t}) dt$$
$$= t - \ln|1+t| + c = e^x - \ln(1+e^x) + c.$$

4.1.94 求 $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}$.

解 令 $t = e^{\frac{x}{6}}$,则 $x = 6\ln t$, $dx = \frac{6dt}{t}$,故

$$\text{原式} = 6\int \frac{1}{1+t^2+t} \cdot \frac{1}{t} dt = 6\int (\frac{1}{t} - \frac{t+1}{t^2+t+1}) dt$$
$$= 6\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{(2t+1)+1}{t^2+t+1} dt$$
$$= 6\ln|t| - 3\ln|t^2+t+1| - 3\int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$
$$= 6\ln|t| - 3\ln(t^2+t+1) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$$
$$= 6\ln e^{\frac{x}{6}} - 3\ln(e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}} + 1) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{2e^{\frac{x}{6}}+1}{\sqrt{3}}) + c$$
$$= x - \ln(e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}} + 1)^3 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(\frac{2e^{\frac{x}{6}}+1}{\sqrt{3}}) + c.$$

4.1.95 求 $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 5} dx$.

解 令 $e^{2x} = t$,则 $2e^{2x}dx = dt$,故

$$\text{原式} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2 - 5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + c$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right| + c.$$

4.1.96 求 $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

解 令 $2^x = t$,则 $4^x = t^2$, $2^x dx = \frac{dt}{\ln 2}$,故

原式$=\dfrac{dt}{\ln 2\cdot\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{1}{\ln 2}\arcsin t+c=\dfrac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x+c.$

4.1.97 求$\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

解法 1 令$t=\sqrt{1+e^x}$,则$x=\ln(t^2-1)$, $dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1}$,故

$$原式=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+c.$$

解法 2 令$u=1+e^x$,则$x=\ln(u-1)$,$dx=\dfrac{du}{u-1}$,故

$$原式=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{u-1}=2\int\frac{d\sqrt{u}}{u-1}=2\int\frac{d(\sqrt{u})}{(\sqrt{u})^2-1}$$

$$=\int(\frac{1}{\sqrt{u}-1}-\frac{1}{\sqrt{u}+1})d(\sqrt{u})$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1}\right|+c=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+c.$$

4.1.98 求$\int\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

解 $\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$, 令$t=e^x$,则$x=\ln t$,$dx=\dfrac{dt}{t}$,

$$原式=\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int\frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}-\int\frac{dt}{t\cdot\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}-\int\frac{dt}{t^2\cdot\sqrt{1-(\frac{1}{t})^2}}$$

$$= \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + \int \frac{d(\frac{1}{t})}{\sqrt{1 - (\frac{1}{t})^2}}$$

$$= \ln(t + \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin(\frac{1}{t}) + c$$

$$= \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin(e^{-x}) + c.$$

4.1.99 求 $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

解 令 $t = \sqrt{e^x - 1}$，则 $x = \ln(1 + t^2), dx = \frac{2tdt}{1 + t^2}$，故

$$原式= \int t \cdot \frac{2t}{1 + t^2}dt = 2\int (1 - \frac{1}{1 + t^2})dt = 2(t - \text{arctg}t) + c$$

$$= 2(\sqrt{e^x - 1} - \text{arctg}\sqrt{e^x - 1}) + c.$$

4.1.100 求 $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$.

解 令 $e^{\frac{x}{2}} = t$，则 $e^x = t^2, dx = \frac{2dt}{t}$，故

$$原式= 2\int \frac{\frac{dt}{t}}{t + t^2} = 2\int (\frac{1 - t}{t^2} + \frac{1}{1 + t})dt$$

$$= -\frac{2}{t} - 2\ln t + 2\ln(1 + t) + c$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2\ln(1 + e^{\frac{x}{2}}) + c.$$

4.1.101 求 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}dx$.

解 令 $1 + \ln x = t$，则

$$\frac{\ln x dx}{x} = (1 + \ln x - 1)d(1 + \ln x) = (t - 1)dt，故$$

$$原式= \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot (t - 1)dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}(\ln x - 1)\sqrt{1 + \ln x} + c.$$

4.1.102 求 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

解　原式$=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x\cdot\ln(\ln x)}=\int\frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)}=\ln|\ln(\ln x)|+c.$

4.1.103　求$\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx.$

解　令$t=2\ln x+3$,则$\ln x=\frac{t-3}{2}$, $\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dt$,故

$$\text{原式}=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{8}t^4+c=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+c.$$

4.1.104　求$\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx.$

解　原式$=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$$
$$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+c.$$

4.1.105　求$\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

解

原式$=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}\cdot d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]^2+c.$

4.1.106　求$\int\frac{dx}{\text{sh}x}.$

解　原式$=\int\frac{dx}{2\text{sh}\frac{x}{2}\cdot\text{ch}\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{1}{2\text{ch}^2\frac{x}{2}}}{\text{th}\frac{x}{2}}dx=\int\frac{d(\text{th}\frac{x}{2})}{\text{th}\frac{x}{2}}$

$$=\ln|\text{th}\frac{x}{2}|+c.$$

4.1.107　求$\int\frac{dx}{\text{ch}x}.$

解　原式$=\int\frac{2}{e^x+e^{-x}}dx=2\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=2\int\frac{de^x}{1+(e^x)^2}$

$$= 2\text{arctg}(e^x) + c.$$

4.1.108 求 $\int \frac{\text{sh}x \cdot \text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^4x + \text{ch}^4x}}dx.$

解法 1 原式 $= \int \frac{\text{sh}x \cdot \text{ch}x}{\sqrt{\frac{1 + \text{ch}^2 2x}{2}}}dx = \int \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{sh}2x}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 2x}}dx$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d(\text{ch}2x)}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 2x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\text{ch}2x + \sqrt{1 + \text{ch}^2 2x}| + c.$$

注 应用双曲函数公式,有

$$\text{sh}^4x + \text{ch}^4x = (\text{sh}^2x + \text{ch}^2x)^2 - 2\text{sh}^2x \cdot \text{ch}^2x$$

$$= \text{ch}^2 2x - \frac{1}{2}\text{sh}^2 2x = \frac{1 + \text{ch}^2 2x}{2}.$$

解法 2 原式 $= \frac{1}{2} \int \frac{d\text{sh}^2x}{\sqrt{\text{sh}^4x + (1 + \text{sh}^2x)^2}}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\text{sh}^2x}{\sqrt{2\text{sh}^4x + 2\text{sh}^2x + 1}} \qquad (\text{令 } u = \text{sh}^2x)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{2u^2 + 2u + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|u + \frac{1}{2} + \sqrt{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\text{sh}^2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\text{sh}^4x + \text{ch}^4x}| + c.$$

4.1.109 求 $\int \frac{dx}{\text{sh}x \cdot \text{ch}x}.$

解 原式 $= \int \frac{1}{\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} \cdot \text{ch}^2x}dx = \int \frac{1}{\text{th}x}d(\text{th}x) = \ln|\text{th}x| + c.$

4.1.110 求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$

解 令 $v = \sqrt{x}$，则 $dv = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$，故

$$原式 = 2\int \frac{\arcsin v}{\sqrt{1-v^2}}dv = 2\int \arcsin v d(\arcsin v)$$

$$= (\arcsin v)^2 + c = (\arcsin \sqrt{x})^2 + c.$$

4.1.111 求 $\int \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

解 令 $\text{arctg}\sqrt{x} = t$，则 $\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$，故

$$原式 = \int 2tdt = t^2 + c = (\text{arctg}\sqrt{x})^2 + c.$$

4. 第二类换元法

4.1.112 求 $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}dx}$.

解 被积函数的定义域为 $-1 < x < 1$，且 $x \neq 0$，故令 $x = \sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，且 $t \neq 0$，则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，$dx = \cos tdt$，故

$$原式 = \int \frac{\sin t + 2}{\sin^2 t \cdot \cos t} \cdot \cos tdt = \int \frac{dt}{\sin t} + 2\int \frac{dt}{\sin^2 t}$$

$$= \ln|\csc t - \text{ctg}t| - 2\text{ctg}t + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - 2\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c.$$

注 对于此类无理式，可采用三角代换.

4.1.113 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $(a > 0)$.

解法 1 $$原式 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} = \int \frac{d(x-a)}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) + c.$$

解法 2 由于 $\frac{1}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$，被积函数的定义域为 $0 < x < 2a$，故令 $x - a = a\cos t$，且限制 $0 < t < \pi$，则 $\sqrt{2ax - x^2} =$

$a\sin t, dx = -a\sin t dt$,故

$$原式 = \int \frac{1}{a \cdot \sin t}(-a\sin t)dt = -\int dt = -t + c$$

$$= -\arccos\left(\frac{x-a}{a}\right) + c.$$

4.1.114 求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}dx$.

解 由于 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}$,被积函数的定义域为 $0 < x < 2a$,故令 $x - a = a\sin\theta$,则 $x = a(1+\sin\theta)$, $\sqrt{2ax - x^2} = a\cos\theta, x^2 = a^2(1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta), dx = a\cos\theta d\theta$,故

$$原式 = \int \frac{a^2(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)}{a\cos\theta} \cdot a\cos\theta d\theta$$

$$= a^2\int (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)d\theta$$

$$= a^2\theta - 2a^2\cos\theta + a^2\int \frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$= a^2\theta - 2a^2\cos\theta + \frac{a^2}{2}\theta - \frac{a^2}{4}\sin2\theta + c$$

$$= \frac{3}{2}a^2\theta - 2a^2\cos\theta - \frac{a^2}{4}\sin2\theta + c$$

$$= \frac{3}{2}a^2\theta - a^2(2\cos\theta + \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{2}) + c$$

$$= \frac{3}{2}a^2\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) - $$

$$- a^2\left[\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{a} + \frac{\frac{x-a}{a} \cdot \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}}{2}\right] + c$$

$$= \frac{3}{2}a^2\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right) - \frac{(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}}{2} + c.$$

4.1.115 求 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

解 被积函数的定义域为 $-\infty < x < +\infty$,故令 $x = \operatorname{tg}t$,且限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$,则 $(x^2+1)^2 = \sec^4 t, dx = \sec^2 t dt$,故

$$原式=\int\frac{\sec^2tdt}{(\mathrm{tg}^2t+1)^2}=\int\cos^2tdt=\frac{1}{2}\int(1+\cos2t)dt$$
$$=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin2t)+c=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+c.$$

4.1.116　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

解　被积函数的定义域为 $-\infty<x<+\infty$,故令 $x=a\mathrm{tg}t$,且限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则 $(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3t,dx=a\sec^2tdt$,故

$$原式=\int\frac{a\sec^2t}{a^3\sec^3t}dt=\frac{1}{a^2}\int\cos tdt=\frac{\sin t}{a^2}+c=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+c.$$

4.1.117　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

解　被积函数的定义域为 $-1<x<1$,故令 $x=\sin t$,且限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{t}{2}$,则 $\sqrt{(1-x^2)^3}=\cos^3t,dx=\cos tdt$,故

$$原式=\int\frac{dt}{\cos^2t}=\int\sec^2tdt=\mathrm{tg}t+c$$
$$=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2t}}+c=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c.$$

4.1.118　求 $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$.

解　被积函数的定义域为 $|x|>\sqrt{2}$,

(1) 当 $x>\sqrt{2}$ 时,令 $x=\sqrt{2}\sec t$,且 $0<t<\frac{\pi}{2}$,则

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{2\sec^2t}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t},dx=\sqrt{2}\sec t\cdot\mathrm{tg}tdt$,故

$$原式=2\int\sec^3tdt=2\int\frac{d\sin t}{(1-\sin^2t)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{(1+\sin^2t)^2}+\frac{2}{1-\sin^2t}+\frac{1}{(1-\sin t)^2})d\sin t$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+c$$
$$=\mathrm{tg}t\cdot\sec t+\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|+c$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+c,$$

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$ 时，令 $x=\sqrt{2}\sec t$，但 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$，故 $\sec t+\operatorname{tg}t<0$，同理得

$$\text{原式}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+c,$$

总之，当 $|x|>\sqrt{2}$ 时，

$$\text{原式}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+c.$$

4.1.119 求 $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx.$

解法1

$$\text{原式}=\int\frac{(x-2)+4}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx+\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+3)}{\sqrt{x^2-4x+3}}+4\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$$

$$=\sqrt{x^2-4x+3}+4\ln[x-2+\sqrt{x^2-4x+3}]+c.$$

注 这里使用了公式 $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\ln(u+\sqrt{u^2-1})+c.$

解法2 $x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，令 $x-2=\sec t$，则 $dx=\operatorname{tg}t\sec t dt$，故

$$\text{原式}=\int\frac{\sec t+4}{\sqrt{\sec^2 t-1}}\cdot\operatorname{tg}t\sec t dt=\int(\sec^2 t+4\sec t)dt$$

$$=\operatorname{tg}t+4\ln(\sec t+\operatorname{tg}t)+c$$

$$=\sqrt{x^2-4x+3}+4\ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+3})+c.$$

4.1.120 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x}}.$

解 由于

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x}}=\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2-1}},$$

令 $2x+1=\sec\theta$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，或 $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，故

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{d\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{1}{2}\int\frac{\operatorname{tg}\theta\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\sec\theta d\theta=\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln|(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x}|+c.$$

4.1.121　求 $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx\ (a>0)$.

解　被积函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 2a$，故设 $x=2a\sin^2t$，且限制 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $x\cdot\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=2a\sin^2t\cdot\sqrt{\frac{\sin^2t}{1-\sin^2t}}=\frac{2a\sin^3t}{\cos t}$，

$dx=4a\sin t\cos tdt$，故

$$\text{原式}=\int\frac{2a\sin^3t}{\cos t}\cdot 4a\sin t\cos tdt=8a^2\int\sin^4tdt$$

$$=8a^2\left(\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)+c$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-2a^2\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x\cdot(2a-x)}$$

$$+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{2(a-x)}{a^2}\cdot\sqrt{x\cdot(2a-x)}+c$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\cdot\sqrt{x(2a-x)}+c.$$

注　这里使用了公式

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{2a}}=\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)},$$

$$\sin 4t=2\sin 2t\cos t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2t)$$

$$=\frac{2(a-x)}{a^2}\cdot\sqrt{x(2a-x)}.$$

4.1.122　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

解　不妨设 $a<b$，被积函数的定义域为 $a<x<b$，故令

$$x-a=(b-a)\sin^2t，且限制\ 0<t<\frac{\pi}{2}，则$$

$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t\cos t, dx=2(b-a)\sin t\cos t dt$,

$$原式=\int\frac{1}{(b-a)\sin t\cos t}\cdot 2(b-a)\sin t\cos t dt$$

$$=\int 2dt=2t+c=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+c.$$

4.1.123 求 $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$.

解 同上题，令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$，且限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$，则

$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t\cos t, dx=2(b-a)\sin t\cos t dt$，故

$$原式=\int(b-a)\sin t\cos t\cdot 2(b-a)\sin t\cos t dt$$

$$=2(b-a)^2\int\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^2 2t dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)dt=\frac{(b-a)^2}{4}(t-\frac{\sin 4t}{4})+c$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$+\frac{2x-a-b}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+c.$$

4.1.124 求 $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\ (a>0)$.

解 被积函数的定义域为 $-\infty<x<+\infty$，故令 $x=a\cdot\mathrm{sh}t$，则

$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=a\frac{\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}t}, dx=a\mathrm{ch}t dt$，故

$$原式=a^2\int\mathrm{sh}^2 t dt=a^2(\frac{1}{4}\mathrm{sh}^2 t-\frac{t}{2})+c_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.$$

注 这里根据被积函数的特殊形式采用了双曲代换.

4.1.125 求 $\int\sqrt{a^2+x^2}dx\ (a>0)$.

解法1 被积函数的定义域为 $-\infty<x<+\infty$，令 $x=a\mathrm{sh}t$，则

$\sqrt{a^2+x^2}=a\mathrm{ch}t, dx=a\mathrm{ch}t dt$，故

$$原式 = a^2\int \text{ch}^2 t dt = a^2(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\text{sh}2t) + c_1.$$

注意到 $x + \sqrt{a^2+x^2} = a(\text{sh}t + \text{ch}t) = ae^t$，则 $t = \ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，又

$\text{sh}2t = 2\text{sh}t \cdot \text{ch}t = \frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}$，故得

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + c.$$

解法 2　令 $x = a\text{tg}t$，则 $\sqrt{a^2+x^2} = a\cdot\sec t$，$dx = a\cdot\sec^2 t dt$，故

$$\begin{aligned}原式 &= \int a\sec t \cdot a\sec^2 t dt = a^2\int \sec^3 t dt \\ &= \frac{a^2}{2}[\sec t\cdot \text{tg}t + \ln(\sec t + \text{tg}t)] + c \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\cdot\frac{x}{a} + \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right)\right] + c \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + c.\end{aligned}$$

注　这里利用了由分部积分法导出的 $\int \sec^3 x dx$ 的公式.

4.1.126　求 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ $(a>0)$.

解法 1　被积函数的定义域为 $-a \leqslant x \leqslant a$，故设 $x = a\sin t$，且限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}$，　$dx = a\cos t dt$，故

$$\begin{aligned}原式 &= \int\frac{1+\sin t}{\cos t}\cdot a\cos t dt = a\int(1+\sin t)dt \\ &= a(t-\cos t) + c = a\cdot\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + c.\end{aligned}$$

解法 2　采用化简分项法，有

$$\begin{aligned}原式 &= \int\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\cdot\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}}dx = \int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\ &= \int\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx\end{aligned}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= a \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2} + c.$$

4.1.127 求 $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx \ (a>0)$.

解法 1 被积函数的定义域为 $x>a$ 或 $x<-a$,

(1) 当 $x>a$ 时,令 $x=a\text{ch}t$,且限制 $t>0$,则

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\text{ch}t-1}{\text{sh}t},\ dx = a\cdot \text{sh}t dt,$$

$$原式 = \int a(\text{ch}t-1)dt = a\text{sh}t - at + c_1$$

$$= a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} - a\cdot\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\frac{x}{a}\right) + c_1$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\cdot\ln\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right) + c_2$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}\right) + c.$$

(2) 当 $x<-a$ 时,令 $x=-a\text{ch}t$,且限制 $t>0$,则

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\text{ch}t+1}{\text{sh}t},\quad dx = -a\cdot\text{sh}t dt,$$

$$原式 = -\int a(\text{ch}t+1)dt = -a\cdot\text{sh}t - at + c_1$$

$$= -a\sqrt{\left(\frac{-x}{a}\right)^2-1} - a\cdot\ln\left(\sqrt{\left(\frac{-x}{a}\right)^2-1}-\frac{x}{a}\right) + c_1$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - a\cdot\ln\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right) + c_2$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - 2a\cdot\ln\left(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}\right) + c,$$

总之,当 $|x|>a$ 时,

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx = \text{sgn}x\cdot\sqrt{x^2-a^2}$$
$$- 2a\cdot\ln\left(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|}\right) + c.$$

解法 2 原式 $= \int \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\cdot\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}dx = \int\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

$$= \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1)}} dx$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1} \right| + c_1$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c.$$

4.1.128　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

解　不妨设 $0 < a < b$，被积函数的定义域为 $x > -a$ 及 $x < -b$.

(1) 当 $x > -a$ 时，令 $x + a = (b - a)\mathrm{sh}^2 t$，且限制 $t > 0$，则 $x + b = x + a + b - a = (b - a)\mathrm{ch}^2 t$,

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a)\mathrm{sh}t \cdot \mathrm{ch}t,\ dx = 2(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t dt,$$

$$原式 = \int 2dt = 2t + c_1,$$

又　$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{b-a}(\mathrm{sh}t + \mathrm{ch}t) = \sqrt{b-a} \cdot e^t$,

所以　$t = \ln(\frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}})$

$$= \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) - \frac{1}{2}\ln(b-a).$$

于是，原式 $= 2\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + c$.

(2) 当 $x < -b$ 时，令 $x + b = (a - b)\mathrm{sh}^2 t$，且限制 $t > 0$，则

$$\sqrt{(x+a)(x+b)} = (b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t,\ dx = -2(b-a)\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t dt.$$

故　$原式 = -\int 2dt = -2t + c_1$

$$= -2\ln\left(\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}\right) + c.$$

综上所述

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$

$$=\begin{cases}2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+c, & \text{若 } x+a>0 \text{ 且 } x+b>0;\\ -2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})+c. & \text{若 } x+a<0 \text{ 且 } x+b<0.\end{cases}$$

4.1.129 求 $\int\sqrt{(x+a)(x+b)}dx$.

解 与上题同，设 $0<a<b$，被积函数的定义域为 $x>-a$ 及 $x<-b$，

(1) 当 $x>-a$ 时，令 $x+a=(b-a)\text{sh}^2t$，且限制 $t>0$，则

$$\text{原式}=\int(b-a)\text{sh}t\text{ch}t\cdot 2(b-a)\text{sh}t\text{ch}tdt$$

$$=2(b-a)^2\int\text{sh}^2t\text{ch}^2tdt=\frac{1}{4}(b-a)^2\int(\text{ch}4t-1)dt$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{\text{sh}4t}{4}-t\right)+c_1$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2[\text{sh}t\text{ch}t(1+2\text{sh}^2t)-t]+c_1$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}}(1+2\cdot\frac{x+a}{b-a})-\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})\right]+c$$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+c.$$

(2) 当 $x<-b$ 时，令 $x+b=(a-b)\text{sh}^2t$，且限制 $t>0$，则

$$\text{原式}=-\int 2(b-a)^2\text{sh}^2t\text{ch}^2tdt=-2(b-a)^2\int\text{sh}^2t\text{ch}^2tdt$$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-b})+c.$$

总之，$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}dx$

$$
=\begin{cases}\dfrac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} \\ \qquad -\dfrac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+c, \\ \qquad\qquad \text{若 } x+a>0,\text{及 } x+b>0; \\ \dfrac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} \\ \qquad +\dfrac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+c. \\ \qquad\qquad \text{若 } x+a<0,\text{及 } x+b<0.\end{cases}
$$

5. 用倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 求积分

令 $x=\frac{1}{t}$，叫做倒代换，它也是在求积分中比较常用的一种方法，尤其是对某些类型的求积分问题，比如当被积函数的分子为1，分母为较高次数的多项式时，往往采用倒代换将被积式化为假分式，然后再分项积分.

4.1.130　求 $\int\frac{1}{x(1+x^4)}dx$.

解　作倒代换 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，故

$$
\text{原式}=-\int\frac{t^3}{1+t^4}dt=-\frac{1}{4}\ln(1+t^4)+c
$$

$$
=-\frac{1}{4}\ln(\frac{1+x^4}{x^4})+c.
$$

4.1.131　求 $\int\frac{1}{x(x^6+4)}dx$.

解　作倒代换 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，故

$$
\text{原式}=-\int\frac{t^5}{1+4t^6}dt=-\frac{1}{24}\int\frac{d(1+4t^6)}{1+4t^6}
$$

$$
=-\frac{1}{24}\ln(1+4t^6)+c=-\frac{1}{24}\ln\left(1+\frac{4}{x^6}\right)+c.
$$

4.1.132　求 $\int\frac{dx}{x^8(1+x^2)}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，

$$原式=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{(\frac{1}{t})^8(1+\frac{1}{t^2})}=-\int\frac{t^8dt}{1+t^2}$$

$$=-\int(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2})dt$$

$$=-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\operatorname{arctg}t+c$$

$$=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+c.$$

4.1.133 求 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，故

$$原式=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}-4}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+3t-4t^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(\frac{5}{8})^2-(t-\frac{3}{8})^2}}=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{t-\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}+c$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}+c=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{8-3x}{5x}+c.$$

4.1.134 求 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，故

$$原式=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{2-2t+t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{(2t-2)dt}{\sqrt{2-2t+t^2}} - \int\frac{dt}{\sqrt{1+(t-1)^2}}$$

$$= -\sqrt{2-2t+t^2} - \ln\left|t-1+\sqrt{2-2t+t^2}\right| + c$$

$$= -\sqrt{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} - \ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right| + c$$

$$= -\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} - \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}\right| + c.$$

4.1.135　求 $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，故

$$\text{原式} = \int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int\frac{t^3dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

又令 $u=\sqrt{1+t^2}$，则 $t=\sqrt{u^2-1}$，$dt=\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}$，故

$$\text{原式} = -\int\frac{(u^2-1)\cdot\sqrt{u^2-1}}{u}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}du$$

$$= -\int(u^2-1)du = -\int u^2du + \int du = -\frac{u^3}{3}+u+c$$

$$= -\frac{\sqrt{(1+t^2)^3}}{3} + \sqrt{1+t^2} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

4.1.136　求 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，则

$$\text{原式} = \int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\arcsin t + c = -\arcsin\frac{1}{x} + c.$$

4.1.137 计算积分 $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

解 令 $x = \frac{1}{t}$,则

$$原式 = -\int \frac{t^5 dt}{(2t^3+1)^{5/3}} = -\frac{1}{6}\int \frac{t^3 d(2t^3+1)}{(2t^3+1)^{5/3}}$$

$$= -\frac{1}{12}\int \frac{2t^3+1-1}{(2t^3+1)^{5/3}} d(2t^3+1)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x} + \frac{x^2}{2(2+x^3)^{2/3}}\right] + c$$

$$= -\frac{4+3x^4}{8x(2+x^3)^{2/3}} + c.$$

4.1.138 计算 $\int \frac{dx}{ax^n + bx}$,其中 n 为自然数,a、b 为常数.

解 这是用倒代换的典型例题,用代换 $x = \frac{1}{t}$ 后,题目显得简单.

$$原式 = \int \frac{1}{a\frac{1}{t^n} + b\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{t^{n-2}}{a + bt^{n-1}} dt$$

$$= -\frac{1}{(n-1)b}\int \frac{d(a+bt^{n-1})}{a+bt^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)b}\ln|a+bt^{n-1}| + c$$

$$= -\frac{1}{(n-1)b}\ln\left|\frac{ax^{n-1}+b}{x^{n-1}}\right| + c.$$

4.1.139 计算 $\int \frac{x^9+8}{x^{10}+8x} dx$.

解
$$原式 = \int \frac{x^9}{x(x^9+8)} dx - 8\int \frac{dx}{x^{10}+8x}$$

$$= \int \frac{x^8}{(x^9+8)} dx - 8\int \frac{dx}{x^{10}+8x}$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x^9+8| + 8\int \frac{dx}{x^{10}+8x}.$$

而积分 $\int \frac{dx}{x^{10}+8x} = -\frac{1}{9\cdot 8}\ln\left|\frac{x^9+8}{x^9}\right| + c$ (利用上题的结果),故

$$原式 = \frac{1}{9}\ln|x^9+8| + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x^9+8}{x^9}\right| + c$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{(x^9+8)^2}{x^9}\right| + c.$$

4.1.140　求 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.

解　此题表面上看起来好象无从下手，但用倒代换化简后，再用凑微分法就可以求积分了.

令 $x = \frac{1}{t}$，则

$$原式 = \int \frac{1-\ln\frac{1}{t}}{(\frac{1}{t}-\ln\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})dt = -\int \frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}dt$$

$$= -\int \frac{d(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2} = \frac{1}{1+t\ln t} + c = \frac{x}{x-\ln x} + c.$$

6. 不定积分的应用

4.1.141　一曲线过原点，且在每一点的切线的斜率等于 $2x$，试求该曲线的方程.

解　由题意 $y' = 2x$，故 $y = \int 2xdx = x^2 + c$，又由 $y(0) = 0$（即过原点）可得 $c = 0$，故该曲线的方程为 $y = x^2$.

4.1.142　在积分曲线族 $y = \int 5x^2dx$ 中，求一条通过点（$\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$）的曲线.

解　由 $y = \int 5x^2dx = \frac{5}{3}x^3 + c$ 得，$5\sqrt{3} = \frac{5}{3}(\sqrt{3})^3 + c$，$c = 0$，故该曲线族中过点（$\sqrt{3}$，$5\sqrt{3}$）的曲线为 $y = \frac{5}{3}x^3$.

4.1.143　一质点作直线运动，已知其速度为 $v = \sin\omega t$，且 $s|_{t=0} = s_0$，求在时刻 t 物体与原点间的距离 s.

解　由 $s' = v$ 有 $s = \int vdt = \int \sin\omega tdt = \frac{-1}{\omega}\cos\omega t + c$，

而 $s|_{t=0} = s_0$，即 $s_0 = -\frac{1}{\omega}\cos 0 + c = -\frac{1}{\omega} + c$，所以 $c = s_0 + \frac{1}{\omega}$，

故距离为 $s = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t + s_0 + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t) + s_0$.

4.1.144　一质点作直线运动，已知其加速度为 $a = 12t^2 - 3\sin t$.

如果 $v_0 = 5, s_0 = -3$,求:

(1) v 和 t 的函数关系; (2) s 和 t 的函数关系.

解 (1) $v = \int a dt = \int (12t^2 - 3\sin t)dt = 4t^3 + 3\cos t + c$,又 $v_0 = 5 = 4 \times 0^3 + 3\cos 0 + c_1$,所以 $c_1 = 2$,故 $v = 4t^3 + 3\cos t + 2$.

(2) $s = \int v dt = \int (4t^3 + 3\cos t + 2)dt = t^4 + 3\sin t + 2t + c_2$,又 $s_0 = -3 = 0^4 + 2 \times 0 + 3\sin 0 + c_2$,所以 $c_2 = -3$,故

$$s = t^4 + 2t + 3\sin t - 3.$$

4.1.145 在平面上有一运动着的质点,如果它在 x 轴方向和 y 轴方向的分速度分别为 $v_x = 5\sin t, v_y = 2\cos t$,又 $x|_{t=0} = 5, y|_{t=0} = 0$,求(1) t 时刻质点所在的位置;(2) 质点运动的轨迹方程.

解 (1) 由 $v_x = x'(t)$ 有,$x = \int v_x dt = \int 5\sin t dt = -5\cos t + c_1$,又 $x|_{t=0} = 5 = -5\cos 0 + c_1$,所以 $c_1 = 10$. 故 $x = 10 - 5\cos t$.
再由 $v_y = y'(t)$ 有,$y = \int v_y dy = \int 2\cos t dt = 2\sin t + c_2$,
又 $y|_{t=0} = 0 = 2\sin 0 + c_2$,所以 $c_2 = 0$,故 $y = 2\sin t$. 因此,在 t 时刻,质点的位置是$(10 - 5\cos t, 2\sin t)$.

(2) 由质点位置表示式,有 $\cos t = \frac{10 - x}{5}$, $\sin t = \frac{y}{2}$,所以

$$\left(\frac{10 - x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1,$$

即 $4(x - 10)^2 + 25y^2 = 100$,或 $\frac{(x - 10)^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

这说明质点的运动轨迹方程是一个以(10,0)为中心,长、短半轴长分别为 5、2 的椭圆.

§2　分部积分法

内容提要

设 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都具有连续导数，则

$$\int u dv = uv - \int v du$$

或

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

上面公式称为分部积分公式.

问题与解答

4.2.1　设 $f(x)$ 的原函数为 $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$，求 $\int x \cdot f'(x) dx$.

解法 1　原式 $= \int x \cdot df(x) = x \cdot f(x) - \int f(x) dx$

$$= -\int f(x) dx + x \cdot \left[\int f(x) dx\right]'$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + x \cdot [\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]' + c$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + c.$$

注　在题设的条件下，采用分部积分法，可避免计算 $f'(x)$ 的具体表达式.

解法 2　由题设知，

$$f(x) = [\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

故

$$\text{原式} = \int x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' dx = -\int \frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} dx$$

$$= -\int \frac{\operatorname{tg}^2 t \cdot \sec^2 t dt}{\sec^3 t}\ (\text{令 } x = \operatorname{tg} t\text{，用换元法})$$

$$= -\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot \cos t dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt$$
$$= -[\ln(\operatorname{tg} t + \sec t) - \sin t] + c$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c.$$

4.2.2 设 $f(x)$ 的原函数为$\frac{\sin x}{x}$,求$\int x\cdot f'(x)dx$.

解 由 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ 有

$$\int x\cdot f'(x)dx = x\cdot f(x) - \int f(x)dx$$
$$= x\cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} + c = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + c.$$

4.2.3 设 $f'(\cos x + 2) = \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x$,求 $f(x)$.

解 $f(\cos x + 2) = \int f'(\cos x + 2)d(\cos x + 2)$

$$= \int [\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x]d\cos x$$
$$= \int (1 - \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1)d\cos x = -\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{1}{\cos x} + c$$
$$= -\frac{[(\cos x + 2) - 2]^3}{3} - \frac{1}{(\cos x + 2) - 2} + c$$

故 $f(x) = -\frac{(x-2)^3}{3} - \frac{1}{x-2} + c.$

4.2.4 求$\int x\cdot \sin x dx$.

解 原式 $= x\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c.$

4.2.5 求$\int x\cdot \sin^2 x dx$.

解 原式$= \frac{1}{2}\int x\cdot(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\cdot\cos 2x dx$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}(x\cdot\sin 2x - \int \sin 2x dx)$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x\cdot\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + c.$$

4.2.6 求$\int x^2\cdot\sin 2x dx$.

解 原式$=-\dfrac{1}{2}\int x^2\cdot d(\cos 2x)$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2x\cdot 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c.$$

4.2.7 求$\displaystyle\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

解 因为$\left(\dfrac{1}{x\sin x+\cos x}\right)'=\dfrac{-x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}$,采用分部积分法,得

原式$=-\displaystyle\int\frac{x}{\cos x}\cdot d\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$

$$=-\frac{x}{\cos x\cdot(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{-x}{\cos x\cdot(x\sin x+\cos x)}+\int\sec^2 xdx$$

$$=\frac{-x}{\cos x\cdot(x\sin x+\cos x)}+\text{tg}x+c.$$

4.2.8 求$\displaystyle\int x\cdot\text{tg}x\cdot\sec^4 xdx$.

解 将$\text{tg}x,\sec^4 x$都换为$\sin x$和$\cos x$,再用分部积分法,得

原式$=\displaystyle\int x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}dx=-\int\frac{x}{\cos^5 x}d\cos x$

$$=\frac{1}{4}\int x\cdot d\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\cos^4 x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$=\frac{x}{4\cos^4 x}-\frac{1}{4}\int\frac{1+\text{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{x}{4\cos^4 x}-\frac{1}{4}\int(1+\text{tg}^2 x)d(\text{tg}x)$$

$$=\frac{x}{4\cos^4 x}-\frac{1}{4}\text{tg}x-\frac{1}{12}\text{tg}^3 x+c.$$

4.2.9 求$\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

解 将分子、分母同乘以$(1-\cos x)$,化简后,再用分部积分法,得

$$原式=\int \frac{(x+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{x+\sin x - x\cos x - \sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$=\int \frac{x}{\sin^2 x}dx+\int \frac{dx}{\sin x}-\int x\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$=\int x\cdot d(-\operatorname{ctg}x)+\int \frac{dx}{\sin x}+\int xd(\frac{1}{\sin x})-\int \operatorname{ctg}xdx$$

$$=-x\operatorname{ctg}x+\int \operatorname{ctg}xdx+\int \frac{dx}{\sin x}+\frac{x}{\sin x}-\int \frac{dx}{\sin x}-\int \operatorname{ctg}xdx$$

$$=-x\cdot\operatorname{ctg}x+\frac{x}{\sin x}+c.$$

4.2.10 求 $\int e^x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx.$

解
$$原式=\int e^x\cdot\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\int e^x\cdot\frac{1+\sin x-\cos x-\sin x\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$=\int e^x\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}+\int e^x\cdot\frac{dx}{\sin x}-\int e^x\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx-\int e^x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$=\int e^x\cdot d(-\operatorname{ctg}x)+\int e^x\cdot\frac{dx}{\sin x}+\int e^x\cdot d\left(\frac{1}{\sin x}\right)-\int e^x\cdot\operatorname{ctg}xdx$$

$$=-e^x\cdot\operatorname{ctg}x+\int e^x\cdot\operatorname{ctg}xdx+\int e^x\cdot\frac{dx}{\sin x}$$

$$+\frac{e^x}{\sin x}-\int \frac{e^x}{\sin x}dx-\int e^x\cdot\operatorname{ctg}xdx$$

$$=-e^x\cdot\operatorname{ctg}x+\frac{e^x}{\sin x}+c.$$

4.2.11 求 $\int \sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)dx.$

解
$$原式=-\int \ln(\operatorname{tg}x)d(\cos x)$$

$$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\int \cos x\cdot\operatorname{ctg}x\cdot\sec^2 xdx$$

$$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\int \frac{1}{\sin x}dx$$

$$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\ln(\csc x-\operatorname{ctg}x)+c.$$

4.2.12　求 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

解　原式 $= -\int \ln(\sin x)d(\mathrm{ctg}x)$

$$= -\mathrm{ctg}x \cdot \ln(\sin x) + \int \frac{\cos x}{\sin x}\cdot \mathrm{ctg}x dx$$

$$= -\mathrm{ctg}x \cdot \ln(\sin x) + \int (\csc^2 x - 1)dx$$

$$= -\mathrm{ctg}x \cdot \ln(\sin x) - \mathrm{ctg}x - x + c.$$

4.2.13　求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$.

解　原式 $= \int \ln\cos x \cdot d\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}x \cdot \ln\cos x + \int \mathrm{tg}x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$= \mathrm{tg}x \cdot \ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \mathrm{tg}x \cdot \ln\cos x + \mathrm{tg}x - x + c.$$

4.2.14　求 $\int \ln\cos x \cdot \mathrm{tg}x dx$.

解　原式 $= -\int \ln\cos x \cdot d(\ln\cos x) = -\frac{1}{2}\ln^2\cos x + c.$

4.2.15　求 $\int \frac{\sin\ln x \cdot \cos\ln x}{x}dx$.

解　原式 $= \int \sin\ln x \cdot d(\sin\ln x) = \frac{1}{2}\sin^2\ln x + c.$

4.2.16　求 $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int x \cdot d(\sqrt{2+4x})$

$$= \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{2+4x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{2+4x}dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{(2+4x)^3} + c$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{2+4x}\cdot(x-1) + c.$$

4.2.17　求 $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

解　原式 $= -\frac{1}{2}\int x \cdot d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\text{arctg}x+c.$$

4.2.18　求 $\int\frac{x^4}{(1-x^2)^3}dx$.

解　将被积函数中的因子适当匹配，化为分部积分形式，得

$$\text{原式}=\int\frac{x^3}{4}\cdot\frac{4x}{(1-x^2)^3}dx=\int\frac{x^3}{4}\cdot d\left[\frac{1}{(1-x^2)^2}\right]$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{x}{2}\cdot d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3}{8}\left(\frac{x}{1-x^2}-\int\frac{dx}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{x^3}{4(1-x^2)^2}-\frac{3x}{8(1-x^2)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c.$$

注　本题如用三角变换 $x=\sin t$，或者用待定系数法分解为部分分式之和来求积分都比较繁琐.

4.2.19　求 $\int xe^{-x}dx$.

解　$\text{原式}=-\int x\cdot d(e^{-x})=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+c.$$

4.2.20　求 $\int x^2\cdot e^{-2x}dx$.

解　$\text{原式}=-\frac{1}{2}\int x^2\cdot d(e^{-2x})=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot 2xdx$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}\int xd(e^{-2x})$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c.$$

4.2.21　求 $\int x^3\cdot e^{-x^2}dx$.

解　$\text{原式}=-\frac{1}{2}\int x^2\cdot e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-x^2})$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\int\frac{1}{2}e^{-x^2}d(x^2)=-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+c.$$

4.2.22　求 $\int x^2e^xdx$.

解　原式 $= x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx)$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c.$

4.2.23　求 $\int \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$.

解　原式 $= \int xe^{-x} \cdot d\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{xe^{-x}}{1-x} - \int \frac{1}{1-x}d(xe^{-x})$

$= \frac{xe^{-x}}{1-x} - \int e^{-x}dx = \frac{xe^{-x}}{1-x} + e^{-x} + c.$

注　指数函数与积分变量的有理式乘积的不定积分，一般采用分部积分法，而不用变换 $t = e^x$，否则会出现 $\ln t$.

4.2.24　求 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

解　原式 $= -\int xe^xd\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x} \cdot e^x \cdot (x+1)dx$

$= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c = \frac{e^x}{1+x} + c.$

4.2.25　求 $\int \frac{e^x}{x}(1 + x\ln x)dx$.

解　原式 $= \int \frac{e^x}{x}dx + \int e^x \cdot \ln xdx = \int e^xd(\ln x) + \int \ln xd(e^x)$

$= e^x \cdot \ln x - \int e^x \cdot \ln xdx + \int e^x \cdot \ln xdx = e^x \cdot \ln x + c.$

4.2.26　求 $\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}dx$.

解　原式 $= -\int \ln(e^x+1)d(e^{-x})$

$= -e^{-x} \cdot \ln(e^x+1) + \int e^{-x} \cdot \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$= -e^{-x} \cdot \ln(e^x+1) + \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$= -e^{-x} \cdot \ln(e^x+1) - \ln(1+e^{-x}) + c$

$= -e^{-x} \cdot \ln(e^x+1) - \ln[e^{-x} \cdot (e^x+1)] + c$

$= -(e^{-x}+1) \cdot \ln(e^x+1) + x + c.$

4.2.27 求 $\int x^3 \cdot \mathrm{ch}3x dx$.

解 原式 $= \frac{1}{3}\int x^3 d(\mathrm{sh}3x) = \frac{1}{3}x^3\mathrm{sh}3x - \int x^2\mathrm{sh}3x dx$

$= \frac{1}{3}x^3\mathrm{sh}3x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\mathrm{ch}3x)$

$= \frac{1}{3}x^3\mathrm{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\mathrm{ch}3x + \frac{2}{3}\int x\mathrm{ch}3x dx$

$= \frac{1}{3}x^3\mathrm{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\mathrm{ch}3x + \frac{2}{9}\int x d(\mathrm{sh}3x)$

$= \frac{1}{3}x^3\mathrm{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\mathrm{ch}3x + \frac{2}{9}x\mathrm{sh}3x - \frac{2}{9}\int \mathrm{sh}3x dx$

$= (\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x)\mathrm{sh}3x - (\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27})\mathrm{ch}3x + c.$

4.2.28 求 $\int (x\ln x + \frac{1}{x\ln x})dx$.

解 原式 $= \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 + \int \frac{1}{\ln x} d\ln x$

$= \frac{1}{2}[x^2\ln x - \int x^2 d\ln x] + \ln|\ln x|$

$= \frac{1}{2}[x^2\ln x - \int x dx] + \ln|\ln x|$

$= \frac{1}{2}[x^2\ln x - \frac{x^2}{2}] + \ln|\ln x| + c.$

4.2.29 求 $\int (\ln\ln x + \frac{1}{\ln x})dx$.

解 原式 $= \int \ln\ln x dx + \int \frac{1}{\ln x} dx$

$= x \cdot \ln\ln x - \int x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx + \int \frac{dx}{\ln x} = x \cdot \ln\ln x + c.$

4.2.30 求 $\int x\sqrt{x} \cdot \ln 3x dx$.

解 原式 $= \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln 3x dx = \frac{2}{5}\int \ln 3x d(x^{\frac{5}{2}})$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \cdot \ln 3x - \frac{2}{5}\int x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{3x} 3dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \cdot \ln 3x - \frac{2}{5}\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \cdot \ln 3x - \frac{4}{25}x^{\frac{5}{2}} + c.$

4.2.31　求 $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$.

解　原式 $= 2\int \ln(x+1) \cdot d(\sqrt{x+1})$

$$= 2\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) - 2\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}dx$$

$$= 2\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) - 2\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + c.$$

4.2.32　求 $\int x^n \cdot \ln x dx$. $(n \neq -1)$

解　原式 $= \frac{1}{n+1}\int \ln x \cdot d(x^{n+1})$

$$= \frac{1}{n+1}\ln x \cdot x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{x}dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot (\ln x - \frac{1}{n+1}) + c.$$

4.2.33　求 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

解　原式 $= -\int \ln^2 x \cdot d(\frac{1}{x}) = -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{dx}{x}$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - 2\int \ln x \cdot d(\frac{1}{x})$$

$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} + 2\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + c.$$

4.2.34　求 $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$.

解　原式 $= \frac{2}{3}\int \ln^2 x \cdot d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{x}$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \frac{8}{9}\int \ln x \cdot d(x^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x + \frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}) + c.$$

4.2.35 求$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解 原式$= x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c.$$

4.2.36 求$\int \frac{x\cdot\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 原式$= \int \ln(1+\sqrt{1+x^2})\cdot d(1+\sqrt{1+x^2})$

$$= (1+\sqrt{1+x^2})\cdot\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= (1+\sqrt{1+x^2})\cdot\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c.$$

4.2.37 求$\int \frac{x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 原式$= \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + c.$$

4.2.38 求$\int x\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 原式$= \frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}dx^2 = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\int\frac{2x^2}{1-x^2}dx$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x} + \int[1-\frac{1}{1-x^2}]dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x} + c$$

$$= \frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + x + c.$$

4.2.39 求$\int x^2\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

解 原式$= \frac{1}{3}\int\ln\frac{1-x}{1+x}d(x^3)$

$$= \frac{1}{3}x^3\cdot\ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3}\int\frac{x^3}{1-x^2}dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln\frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3}\int (-x + \frac{x}{1-x^2})dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\ln(1-x^2) + c.$$

4.2.40　求 $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx.$

解　原式 $= \int (a + \frac{a+b}{x^2-1}) \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx$

$$= \int \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| d(ax) + \int \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx$$

$$= ax \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - a\int \frac{2xdx}{x^2-1} + \frac{a+b}{2}\int \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \cdot d(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|)$$

$$= ax \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - a \cdot \ln|x^2-1| + \frac{a+b}{4}[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|]^2 + c.$$

4.2.41　求 $\int \text{arctg}x dx.$

解　原式 $= x \cdot \text{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$$= x \cdot \text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

4.2.42　求 $\int x \cdot \text{arctg}x dx.$

解　原式 $= \frac{1}{2}\int \text{arctg}x d(x^2) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \text{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \text{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctg}x + c.$$

4.2.43　求 $\int \arcsin x dx + \int \arccos x dx$，并解释其结果.

解　由分部积分公式，得

$$\text{原式} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + x \cdot \arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \cdot (\arcsin x + \arccos x) + c = \frac{\pi}{2}x + c.$$

上面的结果说明，反正弦函数的积分与反余弦函数的积分之和是

一个关于自变量的线性函数族.

4.2.44 求 $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

解 原式 $= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}dx$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{(x+1)-1}{1+x}d(\sqrt{x})$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c.$$

4.2.45 求 $\int x\cdot(\operatorname{arctg}x)^2dx$.

解 原式 $= \frac{1}{2}\int(\operatorname{arctg}x)^2d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot(\operatorname{arctg}x)^2 - \int\frac{x^2\cdot\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot(\operatorname{arctg}x)^2 - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\operatorname{arctg}x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot(\operatorname{arctg}x)^2 - \int\operatorname{arctg}x\,dx + \int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot(\operatorname{arctg}x)^2 - x\cdot\operatorname{arctg}x + \int\frac{x\,dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$$

$$= \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2 - x\cdot\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

4.2.46 求 $\int(\arcsin x)^2dx$.

解 原式 $= x(\arcsin x)^2 - 2\int\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\int\arcsin x\cdot d(\sqrt{1-x^2})$$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2\int dx$$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x + c.$$

4.2.47 求 $\int x^2\cdot\arccos x\,dx$.

解 原式 $= \frac{1}{3}\int\arccos x\cdot d(x^3)$

$$= \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{6}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{6}\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2})d(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{3}x^3\arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot \arccos x - \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2} + c.$$

4.2.48　求 $\int x(1+x^2)\text{arcctg}x dx$.

解　原式 $= \frac{1}{4}\int \text{arcctg}x d[(1+x^2)^2]$

$$= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \cdot \text{arcctg}x + \frac{1}{4}\int (1+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \cdot \text{arcctg}x + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + c.$$

4.2.49　求 $\int \frac{x \cdot \text{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解　原式 $= \int \text{arctg}x \cdot d(\sqrt{1+x^2})$

$$= \sqrt{1+x^2} \cdot \text{arctg}x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \sqrt{1+x^2} \cdot \text{arctg}x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c.$$

4.2.50　求 $\int \frac{x \cdot \text{arcctg}x}{(1+x^2)^2}dx$.

解　原式 $= -\frac{1}{2}\int \text{arcctg}x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{arcctg}x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{\text{arcctg}x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\text{arcctg}x\right] + c$$

$$= \frac{x^2-1}{4(1+x^2)} \cdot \text{arcctg}x - \frac{x}{4(1+x^2)} + c.$$

4.2.51　求 $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

解　令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2, dx = 2tdt$，故

$$原式=\int 2te^t dt = 2\int t d(e^t) = 2te^t - 2\int e^t dt$$

$$= 2te^t - 2e^t + c = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

4.2.52　求 $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$.

解　令 $t = \sqrt{2x+1}$，则 $x = \frac{t^2-1}{2}$，$dx = tdt$，故

$$原式=\int 3^t \cdot tdt = \frac{1}{\ln 3}\int t \cdot d(3^t)$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left[t \cdot 3^t - \int 3^t dt\right] = \frac{1}{\ln 3}\left[t \cdot 3^t - \frac{1}{\ln 3}3^t\right] + c$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \sqrt{2x+1} \cdot 3^{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{\ln^2 3} \cdot 3^{\sqrt{2x+1}} + c.$$

4.2.53　求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$.

解　$原式 = 2\int x \cdot d\sqrt{e^x-1} = 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int \sqrt{e^x-1}dx$，

对于第二项不定积分，令 $\sqrt{e^x-1} = t$，则

$$x = \ln(1+t^2),\ dx = \frac{2t}{1+t^2}dt,$$

$$\int \sqrt{e^x-1}dx = \int t \cdot \frac{2t}{1+t^2}dt = 2t - 2\mathrm{arctg}t + c$$

$$= 2\sqrt{e^x-1} - 2\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1} + c,$$

$$原式 = 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1} + c.$$

4.2.54　求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

解　$原式=\int \frac{xd(e^x+1)}{\sqrt{e^x+1}} = 2\int x \cdot d(\sqrt{e^x+1})$

$$= 2x \cdot \sqrt{e^x+1} - 2\int \sqrt{e^x+1}dx.$$

令 $\sqrt{e^x+1} = t$，则 $x = \ln(t^2-1)$，$dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$，上式第二项的积分为

$$\int \sqrt{e^x+1}dx = \int \frac{t\cdot 2t}{t^2-1}dt$$

$$= 2\int (1+\frac{1}{t^2-1})dt = 2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1$$

$$= 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + c_1$$

原式 $= 2x\cdot\sqrt{e^x+1} - 4\sqrt{e^x+1} - 2\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + c.$

4. 2. 55　求 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解　原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{-x}\cdot(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$

$$= -\frac{1}{2}\int (\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}\cdot(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4}\int (\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}})dx$$

$$= -\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{4}I_2.$$

其中 $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$，令 $\sqrt{1+e^x} = t$，则

$x = \ln(t^2-1)$，$dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1}$，故

$$I_1 = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2tdt}{t^2-1} = 2\int\frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c_1$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + c_1,$$

同理得 $I_2 = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}} = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+e^x}}{1-\sqrt{1+e^x}}\right| + c_2.$

故　原式 $= -\dfrac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$

$$+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1+e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}\right|+c.$$

4.2.56 求$\int\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$.

解 原式$=2\int\ln(1+x)\cdot d\sqrt{x}$

$$=2\sqrt{x}\cdot\ln(1+x)-2\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx,$$

令$\sqrt{x}=t$,则$x=t^2$, $dx=2tdt$,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\frac{t}{1+t^2}2tdt=2\cdot\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{1+t^2}=2t-2\operatorname{arctg}t+c$$

$$=2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c.$$

从而,原式$=2\sqrt{x}\cdot\ln(1+x)-4\sqrt{x}+4\operatorname{arctg}\sqrt{x}+c$.

4.2.57 求$\int\sqrt{x}\ln^2 xdx$.

解 令 $x=e^t$,则$t=\ln x, dx=e^t\cdot dt$,故

$$原式=\int e^{\frac{t}{2}}\cdot\ln^2(e^t)\cdot e^t dt=\int t^2\cdot e^{\frac{3t}{2}}dt.$$

又令$u=\frac{3}{2}t$,则$t=\frac{2}{3}u$, $du=\frac{3}{2}dt$,从而

$$原式=\int(\frac{2}{3}u)^2\cdot e^u\cdot\frac{2}{3}du=(\frac{2}{3})^3\cdot\int u^2e^u du$$

$$=(\frac{2}{3})^3\cdot e^u\cdot[u^2-2u+2]+c$$

$$=(\frac{2}{3})^3\cdot e^{\frac{3t}{2}}\cdot[(\frac{3}{2})^2\cdot t^2-2\cdot(\frac{3}{2})t+2]+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9})+c.$$

4.2.58 求$\int\frac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}dx$.

解　原式$=\frac{2}{3}\int \ln x d(\sqrt{3x-2})$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\cdot\ln x-\frac{2}{3}\int\frac{\sqrt{3x-2}}{x}dx,$$

在上式第二项中，令 $t=\sqrt{3x-2}$，则 $x=\frac{t^2+2}{3}$，$dx=\frac{2}{3}tdt$，故

$$\int\frac{\sqrt{3x-2}}{x}dx=\int\frac{t}{\frac{t^2+2}{3}}\cdot\frac{2}{3}tdt$$

$$=2\int\frac{t^2}{t^2+2}dt=2\int(1-\frac{2}{t^2+2})dt$$

$$=2(t-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}})+c.$$

从而，原式$=\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\cdot\ln x-\frac{4}{3}(t-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}})+c$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\cdot\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{3x-2}$$

$$+\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3x-2}{2}}+c.$$

4.2.59　求 $\int\ln[(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

解　被积函数化简得

$$\ln[(x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}]\cdot\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

$$=\frac{\ln(x+a)^{(x+a)}}{(x+a)(x+b)}+\frac{\ln(x+b)^{x+b}}{(x+a)(x+b)}$$

$$=\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}.$$

用分部积分法，得

$$原式=\int\frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$=\int\ln(x+a)d\ln(x+b)+\int\ln(x+b)\cdot d\ln(x+a)$$

$$=\ln(x+a)\cdot\ln(x+b)-\int\ln(x+b)d\ln(x+a)$$

$$+\int \ln(x+b)d\ln(x+a)$$

$$=\ln(x+a)\cdot\ln(x+b)+c.$$

4.2.60 求 $\int \ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})dx$.

解 原式 $=x\cdot\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})$

$$-\int \frac{x}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}\cdot(1+\frac{1+x}{\sqrt{2x+x^2}})dx$$

$$=x\cdot\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})-\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+x^2}}$$

$$=x\cdot\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2}-\int\sqrt{\frac{x}{2+x}}dx.$$

令 $t=\sqrt{\frac{x}{2+x}}$，则 $x=\frac{2t^2}{1-t^2}$，$dt=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$，故

$$\int\sqrt{\frac{x}{2+x}}dx=\int t\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt=4\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=2\int t\cdot d\left(\frac{1}{1-t^2}\right)=\frac{2t}{1-t^2}-2\int\frac{1}{1-t^2}dt$$

$$=\frac{2t}{1-t^2}-\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c$$

$$=\sqrt{2x+x^2}-\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})+c.$$

从而，原式 $=x\cdot\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})-\sqrt{2x+x^2}$

$$+\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})+c$$

$$=(1+x)\cdot\ln(1+x+\sqrt{2x+x^2})-\sqrt{2x+x^2}+c.$$

4.2.61 求 $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

解 原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{x}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)=-\frac{1}{2}\int x\cdot d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\text{arctg}x+c.$$

注　尽量地将被积函数中有关因式都放入微分中，再用分部积分法，便得出结果.

4.2.62　求 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

解　当 $a=0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + c;$$

当 $a \neq 0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^3}\int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2}d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^3}\left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + c.$$

注　利用上题的结果.

4.2.63　求 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx$.

解　$\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int \frac{1-2x+3x}{\sqrt{x-x^2}}dx$

$$= \int \frac{d(x-x^2)}{\sqrt{x-x^2}} + 3\int \frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

$$= 2\cdot\sqrt{x-x^2} + 3\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx.$$

令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$，则 $x = 1 - \frac{1}{1+t^2}$，$dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$，

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \int t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = \int t \cdot d(-\frac{1}{1+t^2})$$

$$= -\frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{t}{1+t^2} + \text{arctg}t + c$$

$$= \frac{-\sqrt{\frac{x}{1-x}}}{1+\frac{x}{1-x}} + \text{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c$$

$$= -\sqrt{x-x^2} + \text{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c.$$

从而有 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx = -\sqrt{x-x^2} + 3\text{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + c.$

4.2.64 求 $\int x\sin\sqrt{x}\,dx.$

解 令 $\sqrt{x} = t$,则 $x = t^2, dx = 2tdt$,

原式$= 2\int t^3 \cdot \sin tdt = -2\int t^3 d(\cos t) = -2t^3\cos t + 6\int t^2 \cdot \cos tdt$

$$= -2t^3\cos t + 6\int t^2 \cdot d(\sin t)$$

$$= -2t^3\cos t + 6t^2 \cdot \sin t - 12\int t \cdot \sin tdt$$

$$= -2t^3\cos t + 6t^2 \cdot \sin t + 12\int td(\cos t)$$

$$= -2t^3\cos t + 6t^2 \cdot \sin t + 12t\cos t - 12\int \cos tdt$$

$$= -2(t^2-6)t\cos t + 6(t^2-2)\sin t + c$$

$$= 2(6-x)\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} + 6(x-2) \cdot \sin\sqrt{x} + c.$$

4.2.65 求 $\int \sin(\sqrt[3]{x})dx.$

解 令 $\sqrt[3]{x} = t$,则 $x = t^3,\ dx = 3t^2dt$,故

原式$= \int \sin t \cdot 3t^2dt = 3\int t^2 \cdot \sin tdt$

$$= -3\int t^2 \cdot d(\cos t) = -3t^2 \cdot \cos t + 6\int t \cdot \cos t\,dt$$

$$= -3t^2 \cdot \cos t + 6t \cdot \sin t - 6\int \sin t dt$$

$$= -3t^2 \cdot \cos t + 6t\sin t + 6\cos t + c$$

$$= -3\sqrt[3]{x^2}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x} \cdot \sin(\sqrt[3]{x}) + 6\cos(\sqrt[3]{x}) + c.$$

4.2.66　求 $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

解　原式 $= -\int \arcsin x d(\frac{1}{x}) = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}dx$，

在第二项的不定积分中，令 $x = \sin t$，则

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cdot \cos t} = \ln|\csc t - \operatorname{ctg} t| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c.$$

故　原式 $= -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + c.$

4.2.67　求 $\int \frac{\arcsin x}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}dx$.

解　令 $x = \sin t$，则 $\arcsin x = t$，$dx = \cos t dt$，故

$$原式 = \int \frac{t}{\sin^2 t \cdot \cos t} \cdot \cos t dt = \int \frac{t}{\sin^2 t}dt$$

$$= \int t \cdot d(-\operatorname{ctg} t) = -t \cdot \operatorname{ctg} t + \int \operatorname{ctg} t \cdot dt$$

$$= -t \cdot \operatorname{ctg} t + \ln\sin t + c$$

$$= -\arcsin x \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln x + c.$$

4.2.68　求 $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

解　令 $x = \sin t$，则 $\arcsin x = t$，$dx = \cos t dt$，故

$$原式 = \int \frac{t}{\cos^3 t} \cdot \cos t dt = \int \frac{t}{\cos^2 t}dt$$

$$= \int t \cdot d(\operatorname{tg} t) = t \cdot \operatorname{tg} t - \int \operatorname{tg} t \cdot dt$$

$$= t \cdot \operatorname{tg} t - \ln|\cos t| + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x - \ln\sqrt{1-x^2} + c.$$

4.2.69 求 $\int \frac{x(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 令 $t = \arccos x$，则 $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$，故

$$\text{原式} = -\int \frac{t^2 \cdot \cos t}{\sin t} \cdot \sin t dt = -\int t^2 \cdot \cos t dt$$

$$= -\int t^2 \cdot d\sin t = -t^2 \cdot \sin t + 2\int t \cdot \sin t dt$$

$$= -t^2 \cdot \sin t - 2\int t \cdot d\cos t$$

$$= -t^2 \cdot \sin t - 2t \cdot \cos t + 2\int \cos t dt$$

$$= -t^2 \cdot \sin t - 2t \cdot \cos t + 2\sin t + c$$

$$= -(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2} - 2x \cdot \arccos x + 2\sqrt{1-x^2} + c.$$

4.2.70 求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

解 令 $x = \sin^2 t$，则 $\arcsin\sqrt{x} = t$, $dx = 2\sin t \cdot \cos t dt$，故

$$\text{原式} = \int \frac{t}{\cos t} \cdot 2\sin t \cdot \cos t dt = 2\int t \cdot \sin t dt$$

$$= -2t \cdot \cos t + 2\int \cos t dt = -2t \cdot \cos t + 2\sin t + c$$

$$= -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c.$$

4.2.71 求 $\int x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$.

解 令 $t = \sqrt{x}$，则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$，故

$$\text{原式} = \int t^2 \cdot \operatorname{arctg} t \cdot 2t dt = 2\int t^3 \cdot \operatorname{arctg} t dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} t \cdot dt^4$$

$$= \frac{1}{2}t^4 \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^4}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t^4 \cdot \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t^4 \cdot \text{arctg}t - \frac{1}{2}\int (t^2 - 1)dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}t^4 \cdot \text{arctg}t - \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t) - \frac{1}{2}\text{arctg}t + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 \cdot \text{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \sqrt{x} - \text{arctg}\sqrt{x}) + c.$$

4.2.72　求 $\int \text{arctg}(1+\sqrt{x})dx$.

解　原式 $= x \cdot \text{arctg}(1+\sqrt{x}) - \int x \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}{1+(1+\sqrt{x})^2}$

$$= x \cdot \text{arctg}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{\sqrt{x}\cdot(2+2\sqrt{x}+x)}$$

令 $\sqrt{x} = u$,则上式第二项为

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x}\cdot(2+2\sqrt{x}+x)} = \int \frac{u^2 \cdot 2udu}{u(2+2u+u^2)}$$

$$= 2\int \frac{u^2du}{2+2u+u^2} = 2\int du - 2\int \frac{2+2u}{2+2u+u^2}du$$

$$= 2u - 2\ln|2+2u+u^2| + c_1$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln|2+2\sqrt{x}+x| + c_1.$$

原式 $= x \cdot \text{arctg}(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \ln|2+2\sqrt{x}+x| + c_1.$

4.2.73　求 $\int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx$. (其中 $a \neq 0$)

解　$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$= x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x \cdot \sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{|a|} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx,$$

于是 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+c.$

4.2.74　求 $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$ 及 $\int\sqrt{x^2-a^2}dx.$

解　$\int\sqrt{x^2+a^2}\cdot dx=x\cdot\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx$$

$$+a^2\cdot\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|.$$

于是得

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c.$$

同理得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c.$$

4.2.75　求 $\int x\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1}dx.$

解　原式 $=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\cdot d(x^2+1)$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)\cdot(4x^3+4x)}{2\sqrt{x^4+2x^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)^2}{\sqrt{(x^2+1)^2-2}}d(x^2+1)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot\sqrt{x^4+2x^2-1}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{[(x^2+1)^2-2]+2}{\sqrt{(x^2+1)^2-2}}d(x^2+1)$$

$$= \frac{(x^2+1)}{2} \cdot \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2}\int \sqrt{(x^2+1)^2-2} \cdot d(x^2+1) - \int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{(x^2+1)^2-2}}$$

$$= \frac{(x^2+1)}{2} \cdot \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)}{2} \cdot \sqrt{(x^2+1)^2-2} - \ln(x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2-2}] - \ln(x^2+1+\sqrt{(x^2+1)^2-2}) + c$$

$$= \frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}) + c.$$

注 利用上题的结果.

4.2.76 求 $\int x^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}dx$.

解 $\int x^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\int x \cdot \sqrt{a^2+x^2} \cdot d(a^2+x^2)$

$$= \frac{1}{3}\int x \cdot d[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{3}\int a^2\sqrt{a^2+x^2}dx - \frac{1}{3}\int x^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}dx,$$

于是得

$$\int x^2 \cdot \sqrt{a^2+x^2}dx$$

$$= \frac{3}{4}[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{3}\int \sqrt{a^2+x^2}dx]$$

$$= \frac{1}{4}x \cdot (a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{4}[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c$$

$$= \frac{x(2x^2+a^2)}{8} \cdot \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c.$$

注 利用 **4.2.74** 题的结果.

4.2.77 求 $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解 原式 $=\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg}x})$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int e^{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg}x})$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int \frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x)^{3/2}}dx.$$

移项合并,得

$$\int \frac{x\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+c.$$

4.2.78 求 $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

解 原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot de^{\operatorname{arctg}x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+\int e^{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+c$$

$$=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{\operatorname{arctg}x}+c.$$

注 利用上题积分的结果.

4.2.79 求 $\int \frac{e^{k\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$, k 为常数.

解 令 $t=e^{\operatorname{arctg}x}$,则 $x=\operatorname{tg}t$, $dx=\sec^2 tdt$,故

原式 $=\int \frac{e^{kt}}{(\sec t)^3}\cdot\sec^2 tdt=\int e^{kt}\cdot\cos tdt$

$$=\int e^{kt}\cdot d\sin t=e^{kt}\cdot\sin t-\int ke^{kt}\cdot\sin tdt$$

$$= e^{kt} \cdot \sin t + ke^{kt} \cdot \cos t - k^2 \int e^{kt} \cdot \cos t dt,$$

所以　$(1 + k^2) \int e^{kt} \cdot \cos t dt = e^{kt} \cdot (\sin t + k\cos t) + c_1$

从而，原式 $= \int e^{kt} \cdot \cos t dt = \frac{1}{1 + k^2} e^{kt} \cdot (\sin t + k\cos t) + c$

$$= \frac{e^{k\operatorname{arc\,tg} x}}{1 + k^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{k}{\sqrt{1 + x^2}}\right) + c.$$

注　对于反三角函数的函数的不定积分，一般先作变换，后用分部积分法.

4.2.80　求 $I = \int e^x \cdot \sin x dx$.

解　设 $u = e^x, dv = \sin x dx$，用分部积分公式，有

$$I = - e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

又设 $u = e^x, dv = \cos x dx$，再用分部积分公式，有

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx,$$

那么　$I = - e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - I,$

故　$I = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + c.$

4.2.81　求 $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx$.

解　如果 $a = b = 0$，原式 $= x + c$；

如果 $a = 0, b \neq 0$，原式 $= \frac{1}{b} \sin bx + c$；

如果 $a \neq 0$，

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx dx = \frac{1}{a} \int \cos bx \cdot d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \sin bx dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bx \cdot d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cdot \cos bx dx.$$

于是得　$$\int e^{ax}\cdot\cos bxdx=\frac{e^{ax}\cdot(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+c.$$

4.2.82　求 $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$.

解　如果 $a=b=0$,原式 $=x+c$;

如果 $a^2+b^2\neq 0$.

$$\int e^{ax}\cdot\sin bxdx=\frac{1}{a}\int\sin bxd(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cdot\cos bxdx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int\cos bx\cdot d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cdot\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cdot\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$$

于是得　$$\int e^{ax}\cdot\sin bxdx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+c.$$

4.2.83　求 $\int xe^x\sin xdx$.

解　两次用分部积分法,得

$$\int e^x\cdot\sin xdx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c,$$

$$\int e^x\cdot\cos xdx=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+c.$$

令 $v=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$,则 $\int xe^x\sin xdx=\int xdv$,故

原式 $=xv-\int vdx$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\int\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\int e^x\sin xdx+\frac{1}{2}\int e^x\cos xdx$$

$$=\frac{xe^x}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{4}e^x(\sin x-\cos x)$$

$$+\frac{1}{4}e^x(\sin x+\cos x)+c.$$

$$= \frac{e^x}{2}[x(\sin x - \cos x) + \cos x] + c.$$

4.2.84　求积分 $I_1 = \int \sin(\ln x)dx$，$I_2 = \int \cos(\ln x)dx$.

解　由分部积分法，得

$$I_1 = x \cdot \sin(\ln x) - \int x \cdot \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = x \cdot \sin(\ln x) - I_2$$

$$I_2 = x\cos(\ln x) + \int x \cdot \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = x \cdot \cos(\ln x) - I_1$$

上面两式联立，解得

$$I_1 = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c,$$

$$I_2 = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c.$$

4.2.85　求 $I_n = \int x^k \cdot \ln^n x dx$ 的递推公式.

解　$I_n = \frac{1}{k+1}\int \ln^n x \cdot d(x^{k+1})$

$$= \frac{1}{k+1}[x^{k+1} \cdot \ln^n x - n\int x^{k+1} \cdot \ln^{n-1}x \cdot \frac{1}{x}dx]$$

$$= \frac{1}{k+1}[x^{k+1} \cdot \ln^n x - n\int x^k \cdot \ln^{n-1}x dx]$$

$$= \frac{1}{k+1}[x^{k+1} \cdot \ln^n x - n \cdot I_{n-1}],$$

故　$I_n = \frac{1}{k+1}[x^{k+1} \cdot \ln^n x - n \cdot I_{n-1}]$.

4.2.86　求不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 的递推公式.

解　$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int x \cdot \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}.$$

在第二项的不定积分中，令 $u = x$，$dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$，则

$$du=dx,v=\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

故 $\int x\cdot\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$

$$=-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

于是有 $I_n=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot I_{n-1}.$

由此可得递推公式为

$$I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

4.2.87 试建立 $I_n=\int\frac{1}{x^n\cdot\sqrt{x^2+1}}dx$ 的递推公式.

解 取下标为 $n-2$，有

$$I_{n-2}=\int\frac{dx}{x^{n-2}\cdot\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{2xdx}{x^{n-1}\cdot 2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\int\frac{1}{x^{n-1}}\cdot d\sqrt{x^2+1}\qquad(\text{分部积分})$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n-1}}-\int\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{(1-n)}{x^n}dx$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}-(1-n)\cdot\int\frac{x^2+1}{x^n\cdot\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}-(1-n)\cdot(I_{n-2}+I_n).$$

整理得递推公式为

$$I_n=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^{n+1}}+\frac{2-n}{n-1}\cdot I_{n-2}.$$

§3　有理函数的积分

内容提要

有理函数的积分形如

$$\int R(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

其中　$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\quad a_0 \neq 0,$

$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m,\quad b_0 \neq 0,$

m,n 为正整数.

有理函数包括有理整式及有理分式，有理整式的积分十分简单，现介绍有理分式的积分.

有理分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$包括有理真分式($n < m$)及有理假分式($n \geq m$)，而假分式总可化为有理整式与有理真分式之和，这里假定$\frac{P(x)}{Q(x)}$是既约的真分式.

首先将$\frac{P(x)}{Q(x)}$分解为若干个部分分式之和，而每一个部分分式(最简真分式)都属于下列四种形式之一：

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.$$

其中n是大于1的自然数，a、A、M、N、p、q都是常数，且$p^2-4q<0$. 因此有理函数的积分问题就归结为如下四类最简分式的不定积分：

(1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c.$

(2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + c.\ (n \neq 1)$

(3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c.$$

(4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

上式右端第一个积分 $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + c.$

第二个积分 $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^n}$,

令 $x+\frac{p}{2}=u$, $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$,则 $dx=du$,通过计算可得上式积分的一个递推公式

$$\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^n} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$$

$$= \frac{1}{2a^2(n-1)}\left\{\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right\},$$

递推下去,最后的积分为

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c.$$

于是上面第(4)型的积分问题完全解决.

问 题 与 解 答

1. 观察法

4.3.1 求 $\int \frac{x-3}{(x-2)(x-4)}dx$.

解法 1 原式 $= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}[\ln|x-2| + \ln|x-4|] + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln|(x-2)(x-4)| + c.$$

解法 2　原式 $= \int \frac{x-3}{x^2-6x+8}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-6x+8)}{x^2-6x+8}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-6x+8| + c.$$

4.3.2　求 $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

解　原式 $= \int \frac{dx}{(x+3)^2+16} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16}$

$$= \frac{1}{4}\text{arctg}\,\frac{x+3}{4} + c.$$

注　$\triangle = 6^2 - 4\times 25 = -64 < 0$,将分母化为平方和形式.

4.3.3　求 $\int \frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + c.$$

注　$\triangle = (-2)^2 - 4\times 2\times 3 < 0$,将分母化为平方和形式.

4.3.4　求 $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$.

解　令 $x^2 = t$,则 $xdx = \frac{1}{2}dt$,故

原式 $= \int \frac{(2x^2+3)x}{(x^2)^2+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2t+3}{t^2+t+1}dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt + \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + c.$$

注　采用变量代换，使分子、分母次数降低.

4.3.5　求 $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2-4}$.

解　令 $x^2=t$，则 $xdx=\frac{1}{2}dt$，

故　原式 $= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2+3t-4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+4)(t-1)}$

$$= \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+4}\right)dt = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t-1}{t+4}\right| + c$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+4}\right| + c.$$

4.3.6　求 $\int \frac{dx}{1-x^4}$.

解　由观察可知，

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right),$$

故　原式 $= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{4}\int\frac{1}{1-x}dx$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg}x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

4.3.7　求 $\int \frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}dx$.

解　因为

$$\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2} = \frac{3x^2-x+4}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x^2+2},$$

所以，原式$=\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{x}{x^2+2}dx$

$$=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx$$

$$=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+c.$$

2. 配项法

4.3.8　求$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx.$

解　原式$=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8|+5\cdot\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2}$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8|+\frac{5}{2}\text{arctg}\,\frac{x-2}{2}+c.$$

注　先将分子中一次项部分凑成分母的导数，剩余的部分仿前题把分母化为平方和型，再利用有关不定积分公式.

4.3.9　求$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx.$

解　原式$=\int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}dx$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+10)}{(x^2+2x+10)^2}-\int \frac{dx}{[(x+1)^2+9]^2}$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+10)}-\frac{1}{9^2}\int \frac{dx}{[(\frac{x+1}{3})^2+1]^2}.$$

对上式第二项积分中的变量作变换，令$\frac{x+1}{3}=t$，则

$$\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1\right]^2}=\int \frac{3dt}{[t^2+1]^2}$$

$$=3\left[\frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+1)}+\frac{2\times 2-3}{2\times 2-2}I_1\right]$$

$$= 3\cdot\left[\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+c_1\right]$$

故原式$=-\dfrac{3}{2(x^2+2x+10)}-\dfrac{3}{9^2}\cdot\left[\dfrac{t}{2(t^2+1)}+\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}t+c_1\right]$

$$=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{\frac{x+1}{3}}{9\times 6\left[\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1\right]}-\frac{1}{54}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{3}+c$$

$$=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{x+1}{18[x^2+2x+10]}-\frac{1}{54}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{3}+c.$$

注 先将分子的一次项部分凑成分母中括号内的导数,从而引用凑微分方法,其余的部分再作相应变量代换,进行求积.

4.3.10 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{x^6+1}dx.$

解 原式 $=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3)+\frac{1}{6}\int\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2-2}{x^4-x^2+1}\right]d(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3)+\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-\frac{1}{12}\int\frac{2x^2-1}{x^4-x^2+1}d(x^2)+\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2-\frac{1}{2})}{(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3)+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)-\frac{1}{12}\ln|x^4-x^2+1|+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+c$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3)+\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x^2-1)}{\sqrt{3}}+c.$$

4.3.11　求 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

解　原式 $= \int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx$

$$= \int \left[\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} + \frac{x^2}{x^6+1}\right]dx$$

$$= \int \left\{\frac{1}{x^2+1} + \frac{3x^2}{3[(x^3)^2+1]}\right\}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$= \text{arctg}x + \frac{1}{3}\text{arctg}(x^3) + c.$$

注　采用配项法,化为基本公式型积分.

4.3.12　求 $\int \frac{xdx}{x^8-1}$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^4-1}$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{(x^2)^2-1} - \frac{1}{(x^2)^2+1}\right]d(x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \text{arctg}(x^2)\right] + c$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| - \frac{1}{4}\text{arctg}(x^2) + c.$$

4.3.13　求 $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}$.

解　原式 $= \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+3} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}} + c.$

4.3.14　求 $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^4-1)\cdot 2x}{x^8+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1}d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{(x^2)^2}}{(x^2)^2+\frac{1}{(x^2)^2}}d(x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+\frac{1}{x^2})}{(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}\right| + c.$$

4.3.15 求 $\int \frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$.

解 原式 $=\frac{1}{4}\int \frac{x^8\cdot 4x^3}{(x^4+1)(x^4+2)}dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}\ln\left[\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}\right]+c.$$

4.3.16 求 $\int \frac{x^9dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

解 原式 $=\frac{1}{5}\int \frac{x^5\cdot 5x^4dx}{[(x^5+1)^2+1]^2}$

$$=\frac{1}{5}\int \frac{(x^5+1)d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}-\frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$=\frac{1}{10}\int \frac{d[(x^5+1)^2+1]}{[(x^5+1)^2+1]^2}-\frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$$

$$=-\frac{1}{10[(x^5+1)^2+1]}-\frac{1}{5}\left\{\frac{x^5+1}{2[(x^5+1)^2+1]}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^5+1)\right\}+c$$

$$=-\frac{x^5+2}{10[(x^5+1)^2+1]}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)+c.$$

注 利用 4.1.113 题的结果.

4.3.17 求 $\int \frac{xdx}{(x+1)^2\cdot(x^2+x+1)}$.

解 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+1)-(x^2+x+1)}{(x+1)^2\cdot(x^2+x+1)}dx$

$$=\int\left[\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x+1}+c.$$

注 采用配项法，化为基本公式型积分.

4.3.18　求 $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx$.

解　原式 $= \frac{1}{5}\int \frac{(5x^4-5)dx}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{x^5-5x} - \frac{1}{x^5-5x+1}\right) d(x^5-5x)$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5-5x)}{x^5-5x} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5-5x}{x^5-5x+1}\right| + c.$$

4.3.19　求 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+2})dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\int \frac{d(x^{10}+2)}{x^{10}+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\ln(x^{10}+2) + c = \frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2} + c.$$

4.3.20　求 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

解　对被积函数采用配项法，有

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x^{10}+1)} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

原式 $= \int [\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}]dx$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\ln(x^{10}+1) + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + c$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1} + \frac{1}{10(x^{10}+1)} + c.$$

4.3.21　求 $\int \frac{x^4}{(x^{10}-10)^2}dx$.

解 原式 $=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5)}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}$

$$=\frac{1}{5\times 40}\int\frac{[(x^5+\sqrt{10})-(x^5-\sqrt{10})]^2}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}d(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\left[\frac{1}{x^5-\sqrt{10}}-\frac{1}{x^5+\sqrt{10}}\right]^2 d(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})^2}-\frac{1}{100}\int\frac{d(x^5)}{x^{10}-10}+\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5+\sqrt{10})}{(x^5+\sqrt{10})^2}$$

$$=-\frac{1}{200(x^5-\sqrt{10})}-\frac{1}{200\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|-\frac{1}{200(x^5+\sqrt{10})}+c$$

$$=-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)+c.$$

4.3.22 求 $\int\frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$.

解 原式 $=\int\frac{(x^7+x^3)-x^3}{(1+x^4)^2}dx=\int\frac{x^3}{1+x^4}dx-\int\frac{x^3dx}{(1+x^4)^2}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(1+x^4)}{1+x^4}-\frac{1}{4}\int\frac{d(1+x^4)}{(1+x^4)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4(1+x^4)}+c.$$

注 对被积函数分子采用配项法.

4.3.23 求 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

解 原式 $=\int\frac{1+x^7-2x^7}{x\cdot(1+x^7)}dx=\int[\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}]dx$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\int\frac{d(1+x^7)}{1+x^7}=\ln|x|-\frac{2}{7}|1+x^7|+c$$

$$=\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+c.$$

4.3.24　求 $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

解　对被积函数采用配项法，有

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right).$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c_1$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+c.$$

4.3.25　求 $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$

解　将被积函数化为部分分式之和，得

$$\frac{1}{x^2\cdot(1+x^2)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2},$$

于是，$\text{原式}=\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$$=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x-\int\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2}dx$$
$$=-\frac{1}{x}-2\operatorname{arctg}x+\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx,$$

而　$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int x\cdot d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}\right]$$
$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c,$$

故原式 $=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}+c.$

4.3.26 求 $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

解 被积函数的分子,分母同除以 x^2,得

$$\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})+1},$$

$$\text{原式}=\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})+1}$$

$$=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2+(x+\frac{1}{x})-1}=\int\frac{d(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2})}{[(x+\frac{1}{x})+\frac{1}{2}]^2-\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}\right|+c.$$

4.3.27 求 $\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx$.

解 $$\text{原式}=\int\frac{(1-\frac{3}{x^4})}{x^5\cdot(1+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^8})}dx=\int\frac{-\frac{1}{4}(1-\frac{3}{x^4})d(\frac{1}{x^4})}{\frac{2}{x^8}+\frac{3}{x^4}+1}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{\frac{2}{x^4}+1}-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right)d(\frac{1}{x^4})$$

$$=-\frac{5}{8}\ln(\frac{2}{x^4}+1)+\ln(\frac{1}{x^4}+1)+c$$

$$= \frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2} - \ln\frac{x^4}{x^4+1} + c.$$

4.3.28　求 $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx.$

解　当 $n \neq 0$ 时,有

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n dx^n}{x^n+1}$$

$$= \frac{1}{n}\int (1 - \frac{1}{x^n+1})d(x^n) = \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) + c,$$

当 $n = 0$ 时,有

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{x^{-1}}{2}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + c.$$

4.3.29　求 $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$

解　当 $n \neq 0$ 时,有

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \int \frac{x^{2n} \cdot x^{n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n) = \frac{1}{n}\int \frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2}dx^n$$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{1}{x^{2n}+1}d(x^n) - \frac{1}{n}\int \frac{1}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n)$$

$$= \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n) - \frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{2(x^{2n}+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^n)\right] + c$$

$$= \frac{1}{2n}\left[\operatorname{arctg}(x^n) - \frac{x^n}{x^{2n}+1}\right] + c.$$

当 $n = 0$ 时,有

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \int \frac{x^{-1}}{4}dx = \frac{1}{4}\ln|x| + c.$$

4.3.30　求 $\int \frac{dx}{a+bx^2}$,其中 $ab > 0$.

解　原式 $= \int \frac{\frac{1}{b}dx}{\frac{a}{b}+x^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + x^2}$

$$= \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + c.$$

4.3.31 求 $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2}$，其中 $ab > 0$.

解 原式 $= \frac{1}{2a}\int \frac{2adx}{(a+bx^2)^2}$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(a-bx^2)+(a+bx^2)}{(a+bx^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \left[\frac{a-bx^2}{(a+bx^2)^2} + \frac{1}{(a+bx^2)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{a-bx^2}{(a+bx^2)^2}dx + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\frac{x}{a+bx^2} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

$$= \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{x\cdot\sqrt{ab}}{a} + c.$$

注 把被积函数用配项法分成两项，前一项为某分式之导数，后一项借助前一题的结果.

4.3.32 求 $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}$，其中 $ab > 0$，m 为正整数.

解 原式 $= \frac{1}{2ma}\int \frac{2madx}{(a+bx^2)^{m+1}}$

$$= \frac{1}{2ma}\int \frac{[a-(2m-1)bx^2] + (2m-1)(a+bx^2)}{(a+bx^2)^{m+1}}dx$$

$$= \frac{1}{2ma}\int \frac{(a+bx^2)^{m-1}\cdot(a+bx^2-2mbx^2)}{(a+bx^2)^{2m}}dx + \frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}$$

$$= \frac{1}{2ma}\cdot\frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$$

注 对被积函数采用配项法，将原式化为两项和的积分，得到递推公式.

4.3.33 求 $\int \frac{x^2dx}{a+bx^2}$，其中 $ab > 0$.

解 原式 $= \frac{1}{b}\int \frac{bx^2}{a+bx^2}dx = \frac{1}{b}\int \frac{a+bx^2-a}{a+bx^2}dx$

$$= \frac{1}{b}\int [1 - \frac{a}{a+bx^2}]dx = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$= \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + c.$$

4.3.34　求 $\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^{m+1}}$，其中 $ab>0$，m 为正整数.

解　原式 $= \frac{1}{2mb}\int \frac{2mbx^2}{(a+bx^2)^{m+1}}dx$

$$= \frac{1}{2mb}\int \frac{[(2m-1)bx^2 - a] + (a+bx^2)}{(a+bx^2)^{m+1}}dx$$

$$= \frac{1}{2mb}\int \frac{(a+bx^2)^{m-1}\cdot[-(a+bx^2) + 2mbx^2]}{(a+bx^2)^{2m}}dx + \frac{1}{2mb}\int \frac{1}{(a+bx^2)^m}dx$$

$$= \frac{-x}{2mb((a+bx^2)^m} + \frac{1}{2mb}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}.$$

注　对被积函数采用配项法，将原式化为两项和的积分，得到递推公式.

4.3.35　求 $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)}$，其中 $ab>0$.

解　原式 $= \frac{1}{a}\int \frac{adx}{x^2(a+bx^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{a+bx^2-bx^2}{x^2\cdot(a+bx^2)}dx$

$$= \frac{1}{a}\int [\frac{1}{x^2} - \frac{b}{a+bx^2}]dx = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

$$= -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + c$$

$$= -\frac{1}{ax} - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + c.$$

注　对被积函数采用配项法求出不定积分.

4.3.36　求 $\int \frac{dx}{x^2\cdot(a+bx^2)^{m+1}}$，其中 $ab>0$.

解　原式 $= \frac{1}{a}\int \frac{adx}{x^2\cdot(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{(a+bx^2)-bx^2}{x^2\cdot(a+bx^2)^{m+1}}dx$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2\cdot(a+bx^2)^m} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}.$$

注　对被积函数采用配项法，将原式化为两项和的积分，得到递

推公式,再借助 4.3.32 题的递推公式即可.

4.3.37 求 $\int \frac{dx}{a+bx^3}$, 其中 $ab>0$,

解 记 $k^3=\frac{a}{b}$,则 $k=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,又 $\frac{1}{b}=\frac{k^3}{a}$,故

$$\text{原式}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\frac{a}{b}+x^3}=\frac{k^3}{a}\int\frac{dx}{k^3+x^3}$$

$$=\frac{k}{3a}\int\frac{3k^2dx}{k^3+x^3}=\frac{k}{3a}\int\frac{(3k^2-3kx)+(3k^2+3kx)}{2(k^3+x^3)}dx$$

$$=\frac{k}{3a}\int\frac{3k^2-3kx}{2(k+x)(k^2-kx+x^2)}dx+\frac{k}{3a}\int\frac{3k}{2(k^2-kx+x^2)}dx$$

$$=\frac{k}{3a}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{3k(k^2-x^2)}{(k+x)^2(k^2-kx+x^2)}dx+\frac{k}{3a}\cdot\int\frac{\frac{2}{k}}{1+\frac{(2x-k)^2}{3k^2}}dx$$

$$=\frac{k}{6a}\int\left[\frac{2(k+x)}{(k+x)^2}-\frac{(2x-k)}{(k^2-kx+x^2)}\right]dx+\frac{\sqrt{3}k}{3a}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}k}dx}{1+\left(\frac{2x-k}{\sqrt{3}k}\right)^2}$$

$$=\frac{k}{6a}\cdot\ln\left|\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2}\right|+\frac{\sqrt{3}k}{3a}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-k}{\sqrt{3}k}\right)+c.$$

注 引入记号 k,将 $a+bx^3$ 化为立方和 k^3+x^3,再采用配项法,最后分为两大项求出积分.

4.3.38 求 $\int\frac{xdx}{a+bx^3}$, 其中 $a,b>0$.

解 记 $k^3=\frac{a}{b}$,则 $k=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$,故

$$\text{原式}=\frac{1}{b}\int\frac{xdx}{\frac{a}{b}+x^3}=\frac{1}{3bk}\int\frac{3kx}{k^3+x^3}dx$$

$$=\frac{1}{3bk}\int\frac{(3kx-3k^2)+(3kx+3k^2)}{2(k+x)(k^2-kx+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{6bk}\int\frac{3k(x^2-k^2)}{(k+x)^2(k^2-kx+x^2)}dx+\frac{1}{3bk}\int\frac{3k}{2(k^2-kx+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{6bk}\int\left[\frac{2x-k}{k^2-kx+x^2}-\frac{2(x+k)}{(k+x)^2}\right]dx+\frac{\sqrt{3}}{3bk}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}\,k}dx}{1+\left(\frac{2x-k}{\sqrt{3}\,k}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6bk}\ln\left|\frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3bk}\operatorname{arctg}\frac{2x-k}{\sqrt{3}\,k}+c.$$

4.3.39　求 $\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}$，其中 $a\neq0$，n 为正整数.

解　$\text{原式}=\frac{1}{a}\int\frac{adx}{x(a+bx^n)}=\frac{1}{a}\int\frac{(a+bx^n)-bx^n}{x\cdot(a+bx^n)}dx$

$$=\frac{1}{a}\int\left[\frac{1}{x}-\frac{bx^{n-1}}{(a+bx^n)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{a}\left[\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|a+bx^n|\right]+c$$

$$=\frac{1}{an}\ln\left|\frac{x^n}{a+bx^n}\right|+c.$$

4.3.40　求 $\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}$，且 $q=4ac-b^2>0$.

解　$\text{原式}=\int\frac{4cdx}{4ac+4bcx+4c^2x^2}$

$$=\int\frac{4cdx}{(4ac-b^2)+(4c^2x^2+4bcx+b^2)}$$

$$=\int\frac{4cdx}{q+(2cx+b)^2}=\int\frac{2}{\sqrt{q}}\cdot\frac{2c/\sqrt{q}}{1+\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}\right)^2}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{q}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}\right)+c_1.$$

注　采用配项法，化为基本公式型积分.

4.3.41　求 $\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2}$，且 $q = 4ac - b^2 > 0$，

解　原式 $= \frac{1}{q}\int \frac{4ac - b^2}{(a+bx+cx^2)^2}dx$

$$= \frac{1}{q}\int \frac{(2ac - b^2 - 2bcx - 2c^2x^2) + 2c(a+bx+cx^2)}{(a+bx+cx^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int \frac{2c(a+bx+cx^2) - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^2}dx + \frac{2c}{q}\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$

$$= \frac{2cx+b}{q(a+bx+cx^2)} + \frac{4c}{q\sqrt{q}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}\right) + c_1.$$

注　借助 **4.3.40** 题的结果，求得积分.

4.3.42　求 $\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3}$，且 $q = 4ac - b^2 > 0$.

解　原式 $= \frac{1}{q}\int \frac{4ac - b^2}{(a+bx+cx^2)^3}dx$

$$= \frac{1}{q}\int \frac{4c(a+bx+cx^2) - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^3}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int \frac{c(a+bx+cx^2) \cdot \left[1 + \frac{3}{q}(4ac - b^2)\right] - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^3}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int \frac{c(a+bx+cx^2) \cdot \left[1 + \frac{12c}{q}(a+bx+cx^2) - \frac{3}{q}(2cx+b)^2\right] - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^3}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int \frac{\frac{12c^2(a+bx+cx^2)^2}{q} + c(a+bx+cx^2)\left[1 - \frac{3}{q}(2cx+b)^2\right] - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^3}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int \left\{\frac{c(a+bx+cx^2) - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^3} + \frac{\frac{3c}{q}(a+bx+cx^2) \cdot \left[2c(a+bx+cx^2) - (2cx+b)^2\right] + \frac{6c^2}{q}(a+bx+cx^2)^2}{(a+bx+cx^2)^3}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{q}\int \left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{2c(a+bx+cx^2)^2 - 2(a+bx+cx^2)(2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^4} + \frac{3c}{q} \cdot \frac{2c(a+bx+cx^2) - (2cx+b)^2}{(a+bx+cx^2)^2} + \frac{6c^2}{q} \cdot \frac{1}{(a+bx+cx^2)}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2q} \cdot \frac{2cx+b}{(a+bx+cx^2)^2} + \frac{3c}{q^2} \cdot \frac{2cx+b}{(a+bx+cx^2)}$$

$$+\frac{6c^2}{q^2}\int\frac{1}{a+bx+cx^2}dx$$

$$=\frac{1}{2q}\cdot\frac{2cx+b}{(a+bx+cx^2)^2}+\frac{3c}{q^2}\cdot\frac{2cx+b}{a+bx+cx^2}$$

$$+\frac{12c^2}{q^2\sqrt{q}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}+c_1.$$

4.3.43 求 $\int\frac{x}{a+bx+cx^2}dx$，其中 $q=4ac-b^2>0,c\neq0$.

解 原式 $=\frac{1}{2c}\int\frac{2cx}{a+bx+cx^2}dx=\frac{1}{2c}\int\frac{(2cx+b)-b}{a+bx+cx^2}dx$

$$=\frac{1}{2c}\int[\frac{2cx+b}{a+bx+cx^2}-\frac{b}{a+bx+cx^2}]dx$$

$$=\frac{1}{2c}\ln|a+bx+cx^2|-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}$$

$$=\frac{1}{2c}\ln|a+bx+cx^2|-\frac{b}{c\sqrt{q}}\operatorname{arctg}\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}+c_1.$$

4.3.44 求 $\int\frac{x}{(a+bx+cx^2)^2}dx$，其中 $q=4ac-b^2>0$.

解 原式 $=-\frac{1}{q}\int\frac{(b^2-4ac)x}{(a+bx+cx^2)^2}dx$

$$=-\frac{1}{q}\int\frac{2b(a+bx+cx^2)-(bx+2a)(2cx+b)}{(a+bx+cx^2)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{q}\frac{[b(a+bx+cx^2)-(bx+2a)(2cx+b)]+b(a+bx+cx^2)}{(a+bx+cx^2)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{q}\cdot\frac{bx+2a}{a+bx+cx^2}-\frac{b}{q}\cdot\int\frac{1}{a+bx+cx^2}dx$$

$$=-\frac{1}{q}\cdot\frac{bx+2a}{(a+bx+cx^2)}-\frac{2b}{q\sqrt{q}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2cx+b}{\sqrt{q}}+c_1.$$

4.3.45 求 $\int\frac{x^2}{a+bx+cx^2}dx$，其中 $c\neq0,q=4ac-b^2>0$.

解 原式 $=\frac{1}{2c^2}\int\frac{2c^2x^2}{a+bx+cx^2}dx$

$$=\frac{1}{2c^2}\int\frac{2c(a+bx+cx^2)-b(2cx+b)+b^2-2ac}{a+bx+cx^2}dx$$

$$=\frac{1}{2c^2}\int[2c-\frac{b(2cx+b)}{a+bx+cx^2}+\frac{b^2-2ac}{a+bx+cx^2}dx$$

$$= \frac{1}{2c^2}\left[2cx - b\ln|a + bx + cx^2| + (b^2 - 2ac)\int \frac{dx}{a + bx + cx^2}\right]$$

$$= \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2}\ln|a + bx + cx^2| + \frac{b^2 - 2ac}{c^2\sqrt{q}}\text{arctg}\,\frac{2cx + b}{\sqrt{q}} + c_1.$$

4.3.46 求 $\int \frac{dx}{x(a + bx + cx^2)}dx$,其中 $a \neq 0, q = 4ac - b^2 > 0$.

解 原式 $= \frac{1}{2a}\int \frac{2adx}{x(a + bx + cx^2)}$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{[2(a + bx + cx^2) - x(2cx + b)] - bx}{x \cdot (a + bx + cx^2)}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(a + bx + cx^2) \cdot [2x(a + bx + cx^2) - x^2 \cdot (2cx + b)]}{x^2 \cdot (a + bx + cx^2)^2}dx$$

$$- \frac{b}{2a}\int \frac{1}{a + bx + cx^2}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{a + bx + cx^2}\right| - \frac{b}{a\sqrt{q}} \cdot \text{arctg}\,\frac{2cx + b}{\sqrt{q}} + c_1.$$

4.3.47 试求 $I = \int \frac{dx}{(x + a)^m \cdot (x + b)^n}$,其中 m 与 n 为自然数,并利用此公式,求 $\int \frac{dx}{(x - 2)^2 \cdot (x + 3)^3}$.

解 令 $t = \frac{x + a}{x + b}$, 则 $1 - t = \frac{b - a}{x + b}$, $x + b = \frac{b - a}{1 - t}$,

$dt = \frac{b - a}{(x + b)^2}dx = \frac{(1 - t)^2}{b - a}dx$, $dx = \frac{b - a}{(1 - t)^2}dt$ 及 $x + a = \frac{t(b - a)}{1 - t}$,

将上面各式代入 I,如果 $a \neq b$,则得

$$I = \frac{1}{(b - a)^{m+n-1}}\int \frac{(1 - t)^{m+n-2}}{t^m}dt,$$

将上式中 $(1 - t)^{m+n-2}$ 按牛顿二项式展开,分项后即可求得积分 I.

如果 $a = b$,则得

$$I = \int \frac{dx}{(x + a)^{m+n}} = \frac{1}{1 - m - n} \cdot \frac{1}{(x + a)^{m+n-1}} + c,$$

对于积分 $\int \frac{dx}{(x - 2)^2 \cdot (x + 3)^3}$, $a = -2, b = 3, m = 2$ 及 $n = 3$,

作变换 $t = \frac{x - 2}{x + 3}$,则得

$$\int \frac{dx}{(x - 2)^2 \cdot (x + 3)^3} = \frac{1}{5^4} \cdot \int \frac{(1 - t)^3}{t^2}dt$$

$$= \frac{1}{5^4} \cdot \int \left[\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t\right] dt$$

$$= \frac{1}{625}\left[-\frac{1}{t} - 3\ln|t| + 3t - \frac{t^2}{2}\right] + c$$

$$= \frac{1}{625}\left[-\frac{x+3}{x-2} - 3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + 3\cdot\frac{x-2}{x+3} - \frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\right] + c.$$

3. 待定系数法

4.3.48　在什么条件下，不定积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数?

解　将被积函数化为部分分式之和，令

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3\cdot(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2}.$$

通分后去分母，得

$$ax^2+bx+c = Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$x^4:\quad A + D = 0,$$
$$x^3:\quad -2A + B - D + E = 0,$$
$$x^2:\quad A - 2B + C = a,$$
$$x:\quad B - 2C = b,$$
$$x^0:\quad C = c.$$

求解上面方程组，得 $A = a + 2b + 3c$，　$B = b + 2c$，　$C = c$，$D = -(a + 2b + 3c)$，　$E = a + b + c$.

当 $A = D = 0$，即 $a + 2b + 3c = 0$ 时，不定积分

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx = -\frac{B}{x} - \frac{C}{2x^2} - \frac{E}{(x-1)} + C_1$$

为有理函数.(不含对数函数项).

4.3.49　在什么条件下，不定积分 $\int \frac{2x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$ 为有理函数?

解　(1) 当 $a \neq 0$，且 $b^2 - ac = 0$ 时，有

$$ax^2 + 2bx + c = a(x - x_0)^2,$$

其中 x_0 为实数，此时

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$
$$=\frac{\alpha(x-x_0)^2+2\alpha x_0(x-x_0)+\alpha x_0^2+2\beta(x-x_0)+2\beta x_0+\gamma}{a^2\cdot(x-x_0)^4}$$
$$=\frac{\alpha}{a^2(x-x_0)^2}-\frac{2\alpha x_0+2\beta}{a^2\cdot(x-x_0)^3}+\frac{\alpha x_0^2+2\beta x_0+\gamma}{a^2\cdot(x-x_0)^4},$$

由此可知,原不定积分为有理函数.

(2) 当 $a\neq 0$ 且 $b^2-ac\neq 0$ 时,令

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}=\left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\right)'+\frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c},$$

从而 $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=A(ax^2+2bx+c)-(2ax+2b)\cdot(Ax+B)+(Cx+D)(ax^2+2bx+c).$

比较等式两端 x 的同次幂系数,可解得

$$C=0,\quad D=\frac{2b\beta-a\gamma-c\alpha}{2(b^2-ac)}.$$

从而当 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 时,$D=0$,这时原不定积分为有理函数.

(3) 当 $a=0,b\neq 0$ 时,有

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$
$$=\frac{\alpha(x+\frac{c}{2b})^2-\frac{\alpha c}{b}(x+\frac{c}{2b})+\frac{\alpha c^2}{4b^2}+2\beta(x+\frac{c}{2b})-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2(x+\frac{c}{2b})^2}$$
$$=\frac{\alpha}{4b^2}+\frac{2\beta-\frac{\alpha c}{b}}{4b^2(x+\frac{c}{2b})}+\frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2}-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\cdot(x+\frac{c}{2b})^2}.$$

故当 $2\beta-\frac{\alpha c}{b}=0$,即 $\alpha c=2b\beta$ 时,原不定积分为有理函数.(这种情况可归并到 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 的情形中).

(4) 当 $a=b=0,c\neq 0$ 时,原不定积分显然为有理函数.(这种情况可归并到 $b^2-ac=0$ 的情形中).

综上所述,当 $b^2-ac=0$ 或 $a\gamma+c\alpha=2b\beta$ 时,

$$\int\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$$

为有理函数.

4.3.50　求 $\int \frac{1}{x^3+1}dx$.

解　将被积函数化为部分分式之和，令

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

通分后去分母，得

$$1=A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+C).$$

将上式右边展开，比较 x^2、x 及常数项系数，得

$$x^2:\quad A+B=0,$$
$$x:\quad -A+B+C=0,$$
$$x^0:\quad A+C=1.$$

解此方程组，得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$.

$$\text{故原式}=\int\frac{\frac{1}{3}dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|+\int\frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

4.3.51　求 $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

解　将被积函数化为部分分式之和，令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$
$$=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

通分后两端去分母，得

$$1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

将上式右端展开，并比较 x 的各次幂的系数，得

$$x^3:\quad 0=A+C,$$

x^2: $0 = -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D,$

x: $0 = A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D$

x^0: $1 = B + D.$

解上面方程组，得

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4},\ B = \frac{1}{2},\ C = -\frac{\sqrt{2}}{4},\ D = \frac{1}{2}.$$

$$\text{故原式} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|x^2 + \sqrt{2}x + 1\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arctg}(\sqrt{2}x + 1)$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{8}\ln|x^2 - \sqrt{2}x + 1| + \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} + c_1.$$

4.3.52 求 $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

解 将被积函数分解为部分分式之和，令

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

通分后比较分子，得

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

令 $x = -1$，得 $A = -\frac{1}{2}$，令 $x = -2$，得 $B = 2$，

令 $x = -3$，得 $C = -\frac{3}{2}$，

$$\text{故}\quad \text{原式} = \int \left[\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + c.$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + c.$$

4.3.53　求 $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$.

解　被积函数是有理真分式,将其分母分解因式,得

$$x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+5x+6)$$
$$= (x+1)(x+2)(x+3),$$

将被积函数分解为部分分式之和,令

$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3},$$

通分并比较分子,得

$$x+4 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3)$$
$$+ C(x+1)(x+2).$$

令 $x=-1$,得 $A=\frac{3}{2}$, 令 $x=-2$,得 $B=-2$,

令 $x=-3$,得 $C=\frac{1}{2}$,

于是,有　$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{\frac{3}{2}}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3},$$

故　原式 $= \int \left[\frac{\frac{3}{2}}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}\right]dx$

$$= \frac{3}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + c.$$

4.3.54　求 $\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$.

解　将被积函数化为部分分式之和,令

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x-5},$$

通分后两端去分母,得

$$4x^2+4x-11 = A(2x+3)(2x-5) + B(2x-1)(2x-5)$$
$$+ C(2x-1)(2x+3),$$

令 $x=\frac{1}{2}$,得 $A=\frac{1}{2}$, 令 $x=-\frac{3}{2}$,得 $B=-\frac{1}{4}$,

令 $x=\frac{5}{2}$，得 $C=\frac{3}{4}$.

故　原式 $=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{2x+3}+\frac{\frac{3}{4}}{2x-5}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{8}\ln|2x+3|+\frac{3}{8}\ln|2x-5|+c$

$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2\cdot(2x-5)^3}{(2x+3)}\right|+c.$

4.3.55　求 $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}$.

解法 1　将被积函数分解为部分分式之和，令

$$\frac{x^2}{(x-1)^5}=\frac{A}{(x-1)^5}+\frac{B}{(x-1)^4}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1},$$

通分并去分母，得

$$x^2=A+B(x-1)+C(x-1)^2+D(x-1)^3+E(x-1)^4,$$

将上式右边展开，并比较两边 x 的各次幂的系数，求得

$$A=1,\ B=2,\ C=1,\ D=0,\ E=0.$$

故　原式 $=\int\left[\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{2}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]dx$

$=-\frac{1}{4(x-1)^4}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{2(x-1)^2}+c.$

解法 2　令 $(x-1)=t$，则 $dx=dt$，

故　原式 $=\int\frac{(t+1)^2}{t^5}dt=\int\left[\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t^4}+\frac{1}{t^5}\right]dt$

$=-\frac{1}{2t^2}-\frac{2}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}+c$

$=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}+c.$

注　先作变量代换，再按二项式展开，然后分项积分.

4.3.56　求 $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

解　将被积函数分解为部分分式之和，令

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{(x+3)^3}.$$

通分并去分母，得

$$\begin{aligned}1=&A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3\\&+C(x+1)(x+3)^3+D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2\\&+E(x+1)(x+2)^2(x+3)+F(x+1)(x+2)^2,\end{aligned}$$

令 $x=-1$，得 $A=\frac{1}{8}$，令 $x=-2$，得 $C=-1$，

令 $x=-3$，得 $F=-\frac{1}{2}$，

再将上面方程右边展开，比较 x^5、x^4 及 x^3 项的系数，得

x^5: $A+B+D=0$,

x^4: $13A+12B+C+11D+E=0$,

x^3: $67A+56B+10C+47D+8E+F=0$.

代入 A、C 及 F 的值，求解得

$$B=2,\quad D=-\frac{17}{8},\quad E=-\frac{5}{4},$$

$$\begin{aligned}\text{故原式}=&\int\Big[\frac{1}{8(x+1)}+\frac{2}{(x+2)}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{17}{8(x+3)}\\&-\frac{5}{4(x+3)^2}-\frac{1}{2(x+3)^3}\Big]dx\\=&\frac{1}{8}\ln|x+1|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-\frac{17}{8}\ln|x+3|\\&+\frac{5}{4(x+3)}+\frac{1}{4(x+3)^2}+c\\=&\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+c.\end{aligned}$$

4.3.57 求 $\int\frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

解 将被积函数分解为部分分式之和，令

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}&=\frac{1}{(x-1)^2\cdot(x+1)^3}\\&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3},\end{aligned}$$

通分并去分母，得

$$\begin{aligned}1=&A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2(x+1)^2\\&+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2.\end{aligned}$$

令 $x=1$，得 $B=\frac{1}{8}$，令 $x=-1$，得 $E=\frac{1}{4}$，

令 $x=0$，$-A+B+C+D+E=1$，

令 $x=0$，$27A+27B+9C+3D+E=1$，

令 $x=-2$，$3A-B+9C-9D+9E=1$，

将它们联立求解，得 $A=\frac{-3}{16}$，$C=\frac{3}{16}$，$D=\frac{1}{4}$，

$$\text{故原式}=\int\left[-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^3}\right]dx$$

$$=-\frac{3}{16}\ln|x-1|-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\ln|x+1|-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)^2}+c$$

$$=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3x^2+3x-2}{8(x+1)(x+1)^2}+c.$$

4.3.58 求 $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$.

解 将被积函数的分母作因式分解，得

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

设 $$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1},$$

通分并去分母，得

$$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1),$$

令 $x=0$，得 $A=-1$，令 $x=1$，得 $C=\frac{1}{3}$，将所得之系数代入上面恒等式，得

$$1=-1(x-1)(x^2+x+1)+B(x^4-x)+\frac{1}{3}(x^4+x^3+x^2)+Dx^4-Ex^3-Dx^3-Ex^2.$$

把等式右边展开，比较 x^4、x^3 和 x^2 项的系数，得

$$\begin{cases} B+\frac{1}{3}+D=0, \\ -1+\frac{1}{3}-D+E=0. \\ \qquad\qquad \frac{1}{3}-E=0. \end{cases}$$

解此方程组，得 $B=0, D=\frac{-1}{3}, E=\frac{1}{3}$，于是

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)},$$

故 $\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}dx$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

4.3.59　求 $\int\frac{5x^3+8x^2+12x-5}{x^4+3x^3+x^2-5x}dx.$

解　将被积函数分母分解因式，得

$$x^4+3x^3+x^2-5x=x(x-1)(x^2+4x+5),$$

再将被积函数化为部分分式之和，令

$$\frac{5x^3+8x^2+12x-5}{x^4+3x^3+x^2-5x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+4x+5}$$

两端去分母，得

$$5x^3+8x^2+12x-5=(A+B+C)x^3+(3A+4B-C+D)x^2+(A+5B-D)x-5A,$$

比较等式两边 x 的同次幂的系数，得

x^3: $A+B+C=5$,

x^2: $3A+4B-C+D=8$,

x: $A+5B-D=12$.

x^0: $-5A=-5$.

解此方程组，得 $A=1$, $B=2$, $C=2$, $D=-1$.

$$\text{故原式}=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{2x-1}{x^2+4x+5}dx$$
$$=\ln|x|+2\ln|x-1|+\int\frac{(2x+4)-5}{x^2+4x+5}dx$$
$$=\ln[|x|\cdot(x-1)^2\cdot(x^2+4x+5)]-5\operatorname{arctg}(x+2)+c.$$

4.3.60 求 $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

解 将被积函数的分母分解因式，得

$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

将被积函数分解为部分分式之和，令

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1},$$

通分并去分母，得

$$1=A(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+x+1),$$

比较等式两边 x^4、x^3、x^2、x 及 x^0 项的系数，得

x^4: $A+B+D=0$,

x^3: $-2B+C+E=0$,

x^2: $A+2B-2C=0$,

x: $-B+2C-D=0$,

x^0: $A-C-E=1$,

解此方程组，得

$$A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=-\frac{1}{6},\ D=0,\ E=-\frac{1}{2},$$

$$\text{故原式}=\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2-x+1)}\right]dx$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c.$$

4.3.61 求 $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)(x+c)}$，其中 a,b,c 互不相等.

解 将被积函数化为部分分式之和，令

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{x+c},$$

通分并去分母，得

$$1 = A(x+b)(x+c) + B(x+a)(x+c) + C(x+a)(x+b),$$

x 分别取 $-a, -b, -c$,得

$$A = \frac{1}{(a-b)(a-c)},\ B = \frac{1}{(b-a)(b-c)},\ C = \frac{1}{(c-a)(c-b)},$$

故原式$= \int \left[\frac{1}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x+a} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{x+b} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{x+c}\right] dx$

$$= \frac{1}{(a-b)(a-c)} \cdot \ln|x+a| + \frac{1}{(b-a)(b-c)} \cdot \ln|x+b| + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \cdot \ln|x+c| + c_1.$$

4.3.62　求 $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+g)}$,其中 a,b,c,g 互不相等.

解　仿前题方法将被积函数化为部分分式之和,得

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+g)} = \frac{1}{(b-a)(c-a)(g-a)} \cdot \frac{1}{(x+a)} + \frac{1}{(a-b)(c-b)(g-b)} \cdot \frac{1}{x+b} + \frac{1}{(a-c)(b-c)(g-c)} \cdot \frac{1}{(x+c)} + \frac{1}{(a-g)(b-g)(c-g)} \cdot \frac{1}{x+g}.$$

故原式$= \frac{1}{(b-a)(c-a)(g-a)} \cdot \ln|x+a| + \frac{1}{(a-b)(c-b)(g-b)} \cdot \ln|x+b| + \frac{1}{(a-c)(b-c)(g-c)} \cdot \ln|x+c| + \frac{1}{(a-g)(b-g)(c-g)} \cdot \ln|x+g| + c_1.$

4.3.63　求 $\int \frac{dx}{(a+bx^2)(k+lx^2)}$,其中 $bk \neq al, ab > 0, kl > 0$.

解　将被积函数化为部分分式之和,令

$$\frac{1}{(a+bx^2)(k+lx^2)}=\frac{px+q}{a+bx^2}+\frac{rx+s}{k+lx^2},$$

通分并去分母，得

$$1=(px+q)(k+lx^2)+(rx+s)(a+bx^2).$$

把上式右端展开并比较 x 的各次幂的系数，得

$$p=r=0,\quad q=\frac{b}{bk-al},\quad s=\frac{l}{bk-al}.$$

故原式 $=\int\left[\frac{b}{bk-al}\cdot\frac{1}{a+bx^2}+\frac{l}{bk-al}\cdot\frac{1}{k+lx^2}\right]dx$

$$=\frac{b}{bk-al}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ab}}{a}+\frac{l}{bk-al}\cdot\frac{1}{\sqrt{kl}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{kl}}{k}+c.$$

4.3.64 求 $\int\frac{m+nx}{(k+lx)(a+bx+cx^2)}dx.$

解 将被积函数化为部分分式之和，令

$$\frac{m+nx}{(k+lx)(a+bx+cx^2)}=\frac{p}{k+lx}+\frac{Ax+B}{a+bx+cx^2},$$

通分去分母，得

$$m+nx=p(a+bx+cx^2)+(k+lx)(Ax+B),$$

把上式右端展开，并比较 x 的各次幂的系数，得

$$p=\frac{l(ml-nk)}{al^2+ck^2-bkl},\ A=\frac{c(nk-ml)}{al^2+ck^2-bkl},$$

$$B=\frac{aln+ckm-blm}{al^2+ck^2-bkl},$$

故原式 $=\frac{ml-nk}{al^2+ck^2-bkl}\cdot\ln|k+lx|+\int\frac{Ax+B}{a+bx+cx^2}dx$

注 对于上式第二项，代入上面 A、B 之值，再使用前面有关积分公式，即可求得.

4.3.65 求 $\int\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx.$

解 由于被积函数是有理假分式，先将其化为有理整式与有理真分式之和：

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}=x+\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2},$$

再将第二项的有理真分式分解为部分分式之和，令

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2\cdot(x+2)^2}$$

$$= \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)}.$$

通分并比较分子，得：

$$8x^3 - 16x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-2)^2(x+2),$$

令 $x = 2$，得 $A = \frac{33}{16}$，令 $x = -2$，得 $C = \frac{-31}{16}$，

令 $x = 0$，得 $1 = 4A - 8B + 4C + 8D$，并将 A、C 之值代入得

$$1 = \frac{33}{4} - 8B - \frac{31}{4} + 8D.\ 即\ -16B + 16D = 1.$$

比较上面待定方程中 x^3 项的系数，得 $8 = B + D$.

求解方程组 $\begin{cases} -16B + 16D = 1, \\ B + D = 8. \end{cases}$ 解得 $B = \frac{127}{32}$，$D = \frac{129}{32}$，

$$故原式 = \int \left[x + \frac{33}{16(x+2)^2} + \frac{127}{32(x+2)} - \frac{31}{16(x+2)^2} + \frac{129}{32(x+2)}\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32}\ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32}\ln|x+2| + c.$$

4.3.66　求 $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

解　被积函数为假分式，故

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$$

再将第二项的真分式分解为部分分式之和，令

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

通分后比较分子，得

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2),$$

令 $x = 0$，得 $A = \frac{1}{6}$，令 $x = 2$，得 $B = -\frac{9}{2}$，

令 $x = 3$，得 $C = \frac{28}{3}$，

故原式$=\int[1+\frac{6}{x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}]dx$

$=x+6\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c.$

4.3.67 求$\int\frac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)}dx.$

解 被积函数为假分式,它可化为

$$\frac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)}=x+1+\frac{2}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$=x+1+\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}.$$

故原式$=\int(x+1)dx+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}$

$=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\text{arctg}x+c.$

4.3.68 求$\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+18x-3}{x^2-5x+6}dx.$

解 利用多项式除法,得

$$\frac{x^4-3x^3-5x^2+18x-3}{x^2-5x+6}=(x^2+2x-1)+\frac{x+3}{x^2-5x+6},$$

再把上面真分式化为部分分式之和,令

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

去分母,得 $x+3=A(x-3)+B(x-2)$,

令 $x=2$,得 $A=-5$,令 $x=3$,得 $B=6$.

故原式$=\int(x^2+2x-1)dx+\int\frac{-5}{x-2}dx+\int\frac{6}{x-3}dx$

$=\frac{x^3}{3}+x^2-x-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+c.$

4.奥斯特洛格拉特斯基方法

奥斯特洛格拉特斯基方法就是在有理真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$的不定积分中,借助代数方法将有理真分式分成一个真分式与另一真分式的导数之和,使得在新的被积真分式中,其分母次数达到最低,即

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}]'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)},\tag{1}$$

如果 $P(x),Q(x)$ 已知,且 $Q(x)$ 可分解成一次与二次实因式的积:

$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots$. 其中 $k,\cdots,m$ 为自然数，则由(1)积分，得

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \tag{2}$$

这时公式(2)右端的分母形如

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$
$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$. 而 $P_1(x)$、$P_2(x)$ 为相应的比 $Q_1(x)$、$Q_2(x)$ 次数更低的多项式，一般可用待定系数法求得.

这种利用公式(2)求有理真分式的不定积分的方法叫做奥斯特洛格拉特斯基方法，详见格·马·菲赫金哥尔茨著(丁寿田译)，"数学分析原理"，第一卷第二分册 $P_{323-325}$.

4.3.69　求 $\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

解　将被积函数分解为如下待定形式：

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

通分后比较分子，得

$$x^2+3x-2=A(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)\cdot(Ax+B)\cdot(x-1)+(Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1),$$

比较等式两边 x 的同次幂的系数，得

$$x^4:\quad C=0,$$
$$x^3:\quad -A+C+D=0,$$
$$x^2:\quad A-2B+C+D+E=1,$$
$$x:\quad A+B+D+E=3,$$
$$x^0:\quad -A+B+E=-2,$$

解上面方程组，得

$$A=\frac{5}{3},\ B=\frac{2}{3},\ C=0,\ D=\frac{5}{3},\ E=-1,$$

于是，$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'$

$$+\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

再将上式右边第二项分解为部分分式之和，得

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{\frac{2}{9}}{(x-1)}+\frac{-\frac{2}{9}x+\frac{11}{9}}{x^2+x+1}.$$

故　原式$=\int\left(\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}\right)'dx+\int\left[\frac{\frac{2}{9}}{x-1}+\frac{-\frac{2}{9}x+\frac{11}{9}}{x^2+x+1}\right]dx$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{4}{3}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right|+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

4.3.70　求 $\int\frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

解　将被积函数分解为如下待定形式

$$\frac{1}{(x^4+1)^2}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)'+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}.$$

通分后比较分子，得

$$1=(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)\cdot(x^4+1).$$

比较等式两边 x 的同次幂的系数，得

x^7:　$E=0$,

x^6:　$-A+F=0$,

x^5:　$-2B+G=0$,

x^4:　$-3C+H=0$,

x^3:　$-4D+E=0$,

x^2:　$3A+F=0$,

$$x:\quad 2B+G=0,$$
$$x^0:\quad C+H=1,$$

解上面方程组,得

$$A=0,B=0,C=\frac{1}{4},D=0,E=0,F=0,G=0,H=\frac{3}{4},$$

$$\text{故原式}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}x}{x^4+1}\right)'dx+\int\frac{\frac{3}{4}}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|$$
$$-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}+c.$$

4.3.71　求 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

解　将被积函数分解为如下待定形式:

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}=\left(\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}\right)'+\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+x^2+1},$$

通分后比较分子,得

$$x^2+1=(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+x^2+1),$$

比较等式两边 x 的同次幂的系数,得到 8 个方程式,将它们联立求解,得

$$A=\frac{1}{6},B=0,C=\frac{1}{3},D=0,E=0,F=\frac{1}{6},G=0,H=\frac{2}{3},$$

于是

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}=\left(\frac{\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{3}x}{x^4+x^2+1}\right)'+\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}}{x^4+x^2+1},$$

再将上式右边第二项分解为部分分式之和,令

$$\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}}{x^4+x^2+1}=\frac{Mx+N}{x^2+x+1}+\frac{Px+Q}{x^2-x+1},$$

两边去分母后，得

$$\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}=(Mx+N)(x^2-x+1)$$
$$+(Px+Q)(x^2+x+1).$$

比较上式两边 x 的各同次幂的系数，得

x^3: $0=M+P$,

x^2: $\frac{1}{6}=-M+N+P+Q$,

x: $0=M-N+P+Q$,

x^0: $\frac{2}{3}=N+Q$.

解上面方程组，得

$$M=\frac{1}{4},N=\frac{1}{3},P=-\frac{1}{4},Q=\frac{1}{3},$$

于是有 $$\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}}{x^4+x^2+1}=\frac{\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}+\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{\frac{5}{24}}{x^2+x+1}$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\frac{5}{24}}{x^2-x+1}.$$

故原式 $$=\int\left(\frac{\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{3}x}{x^4+x^2+1}\right)'dx+\int\frac{\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3+2x}{x^4+x^2+1}+\int\frac{1}{8}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{\frac{5}{24}}{x^2+x+1}dx$$

$$-\int\frac{1}{8}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\int\frac{\frac{5}{24}}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{x^3 + 2x}{6(x^4 + x^2 + 1)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right| + \frac{5\sqrt{3}}{36}\text{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{5\sqrt{3}}{36}\text{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c.$$

5. 综合问题

4.3.72　求积分 $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}$.

解　在递推公式

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}$$

中,取 $n = 3$,得

$$I_3 = \frac{1}{2(3-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{3-1}} + \frac{2 \times 3 - 3}{2 \times 3 - 2} \cdot I_{3-1}$$

$$= \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}I_2.$$

再取 $n = 2$,得

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{2-1}} + \frac{2 \times 2 - 3}{2 \times 2 - 2}I_{2-1}$$

$$= \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2}\text{arctg}x + c_1.$$

故　$$I_3 = \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2}\text{arctg}x + c_1\right]$$

$$= \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3x}{8(x^2 + 1)} + \frac{3}{8}\text{arctg}x + c.$$

4.3.73　导出计算积分 $I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, $a \neq 0$ 的递推公式,并求 $I_3 = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + 1)^3}$.

解　$4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + (4ac - b^2) = t^2 + \Delta$,
其中 $t = 2ax + b$, $\Delta = 4ac - b^2$, $dt = 2adx$,于是有

$$I_n = \int \frac{(4a)^n dx}{[4a(ax^2 + bx + c)]^n} = \int \frac{(4a)^n dt}{2a[t^2 + \Delta]^n}$$

$$= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n},$$

(1) 当 $\Delta \neq 0$ 时,对于积分$\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$应用分部积分法,得

$$\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + n\int \frac{2t^2}{(t^2+\Delta)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n\int \frac{(t^2+\Delta)-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n\int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n} - 2n\int \frac{\Delta dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}$$

若记 $\bar{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$,那么上式化为

$$\bar{I}_n = \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + 2n \cdot \bar{I}_n - 2n\Delta \cdot \bar{I}_{n+1},$$

于是得 $\bar{I}_{n+1} = \frac{1}{2n\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^n} + \frac{2n-1}{2n\Delta}\bar{I}_n,$

$$\bar{I}_n = \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\Delta} \cdot \bar{I}_{n-1},$$

故 $I_n = 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \bar{I}_n$

$$= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \left[\frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1) \cdot \Delta}\bar{I}_{n-1}\right]$$

$$= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \left[\frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{2a}{(4a)^{n-1}} \cdot \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

(2) 当 $\Delta = 0$ 时,有

$$I_n = \int \frac{(4a)^n}{(2ax+b)^{2n}}dx = 2^{2n-1} \cdot a^{n-1}\int \frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}$$

$$= \frac{1}{a^n \cdot (1-2n)} \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^{1-2n} + c.$$

当 $n = 3$ 时,有

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3},\ \Delta = 4 \times 1 \times 1 - 1^2 = 3 \neq 0,$$

两次应用上面递推公式,得

$$I_3=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2\times 3-3}{3-1}\cdot\frac{2\times 1}{3}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$+\frac{2\times 2-3}{2-1}\cdot\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

4.3.74　求 $\int\frac{x^6}{(x^2-1)^2}dx$.

解　将被积函数分子 $x^6=(x^2)^3$ 用泰勒公式在 $x^2=1$ 处展开，得

$$x^6=1+3(x^2-1)+3(x^2-1)^2+(x^2-1)^3,$$

于是
$$\frac{x^6}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{(x^2-1)^2}+\frac{3}{(x^2-1)}+3+(x^2-1),$$

$$原式=\int\left[(x^2-1)+3+\frac{3}{(x^2-1)}+\frac{1}{(x^2-1)^2}\right]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+2x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx.$$

对上式右边最后一项作变换，令 $t=\frac{x-1}{x+1}$，则

$$x-1=\frac{2t}{1-t},\ x+1=\frac{2}{1-t},\ dx=\frac{2dt}{(1-t)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}=\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=\int\frac{(1-t)^2}{4t^2}\cdot\frac{(1-t)^2}{4}\cdot\frac{2dt}{(1-t)^2}$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(1-t)^2}{t^2}dt=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1\right)dt$$

$$=-\frac{1}{8t}-\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{8}t+c$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-1}{x+1}+c$$

$$=\frac{x}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c,$$

故原式 $=\frac{x^3}{3}+2x+\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{x}{2(1-x^2)}+c.$

4.3.75 已知 n 次多项式 $p_n(x)=a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots+a_n$，试求不定积分 $\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx$.

解 根据泰勒公式，有

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\text{，其中 } p_n^{(0)}(a)=p_n(a),0!=1.$$

于是 $\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\int\frac{dx}{(x-a)}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_n^{(k)}(a)}{(n-k)\cdot k!}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-k}}+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+c.$$

其中 $\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}=a_{n-k}$，$(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是多项式 $p_n(x)$ 各项的系数，

即 $p_n(x)=a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x-a)+a_n$.

4.3.76 求 $\int\frac{dx}{1+x^{2n}}$，其中 n 为自然数.

解 先将被积函数分解为部分分式之和，可以证明，

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cdot\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cdot\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

事实上，记方程 $1+x^{2n}=0$ 的 $2n$ 个根为 a_k，$(k=1,2,\cdots,2n)$

则 $a_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+i\cdot\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$，$(k=1,2,\cdots,2n)$

由于 $1+x^{2n}=\prod_{k=1}^{2n}(x-a_k)$，故 $\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-a_k}$，

即 $1=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k\cdot(1+x^{2n})}{x-a_k}$，

当 $x\to a_i$ 时，应用洛必塔法则求极限，得

$$1=\lim_{x\to a_i}\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}=\lim_{x\to a_i}\frac{A_i(1+x^{2n})}{x-a_i}$$

$$=\lim_{x\to a_i}2nA_ix^{2n-1}=2nA_i\cdot\frac{a_i^{2n}}{a_i}=\frac{-2nA_i}{a_i}，(i=1,2,\cdots,2n)$$

所以 $A_i = -\frac{a_i}{2n}, (i = 1, 2, \cdots, 2n).$

于是 $\frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{a_k}{x-a_k},$

又由共轭复数间的关系：$a_k \cdot \bar{a}_k = 1, a_k + \bar{a}_k = 2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$，得

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{a_k}{x-a_k} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{x-a_k}+\frac{\bar{a}_k}{x-\bar{a}_k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+\bar{a}_k)x - 2a_k\bar{a}_k}{x^2-(a_k+\bar{a}_k)x + a_k\cdot\bar{a}_k}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1 - x\cdot\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x\cdot\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + 1},$$

故 $$\int\frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1 - x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cdot\int\frac{dx}{(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi)^2+\sin^2(\frac{2k-1}{2n}\pi)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cdot\ln\left|x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right|\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)}{\sin(\frac{2k-1}{2n}\pi)}\right]+c.$$

§ 4　简单无理函数的积分法

内容提要

1. 形如 $\int R[x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\cdots]dx$ 的积分

设 $R(u,v,w,\cdots)$ 是变量为 $u,v,w,\cdots$ 的有理函数，$m_1,n_1,m_2,n_2,\cdots$ 是整数. 利用变量代换 $ax+b=t^s$，(s 是 $n_1,n_2,\cdots$ 的最小公倍数)，可以把形如

$$\int R[x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\cdots]dx$$

的积分化为有理函数的积分.

2. 形如 $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的积分(其中 $a\neq 0$)

通过从二次三项式中分出完全平方项，把这种积分化为利用基本积分公式来求解.

3. 形如 $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 的积分(其中 $a\neq 0$)

为求这种类型的积分，首先在分子中分解出根式下的二次三项式的导数，然后把积分分成两个积分之和来求：

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

4. 形如 $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ 的积分

利用变量代换 $x=\frac{1}{t}$，把此类积分化为如上 2、3 的形式来求解.

5. 形如 $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 的积分

设 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，求此类积分时，利用恒等式：

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\ \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

其中 $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式，系数待定，λ 为实数.

恒等式两边同时对 x 求导数，然后通分并去分母，由此得两个多项式的恒等式，由此恒等式求出多项式 $Q_{n-1}(x)$ 的系数和实数 λ.

6. 微分二项式的积分 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$，其中 m,n,p 是有理数

契贝谢夫(чебышев)证明了只有在以下三种情况，微分二项式的积分才能通过初等函数表示出来.

1) p 是整数. 这时，如果作变量代换 $x=t^s$，(其中 s 是有理数 m 和 n 的分母的最小公倍数)，则该积分变为有理函数的积分；

2) $(m+1)/n$ 是整数. 在这种情形下，通过变量代换 $a+bx^n=t^s$，(其中 s 表示分数 p 的分母)，可以把相应的积分化为有理函数的积分；

3) $(m+1)/n+p$ 是整数. 在这种情形下，如果作变量代换 $ax^{-n}+b=t^s$，其中 s 是有理数 p 的分母，该积分可化为有理函数的积分.

问 题 与 解 答

1. 形如 $\int R[x,(ax+b)^{m_1/n_1},(ax+b)^{m_2/n_2},\cdots]dx$ 的积分

4.4.1 求 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

解 令 $t=\sqrt[4]{2x-1}$，则 $x=\dfrac{t^4+1}{2}$，$dx=2t^3dt$. 于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int\frac{2t^3dt}{t^2-t} = 2\int\frac{t^2dt}{t-1}$$

$$= 2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = (t+1)^2 + 2\ln|t-1| + c$$

$$= (\sqrt[4]{2x-1}+1)^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + c.$$

4.4.2 求 $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 令 $u=\sqrt{1+x^2}$，则

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{(1+x^2)+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du^2}{\sqrt{u^2+u^3}}=\int\frac{udu}{u\sqrt{1+u}}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u}}$$

$$=2\sqrt{1+u}+c=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+c.$$

4.4.3 求积分 $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

解 $$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c.$$

4.4.4 求 $\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

解法 1 $$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx=\int\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}dx=\int\frac{2+x}{\sqrt{2^2-x^2}}dx$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx+\int(2^2-x^2)^{\frac{1}{2}}d(2^2-x^2)(-\frac{1}{2})$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{2^2-x^2}+c.$$

解法 2 令 $\frac{2+x}{2-x}=t^2$,则 $x=\frac{2t^2-2}{1+t^2}$，于是

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx=\int t\frac{(1+t^2)\cdot 4t-(2t^2-2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=\int\frac{t[4t+4t]}{(1+t^2)^2}dt=8\int\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=8\int\frac{1}{1+t^2}dt-8\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt$$

$$=8\text{arctg}t-8[\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\text{arctg}t]+c$$

$$=4\text{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}-4\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}(1+\frac{2+x}{2-x})^{-1}+c$$

$$= 4\text{arctg}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} - \sqrt{2^2 - x^2} + c.$$

4.4.5　求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解　原式 $= \int \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}} = \int \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \frac{dx}{(x-1)^2}$,

令 $t = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$，则 $x = \frac{1+t^3}{1-t^3}$, $dx = \frac{6t^2dt}{(1-t^3)^2}$,

$$\text{原式} = \int t^2 \frac{1}{\left(\frac{1+t^3}{1-t^3} - 1\right)^2} \frac{6t^2dt}{(1-t^3)^2} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2}dt$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{t} + c = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + c.$$

4.4.6　求 $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx$.

解　令 $\sqrt{x^3+5} = t$，则 $x^3 + 5 = t^2, 3x^2dx = 2tdt$，即 $x^2dx = \frac{2}{3}tdt$.
故

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}dx = \int \sqrt{x^3+5}x^2dx = \int t\cdot\frac{2}{3}tdt$$

$$= \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{9}t^3 + c = \frac{2}{9}(\sqrt{x^3+5})^3 + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5} + c.$$

该积分也可以通过换元 $t = x^3 + 5$ 来求解. 因为被积式的第一个因子 x^2 与 $x^3 + 5$ 的导数只相差一常数因子 $\frac{1}{3}$，即 $x^2 = (\frac{1}{3})(x^3+5)'$，故通过换元 $t = x^3 + 5$ 可以立即把积分化为基本公式型.

4.4.7　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

解　被积函数可以写成 $x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{-10}$，作变量代换：$x = t^4, dx = 4t^3dt$. 于是，所求积分为：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}}.$$

而最后的积分为：

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}} = \int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt = \int \frac{dt}{(t+1)^9} - \int \frac{dt}{(t+1)^{10}}$$

$$= \int (t+1)^{-9}d(t+1) - \int (t+1)^{-10}d(t+1)$$

$$= -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + c.$$

于是，有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = -\frac{1}{8(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9} + c.$$

4.4.8 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx.$

解 令 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$，则 $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$，$dx = \frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}$. 故

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = -4\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}dt$$

$$= \int (\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1})dt$$

$$= \ln|t+1| - \ln|t-1| - 2\text{arctg}t + c$$

$$= \ln(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1) - \ln|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1| - 2\text{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c.$$

4.4.9 求 $\int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}}.$

解 令 $2x+1 = t^6$，则 $x = (t^6-1)/2$，$dx = 3t^5dt$. 从而，有

$$I = \int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}} = \int \frac{3t^5dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^2}{t-1}dt$$

$$= 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int (t+1+\frac{1}{t-1})dt$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + c$$

$$= \frac{3}{2}(2x+1)^{1/3} + 3(2x+1)^{1/6} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| + c.$$

4.4.10 求 $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$，$(a>0)$.

解　设$\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$，则$x=\frac{a}{1+t^4}$，$dx=-\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}dt$，代入得

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}}=-4a\int\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=-4a\int\left(\frac{t}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right)^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right)^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}+a\int\frac{dt}{t^4+1}$$

$$=-\frac{a}{2}\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right]$$

$$-\frac{a\sqrt{2}}{2}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)]$$

$$+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+c$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}+c.$$

其中$t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$，$(0<x<a)$.

4.4.11　求$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

解　设$\sqrt[3]{2+x}=t$，则$x=t^3-2$，$dx=3t^2dt$，代入得

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx=3\int\frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt$$

$$= 3\int (t^3 - t + \frac{t^2 - 2t}{t^3 + t - 2})dt$$

$$= \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + 3\int \left[-\frac{1}{4(t-1)} + \frac{\frac{5}{4}t - \frac{1}{2}}{t^2 + t + 2}\right]dt$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1|$$

$$+ \frac{15}{8}\int \frac{2t+1}{t^2+t+2}dt - \frac{27}{8}\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)$$

$$- \frac{27}{4\sqrt{7}}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + c.$$

其中 $t = \sqrt[3]{2+x}$.

4.4.12 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

解 原式 $= \int x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-2}dx$. 因为 $p = -2$ 是整数，所以可令 $x = t^6$，于是

$$\text{原式} = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt$$

$$= 6\int (t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2})dt$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\text{arctg}t - 6\int [\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}]dt$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t - 18\text{arctg}t - 6\text{arctg}t$$

$$+ 3\text{arctg}t + \frac{3t}{1+t^2} + c$$

$$= \frac{6}{5}t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21\text{arctg}t + c$$

$$= \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$
$$- 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + c.$$

4.4.13　求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解　设 $\sqrt{x} = \frac{t^2-1}{2t}\ (t>1)$，则

$$x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2,\quad dx = \frac{t^4-1}{2t^3}dt,\quad \sqrt{x+1} = \frac{t^2+1}{2t},$$
$$t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1},$$

代入得
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^3(t+1)}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(t - \ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) + c_1$$
$$= \sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) + \frac{x}{2}$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)} + c.$$

4.4.14　求 $\int \sqrt{x^2+x+1}dx$.

解法 1　令 $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$，则 $x + 1 = t^2 - 2tx$，

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t},\quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1},\quad dx = 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt.$$

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \int \frac{t^2+t+1}{2t+1}\cdot 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}dt$$
$$= \int \left(\frac{2t+1}{8} + \frac{24t^2+24t+15}{8(2t+1)^3}\right)dt.$$

设 $\frac{24t^2+24t+15}{8(2t+1)^3} = \frac{A}{2t+1} + \frac{B}{(2t+1)^2} + \frac{C}{(2t+1)^3}$，将等式右端通分并比较等式两端分子中 x 的同次幂的系数，得 $A = \frac{3}{4}$，$B = 0$，

$C=\frac{9}{8}$. 于是

$$\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\left(\frac{2t+1}{8}+\frac{3}{4(2t+1)}+\frac{9}{8(2t+1)^3}\right)dt$$

$$=\frac{t^2}{8}+\frac{t}{8}+\frac{3}{8}\ln|2t+1|-\frac{9}{32(2t+1)^2}+c.$$

(其中 $t=\sqrt{x^2+x+1}+x$)

解法 2 $\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$,

令 $u=x+\frac{1}{2}$,则 $dx=du$, $\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}du$,再令 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}t$, $t<\frac{\pi}{2}$, $du=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 tdt$.

$$\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\int\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\text{tg}^2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2tdt=\frac{3}{4}\int\sec^3tdt$$

$$=\frac{3}{4}\int(\sec t+\sec t\cdot\text{tg}^2t)dt$$

$$=\frac{3}{4}\int\sec tdt+\frac{3}{4}\int\text{tg}td(\sec t)$$

$$=\frac{3}{4}\int\sec tdt+\frac{3}{4}\text{tg}t\cdot\sec t-\frac{3}{4}\int\sec^3tdt$$

$$=\frac{3}{4}\int\sec tdt+\frac{3}{4}\text{tg}t\cdot\sec t-\int\sqrt{x^2+x+1}dx,$$

故 $\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\frac{3}{8}\int\sec tdt+\frac{3}{8}\text{tg}t\cdot\sec t$

$=\frac{3}{8}\ln|\sec t+\text{tg}t|+\frac{3}{8}\text{tg}t\cdot\sec t+c$

$=\frac{1}{2}[(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{4}\ln|x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}|]+c.$

解法 3 令 $u=x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}$,则

$$\frac{1}{u}=\frac{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x^2+x+1}}{-\frac{3}{4}},\ u+\frac{3}{4u}=2\sqrt{x^2+x+1},$$

$$u-\frac{3}{4u}=2x+1,\quad (1+\frac{3}{4u^2})du=2dx,$$

$$\int\sqrt{x^2+x+1}dx=\frac{1}{4}\int(u+\frac{3}{4u})(1+\frac{3}{4u^2})du$$

$$=\int(\frac{u}{4}+\frac{3}{8u}+\frac{9}{64u^3})du=\frac{u^2}{8}+\frac{3}{8}\ln|u|-\frac{9}{128u^2}+c.$$

(其中 $u=x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}$).

2. 形如 $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$、$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$、$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$、$\int\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ **的积分**

4.4.15　求 $\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x}}dx$.

解　$$\int\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^2-1}}d(2x+1)$$

令 $2x+1=\sec\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$,则

$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sec\theta)}{\mathrm{tg}\theta}=\frac{1}{2}\int\sec\theta d\theta=\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\theta|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x}|+c.$$

4.4.16　求 $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

解　由于 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$,故令 $x+1=\mathrm{tg}t$,则 $dx=\sec^2tdt$. 于是

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\sec^2tdt}{\mathrm{tg}^2t\cdot\sec t}=\int\frac{\cos t}{\sin^2t}dt$$

$$=-\frac{1}{\sin t}+c=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+c.$$

4.4.17　求 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

解　令 $\sqrt[6]{x+1}=t$，则 $dx=6t^5dt$，于是

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = 6\int \frac{(1-t^3)t^5}{1+t^2}dt$$

$$= 6\int (-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1})dt$$

$$= -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t + 3\ln(t^2+1)-6\text{arctg}t+c$$

$$= -\frac{6}{7}(x+1)\sqrt[6]{(x+1)}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{(x+1)}-3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1}+3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)-6\text{arctg}\sqrt[6]{x+1}+c.$$

4.4.18　求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解　设 $\frac{x-1}{x+1}=t$，则

$$\text{原式}=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4}(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$$

$$= -\frac{3}{2}t^{-\frac{1}{3}}+c = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+c.$$

4.4.19　求 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解　设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos tdt$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$，代入得

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$= \int \frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}\,\text{tg}t)}{(\sqrt{2}\,\text{tg}t)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}t)+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+c.$$

4.4.20　求积分 $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$.

解　设 $x=a\operatorname{tg}t$，则 $dx=a\sec^2tdt$. 从而

$$I=\int\frac{a\sec^2tdt}{a\operatorname{tg}t\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2t}}=\frac{1}{a}\int\frac{\sec^2tdt}{\operatorname{tg}t\sec t}=\frac{1}{a}\int\frac{\sec t}{\operatorname{tg}t}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}\ln|\csc t-\operatorname{ctg}t|+c,$$

其中 $\operatorname{tg}t=\frac{x}{a}$，而 $\operatorname{ctg}t=\frac{a}{x}$，$\csc t=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2t}=\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2}}$，

于是，得　$I=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right|+c.$

4.4.21　求 $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$，$(|x|\neq 1)$.

解　设 $x=\operatorname{tg}t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 且 $|t|\neq\frac{\pi}{4}$，则 $dx=\sec^2tdt$，$\sqrt{1+x^2}=\sec t$，代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2tdt}{(1-\operatorname{tg}^4t)\sec t}$$

$$=\int\frac{\cos^3tdt}{1-2\sin^2t}=\int\frac{1-\sin^2t}{1-2\sin^2t}d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1-2\sin^2t}{1-2\sin^2t}d(\sin t)+\frac{1}{2}\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+c$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+c\ (|x|\neq 1).$$

4.4.22　求 $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

解　设 $x=\sec t$，则 $dx=\sec t\operatorname{tg}tdt$，从而

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t \cdot \operatorname{tg} t}{\sec^3 t\sqrt{\sec^2 t - 1}}dt = \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c.$$

其中 $\cos t = \frac{1}{x}, \sin t = \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $t = \arccos(\frac{1}{x})$.

于是
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{x}) + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + c.$$

4.4.23　求 $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

解　设 $x = a\operatorname{tg} t$，则 $dx = a\sec^2 t dt$，从而

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{[a^2(1+\operatorname{tg}^2 t)]^{3/2}}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \cos t dt = \frac{1}{a^2}\sin t + c,$$

其中 $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}, \operatorname{ctg} t = \frac{a}{x}, \csc t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$，于是

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + c.$$

4.4.24　求 $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

解　设 $x = \cos t$，则 $dx = -\sin t dt$，从而

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = -\int \frac{\sin t dt}{\sin^3 t} = -\int \csc^2 t dt = \operatorname{ctg} t + c.$$

又 $\cos t = x$，则 $\sin t = \sqrt{1-x^2}$，于是

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c.$$

4.4.25　求 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

解　原式 $= \int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}}$.

当 $x+\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$，

则 $dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t\cdot \operatorname{tg}t dt$，$\sqrt{x^2+x-1}=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{tg}t$，

$$x^2+x+1=\frac{1}{4}(5\sec^2 t+3).$$

代入得　　原式 $=4\int\frac{\sec t dt}{5\sec^2 t+3}=4\int\frac{\cos t dt}{5+3\cos^2 t}$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}\sin t)}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3}\sin t)^2}$$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\sin t}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+c.$$

当 $x+\frac{1}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，仍设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3}{2}\pi$，经计算可获得同样的结果.

总之，当 $|x+\frac{1}{2}|>\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+c.$$

4.4.26　求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

解　把二次三项式 x^2+2x+5 化为 $(x+1)^2+4$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2+2x+5}|+c.$$

4.4.27　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

解　$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x-\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{1}{9}-(x-\frac{2}{3})^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+c.$$

4.4.28　求 $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

解　$\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

$$= \int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}}dx,$$

设 $x-1=\sqrt{3}\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sqrt{3}\cos t dt$，$\sqrt{2+2x-x^2}=\sqrt{3}\cos t$，代入得

$$\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \int \frac{1+2\sqrt{3}\sin t+3\sin^2 t}{3(1+\sin^2 t)}dt$$

$$= \int dt + \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt - \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$= t - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t} - \frac{2}{3}\int \frac{d(\mathrm{tg}t)}{1+2\mathrm{tg}^2 t}$$

$$= t - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right| - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)+c$$

$$= \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{arctg}\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}}+c.$$

4.4.29　求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

解　用倒代换 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，故

$$原式=-\int \frac{dt}{t\sqrt{4-(\frac{1}{t})^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-(\frac{1}{2})^2}}$$

$$\xlongequal{令 t=\frac{1}{2}\sec\alpha}-\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\cdot\sec\alpha}{\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha}d\alpha=-\frac{1}{2}\int \sec\alpha d\alpha$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha)+c=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2x}\right|+c.$$

4.4.30　求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 故

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=-\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=-\ln|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+c.$$

4.4.31　求 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

解　设 $x-1=\frac{1}{t}$，则 $x=\frac{1}{t}+1$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 故

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

$$= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-(1+\frac{1}{t})^2 + 2(1+\frac{1}{t}) + 3}}$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{(\frac{1}{x-1})^2-\frac{1}{4}}\right| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right| + c.$$

4.4.32 求积分 $I = \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx.$

解 把被积函数的分子化为 $3x+2 = 3(x+1)-1$,得

$$I = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx,$$

再把此积分写为两积分之差:

$$I = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

对第一个积分用公式,而对第二个积分作变量代换 $x+1 = \frac{1}{t}$,得

$$I = 3\ln|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}|$$

$$+\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}}$$

$$= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= 3\ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right|$$

$$+ \ln\left|t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1}\right| + c$$

$$= 3\ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 3}\right|$$

$$+ \ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}{x + 1}\right| + c.$$

4.4.33　求 $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

解　设 $x + 1 = \frac{1}{t}$，则 $x = \frac{1 - t}{t}$，　$dx = -\frac{1}{t^2}dt$，

$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{|t|} = \text{sgn}t \cdot \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{t}$，代入得

$$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x^2 + x + 1}} = -\text{sgn}t \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$$

$$= -\text{sgn}t \cdot \ln\left|t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + 1}\right| + c_1$$

$$= -\text{sgn}(x + 1)$$

$$\cdot \ln\left|\frac{1 - x + 2[\text{sgn}(x + 1)] \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}{2(x + 1)}\right| + c_1$$

当 $x + 1 > 0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x^2 + x + 1}} = -\ln\left|\frac{1 - x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}\right| + c;$$

当 $x + 1 < 0$ 时，

$$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln\left|\frac{1 - x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{2(1 + x)}\right| + c_1$$

$$= \ln\left|\frac{-3(x + 1)}{2(1 - x + 2\sqrt{x^2 + x + 1})}\right| + c_1$$

$$= -\ln\left|\frac{1 - x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}\right| + c.$$

总之，$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x^2 + x + 1}}$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+c.$$

4.4.34 求 $\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

解 设 $1+x=\frac{1}{t}$,则 $x=\frac{1-t}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$\sqrt{1-x-x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{|t|}=\operatorname{sgn}(t)\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t}.$$

代入得 $\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}+\operatorname{sgn}t\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+[\operatorname{sgn}(1+x)]$$

$$\cdot\ln\left|\frac{3+x+2[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+c_1.$$

当 $x+1>0$ 时,

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+c;$$

当 $x+1<0$ 时,

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$$

$$-\ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+c_1$$

$$=\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+c.$$

总之,

$$\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right| + c.$$

4.4.35 求 $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

解 设 $x+1=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 先设 $t>0$，则有

$$\sqrt{x^2+2x}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t},$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= (at^3+bt^2+ct+e)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

从而有

$$-t^4=(3at^2+2bt+c)(1-t^2)-t(at^3+bt^2+ct+e)+\lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{4},\ b=0,\ c=\frac{3}{8},\ e=0,\ \lambda=-\frac{3}{8}.$$

于是，

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)\cdot\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+c.$$

再设 $t<0$，则答案前一项不改变符号，但后一项要改变符号，因此，最后得到

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} = \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+c,$$

其中 $x>0$ 或 $x<-2$.

4.4.36 求 $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，$\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$，$(t>0)$. 代入得

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt=-\int\frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=-\int\sqrt{t^2+1}dt+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=-\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+c$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+c.$$

4.4.37 求 $\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

解 $$\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$$

$$=-\int\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}d(x-\frac{1}{2})+2\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+2\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+c$$

$$=\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}+c.$$

4.4.38 求 $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

解 $$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx = -\int \sqrt{x^2+x+1}\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \int \frac{(x+\frac{1}{2})dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + c.$$

4.4.39　求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

解 $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$= \int \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,d(x+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{8}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}) - \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{2}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}) + c$$

$$= \frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8}\ln(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}) + c.$$

4.4.40　求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

解　设 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$= (ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

两边对 x 求导数，得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} + \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3 \equiv (2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$-3a=1,$$
$$5a-2b=0,$$
$$2a+3b-c=0,$$
$$b+c+\lambda=0.$$

解方程组，得 $a=-\frac{1}{3}, b=-\frac{5}{6}, c=-\frac{19}{6}, \lambda=4.$ 于是

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$
$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$
$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c.$$

4.4.41　求 $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解　设 $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx = (ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)\sqrt{1+x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$，从而有

$$x^{10} = (9ax^8+8bx^7+7cx^6+6dx^5+5ex^4+4fx^3+3gx^2+2hx+l)(1+x^2)+x(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{10},\ b=0,\ c=-\frac{9}{80},\ d=0, e=\frac{21}{160},\ f=0,$$

$$g=-\frac{21}{128},\ h=0,\ l=\frac{63}{256},\ m=0,\ \lambda=-\frac{63}{256},$$

于是，$\displaystyle\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7\right.$

$$\left.+\frac{1}{10}x^9\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c.$$

4.4.42　求 $I=\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

解　令 $x=a\sec t$，则 $dx=a\cdot\sec t\ \mathrm{tg}t dt$. 从而

$$I=\int\frac{a^2\sec^2t\cdot a\sec t\cdot\mathrm{tg}t}{\sqrt{a^2\sec^2t-a^2}}dt=a^2\int\sec^3tdt,$$

由递推公式 $\displaystyle\int\sec^{2n+1}xdx=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\sec^{2n-1}xdx$ 得

$$\int\sec^3tdt=\frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos^2t}+\frac{1}{2}\int\sec tdt=\frac{\sin t}{2\cos^2t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos t}$$

$$=\frac{\sin t}{2\cos^2t}+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|+c,$$

其中 $\sec t=\dfrac{x}{a}$，$\cos t=\dfrac{a}{x}$，$\sin t=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$，$\mathrm{tg}t=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，

故

$$I=\frac{a^2\sin t}{2\cos^2t}+\frac{a^2}{2}\ln|\sec t+\mathrm{tg}t|+c$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c.$$

4.4.43　求 $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

解　$\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$$=(b_0x^2+b_1x+b_2)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

两端同时微分，得

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2b_0x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2}$$

$$+(b_0x^2+b_1x+b_2)\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

去分母，得

$$x^3+2x^2+3x+4=(2b_0x+b_1)(x^2+2x+2)$$
$$+(b_0x^2+b_1x+b_2)(x+1)+\lambda.$$

或 $$x^3+2x^2+3x+4=3b_0x^3+(5b_0+2b_1)x^2$$
$$+(4b_0+3b_1+b_2)x+(2b_1+b_2+\lambda).$$

比较 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{cases} 3b_0=1, \\ 5b_0+2b_1=2, \\ 4b_0+3b_1+b_2=3, \\ 2b_1+b_2+\lambda=4. \end{cases}$$

解方程组，得 $b_0=\frac{1}{3}, b_1=\frac{1}{6}, b_2=\frac{7}{6}, \lambda=\frac{5}{2}$. 从而

$$\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$
$$=(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6})\sqrt{x^2+2x+2}$$
$$+\frac{5}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+c.$$

4.4.44 求 $\int\frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 把被积函数写成 $x^3(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$，令 $a^2-x^2=t^2$，则 $-2xdx=2tdt$，$-xdx=tdt$；$x^2=a^2-t^2$. 从而

$$\int x^3(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=-\int(a^2-t^2)t^{-3}\cdot tdt=-\int\frac{a^2-t^2}{t^2}dt$$
$$=\int dt-a^2\int\frac{dt}{t^2}=t+\frac{a^2}{t}+c$$
$$=\frac{t^2+a^2}{t}+c=\frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+c.$$

4.4.45 求 $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$.

解　$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx = \int \frac{x-2+4}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$$

$$= \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx + \int \frac{4dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-4x+3)}{\sqrt{x^2-4x+3}} + 4\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$$

$$= \sqrt{x^2-4x+3} + 4\ln[(x-2)+\sqrt{(x-2)^2-1}] + c,$$

其中用了公式 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln[u+\sqrt{u^2-1}] + c.$

4.4.46　求 $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx.$

解　在分子上分解出被开方式的二次三项式的导数：

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}$$

$$- \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + c.$$

4.4.47　求 $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx.$

解　$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}$$

$$= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + c.$$

3. 微分二项式 $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ 的积分

4.4.48 求 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

解 这里 $m=-4, n=2, p=-\frac{1}{2}$,而 $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ 是整数,因此属于可积的第三种情形. 令 $x^{-2}+1=t^2$;则 $-2x^{-3}dx=2tdt$, $-x^{-3}dx=tdt$. 代入得

$$I=\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int x^{-4}[x^2(x^{-2}+1)]^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx,$$

从而, $I=-\int (t^2-1)t^{-1}\cdot tdt=-\int (t^2-1)dt$

$$=t-\frac{t^3}{3}+c=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+c$$

$$=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+c.$$

4.4.49 求积分 $I=\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

解 $I=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}}dx$,这里 $m=-\frac{1}{3}, n=\frac{1}{6}, p=\frac{1}{3}$;因为

$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{6}}=3$,故令 $1+x^{\frac{1}{6}}=t^3$,则 $x=(t^3-1)^6$,

$dx=18t^2(t^3-1)^5dt$. 于是

$$I=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}}dx=18\int (t^3-1)^2t^3dt$$

$$=18\int (t^9-2t^6+t^3)dt=18(\frac{t^{10}}{10}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^4}{4})+c.$$

$$= 18(1+\sqrt[6]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}\left[\frac{1}{10}(1+\sqrt[6]{x})^2 - \frac{2}{7}(1+\sqrt[6]{x})+\frac{1}{4}\right]+c.$$

4.4.50　求积分 $I=\int\sqrt{x(3+4x^3)}dx$.

解　$I=\int x^{\frac{1}{2}}(3+4x^3)^{\frac{1}{2}}dx$,这里 $m=\frac{1}{2}$, $n=3$, $p=\frac{1}{2}$. 因为 $\frac{m+1}{n}+p=\frac{\frac{1}{2}+1}{3}+\frac{1}{2}=1$,故令 $3+4x^3=x^3t^2$,则 $x^3=\frac{3}{t^2-4}$, $x^2dx=-\frac{2tdt}{(t^2-4)^2}$. 于是

$$I=-\int\frac{2t^2}{(t^2-4)^2}dt=\int t\cdot\frac{-2t}{(t^2-4)^2}dt=\int td\left(\frac{1}{t^2-4}\right)$$

$$=\frac{t}{t^2-4}-\int\frac{dt}{t^2-4}=\frac{t}{t^2-4}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+c$$

$$=\frac{x^2}{3}\sqrt{\frac{3+4x^3}{x}}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+4x^3}{x}}-2\right| +\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+4x^3}{x}}+2\right|+c.$$

4.4.51　求 $\int\frac{x^3dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　把被积函数写成 $x^3(a^2-x^2)^{-3/2}$,这里 $m=3,n=2,p=-\frac{3}{2}$. 因为 $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ 是整数,所以这是第二种可积的情形. 令 $a^2-x^2=t^2$,则 $-2xdx=2tdt$, $-xdx=tdt$; $x^2=a^2-t^2$. 从而

$$\int x^3(a^2-x^2)^{-3/2}dx=-\int(a^2-t^2)t^{-3}tdt=-\int\frac{a^2-t^2}{t^2}dt$$

$$=\int dt-a^2\int\frac{dt}{t^2}=t+\frac{a^2}{t}+c=\frac{t^2+a^2}{t}+c=\frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+c.$$

4.4.52　求 $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

解 把被积函数写成 $x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}$，这里 $m=-3$，$n=-1$，$p=-\frac{1}{5}$；$\frac{m+1}{n}=2$. 设 $1+x^{-1}=z^5$，则

$$x=(z^5-1)^{-1},dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=-5\int z^3(z^5-1)dz=-\frac{5}{9}z^9+\frac{5}{4}z^4+c,$$

其中 $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$.

4.4.53 求 $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

解 被积函数为 $x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$. $m=0,n=4,p=-\frac{1}{4}$；

$\frac{m+1}{n}+p=0$，设 $x^{-4}+1=z^4$，则 $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$，$(z>0,x>0)$，

$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}},dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz$，代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2}{z^4-1}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\text{arctg}z+c.$$

其中 $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

4.4.54 求 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$，$m=1$，$n=\frac{2}{3}$，$p=-\frac{1}{2}$，

$\frac{m+1}{n}=3$. 设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$，则 $x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$，$dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$

代入得

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int (z^2-1)^2 dz = \frac{3}{5}z^5 - 2z^3 + 3z + c,$$

其中 $z = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

4.4.55 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} = x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}, m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=-2$;

设 $x=z^6$，则 $dx = 6z^5dz$，$\sqrt{x}=z^3$，$\sqrt[3]{x}=z^2$. 代入得

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx = 6\int \frac{z^8}{(z^2+1)^2}dz$$

$$= 6\int [z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4}{z^2+1} + \frac{1}{(z^2+1)^2}]dz$$

$$= \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z - 24\text{arctg}z + 6[\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\text{arctg}z] + c$$

$$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21\text{arctg}(x^{\frac{1}{6}}) + c.$$

4.4.56 求 $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$.

解 $\sqrt{x^3+x^4} = x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $m=\frac{3}{2}$, $n=1$, $p=\frac{1}{2}$;

$\frac{m+1}{n}+p=3$，设 $x^{-1}+1=z^2$，则 $x=\frac{1}{z^2-1}$, $dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz$,

$\sqrt{x^3+x^4} = \frac{z}{(z^2-1)^2}$（不妨设 $z>0$），代入得

$$\int \sqrt{x^3+x^4}dx = -2\int \frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz$$

$$= -2\int \frac{dz}{(z^2-1)^4} - 2\int \frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$= -2[-\frac{z}{6(z^2-1)^3} - \frac{5}{6}\int \frac{dz}{(z^2-1)^3}] - 2\int \frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$= \frac{z}{3(z^2-1)^3} - \frac{1}{3}\int \frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$= \frac{z}{3(z^2-1)^3} + \frac{z}{12(z^2-1)^3} - \frac{z}{8(z^2-1)} + \frac{1}{16}\ln\frac{z+1}{z-1} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}$$

$$+ \frac{1}{8}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + c,\ (x>0).$$

4.4.57 求 $\int x^5(a^3+x^3)^{\frac{1}{3}}dx$.

解 因为 $m=5, n=3, p=\frac{1}{3}, \frac{m+1}{n}=2$ 是整数.

令 $(a^3+x^3)^{1/3}=t$,则 $x=(t^3-a^3)^{1/3}, dx=\frac{t^2}{(t^3-a^3)^{2/3}}dt$.

$$原式 = \int t^3(t^3-a^3)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{a^3t^4}{4} + c$$

$$= (a^3+x^3)^{4/3}\left(\frac{a^3+x^3}{7} - \frac{a^3}{4}\right) + c$$

$$= \frac{(a^3+x^3)^{4/3}(4x^3-3a^3)}{28} + c.$$

4. 其它形式的无理函数积分

4.4.58 利用线性分式代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$,计算积分:

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 由 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 得

$$x^2 \pm x + 1$$
$$= \frac{(\beta^2 \pm \beta + 1)t^2 + [2\alpha\beta \pm (\alpha+\beta) + 2]t + (\alpha^2 \pm \alpha + 1)}{(1+t)^2}.$$

若 $2\alpha\beta \pm (\alpha+\beta) + 2 = 0$,则上式可化成正则型. 令 $\alpha+\beta=0$ 及 $\alpha\beta=-1$. 例如,取 $\alpha=-1, \beta=1$,则有 $x=\frac{t-1}{1+t}$ 或 $t=\frac{1+x}{1-x}$,

$dx=\frac{2dt}{(1+t)^2}, x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}, \sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{1+3t^2}}{(t+1)},$

其中不妨设 $t+1>0$，于是

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}dt$$

$$=2\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}+2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$$

$$=2(I_1+I_2).$$

对于 I_1，设 $u=\sqrt{1+3t^2}$，则

$$du=\frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}},\ t^2+3=\frac{u^2+8}{3},$$

代入得

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=\int\frac{du}{u^2+8}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{u}{2\sqrt{2}}+c_1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right]+c_1.$$

对于 I_2，设 $u=\dfrac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$，则

$$\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{du}{3-u^2},\quad t^2+3=\frac{27-8u^2}{3(3-u^2)}$$

代入得

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=3\int\frac{du}{27-8u^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x-1)\sqrt{2}}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x-1)\sqrt{2}}\right|+c_2$$

于是，

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)\sqrt{2}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+c.$$

4.4.59 求 $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$.

解 设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，分别代入 x^2+2 及 $2x^2-2x+5$ 中，并令一次项的系数等于零，求得 $\alpha=-1$，$\beta=2$，即设 $x=\frac{2t-1}{1+t}$，从而有

$$dx=\frac{3}{(t+1)^2}dt,\ x^2+2=\frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2},$$
$$\sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1>0$. 代入得

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$
$$=\frac{1}{3}\int \frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于右端的第一个积分，设 $u=\sqrt{t^2+1}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int \frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{2u^2-1}$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}+c_1$$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+c_1.$$

对于右端的第二个积分，设 $u=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}u + c_2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}\right) + c_2$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right) + c_3$$

于是 $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}$$

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right) + c.$$

4.4.60　求 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解　设 $\sqrt{x^2+x+1} = z - x$，则 $x = \frac{z^2-1}{1+2z}$，

$$dx = \frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}dz,\quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{z^2+z+1}{1+2z}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{z^2+z+1}{z(z+\frac{1}{2})^2}dz$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{4}{z} - \frac{3}{z+\frac{1}{2}} - \frac{3}{2(z+\frac{1}{2})^2}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|z+\frac{1}{2}|^3} + \frac{3}{4(z+\frac{1}{2})} + c_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3} + \frac{3}{2(2z+1)} + c.,$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$.

4.4.61　求 $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$.

解　设 $\sqrt{x^2-2x+2} = z - x$，则 $x = \frac{z^2-2}{2(z-1)}$，

$$dx=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2}dz,\quad \sqrt{x^2-2x+2}=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)}.$$

代入得

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1]\cdot[(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\{[(z-1)^2-(z-1)^{-4}]$$

$$+[2(z-1)+2(z-1)^{-3}]$$

$$+[1-(z-1)^{-2}]+4(z-1)^{-1}\}d(z-1)$$

$$=\frac{1}{8}\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+(z-1)^{-3}]$$

$$+[(z-1)^2-(z-1)^{-2}]$$

$$+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|+c,$$

其中 $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$.

4.4.62　求积分 $I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

解法 1　$I=\pm\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}dx$

令 $u=\frac{1}{x}$,则 $du=-\frac{1}{x^2}dx$,

$$I=\mp\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\mp\arcsin u+c$$

$$=\mp\arcsin\frac{1}{x}+c=-\arcsin\frac{1}{|x|}+c.$$

解法 2　令 $u=\sqrt{x^2-1}$,则 $du=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$,

$$I=\int\frac{1}{u^2+1}du=\operatorname{arctg}u+c=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+c.$$

解法 3　令 $x = \sec t$　则 $\sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{tg} t$, $dx = \operatorname{tg} t \cdot \sec t dt$,

$$I = \int dt = t + c = \operatorname{arcsec} x + c.$$

4.4.63　求积分 $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$.

解法 1　令 $x = 2\sin\theta$,则

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} d\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}) d\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}[\ln|\sin\frac{\theta}{2}| - \ln|\cos\frac{\theta}{2}|] + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}| + c = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2})| + c.$$

解法 2　令 $\sqrt{4 - x^2} = t$,则

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t - 2}{t + 2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4 - x^2} - 2}{\sqrt{4 - x^2} + 2}\right| + c.$$

解法 3　令 $x = \frac{1}{t}$,则

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\frac{1}{2})^2}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{2x}\right| + c.$$

解法 4　令 $x^2 = \frac{1}{t}$,则

$$I = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}t}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{(t - \frac{1}{8})^2 - (\frac{1}{8})^2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|t - \frac{1}{8} - \sqrt{t^2 + \frac{t}{4}}| + c$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x}| + c.$$

解法 5　令 $\sqrt{\frac{2 + x}{2 - x}} = t$,则 $x = \frac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$, $dx = \frac{8tdt}{(t^2 + 1)^2}$,故

$$I = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{|\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}|}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} + c.$$

解法 6 令 $\sqrt{4-x^2} = tx$，则 $x^2 = \frac{4}{1+t^2}$，$\frac{2dx}{x} = -\frac{2tdt}{1+t^2}$，故

$$I = -\int \frac{tdt}{(1+t^2)\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + c.$$

解法 7 令 $x = 2e^t$，则

$$I = \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{1-e^{2t}}} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{-t})}{\sqrt{(e^{-t})-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|e^{-t}+\sqrt{e^{-2t2}-1}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right| + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\sqrt{4-x^2}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+2\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + c.$$

§5　三角函数有理式的积分

内容提要

1. 形如$\int R(\sin x,\cos x)dx$的积分

$R(\sin x,\cos x)$为$\sin x,\cos x$的有理函数，常用万能代换$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$把这类积分化为有理函数的积分，此时有

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

2. 形如$\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$的积分

(1) m、n中至少有一个为奇数时，如果m为奇数，则令$\cos x=t$；如果n为奇数，则令$\sin x=t$.

(2) m、n皆为偶数时，作变换$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$；$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$；$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

3. 形如$\int\operatorname{tg}^m xdx$和$\int\operatorname{ctg}^m xdx$的积分，其中$m$是正整数

利用$\operatorname{tg}^2x=\sec^2x-1$或$\operatorname{ctg}^2x=\csc^2x-1$降低正切或余切函数的幂指数.

4. 形如$\int\operatorname{tg}^m x\sec^n xdx$和$\int\operatorname{ctg}^m x\csc^n xdx$的积分，其中$n$为正偶数

利用公式$\sec^2x=1+\operatorname{tg}^2x$或$\csc^2x=1+\operatorname{ctg}^2x$降低正切或余切函数的幂指数.

5. 形如$\int\sec^{2n+1}xdx$和$\int\csc^{2n+1}xdx$的积分

利用递推公式

$$\int\sec^{2n+1}xdx=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\sec^{2n-1}xdx;$$

$$\int\csc^{2n+1}xdx=-\frac{1}{2n}\frac{\cos x}{\sin^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\csc^{2n-1}xdx.$$

6. 形如 $\int \sin mx\cos nx dx$, $\int \cos mx\sin nx dx$, $\int \sin mx\sin nx dx$ 的积分

利用积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

问 题 与 解 答

1. 形如 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 的积分

4.5.1 求 $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$,则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

于是 $$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt=\int [\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}]dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t(3+t^2)|+c_1=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+c.$$

4.5.2 求 $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

解 被积函数是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数,令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$,则

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$;于是

$$\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}$$

$$=2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int \frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+c.$$

换回原变量,得

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} + c.$$

4.5.3　求 $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$.

解　令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$;

于是 $$\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 5\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{1}{3+5t}dt = \frac{1}{5}\ln|3+5t| + c.$$

换回原变量,得

$$\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x} = \frac{1}{5}\ln\left|3 + 5\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

4.5.4　求 $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$.

解　令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$;于是

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2}{t^2 - 2t + 1}dt$$

$$= 2\int \frac{1}{(t-1)^2}dt = -\frac{2}{t-1} + c.$$

换回原变量,得

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1} + c.$$

4.5.5　求 $\int \frac{dx}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\cos x}$　$(a \neq 0, b \neq 0)$.

解　设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$,得

$$\int \frac{dx}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\cos x}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(at)}{(at)^2+b^2} = \frac{1}{ab}\mathrm{arctg}\,\frac{at}{b}+c$$

$$= \frac{1}{ab}\mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)+c.$$

4.5.6 求 $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin 2x)^n}dx$.

解 $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin 2x)^n}dx = \int \frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^{2n}}$

$$= \begin{cases} \ln|\sin x+\cos x|+c, & n=\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{1-2n}(\sin x+\cos x)^{1-2n}+c, & n\neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4.5.7 求积分 $I = \int \frac{dx}{\cos x}$.

解法 1 令 $x = \frac{\pi}{2}-y$,则

$$I = \int \frac{-dy}{\sin y} = -\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\right|+c = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+c.$$

解法 2 $I = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= 2\int \frac{d\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \int \left(\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\right)d\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

$$= \ln\frac{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}+c = \ln\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}+c$$

$$= \ln \frac{1 + 2\cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} + c = \ln\frac{1+\sin x}{\sin x} + c$$

$$= \ln(\sec x + \mathrm{tg} x) + c.$$

解法 3　$I = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + c.$

解法 4　$I = \int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right) dx$$

$$= \ln(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}) - \ln(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) + c$$

$$= \ln\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} + c.$$

4.5.8　求积分 $I = \int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

解法 1　$I = \int \frac{(1 - \sin x)dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x - \frac{1}{\cos x} + c.$$

解法 2　$I = -\int \frac{d(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = -\int \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + c.$$

解法 3　$I = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{dx}{(1 + 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}) \cdot \cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}\frac{x}{2})^2} \cdot \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{-2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + c.$$

解法 4 令 $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$，则 $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$，$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，

$$I = \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int \frac{dt}{1+2t+t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + c.$$

解法 5 $I = \int \frac{dx}{\sin\frac{\pi}{2} + \sin x} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})} = -\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + c.$$

4.5.9 求 $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$. (a) $0<\varepsilon<1$；(b) $\varepsilon>1$.

解 设 $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$，则 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$，于是

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = 2\int \frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2} = I.$$

(a) $0<\varepsilon<1$，

$$I = \frac{2}{1+\varepsilon}\int \frac{dt}{1+(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon})t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\mathrm{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}) + c;$$

(b) $\varepsilon>1$，

$$I = \frac{2}{\varepsilon-1}\int \frac{dt}{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}-t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}t}\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x} \right| + c.$$

2. 形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx$ 的积分

4.5.10　求 $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

解　令 $\sin x = t$，则 $\cos x dx = dt$. 于是

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt$$

$$= \int t^4 dt - 2\int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + c$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + c.$$

4.5.11　求 $\int \sqrt{1 + \csc x} dx$.

解　$\int \sqrt{1 + \csc x} dx = \int \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{\sin x}} dx$，设 $t = \sin x$，

则 $x = \arcsin x$，　$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$，于是

$$\int \sqrt{1 + \csc x} dx = \int \frac{\sqrt{1 + t}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t - t^2}}$$

$$= \int \frac{d(2t - 1)}{\sqrt{1 - (2t - 1)^2}} = \arcsin(2t - 1) + c$$

$$= \arcsin(2\sin x - 1) + c.$$

4.5.12　求 $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx$.

解　设 $\sin x = t$，则 $\cos x dx = dt$，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$，于是

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos^4 x \cos x dx}{\sin x}$$

$$= \int \frac{(1 - t^2)^2}{t} dt = \int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t} dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - 2t + t^3\right) dt = \ln|t| - t^2 + \frac{1}{4}t^4 + c.$$

换回原变量，得

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| - \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + c.$$

4.5.13 求 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$.

解 令 $\sin x = t$,则 $\cos x dx = dt$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$,于是

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x + \sin x} = \int \frac{(1 - t^2)dt}{t^2 + t} = \int \frac{1 - t}{t}dt$$

$$= \int (\frac{1}{t} - 1)dt = \ln|t| - t + c.$$

换回原变量,得

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x} = \ln|\sin x| - \sin x + c.$$

4.5.14 求 $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.

解 设 $t = \cos x$,则

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = -\int \frac{dt}{(1 - t^2)t^4} = \int \frac{dt}{t^4(t^2 - 1)}$$

$$= \int [\frac{-1}{t^4} + \frac{-1}{t^2} + \frac{-1}{2(1 - t)} + \frac{-1}{2(t + 1)}]dt$$

$$= \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 - t}{1 + t} + c$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + c.$$

4.5.15 求 $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$.

解 $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}dx = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-4/3} x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)\cos^{-4/3} x \sin x dx.$$

令 $\cos x = t$,则 $-\sin dx = dt$. 于是

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}dx = -\int (1 - t^2)t^{-4/3}dt$$

$$= -\int t^{-4/3}dt + \int t^{2/3}dt = 3t^{-1/3} + \frac{3}{5}t^{5/3} + c$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + c.$$

4.5.16　求 $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}$.

解　由于被积函数关于 $\sin x$ 是奇函数，故应设 $\cos x = t$，则 $\sin^2 x = 1 - t^2, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1, dt = -\sin x dx$，于是

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} = \int \frac{(t^2 - 2)dt}{2t^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2 - 1}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2 - 1}$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2} - 1}{t\sqrt{2} + 1}\right| + c.$$

换回原变量，得

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + c.$$

4.5.17　求 $\int \frac{dx}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$ $(a \neq b)$.

解　$\int \frac{dx}{\sin(x + a)\sin(x + b)}$

$$= \int \frac{1}{\sin(a - b)} \frac{\sin[(x + a) - (x + b)]}{\sin(x + a)\sin(x + b)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a - b)}\int \frac{\sin(x + a)\cos(x + b) - \cos(x + a)\sin(x + b)}{\sin(x + a)\sin(x + b)}dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a - b)}\left[\int \frac{\cos(x + b)}{\sin(x + b)}dx - \int \frac{d\sin(x + a)}{\sin(x + a)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(a - b)}\ln\left|\frac{\sin(x + b)}{\sin(x + a)}\right| + c.$$

4.5.18　求 $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$.

解　令 $a = A\cos\varphi, b = A\sin\varphi$，其中 $A = \sqrt{a^2 + b^2}$，

则 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}$，于是

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\int \frac{dx}{\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x+\varphi}{2}\right)\right| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{b\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - a + \sqrt{a^2+b^2}}{b - \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}\right| + c$$

4.5.19 求 $\int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}dx$，$a \neq 0$，$b \neq 0$.

解 令 $T_1 = \int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}dx$，$T_2 = \int \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx$

显然 $aT_1 + bT_2 = x + c_1$， (1)

$$aT_2 - bT_1 = \int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}dx$$

$$= \ln|a\sin x + b\cos x| + c_2, \quad (2)$$

联立(1)、(2)解得

$$T_1 = \int \frac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}(ax - b\ln|a\sin x + b\cos x|) + c.$$

4.5.20 求 $\int \cos^6 x dx$.

解 $\int \cos^6 x dx = \int (\cos^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int \cos 2x dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\int dx + \frac{3}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}d(\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$$+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c.$$

4.5.21　求 $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$.

解　由 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，有

$$\sin^2 x\cos^2 x=(\sin x\cos x)^2=(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

由 $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 得

$$\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$ 于是

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int \cos 4x dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+c.$$

4.5.22　求 $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

解　$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x dx$$

$$=\int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int \cos 4x dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c.$$

4.5.23　求 $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$.

解　$$\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx=\int [\sin\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}]^2 dx$$

$$=\int [\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}]^2 dx=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin x + c.$$

4.5.24 求 $\int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sqrt{1 + \sin 2x}(\sin x - \cos x)}dx.$

解 因被积函数较复杂,如用变换,仍会出现复杂的有理式,这时往往采用三角函数自身的化简.

$$原式 = \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sqrt{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x}(\sin x - \cos x)}dx$$

$$= \int \frac{|\sin x + \cos x|^2}{|\sin x + \cos x|(\sin x - \cos x)}dx = \int \frac{|\sin x + \cos x|}{\sin x - \cos x}dx$$

$$= \pm \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}dx = \pm \ln|\sin x - \cos x| + c.$$

4.5.25 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sin x}}.$

解 被积函数可化为

$$\sqrt{1 + \sin x} = \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \sqrt{1 + \cos 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}}$$

$$= \sqrt{2\cos^2 \frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}} = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}).$$

于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \sin x}} = -2\int \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}$$

$$= -\sqrt{2}\ln[\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})] + c.$$

3. 形如 $\int \mathrm{tg}^m x dx$ 和 $\int \mathrm{ctg}^m x dx$ 的积分

4.5.26 求 $\int \mathrm{ctg}^6 x dx.$

解
$$\int \mathrm{ctg}^6 x dx = \int \mathrm{ctg}^4 x(\csc^2 x - 1)dx$$

$$= -\int \mathrm{ctg}^4 x d(\mathrm{ctg} x) - \int \mathrm{ctg}^4 x dx$$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^5x}{5}-\int \operatorname{ctg}^2x(\csc^2x-1)dx$$
$$=-\frac{\operatorname{ctg}^5x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3x}{3}-\operatorname{ctg}x-x+c.$$

4.5.27 求 $\int \operatorname{tg}^7xdx$.

解 $\int \operatorname{tg}^7xdx=\int \operatorname{tg}^5x(\sec^2x-1)dx=\int \operatorname{tg}^5xd(\operatorname{tg}x)-\int \operatorname{tg}^5xdx$

$$=\frac{\operatorname{tg}^6x}{6}-\int \operatorname{tg}^3x(\sec^2x-1)dx$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^6x}{6}-\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+\int \operatorname{tg}x(\sec^2x-1)dx$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^6x}{6}-\frac{\operatorname{tg}^4x}{4}+\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}+\ln|\cos x|+c.$$

4.5.28 求 $\int \operatorname{tg}^4\frac{x}{2}dx$.

解 $\int \operatorname{tg}^4\frac{x}{2}dx=\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}[\sec^2\frac{x}{2}-1]dx$

$$=\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx-\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}dx$$
$$=2\int \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}d\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\int[\sec^2\frac{x}{2}-1]dx$$
$$=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x+c.$$

4.5.29 求 $\int \operatorname{ctg}^3 3xdx$.

解 $\int \operatorname{ctg}^3 3xdx=\int \operatorname{ctg}3x(\csc^2 3x-1)dx$

$$=-\frac{1}{3}\int \operatorname{ctg}3xd(\operatorname{ctg}3x)-\frac{1}{3}\int \operatorname{ctg}3xd(3x)$$
$$=-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+c.$$

4. 形如 $\int \operatorname{tg}^mx\sec^nxdx$ 和 $\int \operatorname{ctg}^mx\csc^nxdx$ 的积分

4.5.30 求 $\int \operatorname{tg}^4x\sec^6xdx$.

解 $\int \operatorname{tg}^4x\sec^6xdx=\int \operatorname{tg}^4x\sec^4x\cdot\sec^2xdx=\int \operatorname{tg}^4x(1+\operatorname{tg}^2x)^2d(\operatorname{tg}x)$

$$= \int tg^4 x d(tgx) + 2\int tg^6 x d(tgx) + \int tg^8 x d(tgx)$$

$$= \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{2}{7}tg^7 x + \frac{1}{9}tg^9 x + c.$$

4.5.31 求 $\int \sec x \cdot tg^6 x dx$.

解 原式$= \int \frac{\sin^6 x}{\cos^7 x}dx = \frac{1}{6}\int \sin^5 x d(\frac{1}{\cos^6 x})$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} - \frac{5}{6}\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x}dx$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} - \frac{5}{24}\int \sin^3 x d(\frac{1}{\cos^4 x})$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} - \frac{5}{24}\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} + \frac{15}{48}\int \sin x d(\frac{1}{\cos^2 x})$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} - \frac{5}{24}\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} + \frac{5}{16}\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{5}{16}\int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x} - \frac{5}{24}\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} + \frac{5}{16}\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{5}{16}\ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c.$$

4.5.32 求 $\int ctg^2 x \csc x dx$.

解 $\int ctg^2 x \csc x dx = \int (\csc^2 x - 1)\csc x dx = \int (\csc^3 x - \csc x)dx$,
由递推公式

$$\int \csc^{2n+1} x dx = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + (1 - \frac{1}{2n})\int \csc^{2n-1} x dx$$

当 $n = 1$ 时,得

$$\int ctg^2 x \csc x dx = -ctg x \csc x + \frac{1}{2}\int \csc x dx - \int \csc x dx$$

$$= -ctg x \csc x - \frac{1}{2}\ln|\csc x - ctg x| + c.$$

4.5.33 求 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$.

解 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}d(\sin x) = -\frac{1}{2}\int \cos^3 x d(\frac{1}{\sin^2 x})$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x}dx = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{3}{2}\cos x + c.$$

4.5.34　求 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$.

解　$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx = \int \operatorname{tg}^4 x d\operatorname{tg}x = \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + c.$

4.5.35　求 $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

解　$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x}dx = \int (\csc^4 x - \csc^2 x)dx$

$$= -\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)d\operatorname{ctg}x + \int d\operatorname{ctg}x$$

$$= -\operatorname{ctg}x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}x + c = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + c.$$

4.5.36　求 $\int \frac{dx}{\sin 2x\cos x}$.

解　原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x}d(\operatorname{tg}x)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x} + \int \frac{dx}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \operatorname{ctg}x| + c.$$

4.5.37　求 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

解　$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x}dx = \int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos^5 x}dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx + 2\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} + 2\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + 3\int \frac{dx}{\sin x\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x} - 2\int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} + 3\int \frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x}$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg}x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + c_1$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg}x| + c.$$

4.5.38　求 $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$.

解　$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{a^2\mathrm{tg}^2 x + b^2} = \frac{1}{ab}\mathrm{arctg}\left(\frac{a\mathrm{tg}x}{b}\right) + c.$

4.5.39　求 $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$.

解　$\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx - \int \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$$

$$= -2\int \frac{d(\cos x)}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + c.$$

4.5.40　求 $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

解　$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})}dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin(x + \frac{\pi}{4})dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})| + c$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})| + c.$$

4.5.41　求 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

解　$\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x - \cos x)dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1 - \sin x\cos x}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{-(\cos x - \sin x)dx}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6}\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin x\cos x}dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{6}\int\frac{d(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\int d\mathrm{arctg}\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}$$

$$=-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}+c.$$

4.5.42　求 $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$.

解　令 $u=2x, v=\cos u$，则

$$原式=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{\sin u}{\cos^2u+\frac{1}{2}\sin^2u}du$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d\cos u}{\cos^2u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2u}=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1+v^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}v+c=-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\cos 2x)+c.$$

4.5.43　求 $\int\frac{\sin^2x\cos^2x}{\sin^8x+\cos^8x}dx$.

解　$$\int\frac{\sin^2x\cos^2x}{\sin^8x+\cos^8x}dx=\int\frac{2\sin^2 2x dx}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8}$$

$$=\int\frac{\mathrm{tg}^2 2x d\,\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}^4 2x-8\mathrm{tg}^2 2x\sec^2 x+8\sec^4 2x}=\int\frac{\mathrm{tg}^2 2x d\,\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}^4 2x+8\mathrm{tg}^2 2x+8}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})\int\frac{d\,\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}^2 2x+4+2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})\int\frac{d\,\mathrm{tg}2x}{\mathrm{tg}^2 2x+4-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right.$$

$$\left.-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right]+c.$$

4.5.44　求 $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$.

解法 1　$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{1+2\sin x+(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int [2\sec^2 x + 2\text{tg}x\sec x - 1]dx = 2\text{tg}x + 2\sec x - x + c.$$

解法 2　$\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx = \int \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}+x)}dx$

$$= \int \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}dx = \int \text{tg}^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})dx$$

$$= \int [\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - 1]dx = 2\text{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - x + c.$$

4.5.45　求 $\int \frac{dx}{(5+4\sin x)\cos x}$.

解法 1　分子分母同乘以 $\cos x$，并令 $u = \sin x$，则

$$\text{原式} = \int \frac{\cos x dx}{(5+4\sin x)\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{(5+4\sin x)(1-\sin^2 x)}$$

$$= \int \frac{du}{(5+4u)(1+u)(1-u)},$$

设 $\frac{1}{(5+4u)(1+u)(1-u)} = \frac{A}{5+4u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{1-u}$,

则　$1 = A(1-u^2) + B(5-u-4u^2) + c(5+9u+4u^2)$.

比较系数：$-A-4B+4C=0$，$-B+9C=0$，$A+5B+5C=1$.

解得 $A = -\frac{16}{9}$，$B = \frac{1}{2}$，$C = \frac{1}{18}$. 故

$$\text{原式} = \int [-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{5+4u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{1-u}]du$$

$$= -\frac{4}{9}\ln(5+4u) + \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{18}\ln(1-u) + c$$

$$= -\frac{4}{9}\ln(5+4\sin x) + \frac{1}{2}\ln(1+\sin x)$$

$$-\frac{1}{18}\ln(1-\sin x)+c.$$

解法 2　用万能代换，令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$,

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

故　原式 $=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{(5+4\frac{2u}{1+u^2})\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{2(1+u^2)du}{(5u^2+8u+5)(1-u^2)}$

$$=2\int\left[\frac{-(\frac{20}{9}u+\frac{16}{9})}{5u^2+8u+5}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u}+\frac{\frac{1}{18}}{1-u}\right]du$$

$$=2\left[-\frac{2}{9}\ln(5u^2+8u+5)+\frac{1}{2}\ln(1+u)-\frac{1}{18}\ln(1-u)\right]+c$$

$$=-\frac{4}{9}\ln(5\sec^2\frac{x}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\ln(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2})-\frac{1}{9}\ln(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2})+c.$$

4.5.46　求 $\int\frac{\sin x+8\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$.

解　由 $\sin x+8\cos x=a(2\sin x+3\cos x)+b(2\cos x-3\sin x)$，得 $a=2,b=1$，故

原式 $=\int\frac{2(2\sin x+3\cos x)+(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx$

$$=2\int dx+\int\frac{d(2\sin x+3\cos x)}{2\sin x+3\cos x}$$

$$=2x+\ln|2\sin x+3\cos x|+c.$$

4.5.47　求 $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$.

解　设 $3\sin x+2\cos x=a(2\sin x+3\cos x)+b$，则

$(2\sin x+3\cos x)'=a(2\sin x+3\cos x)+b(2\cos x-3\sin x)$,

由此得 $2a-3b=3,3a+2b=2$. 解之，得 $a=\frac{12}{13}$, $b=-\frac{5}{13}$.

于是 $\int\frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{12}{13}\int dx-\frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x+3\cos x)'}{2\sin x+3\cos x}dx$

$$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + c.$$

4.5.48 求 $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$.

解 $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx - \int \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}dx$$

$$= -2\int \frac{d\cos x}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d\sin x}{4 - \sin^2 x}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\ln\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + c.$$

4.5.49 求 $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x}$.

解 令 $\text{tg}x = t$，则 $\sin x = \frac{\text{tg}x}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$;

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$; $x = \text{arctg}t$; $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$.

由此可见

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x} = \int \frac{\frac{1}{1 + t^2}\cdot\frac{1}{1 + t^2}}{\frac{t^2}{1 + t^2} + 4\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}}dt$$

$$= \int \frac{dt}{t(t + 4)(t^2 + 1)} = \int \left[\frac{1}{4t} - \frac{33}{68(t + 4)} - \frac{\frac{4}{17}t + \frac{1}{17}}{t^2 + 1}\right]dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t| - \frac{33}{68}\ln|t + 4| - \frac{2}{17}\ln(t^2 + 1) - \frac{1}{17}\text{arctg}t + c.$$

换元后，得

$$\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x} = \frac{1}{4}\ln|\text{tg}x| - \frac{33}{68}\ln|\text{tg}x + 4| - \frac{4}{17}\ln|\sec x| - \frac{1}{17}x + c.$$

4.5.50 求 $\int \frac{\text{tg}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx$.

解 令 $\text{tg}x = u$，则 $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$，故

$$原式 = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{\mathrm{tg}x}{a^2 \mathrm{tg}^2 x + b^2} dx = \int \frac{u}{a^2 u^2 + b^2} du$$

$$= \frac{1}{2a^2} \ln(a^2 u^2 + b^2) + c = \frac{1}{2a^2} \ln(a^2 \mathrm{tg}^2 x + b^2) + c.$$

4.5.51　求积分 $I = \int \frac{1 - \mathrm{tg}x}{1 + \mathrm{tg}x} dx$.

解法 1　令 $t = \mathrm{tg}x$，则 $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$，于是

$$I = \int \frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c$$

$$= \ln|1 + \mathrm{tg}x| + \ln|\cos x| + c.$$

解法 2　$I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}$

$$= \ln|\sin x + \cos x| + c.$$

解法 3　$I = \int \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = -\int \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} d\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$$= \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| + c.$$

4.5.52　求 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

解　被积函数是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的偶函数. 令 $\mathrm{tg}x = t$，则

$$\sin x = \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$x = \mathrm{arctg}t$；$dx = \frac{dt}{1+t^2}$. 代入得

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1},$$

而由于 $\int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + c.$$

于是，原积分 $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \dfrac{\operatorname{tg}x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}x + 1 + \sqrt{2}} \right| + c.$

5. 形如 $\int \sec^{2n+1} x dx$ 和 $\int \csc^{2n+1} x dx$ 的积分

4.5.53　推出下列积分的递推公式：

(1) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$;　(2) $k_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n > 0)$.

并利用推得的公式计算 $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ 及 $\int \frac{dx}{\cos^7 x}$.

解　(1) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \int \cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right)$$

$$= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2}$$

$$= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$，得

$$I_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4} I_3 = \cdots$$

$$= -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

(2) $k_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^n x} dx$

$$= \frac{1}{n-1} \int \sin x d\left(\frac{1}{\cos^{n-1} x}\right) + k_{n-2}$$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} k_{n-2} + k_{n-2}$$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} k_{n-2};$$

利用此公式及 $k_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$，得

$$k_7=\int\frac{dx}{\cos^7x}=\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5}{6}k_5=\cdots$$

$$=\frac{\sin x}{6\cos^6x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2x}+\frac{5}{16}\ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|+c.$$

4.5.54 求 $\int\sec^3xdx$.

解 在前题的递推公式

$$\int\sec^{2n+1}xdx=\frac{1}{2n}\cdot\frac{\sin x}{\cos^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\sec^{2n-1}xdx$$

中,令 $n=1$,有

$$\int\sec^3xdx=\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\int\sec xdx$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2x}+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+c$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\sec x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+c.$$

4.5.55 求 $\int\sec^6xdx$.

解 $\int\sec^6xdx=\int\sec^4x\sec^2xdx$

$$=\int(1+\operatorname{tg}^2x)^2\sec^2xdx=\int(1+2\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x)\sec^2xdx$$

$$=\int(1+2\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x)d(\operatorname{tg}x)=\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x+c.$$

4.5.56 求 $\int\frac{dx}{\sin^4x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^4x}=\int\csc^4xdx=\int\csc^2x\cdot\csc^2xdx$

$$=\int(1+\operatorname{ctg}^2x)\csc^2xdx=\int\csc^2xdx-\int\operatorname{ctg}^2xd\operatorname{ctg}x$$

$$=-\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x+c.$$

4.5.57 求 $\int\csc^5xdx$.

解 在递推公式

$$\int\csc^{2n+1}xdx=-\frac{1}{2n}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{2n}x}+(1-\frac{1}{2n})\int\csc^{2n-1}xdx$$

中,令 $n=2$,得

$$\int \csc^5 x dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int \csc^3 x dx;$$

在上面递推公式中再令 $2n+1=3$,即 $n=1$,有

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \csc x dx,$$

但
$$\int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c,$$

从而
$$\int \csc^3 x dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

$$\int \csc^5 x dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

4.5.58 求 $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$.

解 原式 $= \int \csc x d(-\operatorname{ctg} x)$

$$= -\csc x\operatorname{ctg} x - \int \csc x \cdot \operatorname{ctg}^2 x \cdot dx$$

$$= -\csc x\operatorname{ctg} x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \int \frac{1}{\sin^3 x}dx,$$

所以
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\csc x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

6. 形如 $\int \sin mx\cos nx dx$, $\int \sin mx\sin nx dx$ 的积分

4.5.59 求 $\int \cos^2 3x\sin^4 3x dx$.

解
$$\int \cos^2 3x\sin^4 3x dx = \int (\cos 3x\sin 3x)^2\sin^2 3x dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4}\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}dx = \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x - \sin^2 6x\cos 6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x\cos 6x\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + c.$$

4.5.60 求 $\int \cos^2 ax\cos^2 bx dx$.

解
$$\int \cos^2 ax\cos^2 bx dx = \int (\cos ax\cos bx)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\int[\cos^2(a-b)x+\cos^2(a+b)x$$
$$+2\cos(a-b)x\cos(a+b)x]dx$$

$$=\frac{1}{8}\int[2+\cos2(a+b)x+\cos2(a-b)x]dx$$
$$+\frac{1}{4}\int(\cos2ax+\cos2bx)dx$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin2(a+b)x}{16(a+b)}+\frac{\sin2(a-b)x}{16(a-b)}$$
$$+\frac{1}{8a}\sin2ax+\frac{1}{8b}\sin2bx+c.$$

4.5.61　求 $\int\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$.

解　$\int\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$

$$=\frac{1}{2}\int\sin x[\cos(a-b)-\cos(2x+a+b)]dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)$$
$$-\frac{1}{4}\int[\sin(3x+a+b)-\sin(x+a+b)]dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$$
$$-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+c.$$

4.5.62　求 $\int\sin2x\cos5xdx$.

解　由公式 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$，得

$$\int\sin2x\cos5xdx=\frac{1}{2}\int[\sin7x+\sin(-3x)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin7xdx-\frac{1}{2}\int\sin3xdx$$

$$=-\frac{1}{14}\cos7x+\frac{1}{6}\cos3x+c.$$

4.5.63 求 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$.

解 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int [\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}-\frac{x}{3})]dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos\frac{5}{6}x + \cos\frac{x}{6})dx = \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + 3\sin\frac{x}{6} + c.$

4.5.64 求 $\int \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4}dx$.

解 对 $\cos x \cdot \cos\frac{x}{2}$ 积化和差公式,得

$$\int \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int (\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2})\cos\frac{x}{4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx.$$

再次用积化和差公式,得

$$\int \cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4})dx + \frac{1}{4}\int (\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4})dx$$

$$= \frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + c.$$

4.5.65 求 $\int \sin^3 2x\cos^2 3x dx$.

解 先利用三角公式化简 $\sin^3 2x\cos^2 3x$,得

$$\sin^3 2x\cos^3 3x = -\frac{1}{16}\sin 12x + \frac{3}{16}\sin 8x$$

$$-\frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 4x + \frac{3}{8}\sin 2x,$$

于是 $\int \sin^3 2x\cos^2 3x dx$

$$= \frac{1}{192}\cos 12x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{64}\cos 4x - \frac{3}{16}\cos 2x + c.$$

4.5.66 求 $\int \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}dx$.

解 原式 $= \int \frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx = \int \sec x dx - \int \operatorname{tg} x dx$

$= \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + \ln\cos x + c = \ln(1+\sin x) + c.$

4.5.67　求 $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

解　$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}} = -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\sqrt{1+\cos x}}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{(1+\cos x)\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos x)\sqrt{1+\cos x}}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1+\cos x}(1-\cos x)} + \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}$

令 $\sqrt{1+\cos x} = t, \cos x = t^2 - 1, d\cos x = 2tdt$，则

原式 $= -\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(2-t^2)t} = \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + c$

所以　$\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}}\right| + c.$

4.5.68　求 $\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sqrt{1+\sin 2x}(\sin x-\cos x)}dx$.

解　原式 $= \int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}(\sin x-\cos x)}dx$

$= \int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{|\sin x+\cos x|(\sin x-\cos x)}dx$

$= \pm\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx = \pm\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}$

$= \pm\ln|\sin x-\cos x| + c.$

4.5.69　求 $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

解　$\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}}$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x\sqrt{2\sec^2 x-1}} = \int \frac{\sec^2 x\sin x dx}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$

$= \int \frac{d(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sec x + \sqrt{2\sec^2 x-1}\right| + c.$

4.5.70　求积分 $I=\int\frac{\sec^2x\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\sec^2x}}dx.$

解　令 $u=2+\sec^2x$，则 $du=2\sec^2x\operatorname{tg}xdx$，于是

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}+c=\sqrt{2+\sec^2x}+c.$$

4.5.71　求 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}.$

解　设 $\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}=t$，则 $x=\operatorname{arctg}t^3$，$dx=\frac{3t^2}{1+t^6}dt$，代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}=3\int\frac{tdt}{1+t^6}=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3}$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right]+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+c.$$

其中 $t=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}.$

4.5.72　求 $\int\frac{x}{\cos^2x\operatorname{tg}^3x}dx.$

解　$\int\frac{x}{\cos^2x\operatorname{tg}^3x}dx=\int xd\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\operatorname{tg}^2x}-\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2x}dx\right]$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\operatorname{tg}^2x}-\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx\right]=-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{ctg}x+x\right]+c.$$

§6 综合问题

问题与解答

4.6.1 设 $f'(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，求 $\int xf'(x)dx$.

解 因 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x+\sin x}{x^2}$，故

$$\begin{aligned}\int xf'(x)dx&=\int xd(f(x))=xf(x)-\int f(x)dx\\&=\cos x-\frac{\sin x}{x}-\int\frac{x\cos x+\sin x}{x^2}dx\\&=\cos x-\frac{\sin x}{x}-\int\frac{\cos x}{x}dx-\int\sin xd\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\cos x-\frac{\sin x}{x}-\int\frac{\cos x}{x}dx-\frac{\sin x}{x}+\int\frac{\cos x}{x}dx\\&=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+c.\end{aligned}$$

4.6.2 求 $\int\dfrac{x^2}{(1-x^2)^3}dx$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int x\frac{xdx}{(1-x^2)^3}=\frac{1}{4}\int xd\left(\frac{1}{(1-x^2)^2}\right)\\&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(1-x^2)^2}\\&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^2}dx\\&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1-x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx\\&=\frac{x}{4(1-x^2)^2}-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx\end{aligned}$$

而 $$\int\frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int x\cdot d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{x}{2(1-x^2)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{x}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c.$$

于是，原式 $= \dfrac{x}{4(1-x^2)^2} + \dfrac{x}{2(1-x^2)} - \dfrac{3}{8}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c.$

4.6.3　求积分 $\displaystyle\int \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$

解法 1　原式 $\displaystyle= \int xe^{-x}d\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$= \frac{xe^{-x}}{1-x} - \int e^{-x}dx = \frac{e^{-x}}{1-x} + c.$$

解法 2　设 $x = -\ln t$，则

$$\text{原式} = \int \frac{-t\ln t}{(1+\ln t)^2}\left(-\frac{1}{t}\right)dt = -\int t\ln t \cdot d\left(\frac{1}{1+\ln t}\right)$$

$$= -\frac{t\ln t}{1+\ln t} + \int \frac{1}{1+\ln t}(1+\ln t)dt$$

$$= -\frac{t\ln t}{1+\ln t} + t + c = \frac{e^{-x}}{1-x} + c.$$

4.6.4　求 $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

解　设 $e^{-\frac{x}{2}} = t$，则 $e^{-\frac{x}{2}}dx = -2dt$，于是

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{e^x(1+e^{-\frac{x}{2}})} = \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx}{1+e^{-\frac{x}{2}}} = -2\int \frac{tdt}{1+t}$$

$$= -2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = -2t + 2\ln(1+t) + c$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} + 2\ln(1+e^{-\frac{x}{2}}) + c.$$

4.6.5　求 $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

解法 1　原式 $\displaystyle= \int \frac{e^x + 1 - e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{1+e^x}dx - \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

$$= \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} - \int \frac{de^{x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1} - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{1+e^x} + c.$$

解法 2　原式 $\displaystyle= \int \frac{dx}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} = \int \frac{-e^{-x}d(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}$

$$= \int e^{-x} d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = e^{-x}\frac{1}{1+e^{-x}} - \int \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{x}} - \ln(1+e^{-x}) + c.$$

4.6.6　求 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$.

解　当 $a \neq b$ 时，设 $x - a = (b-a)\sin^2 t$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \int \frac{2(b-a)\sin t\cos t}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t(b-a)(1-\sin^2 t)}}dt$$

$$= 2\int dt = 2t + c = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c.$$

若 $a = b$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \int \frac{dx}{|x-a|} = \ln|x-a| + c.$$

4.6.7　求 $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx$.

解　$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^4}dx^2$　（令 $x^2 = t$）

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int \ln(1+t)d(-\frac{1}{t})$$

$$= -\frac{1}{2t}\ln(1+t) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t(t+1)}dt$$

$$= -\frac{1}{2t}\ln(1+t) + \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t) + c$$

$$= -\frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + c.$$

4.6.8　求 $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

解　$\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

$$= \int \frac{(x+a)\ln(x+a) + (x+b)\ln(x+b)}{(x+a)(x+b)}dx$$

$$= \int \frac{\ln(x+a)}{(x+b)}dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$= \int \ln(x+a)d(\ln(x+b)) + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$= \ln(x+a)\ln(x+b) - \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$
$$= \ln(x+a)\ln(x+b) + c.$$

4.6.9 求 $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解法 1 设 $\arcsin x = t$,则

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{t\sin t}{\cos t}\cos t dt = -t\cos t + \sin t + c$$
$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + c.$$

解法 2 $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2})$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + c.$$

4.6.10 求 $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\mathrm{arctg}x dx.$

解 设 $x = \mathrm{tg}t$,则

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\mathrm{arctg}x dx = \int t(a\mathrm{tg}^2 t + b)dt$$
$$= \int btdt + \int at(\sec^2 t - 1)dt = (b-a)\int tdt + a\int td\mathrm{tg}t$$
$$= \frac{(b-a)}{2}t^2 + at\cdot\mathrm{tg}t - a\int \mathrm{tg}tdt$$
$$= \frac{(b-a)}{2}t^2 + at\cdot\mathrm{tg}t + a\ln|\cos t| + c$$
$$= \frac{b-a}{2}(\mathrm{arctg}x)^2 + ax\mathrm{arctg}x - \frac{a}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

4.6.11 在什么条件下,积分 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 表示有理函数.

解 要使 $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数,必须令

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

中的系数 $C = 0, E = 0$;于是有

$$ax^2 + bx + c = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + Dx^3,$$

比较 x 的同次幂系数,得

$$B + D = 0, \quad A - 2B = a, \quad -2A + B = b, \quad A = c.$$

从这个方程组中消去 A、B、D 得到所要求的条件为 $a + 2b + 3c = 0$.

4.6.12　已知 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$，当 $0 < x < 1$ 时，求 $f(x)$.

解　$f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x = 1 - 2\sin^2 x + \dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$，即

$$f'(u) = 1 - 2u + \frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u} - 2u,\ (0 < u < 1).$$

故　$$f(u) = -\ln(1-u) - u^2 + c,\ (0 < u < 1).$$

亦即　$$f(x) = -\ln(1-x) - x^2 + c,\ (0 < x < 1).$$

4.6.13　设 $f'(\sin x) = \cos x$，求 $f(x)$.

解　由题设有 $f'(\sin x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$，即 $f'(u) = \sqrt{1-u^2}$，于是

$$f(u) = \int \sqrt{1-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\arcsin u + c,$$

故　$$f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c,\ (|x| \leqslant 1).$$

4.6.14　已知 $f'(e^x) = 1 + x$，求 $f(x) = ?$

解　由题设有 $f'(u) = 1 + \ln u$，于是

$$f(u) = \int (1 + \ln u)du = u\ln u + c,$$

故　$$f(x) = x\ln x + c,\ (x > 0).$$

4.6.15　确定系数 A，B 使下式成立.

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^2} = \frac{A\sin x}{a + b\cos x} + B\int \frac{dx}{a + b\cos x}.$$

解　欲使所给等式成立，须

$$\left(\frac{A\sin x}{a + b\cos x} + B\int \frac{dx}{a + b\cos x}\right)' = \frac{1}{(a + b\cos x)^2}$$

成立，即须

$$\frac{Ab + Ba + (Aa + Bb)\cos x}{(a + b\cos x)^2} = \frac{1}{(a + b\cos x)^2}$$

成立，由此得

$$Ab + Ba = 1,\ Aa + Bb = 0.$$

当 $a \neq b$ 时，解得 $A = -\dfrac{b}{a^2 - b^2}$，$B = \dfrac{a}{a^2 - b^2}$；

当 $a = b$ 时，A、B 无解.

所以，当 $a \neq b$ 时，$A=\frac{b}{b^2-a^2}, B=\frac{a}{a^2-b^2}$；当 $a=b$ 时，无论 A、B 为何值，原式都不成立.

4.6.16　求两个多项式 $p(x)$ 与 $q(x)$，使得

$$\int[(2x^4-1)\cos x+(8x^3-x^2-1)\sin x]dx$$
$$=p(x)\cos x+q(x)\sin x+c.$$

解　对所给式子两边求导，并比较 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数得

$$p'(x)+q(x)=2x^4-1, \tag{1}$$
$$q'(x)-p(x)=8x^3-x^2-1. \tag{2}$$

(1) 式两边求导得　$p''(x)+q'(x)=8x^3$，代入(2) 可得

$$p''(x)+p(x)=x^2+1. \tag{3}$$

设 $p(x)=ax^2+bx+c$，代入(3) 式得

$$ax^2+bx+c+2a=x^2+1,$$

解得 $a=1, b=0, c=1-2a=-1$，故 $p(x)=x^2-1$；而由(1) 得

$$q(x)=2x^4-1-p'(x)=2x^4-2x-1.$$

4.6.17　求 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx.$

解法 1　原式 $=\int\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}e^x dx$

$$=\int\left(\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot e^x\right)dx=\int d\left(e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c.$$

解法 2　$\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int e^x\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}dx$

$$=\int\frac{e^x}{\sin^2 x}dx-\int e^x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\int\frac{e^x}{\sin x}dx-\int e^x\operatorname{ctg}x\,dx$$

$$=\int e^x d(-\operatorname{ctg}x)-\int e^x d\left(-\frac{1}{\sin x}\right)+\int e^x\csc x\,dx-\int e^x\operatorname{ctg}x\,dx$$

$$=-e^x\operatorname{ctg}x+\int e^x\operatorname{ctg}x\,dx+\frac{e^x}{\sin x}-\int e^x\csc x\,dx$$

$$+\int e^x\csc x dx-\int e^x\text{ctg}x dx$$

$$=-e^x\text{ctg}x+\frac{e^x}{\sin x}+c.$$

4.6.18　若 $p_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式，试计算 $\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx$.

解　先用泰勒公式展开

$$p_n(x)=p_n(a)+p'_n(a)(x-a)+\frac{p''_n(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{p'''_n(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

从而

$$\int\frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=p_n(a)\int\frac{1}{(x-a)^{n+1}}dx+p'_n(a)\int\frac{1}{(x-a)^n}dx+\frac{p''_n(a)}{2!}\int\frac{1}{(x-a)^{n-1}}dx+\frac{p'''_n(a)}{3!}\int\frac{1}{(x-a)^{n-2}}dx+\cdots+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\int\frac{1}{(x-a)}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{1}{(x-a)^{n-k+1}}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int(x-a)^{-n+k-1}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\frac{1}{k-n}\frac{1}{(x-a)^{n-k}}.$$

4.6.19　求 $\int\frac{e^{k\text{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$，($k$ 为常数).

解　因被积函数中含有 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\text{arctg}x$，所以先作变换 $t=\text{arctg}x$ 比较方便.

$$\text{原式}=\int\frac{e^{kt}}{(\sec t)^3}\sec^2 t dt=\int e^{kt}\cos t dt=\int e^{kt}d\sin t$$

$$=e^{kt}\sin t-k\int e^{kt}\sin t dt=e^{kt}\sin t+ke^{kt}\cos t-k^2\int e^{kt}\cos t dt,$$

所以　$(1+k^2)\int e^{kt}\cos t dt=e^{kt}(\sin t+k\cos t)+c$,

$$\text{原式}=\int e^{kt}\cos t dt=\frac{1}{1+k^2}e^{kt}(\sin t+k\cos t)+c$$

$$=\frac{e^{\text{arctg}x}}{1+k^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{k}{\sqrt{1+x^2}}\right)+c.$$

4.6.20　求 $\int x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

解　因被积表达式中含有 $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$，所以先设 $t=\sqrt{x}$，再用分部积分法.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int t^2\operatorname{arctg}t\cdot 2t\,dt = 2\int t^3\operatorname{arctg}t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg}t\,dt^4 = \frac{1}{2}t^4\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\int t^4\frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}t^4\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}t^4\operatorname{arctg}t - \frac{1}{2}\int(t^2-1)dt - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}t^4\operatorname{arctg}t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}t + c \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + c.
\end{aligned}
$$

4.6.21　求 $\int\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

解　$\int\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx = \int\dfrac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx.$

设 $t=e^x$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\frac{1}{t}dt = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \\
&= \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} - \int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-(\frac{1}{t})^2}} \\
&= \int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int\frac{d(\frac{1}{t})}{\sqrt{1-(\frac{1}{t})^2}} \\
&= \ln(t+\sqrt{t^2-1}) + \arcsin\frac{1}{t} + c \\
&= \ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}) + \arcsin e^{-x} + c.
\end{aligned}
$$

4.6.22　求 $\int\dfrac{dx}{x(x^n+a)}$，$(a\neq 0, n\neq 0)$.

解　采用配项法.

$$\int\frac{dx}{x(x^n+a)}=\frac{1}{a}\int\frac{x^n+a-x^n}{x(x^n+a)}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{x^n+a}{x(x^n+a)}dx-\frac{1}{a}\int\frac{x^n dx}{x(x^n+a)}$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{a}\int\frac{x^{n-1}}{x^n+a}dx=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{a}\frac{1}{n}\int\frac{dx^n}{x^n+a}$$

$$=\frac{1}{a}(\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|x^n+a|)+c.$$

4.6.23　计算 $\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}]dx.$

解　原式 $=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d[\frac{f(x)}{f'(x)}]=\frac{1}{2}\left[\frac{[f(x)]}{f'(x)}\right]^2+c.$$

4.6.24　求 $\int|x|dx.$

解　$\int|x|ax=\text{sgn}x\cdot\int xdx=\text{sgn}x\cdot\frac{1}{2}x^2+c=\frac{x|x|}{2}+c.$

4.6.25　求 $\int(x+|x|)^2dx.$

解　$\int(x+|x|)^2dx=\int(x^2+2x|x|+x^2)dx$

$$=\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2|x|}{3}+c=\frac{2x^2}{3}(x+|x|)+c.$$

4.6.26　证明 $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+c,$ 式中 A,B,C 为常数.

证　设 $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$ 比较此恒等式两端 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数,得

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},\ a^2+b^2\neq 0,$$

于是 $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + c.$$

4.6.27 求 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$.

解 在公式 $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x} dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + c$ 中，$a_1 = 1, b_1 = -1, a = 1, b = 2$；由 4.6.25 题知，

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 2}{1 + 4} = -\frac{1}{5},$$

$$B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2} = \frac{-1 - 2}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx = -\frac{x}{5} - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + c.$$

4.6.28 证明：$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + c\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c},$$

式中 A, B, C 都是常数.

证 按题意 a、b 不同时为零. 设

$$a_1\sin x + b_1\cos x + c_1 \equiv A(a\sin x + b\cos x + c) + B(a\cos x - b\sin x) + c,$$

比较等式两端 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的系数，则有

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2},\ B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2},\ C = \frac{a(ac_1 - a_1 c) + b(bc_1 - b_1 c)}{a^2 + b^2}$$

代入得

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx$$

$$= A\int dx + B\int \frac{d(a\sin x + b\cos x + c)}{a\sin x + b\cos x + c} + c\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$$

$$= Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| + c\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}.$$

4.6.29 证明：若 $p + q = kn$，式中 k 为整数，则积分 $\int R[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx$ 为初等函数，(式中 R 为有理函数，p, q, n 为整数).

证　当 $a=b$ 时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^{k}$，则积分显然为初等函数.

当 $a\neq b$ 时，设 $\frac{x-a}{x-b}=y\ (\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y},\quad dx=\frac{a-b}{(1-y)^{2}}dy,$$

$$x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\int R[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx$$

$$=(a-b)\int R[\frac{a-by}{1-y},y^{\frac{p}{n}}(\frac{a-b}{1-y})^{k}]\ \frac{dy}{(1-y)^{2}}.$$

再设 $\sqrt[n]{y}=t$，则 $y=t^{n},dy=nt^{n-1}dt$. 从而上述积分化为

$$\int R[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}]dx$$

$$=n(a-b)\int R[\frac{a-bt^{n}}{1-t^{n}},t^{p}(\frac{a-b}{1-t^{n}})^{k}]\ \frac{t^{n-1}}{(1-t^{n})^{2}}dt,$$

因为被积函数为 t 的有理函数，所以积分是初等函数.

第五章　定积分

§1　定积分的概念

内 容 提 要

1. 定积分的定义

设在区间$[a,b]$上给定了函数$f(x)$，用任意方法把区间$[a,b]$分成n个部分，其分点为$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$. 并设$\lambda$是$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i\ (i=0,1,\cdots,n-1)$中最大的. 在每一个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上任取一点$\xi_i$; $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}\ (i=0,1,\cdots,n-1)$，作和$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$. 当$\lambda\to 0$时，不论其中分点$x_i$和$\xi_i$各是如何选取，如果总有同一极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=I$$

存在，那末这个极限I称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记作

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

此时，函数$f(x)$称为区间$[a,b]$上的可积函数，a和b分别称为积分的下限和上限，$f(x)$称为被积函数，x是积分变量，$\int$称为积分号.

2. 达布和

设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，对于$[a,b]$的任意分割$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，用$m_i, M_i$分别表示$f(x)$在子区间$[x_i,x_{i+1}]$上的下确界与上确界，作和数

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad \text{和} \quad S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

称 s_Δ 为与分割 Δ 相关的达布下和，S_Δ 为达布上和.

3. 上、下积分的定义

数 $\overline{I} = \inf\limits_{\Delta} S_\Delta$ 称为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的上积分，记为 $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

数 $\underline{I} = \sup\limits_{\Delta} s_\Delta$ 称为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的下积分，记为 $\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

4. 定积分存在的充要条件

(1) 有界函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的充要条件是：对于任意的 $\varepsilon > 0$，恒存在着上和数 $S_{\Delta'}$ 和下和数 $s_{\Delta''}$，使得 $S_{\Delta'} - s_{\Delta''} < \varepsilon$.

(2) 有界函数 $f(x)$ 可积的充要条件是它的上、下积分相等. 即

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

5. 可积函数及其性质

(1) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

(2) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界，且除有限个间断点外 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

(3) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调，那末 $f(x)$ 可积.

(4) 在$[a,b]$上可积的函数一定有界.

(5) 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则 $|f(x)|$ 在$[a,b]$上也可积.

(6) 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在$[a,b]$上可积，则其和、差、积在$[a,b]$上也可积.

(7) 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则 $f(x)$ 在$[a,b]$中的任一部分区间$[\alpha,\beta]$上也可积. 反之，若把$[a,b]$分割成若干部分区间，并分别在每个部分区间上 $f(x)$ 可积，则它在整个区间$[a,b]$上可积.

6. 定积分的几何意义

在平面直角坐标系下，设 $a < b$，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义为：它是介于 x 轴，函数 $f(x)$ 的图形及纵线 $x = a, x = b$ 之间各部分面积的代数和；在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号.

问 题 与 解 答

1. 定积分的基本概念

判断下列各命题是否正确并且说明道理(5.1.1—5.1.9 题):

5.1.1 在平面直角坐标系下,设 $a<b$,定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义为:介于函数 $f(x)$ 的曲线,x 轴与 $x=a,x=b$ 之间曲边梯形的面积.

非. 例如,$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$,而 $y=\sin x$,x 轴与 $x=-\frac{\pi}{2}$、$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的曲边梯形的面积为 $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=2$.

正确的结论应为:定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义是介于函数 $f(x)$ 的曲线,x 轴与 $x=a,x=b$ 之间的各部分面积的代数和,在 x 轴上方的面积取正号,在 x 轴的下方的面积取负号.

5.1.2 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $\int_a^b f^2(x)dx=0$,则在$[a,b]$上 $f(x)\equiv 0$.

是. 设 $x_0\in(a,b)$,$f(x_0)\neq 0$,则由 $f(x)$ 在 x_0 连续可知,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时总有

$$|f(x)|>\frac{1}{2}|f(x_0)|>0;$$

因而

$$\int_a^b f^2(x)dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)dx\geqslant\frac{1}{4}f^2(x_0)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx=\frac{1}{2}f^2(x_0)\cdot\delta>0,$$

与题设不符,从而可知对任意的 $x\in(a,b)$,恒有 $f(x)=0$. 进而由 $f(x)$ 在$[a,b]$上的连续性可知 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 及 $f(b)=\lim\limits_{x\to b}f(x)=0$. 故在$[a,b]$上,恒有 $f(x)=0$.

5.1.3 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,b]$上都可积,则 $f(g(x))$ 在$[a,b]$上必定可积.

非．例如，$f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\1, & x\neq 0,\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数};\\ \dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p},p、q\text{ 为互素的自然数},p\geqslant 1\end{cases}$$

都是[0,1]上的可积函数，而

$$f(g(x))=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数};\\1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

在[0,1]上却不可积.

5.1.4　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必可积.

非．例如，狄里克莱函数在 $[a,b]$ 上有界而不可积.

这说明可积函数性质(4)的逆命题不一定成立.

5.1.5　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

是．用反证法可以得知命题正确，假定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，取 $[a,b]$ 上的一个分划 Δ，函数 $f(x)$ 至少在其中的一个小区间上是无界的，在这个小区间上可适当选取 ξ，使 $f(\xi)$ 可以任意大，因而做出这样的积分和 σ，其绝对值可以大于预先给定的任意大的正数，故 σ 不可能存在确定的极限.

5.1.6　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上必可积.

是．由于对 $[a,b]$ 上任意两点 x',x''，总有

$$\big||f(x'')|-|f(x')|\big|\leqslant|f(x'')-f(x')|,$$

故
$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(|M_i|-|m_i|)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i,$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，由定积分存在的充要条件(2)可知

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=0.$$

进而有
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(|M_i|-|m_i|)\Delta x_i=0.$$

所以，$|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积.

5.1.7　若 $|f(x)|$ 可积，则 $f(x)$ 必可积.

非．例如，

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数};\\-1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

显然 $|f(x)| = 1$ 在$[0,1]$上可积,但 $f(x)$ 在$[0,1]$上不可积.

这说明可积函数性质(5)的逆命题不一定成立.

5.1.8 若 $f(x)$ 在(a,b)内有原函数,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必定可积.

非. 例如,$f(x) = \frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内有原函数 $\ln x$. 但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在$[0,1]$上并不可积.

5.1.9 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,则 $f(x)$ 在(a,b)内必定有原函数.

非. 例如,函数 $f(x) = x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在$[0,\pi]$上可积,即

$$\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x)dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

而 $f(x) = x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在$(0,\pi)$内的原函数不存在.

顺便指出,
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

因而 $x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在$[0,\pi]$上不连续,$x = \frac{\pi}{2}$ 为其间断点,且为唯一的第一类间断点.

若 $F(x)$ 为 $f(x) = x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在$(0,\pi)$内的原函数,则由原函数定义可知,$F'(x) = f(x), x \in (0,\pi)$. 因而 $F(x)$ 在$(0,\pi)$内必连续.

任取 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta)$,则 $F(x)$ 在$[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta]$内满足拉格朗日中值定理条件,从而有

$$\frac{F(x) - F(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = F'(\xi), \frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2} + \delta,$$

令 $x \to \frac{\pi}{2}^+$,则必有 $\xi \to \frac{\pi}{2}^+$,上式左端为 $F(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 点的右导数 $F'(\frac{\pi}{2}^+)$,而

$$\lim_{\xi \to \frac{\pi}{2}^+} F'(\xi) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x),$$

即有
$$F'(\frac{\pi}{2}^{+}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} f(x),$$

同样可有
$$F'(\frac{\pi}{2}^{-}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} f(x),$$

由于 $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，故
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} f(x) \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} f(x),$$

从而
$$F'(\frac{\pi}{2}^{+}) \neq F'(\frac{\pi}{2}^{-}).$$

故 $F(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不可导，与原函数定义矛盾.

因此，$f(x)=x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 在 $(0,\pi)$ 内不可能存在原函数.

2. 用定义求积分

5.1.10　设(1) $f(x)=x^3,\ -2\leqslant x\leqslant 3$;

(2) $f(x)=\sqrt{x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $f(x)=2^x, 0\leqslant x\leqslant 10$.

把相应的区间等分成 n 份，求给定函数 $f(x)$ 在相应区间上的积分下和 s_Δ 及积分上和 S_Δ.

解　(1) 把区间 $[-2,3]$ 分为 n 等分，得一分割 Δ: $-2<-2+\frac{5}{n}<-2+\frac{2}{n}\times 5<\cdots<-2+i\cdot\frac{5}{n}<-2+(i+1)\cdot\frac{5}{n}<\cdots<3$. 每一个子区间的长度 $h=\frac{5}{n}$，第 i 个子区间为 $[-2+ih, -2+(i+1)h]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 由于 $f(x)=x^3$ 是递增函数，所以 $m_i=(-2+ih)^3, M_i=(-2+(i+1)h)^3, (i=0,1,\cdots,n-1)$. 于是，

$$s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(-2+ih)^3\cdot h$$
$$=-8nh+12h^2\sum_{i=0}^{n-1} i-6h^3\sum_{i=0}^{n-1} i^2+h^4\sum_{i=0}^{n-1} i^3$$
$$=-40+\frac{12\times 25n(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}$$

$$+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}$$

$$=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^4}.$$

同理，$S_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[-2+(i+1)h]^3\cdot h$

$$=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

(2) $h=\frac{1}{n}$; $m_i=\sqrt{\frac{i}{n}}$, $M_i=\sqrt{\frac{i+1}{n}}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$.

于是， $s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$；

$$S_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i+1}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(3) $h=\frac{10}{n}$, $m_i=2^{ih}$; $M_i=2^{(i+1)h}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$.

于是，$s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}h\cdot 2^{ih}=\frac{h(2^{nh}-1)}{2^h-1}=\frac{10230}{n(2^{10/n}-1)}$；

$$S_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}h\cdot 2^{(i+1)h}=\frac{h\cdot 2^h(2^{nh}-1)}{2^h-1}=\frac{10230}{n(2^{10/n}-1)}\cdot 2^{10/n}.$$

5.1.11 分闭区间[1,2]为 n 份，使这 n 份的长构成一等比数列，求函数 $f(x)=x^4$ 在[1,2]上的积分下和. 当 $n\to\infty$ 时，此和的极限等于什么？

解 设区间[1,2]上的各分点为 $1=q^0,q,q^2,\cdots,q^i,\cdots,q^n=2$，则 $q=2^{\frac{1}{n}}$. 第 i 个区间的长度为 $\Delta x_i=q^{i+1}-q^i=q^i(q-1)$. 于是

$$s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}q^{4i}q^i(q-1)$$

$$=(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}q^{5i}=\frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}$$

$$=\frac{(2^{\frac{1}{n}}-1)(2^5-1)}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{31(2^{\frac{1}{n}}-1)}{2^{\frac{5}{n}}-1},$$

从而 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_\Delta = 31 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1}$

$$= 31 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{5}{n}}{2^{\frac{5}{n}} - 1} \times \frac{1}{5}$$

$$= 31 \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{5\ln 2} = \frac{31}{5}.$$

5.1.12　狄利克雷函数是不可积的.

解　狄利克雷函数的定义域为[0,1],

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 是有理数;} \\ 0, & x\text{ 是无理数.} \end{cases}$$

对于区间[0,1]的任意分割 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$. 因为子区间$[x_{i-1}, x_i]$中一定有无理数,也有有理数,所以 $m_i = 0, M_i = 1$(对 $i = 1,2,\cdots,n$) 成立. 这样,对任意的 $\varepsilon > 0$,总有

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = 1 > \varepsilon.$$

所以,$f(x)$ 在[0,1]上不可积.

5.1.13　证明黎曼函数在[0,1]上是可积的.

证　黎曼函数 $y = R(x)$ 的定义域为[0,1],

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x\text{ 为无理数时;} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, p, q\text{ 互质}, q > 0\text{ 时,} \end{cases}$$

因对任意的 $\varepsilon > 0$,在[0,1]的有理数$\dfrac{p}{q}$中,使$\dfrac{1}{q} > \dfrac{\varepsilon}{2}$的只有有限多个(规定 0 和 1 为$\dfrac{0}{1}$和$\dfrac{1}{1}$). 设它们是 $r_1, r_2, \cdots, r_{N_\varepsilon}$. 将[0,1]分成若干个子区间,使得每一个 $r_i (1 \leqslant i \leqslant N_\varepsilon)$ 都只属于其中之一,而且所有包含 r_i 的子区间的总长度不超过$\dfrac{\varepsilon}{2}$. 在其余的区间上,$f(x)$ 的最小上界 $M_i \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此与此分割相关的大、小达布和之差为

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} \sum{}' \Delta x_i + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

此处$\sum'$表示对那些不含有$r_i(1\leqslant i\leqslant N_\varepsilon)$的区间求和.注意到$\varepsilon>0$的任意性,所以$f(x)$在$[0,1]$上可积.

用定义求下列定积分(5.1.14—5.1.18题):

5.1.14 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$; (2) $\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$; (3) $\int_a^b x^m dx$.

$(0<a<b, m\neq -1)$

解 (1)因$f(x)=\sin x$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续,所以$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上可积.依定义,积分和S_n的极限收敛到积分值.于是把区间$[0,\frac{\pi}{2}]$分为n等分,对于子区间$[x_i,x_{i+1}]$,令$\xi_i=x_i\ (i=0,1,\cdots,n-1)$.则积分和为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n}.$$

因为$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$,

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{4n}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\sin\frac{n+1}{4n}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

(2) 把积分区间$[1,2]$任意分为n份,根据被积函数的特点,选取$\xi_i=\sqrt{x_ix_{i+1}}$, $(i=0,1,\cdots,n-1)$.于是

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(\sqrt{x_ix_{i+1}})^2}(x_{i+1}-x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

所以，$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$

(3) 选诸分点，使它们的横坐标构成等比数列，即 $a, aq, aq^2, \cdots, aq^i, \cdots, aq^{n-1}, aq^n = b$. 其中，$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$，取 $\xi_i = x_i = aq^i\ (i = 0, 1, \cdots, n-1)$. 作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^m (aq^{i+1} - aq^i) = a^{m+1}(q-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)i}$$

$$= a^{m+1}(q-1) \cdot \frac{q^{n(m+1)} - 1}{q^{m+1} - 1} = (b^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \frac{q-1}{q^{m+1} - 1}.$$

则 $\lim_{n\to\infty} S_n = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n\to\infty} \frac{q-1}{q^{m+1} - 1}$

$$= (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^m + q^{m-1} + \cdots + 1} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

故 $\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$

5.1.15 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx.$

解　因被积分函数 $\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上连续，故所求定积分存在，且其值与区间的分法和 ξ_i 的取法无关. 为计算方便，用分点 $x_i = q^i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 将 $[1,2]$ 分成 n 个子区间. $q^n = 2$，即 $q = 2^{\frac{1}{n}}$. $\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$. 取 $\xi_i = x_{i-1}$. 从而积分和为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} \cdot q^{i-1}(q-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (q-1) = n(q-1) = n(2^{\frac{1}{n}} - 1).$$

因 $\lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \ln 2$，所以 $\lim_{n\to+\infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln 2$. 且因 $|\Delta x_i| = |q^{i-1}(q-1)| \leqslant 2|2^{\frac{1}{n}} - 1|$，而

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2^{\frac{1}{n}}-1)=0$,所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}|\Delta x_i|=0$,即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\Delta\|=0$. 故

$$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{\|\Delta\|\to 0}S_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\ln 2.$$

5.1.16　$\int_0^1 e^x dx.$

解　因被积函数 e^x 在积分区间[0,1]上连续,故定积分 $\int_0^1 e^x dx$ 存在,且它的值与区间[0,1]的分法和 ξ_i 的取法无关. 为计算方便,可将[0,1]分为 n 等分,分点为

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ \cdots,\ x_i=\frac{i}{n},\ \cdots,\ x_n=\frac{n}{n}=1,$$

$\Delta x_i=\frac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$,$\xi_i$ 取为子区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 的右端点:

$\xi_i=\frac{i}{n}$,从而积分和为

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{\frac{i}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e^{n\cdot\frac{1}{n}})}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})},$$

于是 $\int_0^1 e^x dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}$.

但因 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=-1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n(1-e^{\frac{1}{n}})=-1$,因此

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}=\frac{1\cdot(1-e)}{-1}=e-1.$$

注　通常由 $n\to\infty$ 并不能推出 $\|\Delta\|=\max\Delta x_i\to 0$. 但这里用的是等分:$\Delta x_i=\frac{1}{n}$,故由 $n\to\infty$ 可得出 $\|\Delta\|\to 0$.

5.1.17　$\int_0^x \cos t dt.$

解　将区间$[0,x]$分为n等分，则每个小区间的长度$x_{i+1}-x_i=h=\frac{x}{n}$. 取$\xi_i=ih\ (i=0,1,\cdots,n-1)$. 作积分和$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}h\cdot\cos ih$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}h\cos ih=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\left[\sin\frac{h}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}h\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{x}{2n}+\sin\frac{(2n-1)x}{2n}\right]=\sin x.$$

从而有$\int_0^x\cos tdt=\sin x$.

5.1.18　求布阿桑积分

$$\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx,$$

(1) $|\alpha|<1$,　(2) $|\alpha|>1$.

解　(1) 因为$(1-|\alpha|)^2\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2$，所以当$|\alpha|\neq 1$时，被积函数是连续的，于是积分存在. 把区间$[0,\pi]$分成$n$个相等的小区间，即有

$$s_n=\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2)$$

$$=\frac{\pi}{n}\ln[(1-\alpha)^2\prod_{i=1}^{n-1}(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2)].$$

另一方面，我们可以证明

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2).$$

事实上，方程$t^{2n}-1=0$共有$2n$个根，记作

$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n=-1,$

$\bar{\varepsilon}_1,\ \bar{\varepsilon}_2,\ \cdots,\ \bar{\varepsilon}_{n-1},$

其中$\varepsilon_i=\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}$, $\bar{\varepsilon}_i=\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}$,

$(i=1,2,\cdots,n-1,\ j=\sqrt{-1}$为虚数单位).

于是$t^{2n}-1=(t+1)(t-1)\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$.

而 $\prod_{i=1}^{n-1}(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2)$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(\sin^2\frac{i\pi}{n}+\cos^2\frac{i\pi}{n}-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}[(t-\cos\frac{i\pi}{n})^2+\sin^2\frac{i\pi}{n}]$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(t-\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n})\cdot(t-\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n})$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)=\frac{t^{2n}-1}{(t+1)(t-1)}$$

即 $$t^{2n}-1=(t^2-1)(\prod_{i=1}^{n-1}(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2).$$

当 $t=\alpha$ 时，利用上式可把 s_n 表为 $s_n=\frac{\pi}{n}\ln[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)]$.

于是，(1) 当 $|\alpha|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$，即

$$\int_0^\pi(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=0,$$

(2) 当 $|\alpha|>1$ 时，把 s_n 改写成

$$s_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}],$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=2\pi\ln|\alpha|$，即

$$\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=2\pi\ln|\alpha|.$$

5.1.19　证明不连续的函数 $f(x)=\text{sgn}(\sin\frac{\pi}{x})$ 在区间[0,1]上可积.

证　函数 $f(x)=\text{sgn}(\sin\frac{\pi}{x})$ 在[0,1]上有界，其不连续点是

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$$

并且，$f(x)$ 在[0,1]的任何部分区间上的振幅 $\omega\leqslant2$.

对任意的 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在$[\frac{\varepsilon}{5},1]$上只有有限个间断点，故在该

区间上可积. 因此存在 $\eta > 0$,使对$[\frac{\varepsilon}{5},1]$的任何分法,只要 $\max|\Delta x_i| < \eta$,就有$\sum\limits_{i'}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$.

显然,若$[\alpha,\beta]\subset[\frac{\varepsilon}{5},1]$,则对于$[\alpha,\beta]$的任何分法,只要 $\max|\Delta x_i'| < \eta$,也有$\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = 1$ 是$[0,1]$的满足 $\max|\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法,设 $x_{i_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{5} < x_{i_0+1}$.

综上所述,$\sum\limits_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 又,显然

$$\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i \leqslant 2\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i < 2\cdot\frac{2\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.$$

故 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i + \sum\limits_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon$.

由此可知,$\lim\limits_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$. 于是,$f(x)$ 在$[0,1]$上可积.

5.1.20　函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可积,且$\int_0^1 f(x)dx > 0$,证明:存在区间$[a,b]\subset[0,1]$,在$[a,b]$上 $f(x) > 0$.

证　因 $f(x)$ 在$[0,1]$上可积,故对任意选取的ξ_i:$\frac{i-1}{n}\leqslant\xi_i\leqslant\frac{i}{n}$,当 $n\to\infty$ 时,和$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)$ 趋向于 $\int_0^1 f(x)dx$.

如果在任何$[a,b]$上都有使 $f(x)\leqslant 0$ 的点,则可选取这些点为 ξ_i,$f(\xi_i)\leqslant 0$,此时和$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)$ 将是非正值,故极限也不可能为正值. 与题设矛盾.

5.1.21　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,证明对任意的 $\varepsilon > 0$,存在$[a,b]$上的阶梯函数 $J(x)$,使

$$\int_a^b |f(x) - J(x)|dx < \varepsilon.$$

证 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $[a,b]$ 的划分 Δ：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使
$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon.$$

此处 $M_i = \sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$；$m_i = \inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)$. 定义阶梯函数 $J(x)$ 如下：

$$J(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ f(x_{n-1}), & x = x_n. \quad (i = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

则
$$\int_a^b |f(x) - J(x)|dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})|dx$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon.$$

3. 用定积分求极限

5.1.22 利用定积分计算下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{4n} + \cos\frac{3\pi}{4n} + \cdots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{4n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdot\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}$.

解 (1) $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cos\frac{2i+1}{4n}\pi$ 可视为函数 $f(x) = \frac{2}{\pi}\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上积分和. 这里把 $[0,\frac{\pi}{2}]$ n 等分，分点为 $x_i = \frac{i}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ $(i = 0,1,\cdots,n-1)$，$\Delta x_i = \frac{\pi}{2n}$，取 $x_i \geqslant \xi_i \geqslant x_{i-1}$；$\xi_i = \frac{2i+1}{4n}\pi$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{2i+1}{4n}\pi\right)\cdot\frac{2}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cos x dx = \frac{2}{\pi}.$$

(2) 令 $A_n = \cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdot\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}$，那末

$$S_n = \ln A_n = \sum_{i=0}^{n-1}\ln\cos\frac{ia}{n\sqrt{n}}.$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，故当 $n\to\infty$ 时 $\ln\cos\dfrac{ia}{n\sqrt{n}}$ 与 $-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{i^2}{n^3}a^2$ 同阶. 于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\cos\frac{ia}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i^2}{n^3}a^2$$

$$=-\frac{1}{2}a^2\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=-\frac{a^2}{6}.$$

由此可得　　$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=e^{-\frac{a^2}{6}}$.

5.1.23　设 $0<a<b$，将区间 $[a,b]$ n 等分，其分点为 $x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$，试求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

解　(1) 令 $b-a=h$，则

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$$

$$=\frac{1}{h}\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{a+\frac{h}{n}}+\frac{1}{a+2\frac{h}{n}}+\cdots+\frac{1}{a+n\frac{h}{n}}]\frac{h}{n}$$

$$=\frac{1}{h}\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{a+\frac{h}{n}}+\frac{1}{a+2\frac{h}{n}}+\cdots+\frac{1}{a+n\frac{h}{n}}]\Delta x_i,$$

式中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 上面极限可视为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和的极限. 这里是把区间 n 等分. 并取 $\xi_i=x_i$，

故 $I=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x}=\frac{1}{h}[\ln x]_a^b=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}$.

(2) 令 $s_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$. 两端分别取对数，得

$$\ln s_n=\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n),$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\ln s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln(a+\frac{h}{n})+\ln(a+2\frac{h}{n})+\cdots+\ln(a+n\frac{h}{n})]$$

$$= \frac{1}{h}\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(a+\frac{h}{n}\right)+\ln\left(a+2\frac{h}{n}\right)+\cdots+\ln\left(a+n\frac{h}{n}\right)\right]\frac{h}{n}$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^b \ln x dx = \frac{1}{h}\left[x\ln x - x\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\ln\frac{b^b}{a^a} - 1,$$

因此 $\quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln s_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$.

5.1.24 用定积分求极限 $\lim_{n\to\infty} s_n$.

(1) $s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$,

(2) $s_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, $(p > 0)$.

解 $s_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}$ 可视为函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上的积分和. 这里是把[0,1] n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$, $(i = 0,1,\cdots,n)$. $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, 并取 $\xi_i = x_{i-1}$. 因此 $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

(2) $s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p$ 可视为函数 $f(x) = x^p$ 在区间[0,1]上的积分和. 这里是把[0,1] n 等分, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0,1,2,\cdots,n)$. $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. 并取 $\xi_i = x_i$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x^p dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

5.1.25 证明: 如果 $f(x) \in C^2[0,1]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

$C^2[0,1]$ 表示区间[0,1]上二阶导数连续.

解 记 $c = \max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$, 那么我们有

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f''(\alpha)\cdot\frac{1}{2n^2},$$

其中 $\alpha \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$. 于是

$$f'(\frac{k-1}{n}) = n\left(f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})\right) + \delta_{n,k},$$

其中 $|\delta_{n,k}| \leqslant \frac{c}{2n}$. 其次，

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(\frac{k-1}{n}) + f'(\frac{k-1}{n}) \cdot (t - \frac{k-1}{n}) + \varphi_{k,n}(t)\right)dt,$$

这里 $|\varphi_{k,n}(t)| \leqslant \frac{c}{2n^2}$,(当 $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$时). 于是，考虑到 $f'(\frac{k-1}{n})$ 的表达式，该积分等于

$$\frac{f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})}{2n} + \varepsilon_{n,k}, |\varepsilon_{n,k}| \leqslant \frac{3}{4}\frac{\varepsilon}{n^3},$$

因此，$n\int_0^1 f(t)dt - \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{h}) = n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)}{h}}^{\frac{k}{h}} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{h})\right)$

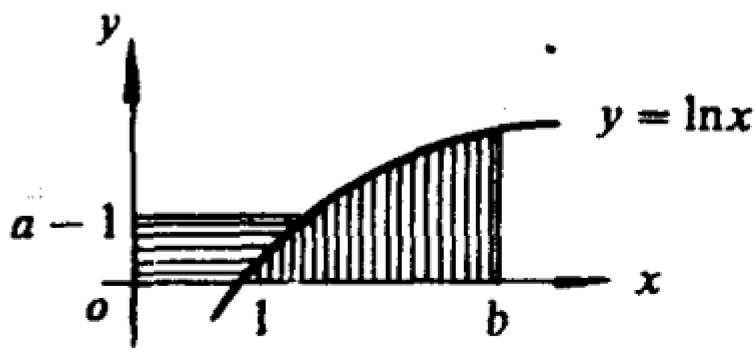
$$= n[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})}{2} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{h})] + o(\frac{1}{n})$$

$$= \frac{f(1) - f(0)}{2} + o(\frac{1}{n}).$$

5.1.26 设 $a, b > 1$，证明 $ab \leqslant e^{a-1} + b\ln b$.

证 从定积分的基本公式可知

$$e^{a-1} - 1 = \int_0^{a-1} e^y dy,\ b\ln b - b + 1 = \int_1^b \ln x dx.$$



5.1.26 题图

因此 $e^{a-1} + b\ln b = b + \int_0^{a-1} e^y dy + \int_1^b \ln x dx.$

根据定积分的几何意可知，

$$\int_0^{a-1} e^y dy + \int_1^b \ln x dx \geqslant b(a-1) = ab - b.$$

所以 $e^{a-1} + b\ln b \geqslant ab.$

§ 2　定积分的性质

内 容 提 要

1. 定积分的基本性质

(1) 若 $f(x)$、$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，c、d 为常数，则

$$\int_a^b [cf(x)+dg(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. 积分不等式

设 $a<b$，$f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则有下列不等式：

(1) 若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

(2) 设 $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$，则

$$m\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

(3) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$

(4) 柯西 — 施瓦兹不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

3. 积分中值定理

(1) 积分第一中值定理

设 $f(x)$、$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，并且 $g(x)$ 不变号，$m\leqslant f(x)\leqslant M$. 则存在常数 μ，使 $m\leqslant\mu\leqslant M$，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx.$$

如果 $f(x)$ 还是在 $[a,b]$ 上连续的，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx,$$

ξ 是开区间 (a,b) 内的某一定点.

推论　若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a<\xi<b)$,使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

*(2) 积分第二中值定理

设 $a<b$,函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且可积,而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调的,则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ $(a<\xi<b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(a^+)\cdot\int_a^\xi g(x)dx + f(b^-)\cdot\int_\xi^b g(x)dx.$$

推论 1　除满足上述条件外,若 $f(x)$ 是广义的非负单调递减函数,则

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(a^+)\cdot\int_a^\xi g(x)dx,\quad (a<\xi<b).$$

推论 2　除满足上述条件外,若 $f(x)$ 是广义的非负单调递增函数,则

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(b^-)\cdot\int_a^\xi g(x)dx,\quad (a<\xi<b).$$

问 题 与 解 答

5.2.1　证明不等式 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$.

证　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

因为函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 是单调递减函数,所以有

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1,$$

故　$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\leqslant\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\leqslant\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

5.2.2　证明不等式 $2\leqslant\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4}dx\leqslant\frac{8}{3}$.

证　因 $1\leqslant\sqrt{1+x^4}\leqslant\sqrt{1+2x^2+x^4}=1+x^2$，故

$$1\leqslant\sqrt{1+x^4}\leqslant 1+x^2.$$

于是 $\int_{-1}^1dx\leqslant\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4}dx\leqslant\int_{-1}^1(1+x^2)dx$，

即 $2\leqslant\int_{-1}^1\sqrt{1+x^4}dx\leqslant\frac{8}{3}$.

5.2.3　试证：$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}<\frac{\pi}{6}$，$n>2$.

证　当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$；$n>2$ 时，有

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

故　$$\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

而　$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

于是　$$\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}<\frac{\pi}{6}.$$

5.2.4　证明：$\frac{1}{2}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+1}}\leqslant\frac{\sqrt{14}}{7}$.

证　设 $f(x)=\sqrt{2x^2-x+1}$，则

$$f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+1}}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{4}$ 为驻点，当 $\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $0\leqslant x<\frac{1}{4}$ 时，$f'(x)<0$，又 $f(0)=1$，$f(\frac{1}{2})=1$，故 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{4}$ 处取得极小值，即最小值为 $f(\frac{1}{4})=\sqrt{\frac{7}{8}}$. 于是当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$f(x)=\sqrt{2x^2-x+1}\geqslant\sqrt{\frac{7}{8}} \text{ 及 } f(x)\leqslant 1.$$

即
$$1\leqslant\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+1}}\leqslant\sqrt{\frac{8}{7}}.$$

于是
$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+1}}\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{8}{7}}dx=\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

5.2.5　设 $x>-1$，证明：若 $0<a<1$，则

$$(1+x)^a\leqslant 1+ax.$$

证　若 $0\geqslant x>-1$，即 $1\geqslant 1+x>0$，则当 $0<a<1$ 时，$(1+x)^{a-1}\geqslant 1$. 等号当且仅当 $x=0$ 时成立. 因此

$$\int_x^0(1+x)^{a-1}dx\geqslant\int_x^0dx,$$

所以
$$(1+x)^a\leqslant 1+ax. \tag{1}$$

其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

若 $x>0$，即 $(1+x)>1$；则当 $0<a<1$ 时，有

$$(1+x)^{a-1}<1,$$

因此
$$\int_0^x(1+x)^{a-1}dx<\int_0^xdx.$$

所以
$$(1+x)^a<1+ax. \tag{2}$$

综合(1)、(2)，当 $x>-1$；$0<a<1$ 时，有

$$(1+x)^a<1+ax.$$

其中等号当且仅 $x=0$ 时成立.

5.2.6　设 $a\geqslant b>0$，$p>1$，证明

$$p\cdot a^{p-1}(a-b)\geqslant a^p-b^p\geqslant p\cdot b^{p-1}(a-b).$$

证　当 $p>1$ 时，对一切满足 $a\geqslant x\geqslant b>0$ 的 x，不等式

$$a^{p-1} \geqslant x^{p-1} \geqslant b^{p-1}$$

成立. 对上式从 b 到 a 积分，得

$$\int_b^a a^{p-1}dx \geqslant \int_b^a x^{p-1}dx \geqslant \int_b^a b^{p-1}dx,$$

从而　$p \cdot a^{p-1}(a-b) \geqslant a^p - b^p \geqslant p \cdot b^{p-1}(a-b)$.

5.2.7　设 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$，试证：

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < \alpha - \beta < \sin\alpha - \sin\beta.$$

证　若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，则有

$$\sec^2 x > 1 > \cos x.$$

上式对 x 从 α 到 β 积分，得

$$\int_\alpha^\beta \sec^2 x dx > \int_\alpha^\beta dx > \int_\alpha^\beta \cos x dx.$$

故　$\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha < \beta - \alpha < \sin\beta - \sin\alpha$,

即　$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < \alpha - \beta < \sin\alpha - \sin\beta$.

5.2.8　设 $x > 0$，试证：$x > \operatorname{arctg}x > x - \frac{1}{3}x^3$.

证　因 $\frac{1}{1+t^2} < 1$，故有

$$\operatorname{arctg}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} < \int_0^x 1 \cdot dt = x.$$

又有　$\operatorname{arctg}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2})dt$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2}dt.$$

其中 $\int_0^x \frac{t^4}{1+t^2}dt > 0$. 所以有 $x > \operatorname{arctg}x > x - \frac{1}{3}x^3$.

5.2.9　设 $x \geqslant 1$，试证：

$$\frac{x^2-1}{2x} \geqslant \ln x \geqslant \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

证　当 $x \geqslant 1$ 时，$x^2 + 1 \geqslant 2x$，不等式两边同除以 x^2，得

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x^2}).$$

同样，当 $x \geqslant 1$ 时，$(x+1)^2 \geqslant 4x$，$1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}(x+1)^2$. 利用倒数的

性质有　$\frac{1}{x} \geqslant \frac{4}{(1+x)^2}$.

综上所述,当 $x \geqslant 1$ 时,有$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2}) \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{4}{(1+x)^2}$,积分,得

$$\frac{1}{2}\int_1^x (1+\frac{1}{x^2})dx \geqslant \int_1^x \frac{dx}{x} \geqslant \int_1^x \frac{4}{(1+x)^2}dx,$$

故　$\frac{x^2-1}{2x} \geqslant \ln x \geqslant \frac{2(x-1)}{x+1}$.

当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

5.2.10　证明:当 $n>8$ 时,不等式$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$成立.

证　当 $b>a>e$ 时,有

$$\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln x}{x}\Big|_a^b = \int_a^b d(\frac{\ln x}{x}) = \int_a^b \frac{1-\ln x}{x^2}dx < 0,$$

于是

$$\frac{\ln b}{b} < \frac{\ln a}{a},\ b^a < a^b.$$

当 $n>8$ 时,$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > e$. 依上式有

$$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}.$$

5.2.11　若 $x>0$,证明

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

证　用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,对一切 $x>0$,不等式 $e^x>1$ 成立,两边同时积分,得

$$\int_0^x e^x dx > \int_0^x 1\cdot dx,\text{即 } e^x > 1+x.$$

设 $n=k$ 时,对一切 $x>0$,不等式

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$$

成立. 两边同时积分,得

$$\int_0^x e^x dx > \int_0^x (1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!})dx,$$

即有　$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$.

于是命题得证.

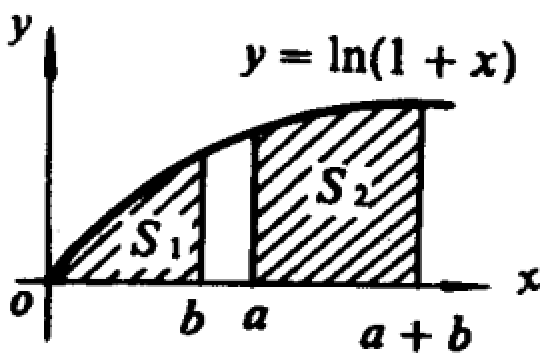
5.2.12　如果 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,求证

$$(1+a+b)^{1+a+b}>(1+a)^{1+a}\cdot(1+b)^{1+b}.$$

证　不失一般性,设 $a>b>0$,则有

$$a+b>a>b>0.$$

由定积分的性质与函数 $y=\ln(1+x)$ 的递增性可知,$S_2>S_1$.但



5.2.12 题图

$$S_1=\int_0^b\ln(1+x)dx$$
$$=(1+b)\ln(1+b)-b,$$
$$S_2=\int_a^{a+b}\ln(1+x)dx$$
$$=(1+a+b)\ln(1+a+b)-(1+a)\ln(1+a)-b.$$

于是,

$$(1+a+b)\ln(1+a+b)>(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+a).$$

所以　$(1+a+b)^{1+a+b}>(1+a)^{1+a}\cdot(1+b)^{1+b}.$

5.2.13　试证,对于每个正整数 n,有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

证　对于任何正整数 k,根据积分不等式(2),有

$$\sqrt{k}>\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

对 k 求和,得

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\int_0^n\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

通过简单的代数运算可以证明,

$$\frac{2}{3}\left[k^{\frac{3}{2}}-(k-1)^{\frac{3}{2}}\right]>\frac{1}{2}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}).$$

即　$$\frac{1}{2}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})<\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx,$$

另外,$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}=\frac{1}{2}(\sqrt{0}+\sqrt{1})$

$$+\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{2}\sqrt{n}=\int_0^n\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

$$=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

综上所述，有

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

5.2.14　若 $x\geqslant 1$，试证

$e^x\geqslant e\cdot x$，等号当且仅当 $x=1$ 时成立.

证　因 $x\geqslant 1$，故 $\frac{1}{x}\leqslant 1$，等号当且仅当 $x=1$ 时成立. 从而，

$$\int_1^x\frac{1}{x}dx\leqslant\int_1^x 1\cdot dx$$

即　$\ln x\leqslant x-1,\quad x\geqslant\ln x+1.$

由此可得 $e^x\geqslant x\cdot e$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

5.2.15　比较 $\int_0^\pi e^{-x^2}\cos^2 xdx$ 与 $\int_\pi^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$ 的大小.

解　令 $x=\pi+t$，则

$$\int_\pi^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx=\int_0^\pi e^{-(\pi+t)^2}\cos^2(\pi+t)dt$$

$$=\int_0^\pi e^{-(\pi+x)^2}\cos^2 xdx,$$

当 $x\in[0,\pi]$ 时，有

$$e^{-x^2}\geqslant e^{-(x+\pi)^2},$$

所以

$$\int_0^\pi e^{-x^2}\cos^2 xdx\geqslant\int_\pi^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx.$$

5.2.16　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0.$

证　因对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有 $0\leqslant\frac{x^n}{1+x}\leqslant x^n$，所以

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0,(n\to\infty).$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0.$$

5.2.17　若在 $[0,2]$ 上，$f(x)$ 可导，$|f'(x)|\leqslant 1$ 且 $f(0)=f(2)=1$，试证：$1\leqslant\int_0^2 f(x)dx\leqslant 3$.

解　因为 $f(x)=f(0)+f'(\xi)(x-0)\leqslant 1+x$，$(0<\xi<x)$，又

$$f(x)=f(2)+f'(\xi_1)(x-2)\leqslant 1+(-1)(x-2)=3-x,\quad (2>\xi_1>x)$$

于是，$f(x)\leqslant\min\{1+x,3-x\}$，$0\leqslant x\leqslant 2$.

然而，$\min\{1+x,3-x\}=\begin{cases}1+x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 3-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 所以，

$$\int_0^2 f(x)dx\leqslant\int_0^2\min\{1+x,3-x\}dx$$
$$=\int_0^1(1+x)dx+\int_1^2(3-x)dx=3.$$

同理可证 $\int_0^2 f(x)dx\geqslant 1$.

5.2.18 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上有一阶连续导数，且$f(0)=0$，$f(1)=0$，试证

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

证 因 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续，故令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\right|$$
$$\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-f(0)|dx+\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)-f(1)|dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(\xi_1)|xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(\xi_2)|(1-x)dx$$
$$\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}Mxdx+\int_{\frac{1}{2}}^1 M(1-x)dx=\frac{1}{4}M.$$
$$\left(0<\xi_1<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\xi_2<1\right)$$

所以，$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$.

5.2.19 设 $f(x)$ 在区间$[2,4]$上二阶连续可导，且 $f(3)=0$，证明在$(2,4)$内存在一点 ξ，使得

$$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)dx.$$

证 由泰勒公式可知

$$f(x)=f(3)+f'(3)(x-3)+\frac{1}{2}f''(\eta)(x-3)^2$$

$$= f'(3)(x-3) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x-3)^2.$$

（η 在 x 与 3 与之间）

由于 $f''(x)$ 连续，所以存在 m, M，使得 $m \leqslant f''(x) \leqslant M, x \in [2,4]$，从而

$$f'(3)(x-3) + \frac{m}{2}(x-3)^2 \leqslant f(x) \leqslant f'(3)(x-3) + \frac{M}{2}(x-3)^2,$$

由此，有

$$f'(3)\int_2^4 (x-3)dx + \frac{m}{2}\int_2^4 (x-3)^2 dx \leqslant \int_2^4 f(x)dx$$

$$\leqslant f'(3)\int_2^4 (x-3)dx + \frac{M}{2}\int_2^4 (x-3)^2 dx,$$

即　$m \leqslant 3\int_2^4 f(x)dx \leqslant M.$

由介值定理知，存在着点 $\xi \in [2,4]$，使得

$$f''(\xi) = 3\int_2^4 f(x)dx.$$

5.2.20　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，则在 (a,b) 内存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

解　因 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故令 $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f''(x)\}$，$m = \min\limits_{x\in[a,b]}\{f''(x)\}$. 由泰勒定理，得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2!}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2, \text{（}\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } \frac{a+b}{2} \text{ 之间）}$$

如令　$I_1(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{m}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$

$I_2(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{M}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$

则有　$I_1(x) \leqslant f(x) \leqslant I_2(x).$

从而　$\int_a^b I_1(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b I_2(x)dx.$

然而，　$\int_a^b I_1(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 m,$

$$\int_a^b I_2(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}(b-a)^3 M.$$

因此，$m \leqslant \frac{24}{(b-a)^3}\left[\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2})\right] \leqslant M.$

由于 $f''(x)$ 在$[a,b]$上连续，由介值定理知，存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f''(\xi) = \frac{24}{(b-a)^3}\left[\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(\frac{a+b}{2})\right].$$

由此可得，

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

5.2.21　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上为非负单调递减函数，证明：对于 $0<\alpha<\beta<1$，有

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

证　令 $x = \frac{\alpha}{\beta}t$，于是

$$\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\beta f(\frac{\alpha}{\beta}t)\,\frac{\alpha}{\beta}dt = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^\beta f(\frac{\alpha}{\beta}t)dt.$$

由 $f(x)$ 的单调性，有 $f(\frac{\alpha}{\beta}t) \geqslant f(t)$. 所以

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_0^\beta f(\frac{\alpha}{\beta}t)dt \geqslant \int_0^\beta \frac{\alpha}{\beta}f(t)dt = \frac{\alpha}{\beta}\left[\int_0^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^\beta f(t)dt\right].$$

然而，$f(t) \geqslant 0$. 所以，$\int_0^\alpha f(t)dt \geqslant 0$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(t)dt &= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^\beta f(\frac{\alpha}{\beta}t)dt \\ &\geqslant \frac{\alpha}{\beta}\left[\int_0^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^\beta f(t)dt\right] \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(t)dt.\end{aligned}$$

5.2.22　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，又设

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)},\quad (x \in [a,b])$$

试证：(1) $F'(x) \geqslant 2$；

(2) $F(x)=0$ 在$[a,b]$内有且仅有一实根.

证　(1) 由于 $f(x)$ 连续且大于零，故

$$F'(x) = f(t) + \frac{1}{f(t)}\left(\sqrt{f(t)} - \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 + 2 \geqslant 2.$$

(2) 由于 $F'(x) \geqslant 2$ 对 $x \in [a,b]$ 成立，所以 $F(x)$ 单调递增. 又

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + \int_b^a \frac{dt}{f(t)} = -\int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0;$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^b \frac{dt}{f(t)} = \int_a^b f(t)dt > 0.$$

所以在 $[a,b]$ 内存在一点 ξ，使得 $F(\xi) = 0$ 成立，又由 $F(x)$ 的单调性知，ξ 是唯一的.

5.2.23　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a) = 0$，试证：

$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2 dx$，其中 $M = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.

证　$f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 = \left(\int_a^x 1 \cdot f'(t)dt\right)^2$，

由施瓦兹不等式，得

$$f^2(x) \leqslant \int_a^x 1^2 dx \cdot \int_a^x [f'(x)]^2 dx = (x-a) \cdot \int_a^x [f'(x)]^2 dx$$
$$\leqslant (b-a) \cdot \int_a^x [f'(x)]^2 dx.$$

所以，$M^2 = [\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|]^2 \leqslant (b-a) \cdot \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$

5.2.24　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$f(a) = 0$，则

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

解　由 $f'(x)$ 的连续性及 $f(a) = 0$，有

$$f(x) = \int_a^x f'(x)dx; \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

由柯西不等式，得

$$f^2(x) = \left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2 \leqslant \int_a^x f'^2(t)dt \cdot \int_a^x 1 \cdot dt$$
$$= (x-a) \cdot \int_a^x f'^2(t)dt \leqslant (x-a) \cdot \int_a^b f'^2(t)dt.$$

将上式积分，得

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \int_a^b (x-a)dx \cdot \int_a^b f'^2(x)dx = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

5.2.25　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$f(a) = f(b) = 0$，且

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1.$$

则 (1) $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$; (2) $\int_a^b [f'(x)]^2dx \cdot \int_a^b x^2f^2(x)dx \geqslant \frac{1}{4}$.

解　(1) 因$\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' = f(x) \cdot f'(x)$,所以,

$$\int_a^b xf(x) \cdot f'(x)dx = \int_a^b x\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' dx$$

$$= \frac{xf^2(x)}{2}\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx = -\frac{1}{2}.$$

(2) 由(1)的结果有$\frac{1}{4} = \left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2$,再由柯西不等式,得

$$\frac{1}{4} = \left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b [f'(x)]^2dx \cdot \int_a^b x^2f^2(x)dx.$$

5.2.26　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(x) > 0$ 则

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

证法 1　由柯西不等式,得

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \int_a^b [\sqrt{f(x)}]^2dx \cdot \int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2 dx$$

$$\geqslant \left[\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right]^2 = (b-a)^2.$$

证法 2　因 $\int_a^b [\lambda\sqrt{f(x)} + \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx]^2 \geqslant 0$,即

$$\lambda^2 \cdot \left[\int_a^b f(x)dx\right] + 2(b-a)\lambda + \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant 0.$$

由二次三项式的判别式有

$$(b-a)^2 - \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leqslant 0.$$

于是,$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqslant (b-a)^2$.

5.2.27　设 $f(x),g(x)$ 在$[0,1]$上单调,且单调性相同,则

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geqslant \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx.$$

证　由于 $f(x),g(x)$ 有相同的单调性,因此对任意的 x,y 均有

$$[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)]\geqslant 0,$$

即 $$f(x)\cdot g(x)+f(y)\cdot g(y)\geqslant f(y)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(y).$$

两边对 x 从 0 到 1 积分，得

$$f(y)\cdot g(y)+\int_0^1 f(x)g(x)dx\geqslant f(y)\cdot\int_0^1 g(x)dx+g(y)\int_0^1 f(x)dx.$$

两边对 y 从 0 到 1 积分，

$$2\cdot\int_0^1 f(x)g(x)dx\geqslant 2\int_0^1 f(y)dy\int_0^1 g(x)dx.$$

由此可得

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx\geqslant\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 g(x)dx.$$

5.2.28　在[0,1]上求连续正值函数 $f(x)$，使之同时满足下列三个等式：

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\ \int_0^1 xf(x)dx=a,\ \int_0^1 x^2f(x)dx=a^2,$$

其中 a 是已知实数.

解　若存在函数 $f(x)$，使

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\ \int_0^1 xf(x)dx=a,\ \int_0^1 x^2f(x)dx=a^2.$$

则 $$\int_0^1 a^2f(x)dx=a^2,\ \int_0^1-2axf(x)dx=-2a^2,\ \int_0^1 x^2f(x)dx=a^2.$$

以上三式相加，得

$$\int_0^1(x-a)^2f(x)dx=0.$$

但是，$(x-a)^2f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$. 所以，$(x-a)^2f(x)\equiv 0$. $x\in[0,1]$. 于是，对于 $x\in[0,1]$，且 $x\neq a$ 时 $f(x)\equiv 0$. 与 $f(x)$ 是正值函数矛盾. 所以满足题设要求的 $f(x)$ 不存在.

5.2.29　假设在 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$f(x)$ 为一连续函数，(a 为已知数)求证：

$$\lim_{h\to 0}\int_0^a\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0).$$

证　设 $M=\max\limits_{x\in[0,a]}|f(x)|$. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1(0<\delta_1<a)$，当 $0\leqslant x<\delta_1$ 时，

$$|f(x)-f(0)|<\frac{2}{3\pi}\varepsilon.$$

又因 $\lim\limits_{h\to0^+}\operatorname{arctg}\dfrac{\delta_1}{h}=\dfrac{\pi}{2}$. 所以对上述 $\varepsilon>0$. 存在着 $\delta_2(0<\delta_2<a)$，当 $0\leqslant h<\delta_2$ 时，$\left|\operatorname{arctg}\dfrac{\delta_1}{h}-\dfrac{\pi}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3M}$.

取 $\delta=\min\left\{\delta_2,\dfrac{\varepsilon a^2}{3(a-\delta_1)M}\right\}$，则当 $0<h<\delta,0\leqslant x<\delta$ 时，有

$$\frac{Mh(a-\delta_1)}{a^2}<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$M\left|\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{h}-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \frac{\pi}{2}|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^a\frac{h^2}{h^2+x^2}f(x)dx-\frac{\pi}{2}f(0)\right|\\
\leqslant&\left|\int_0^{\delta_1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx-\frac{\pi}{2}f(0)\right|+\left|\int_{\delta_1}^a\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx\right|\\
\leqslant&\left|f(\xi)\int_0^{\delta_1}\frac{h}{h^2+x^2}dx-\frac{\pi}{2}f(0)\right|+\left|\int_{\delta_1}^a\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx\right|\\
\leqslant&\left|f(\xi)\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{h}-\frac{\pi}{2}f(0)\right|+\int_{\delta_1}^a\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)|dx\\
\leqslant&|f(\xi)|\left|\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{h}-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{\pi}{2}|f(\xi)-f(0)|\\
&\qquad+M\int_{\delta_1}^a\frac{h}{a^2}dx\\
\leqslant&M\left|\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{h}-\frac{\pi}{2}\right|+\frac{\pi}{2}|f(\xi)-f(0)|+\frac{Mh}{a^2}(a-\delta_1)\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

$(0\leqslant\xi\leqslant\delta_1)$

故 $\lim\limits_{h\to0^+}\displaystyle\int_0^a\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0).$

5.2.30　函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数. 证明：

$$\int_0^{2n}x\operatorname{sgn}(\sin\pi x)dx=-n.\ (n\text{ 为自然数})$$

证　$\int_0^{2n} x\,\text{sgn}(\sin\pi x)dx$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k}^{2k+1} x\,\text{sgn}(\sin\pi x)dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{2k-1}^{2k}(-x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k}^{2k+1} xdx + \sum_{k=1}^{n}\int_{2k-1}^{2k}(-x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(4k+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(4k+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[4(k+1)-1]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-2) = -n.$$

5.2.31　若 $f(x)$ 为连续函数，且在闭区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 上任一点处均为正，则 $f(x)$ 在 x_0 点有一最大值 M，这里 $a\leqslant x_0\leqslant b$. 求证：

$$M = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b\{f(x)\}^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

证　因 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则对任意的 $\varepsilon>0(\varepsilon<M)$，存在着 $\delta>0$ $(\delta<\min(x_0-a,b-x_0)$. 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

于是　$f(x)>f(x_0)-\varepsilon=M-\varepsilon_0$.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2\delta}{b-a}}=1$，所以对上述的 ε，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$(\dfrac{2\delta}{b-a})^{\frac{1}{n}}<1-\varepsilon$. 于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} > \left\{\frac{1}{b-a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}(M-\varepsilon)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{2\delta}{b-a}\right)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon) > (1-\varepsilon)(M-\varepsilon) = M-\varepsilon(1+M).$$

又 $\left\{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \leqslant \left\{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b M^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} = M < M+\varepsilon(1+M)$.

所以有　$\left|\left\{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} - M\right| < \varepsilon(1+M)$.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} = M.$

5. 2. 32 确定下列定积分的符号：

(1) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$； (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$； (3) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$； (4) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\sin x dx &= \int_0^{\pi} x\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx \\ &= \int_0^{\pi} x\sin x dx + \int_0^{\pi} (t+\pi)\sin(t+\pi) dt \\ &= \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_0^{\pi} (x+\pi)\sin x dx \\ &= -\pi\int_0^{\pi} \sin x dx < 0.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi + x} dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x+\pi)} dx > 0.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx &= \int_{-2}^{0} x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx \\ &= \int_2^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx = \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x}) dx.\end{aligned}$$

根据积分第一中值定理，得

$$\int_{-2}^{2} x^3 e^x dx = \xi^3 (e^{\xi} - e^{-\xi}) \cdot 2 > 0. \ (0 < \xi < 2)$$

(4) 根据积分第一中值定理，得

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x dx = \xi^2 \ln\xi \cdot \frac{1}{2} < 0, \ (\frac{1}{2} < \xi < 1).$$

5. 2. 33 设实数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\frac{a_0}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots \frac{a_n}{n+1} = 0$，试证方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 至少有一个实根.

证 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，则

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

由积分第一中值定理知，存在点 $\xi \in (0,1)$，使得

$$\int_0^1 f(x) dx = f(\xi) = 0,$$

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一实根.

5. 2. 34 利用积分第一中值定理估计积分

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}$；　(2) $\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$.

解　由于 $\frac{1}{1+0.5}\leqslant\frac{1}{1+0.5\cos x}\leqslant\frac{1}{1-0.5}$，即

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{1+0.5\cos x}\leqslant 2,$$

所以　$\frac{4\pi}{3}\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}\leqslant 4\pi$.

(2) $I=\int_0^{50}\frac{e^{-x}}{x+100}dx+\int_{50}^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$,

因在[0,100]上，e^{-x} 不变号；$\frac{1}{x+100}$ 是连续函数. 根据积分第一中值定理，有

$$I=\frac{1}{100+\xi_1}\int_0^{50}e^{-x}dx+\frac{1}{100+\xi_2}\int_{50}^{100}e^{-x}dx$$
$$=\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}.\ (0\leqslant\xi_1\leqslant 50,\ 50\leqslant\xi_2\leqslant 100)$$

显然，$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}\leqslant\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1}$

$$=\frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1}<\frac{1}{100}.$$

而 $\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}>\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}\geqslant\frac{1-e^{-50}}{150}>\frac{1}{200}$.

所以有　$\frac{1}{200}<\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx<\frac{1}{100}$.

5.2.35　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{2+x}dx=0$.

证　因在区间[0,1]上，$\sqrt{2+x}$ 连续，x^n 不变号，所以根据积分第一中值定理，存在点 $\xi\in(0,1)$，使

$$\int_0^1 x^n\sqrt{2+x}dx=\sqrt{2+\xi}\int_0^1 x^n dx=\frac{\sqrt{2+\xi}}{n+1}.$$

于是，　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{2+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\xi}}{n+1}=0$.

5.2.36　设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$，$\int_0^1 xf(x)dx=1$，则存在一点 x_0，$0\leqslant x_0\leqslant 1$，使 $|f(x_0)|>4$.

解　用反证法. 首先，$f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$ 是不可能的. 故在

[0,1] 上必然存在一个子区间，使得 $|f(x)| < 4$. 设其为$[\delta_1,\delta_2] \subset [\frac{1}{2},1]$. 由定积分第一中值定理，有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-\frac{1}{2})f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\delta_1}(x-\frac{1}{2})f(x)dx + \int_{\delta_1}^{\delta_2}(x-\frac{1}{2})f(x)dx + \int_{\delta_2}^{1}(x-\frac{1}{2})f(x)dx$$

$$\leqslant 4\int_{\frac{1}{2}}^{\delta_1}(x-\frac{1}{2})dx + f(\xi)\int_{\delta_1}^{\delta_2}(x-\frac{1}{2})dx + 4\int_{\delta_2}^{1}(x-\frac{1}{2})dx$$

$$< 4\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-\frac{1}{2})dx = \frac{1}{2},$$

其中 $\frac{1}{2} \leqslant \delta_1 < \xi < \delta_2 \leqslant 1$.

又 $$\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})f(x)dx \leqslant -4\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})dx = \frac{1}{2},$$

故 $\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})f(x)dx < 1$.

但是，$\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx = 1$. 产生矛盾，所以必存在一点 $x_0 \in [0,1]$，使 $|f(x_0)| > 4$.

5.2.37　设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，$\int_0^1 f(x)x^k dx = 0$，$(k = 0,1,\cdots,(n-1))$，$\int_0^1 x^n f(x)dx = 1$. 证明在[0,1]上至少存在一点 x_0 使，

$$|f(x_0)| \geqslant 2^n(n+1).$$

解　$$\int_0^1(x-\frac{1}{2})^n f(x)dx = \int_0^1\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}(-\frac{1}{2})^k f(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 C_n^k x^{n-k}(-\frac{1}{2})^k f(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-\frac{1}{2})^k \cdot \int_0^1 x^{n-k}f(x)dx = 1.$$

又 $$\left|\int_0^1(x-\frac{1}{2})^n f(x)dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)^n f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})^n f(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^n |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})^n |f(x)| dx,$$

由积分第一中值定理，有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^n |f(x)| dx = |f(\xi_1)| \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^n dx$$

$$= |f(\xi_1)| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}; \ (\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}])$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})^n |f(x)| dx = |f(\xi_2)| \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})^n dx$$

$$= |f(\xi_2)| \cdot \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}; \ (\xi_2 \in [\frac{1}{2}, 1])$$

不妨令 $|f(\xi_1)| > |f(\xi_2)|$，则取 $x_0 = \xi_1$，从而

$$1 = \left| \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^n f(x) dx \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} [f(\xi_1) + f(\xi_2)]$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \cdot 2|f(x_0)| = \frac{|f(x_0)|}{2^n(n+1)}.$$

所以存在点 $x_0 \in [0,1]$，使得

$$|f(x_0)| \geqslant 2^n(n+1).$$

5.2.38　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调且连续，证明函数 $F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 在开区间 (a,b) 内与函数 $f(x)$ 的单调性一致.

证　不妨设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，任取 $a < x_1 < x_2 < b$，因 $f(x)$ 在 $[a,x_1]$，$[a,x_2]$ 上都连续，由积分中值定理可得

$$F(x_1) = \frac{1}{x_1 - a}\int_a^{x_1} f(t)dt = f(\xi_1), \quad (a \leqslant \xi_1 \leqslant x_1)$$

$$F(x_2) = \frac{1}{x_2 - a}\int_a^{x_2} f(t)dt = \frac{1}{x_2 - a}\left[\int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{x_1 - a}{x_2 - a} f(\xi_1) + \frac{1}{x_2 - a}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt.$$

当 $t \in [x_1, x_2]$ 时，$f(t) > f(\xi_1)$，故

$$\frac{1}{x_2 - a}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt > \frac{1}{x_2 - a}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi_1)dt = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - a} f(\xi_1).$$

于是　$F(x_2) > \frac{x_1 - a}{x_2 - a} f(\xi_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - a} f(\xi_1) = f(\xi_1) = F(x_1)$.

即 $F(x)$ 在开区间 (a,b) 内与函数 $f(x)$ 的单调性一致.

5.2.39　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上，均有 $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leqslant M|\beta-\alpha|^{1+\delta}$ 成立. 证明：$f(x)\equiv 0$，(其中 M，δ 为正常数).

证　用反证法. 假设 $f(x)$ 不恒等于零，则必存在点 $\xi\in[a,b]$，$f(\xi)\neq 0$. 不妨设 $f(\xi)>0$，由连续函数的性质，存在以 ξ 为中心的区间 $[\alpha,\beta]$ ($[\alpha,\beta]\subset[a,b]$)，使当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，$f(x)>0$.

令 $\beta=\xi+\varepsilon_n$，$\alpha=\xi-\varepsilon_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，$\varepsilon_n\geqslant 0$. 由积分中值定理得

$$\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n}f(x)dx=2f(\xi_n)\varepsilon_n,\ (\xi_n\in[\alpha,\beta])$$

由题设知，$\left|\int_{\xi-\varepsilon_n}^{\xi+\varepsilon_n}f(x)dx\right|\leqslant M(2\varepsilon_n)^{1+\delta}$，所以有 $f(\xi_n)\leqslant M(2\varepsilon_n)^\delta$.

故 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)\leqslant M\lim\limits_{n\to\infty}(2\varepsilon_n)^\delta=0$，即 $f(\xi)\leqslant 0$. 这与假设 $f(\xi)>0$ 矛盾. 所以 $f(x)\equiv 0$.

5.2.40　设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上连续，$A<a<x<B$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a).$$

解　令 $u=t+h$，则

$$\int_a^x f(t+h)dt=\int_{a+h}^{x+h}f(u)du=\int_{a+h}^{x}f(u)du+\int_x^{x+h}f(u)du$$

其中 $|h|$ 充分小，所以 $[a+h,x+h]\subset[A,B]$. 又

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^{a+h}f(t)dt+\int_{a+h}^x f(t)dt.$$

于是　$$\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=\int_x^{x+h}f(t)dt-\int_a^{a+h}f(t)dt,$$

由积分中值定理，得

$$\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(\xi)\cdot h-f(\eta)\cdot h.$$

其中，$x<\xi<x+h$，$a<\eta<a+h$. 所以当 $h\to 0$ 时，$\xi\to x$，$\eta\to a$. 于是，

$$\lim_{h\to 0}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a).$$

5.2.41　设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上连续、非负、并且严格递增的函数，由积分中值定理，对每一个 $p>0$ 必定存在唯一的数 x_p，$a\leqslant x_p\leqslant b$，使得

$$f'(x_p) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt,$$

求证：$\lim\limits_{p\to\infty} x_p = b.$

证　设 ε 为任给的正数，且满足 $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$，由于 $f(x)$ 严格递增，故 $\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)} > 1$，于是存在一个正整数 N，使得当 $p > N$ 时，有

$$\left[\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}\right]^p > \frac{b-a}{\varepsilon},$$

即　　$f^p(b-\varepsilon) > \frac{b-a}{\varepsilon} f^p(b-2\varepsilon).$

又　　$\int_a^b f^p(x)dx > \int_{b-\varepsilon}^b f^p(t)dt > \int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dt,$

因此　　$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt > \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dt$

$$> \frac{1}{b-a}\cdot\varepsilon\cdot f^p(b-\varepsilon) > f^p(b-2\varepsilon).$$

从而，只有 $x_p > b-2\varepsilon$ 时，x_p 才可能满足

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt.$$

于是推得，存在一个 N，使得对于无论怎样的 $p > N$，都有 $b > x_p > b - 2\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = b.$

5.2.12　已知 $0 < a < b, \theta > 0$，证明：存在 $\xi, |\xi| < 1$，使

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx = \frac{2}{a}\xi.$$

证　因 $e^{-\theta x}\cdot\frac{1}{x}$ 是非负单调递减函数，故由积分第二中值定理，有

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx = \frac{1}{ae^{\theta a}}\cdot\int_a^{\xi_1}\sin x dx = \frac{1}{ae^{\theta a}}(\cos\xi_1 - \cos a)$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{\cos\xi_1 - \cos a}{2e^{a\theta}},\ (a < \xi_1 < b)$$

令 $\xi = \frac{\cos\xi_1 - \cos a}{2e^{a\theta}}$，则

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx = \frac{2}{a}\xi, \text{其中：} |\xi| = \frac{1}{e^{a\theta}}\left|\frac{\cos\xi_1 - \cos a}{2}\right| < 1.$$

5.2.43 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2dt$，证明：当 $x>0$ 时，有 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{x}$.

证 令 $t=\sqrt{u}$，则 $2tdt=du$，代入得

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2dt=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\sin udu,$$

由积分第二中值定理（$\frac{1}{\sqrt{u}}$是单调递减的），得

$$\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\sin udu=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot\int_{x^2}^{\xi}\sin udu.\ (x^2<\xi<(x+1)^2)$$

于是，$\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot\int_{x^2}^{\xi}\sin udu=\frac{1}{2x}(\cos\xi-\cos x^2)$.

由此可得

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2x}|\cos\xi-\cos x^2|\leqslant\frac{1}{x}.$$

5.2.44 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0$，并且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\neq 0$. 则 $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant 4$.

解 由题设可知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内同号，故不妨设 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，并设 $f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$，显然 $x_0\in(0,1)$. 因而 $f'(x_0)=0$. 又

$$f(x_0)=\left|\int_{x_0}^1 f'(x)dx\right|=(1-x_0)|f'(\xi_1)|=(1-x_0)\left|\int_{x_0}^{\xi_1}f''(x)dx\right|,$$

其中 $x_0<\xi_1<1$. 由此可得

$$f(x_0)\leqslant(1-x_0)\int_{x_0}^{\xi_1}|f''(x)|dx\leqslant(1-x_0)\int_{x_0}^1|f''(x)|dx.$$

同理

$$f(x_0)=\int_0^{x_0}f'(x)dx=x_0f'(\xi_2)=-x_0\int_{\xi_2}^{x_0}f''(x)dx,\ (0<\xi_2<x_0),$$

于是，$f(x_0)\leqslant x_0\int_0^{x_0}|f''(x)|dx$. 令 $y_0=\int_0^{x_0}|f''(x)|dx$，则

$$[f(x_0)]^2\leqslant x_0(1-x_0)\int_0^{x_0}|f''(x)|dx\cdot\int_{x_0}^1|f''(x)|dx$$

$$= x_0(1 - x_0) \cdot y_0\left(\int_{x_0}^{1} |f''(x)| dx - y_0\right).$$

由于 $f''(x) \neq 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ (因若不然，$f(x)$ 必为线性函数，但这与 $f(0) = f(1) = 0$ 及 $f(x) \neq 0, x \in (0,1)$ 矛盾)，故 $\int_0^1 |f''(x)| dx = a > 0$，又因 $x(a - x)$ 在 $[0,a]$ 中仅在 $x = \frac{a}{2}$ 时取得最大值，且最大值为 $\frac{a^2}{4}$.

所以，

$$0 < [f(x_0)]^2 \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{16}\left[\int_0^1 |f''(x)| dx\right]^2,$$

由此可得

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant \int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x_0)}\right| dx \geqslant 4.$$

5.2.45　数 $M[f] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(\xi) d\xi$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的平均值. 求下列函数的平均值.

(1) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$;

(2) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

(3) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$.

解　(1) $\int_0^x [\sin^2\xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})] d\xi$

$$= \int_0^x \left[\frac{1 - \cos 2\xi}{2} + \frac{1 + \cos(2\sqrt{2}\xi)}{2}\right] d\xi$$

$$= x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}x),$$

所以，$M[f] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_0^x [\sin^2\xi + \cos^2(\sqrt{2}\xi)] d\xi$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[1 - \frac{1}{4x}\sin 2x + \frac{1}{4\sqrt{2}x}\sin(2\sqrt{2}x)\right] = 1.$$

(2) $M[f] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg}\xi d\xi$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(1+x^2)}=\frac{\pi}{2}.$$

(3) 利用第二中值定理,得

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi d\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi d\xi=\sqrt{x}(\cos c-\cos x),$$

$$(0\leqslant c\leqslant x).$$

于是，$M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi d\xi=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$

5.2.46 对积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx$应用第二中值定理,求出该定理中之$\xi$值.

解 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2xdx=-\frac{\cos2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$

取 $f(x)=\sin x$，$f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增,非负. $g(x)=\cos x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上可积. 由积分第二中值定理,得

$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx=\sin\frac{\pi}{2}\int_\xi^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1-\sin\xi.$$

故 $\sin\xi=\frac{1}{2}$,所以 $\xi=\frac{\pi}{6}$.

又取 $f(x)=\cos x$，$f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递减,非负,$g(x)=\sin x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上可积. 于是

$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos xdx=\cos0\cdot\int_0^\xi\sin xdx=1-\cos\xi,$$

故 $\cos\xi=\frac{1}{2}$. 所以 $\xi=\frac{\pi}{3}$.

5.2.47 用积分第二中值定理估计积分

(1) $\displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx$，(2) $\displaystyle\int_a^b\sin x^2dx$，$(0<a<b)$.

解 (1) 设$f(x)=\sin x,\varphi(x)=\frac{1}{x}$,则$f(x)$及$\varphi(x)$在$[100\pi,200\pi]$上满足积分第二中值定理的条件,又 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 单调递减且不为负,于是,

$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin xdx=\frac{1-\cos\xi}{100\pi}=\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{50\pi}=\frac{\theta}{50\pi},$$

其中，$100\pi\leqslant\xi\leqslant 200\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 1$.

(2) 设 $x=\sqrt{t}$. 则 $\int_a^b\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$.

其次，设 $f(t)=\sin t$, $\varphi(t)=(\sqrt{t})^{-1}$, 则 $\varphi(t)$ 单调递减，且 $\varphi(t)>0$，于是

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin tdt=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi)$$

$$=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi+a^2}{2}\sin\frac{\xi-a^2}{2}=\frac{1}{a}\theta,$$

其中 $a^2\leqslant\xi\leqslant b^2$, $|\theta|\leqslant 1$. 所以

$$\int_a^b\sin x^2dx=\frac{\theta}{a}.\ (|\theta|\leqslant 1).$$

5.2.48　设 $x'>x>0$，证明

$$\left|\int_x^{x'}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\frac{2}{x}.$$

证　$\frac{1}{x}$ 在 $[x,x']$ 上单调递减且非负，由积分第二中值定理，得

$$\int_x^{x'}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{x}\int_x^{\xi}\sin xdx,\ (x\leqslant\xi\leqslant x').$$

由此得

$$\left|\int_x^{x'}\frac{\sin x}{x}dx\right|=\left|-\frac{1}{x}(\cos\xi-\cos x)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{x}(|\cos\xi|+|\cos x|)\leqslant\frac{2}{x}.$$

§ 3 定积分的计算

内 容 提 要

1. 按定积分的定义计算 (详见 § 1 定积分的概念)

2. 原函数方法

(1) 基本定理　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

在区间 $[a,b]$ 上可导,且 $F'(x) = f(x)$.

(2) 基本公式(牛顿—莱布尼兹公式)

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的任意一个原函数,即 $F'(x) = f(x), x \in [a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

3. 定积分的分部积分法

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数,则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

4. 定积分的换元积分法

设(1) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数,其中 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta), a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, t \in [\alpha,\beta]$,则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

5. 周期函数、奇偶函数的积分

(1) 奇偶函数在对称区间上的积分

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \begin{cases} 2\int_0^a f(t)dt, & f(t) = f(-t); \\ 0, & f(t) = -f(-t). \end{cases} \quad (a > 0)$$

(2) 周期函数的积分

设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,又设 a 为任意实数,n 为正整数.则

1) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$,

2) $\int_a^{a+nT} f(t)dt = n\int_0^T f(t)dt$.

问题与解答

1. 基本概念

下面 3 题采用牛顿 — 莱布尼兹公式是否正确：

5.3.1　积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$，是否正确？

否. 因被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上不连续，所以 $-\frac{1}{x}$ 不是 $\frac{1}{x^2}$ 的原函数. 故不能采用牛顿 — 莱布尼兹公式.

5.3.2　积分 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x})dx = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = 0$，是否正确？

否. 因为被积函数在 $[-1,1]$ 上不存在原函数且不连续，所以不能应用牛顿 — 莱布尼兹公式.

5.3.3　积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x}dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\mathrm{tg}^2 x}d\mathrm{tg}x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

是否正确？

否. 显然，上式计算结果是错误的. 因被积函数在区间 $[0,2\pi]$ 上不存在原函数且不连续，故 $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}$ 在 $[0,2\pi]$ 上不是被积函数的原函数.

下面各题所采用的换元法是否正确(5.3.4—5.3.7 题)：

5.3.4　下面的运算是否正确？

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int_{-1}^{1}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

否. 此题解法是错误的. 从表面上看,似乎没有换元,但实际上已经在不知不觉中进行了换元法: $t = x - \frac{1}{x}$. 显然这样的变量替换在区间 $[-1,1]$ 上不满足换元法条件(2),并且 $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}$ 在 $[-1,1]$ 上也不是被积函数的原函数.

5.3.5 下面的运算是否正确:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^{1}\frac{d\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} = \int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2} = -\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2},$$

从而 $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 0.$$

否. 此题解法是错误的. 由于采用了换元法,令 $x = \frac{1}{t}$. 而变换 $x = \frac{1}{t}$ 在区间 $[-1,1]$ 上不连续,故不满足换元条件(2).

5.3.6 下面的积分运算是否正确:

设 $t = x^{\frac{2}{3}}$,则 $dt = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx$, $\int_{-1}^{1}dx = \int_{1}^{1}\frac{3}{2}\cdot t^{\frac{1}{2}}dt = 0$.

否. 因为 $t = x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x = \varphi(t) = \pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值函数. 要使代换得到正确的结果,应将已给积分写成

$$\int_{-1}^{1}dx = \int_{-1}^{0}dx + \int_{0}^{1}dx,$$

对于等式右端前一积分用变换 $x = -t^{\frac{3}{2}}$,后一积分用变换 $x = t^{\frac{3}{2}}$,得到正确的结果是

$$\int_{-1}^{1}dx = \int_{-1}^{0}-\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt + \int_{0}^{1}\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt = 3\int_{0}^{1}t^{\frac{1}{2}}dt = 2.$$

5.3.7 在积分 $\int_{0}^{3}x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}dx$ 中,令 $x = \sin t$ 是否可以?

否. 这个积分不能用代换 $x = \sin t$,因为当 x 在 $[1,3]$ 内变化时,t 没

有对应值.

应这样计算:令 $1-x^2=t^3$,则 $xdx=-\frac{3}{2}t^2dt$,故

$$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx=\int_1^{-2}t(-\frac{3}{2}t^2)dt=\frac{3}{2}\int_{-2}^1 t^3dt$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4\Big|_{-2}^1=\frac{3}{8}(1-16)=-\frac{45}{8}.$$

5.3.8　在积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 中作变换 $x=\sin t$ 时,是否可取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作新的上、下限?

是.因为 $x=\sin t$ 是单值连续函数,且在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上是单调的.

在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上 $\sqrt{\cos^2 t}=-\cos t$,故

$$I=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}-\cos^2 tdt=-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=-[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t]\Big|_\pi^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}.$$

5.3.9　运算 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}$ 是否正确?

否.因为上限为 x^2,所以 $\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ 是 x^2 的函数,即为 x 的复合函数.因而求导时必须用复合函数的求导公式.

正确的运算应是:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\frac{\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}\cdot(x^2)'=\frac{2x\cdot\sin x^2}{1+\cos^2 x^2}.$$

一般的公式是:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{g(x)}f(t)dt=f(g(x))\cdot g'(x).$$

5.3.10　若 $f(x)$ 是周期函数,周期为 T,则对于任意常数 a 都有

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$$

是.这是因为

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx,\qquad(*)$$

对上式第三个积分施以变量替换 $x = t + T$,得

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)d(t+T) = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(t)dt.$$

代入(∗)式,得 $$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

事实上,由其几何意义,更容易理解命题的正确性.

2. 变上限的定积分

5.3.11 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{2}, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

求积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2$ 时的表达式.

解 由于 $f(x)$ 是分段函数,故应分段求 $\Phi(x)$. 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,有

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2tdt = t^2\Big|_0^x = x^2.$$

当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时,有

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 2tdt + \int_1^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}(x+1).$$

所以, $\Phi(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{2}(1+x), & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

5.3.12 证明:函数 $F(t) = \dfrac{1}{\omega}\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx$ 是方程 $F''(t) + \omega^2 F(t) = f(t)$ 的解. 其中 $f(t)$ 是连续函数.

证
$$F'(t) = \frac{d}{dt}F(t)$$
$$= \frac{1}{\omega}\int_0^t \frac{d}{dt}(f(x)\sin\omega(t-x))dx + \frac{1}{\omega}f(t)\sin\omega(t-t)$$
$$= \int_0^t f(x)\cos\omega(t-x)dx,$$
$$F''(t) = -\int_0^t f(x)\cdot\omega\sin\omega(t-x)dx + f(t)$$
$$= -\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx + f(t).$$

于是,

$$F''(t)+\omega^2F(t)=-\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx+f(t)$$
$$+\omega\int_0^t f(x)\sin\omega(t-x)dx=f(t).$$

5.3.13　求(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$；　(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解　(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt=\left(\frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt\right)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$

$=2x\cdot\sqrt{1+x^4}$；

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{d}{dx}\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$=\frac{d}{dx}(x^3)\cdot\frac{d}{d(x^3)}\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$-\frac{d}{dx}(x^2)\cdot\frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$；

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)dt+\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\frac{d\sin x}{dx}\cdot\frac{d}{d(\sin x)}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt$

$+\frac{d\cos x}{dx}\cdot\frac{d}{d\cos x}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2x)-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2x)$

$=(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\cdot\sin^2x).$

注　$\cos(\pi\cos^2x)=\cos(\pi-\pi\sin^2x)=-\cos(\pi\sin^2x).$

5.3.14　求(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos^2x dx}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\text{arctg}x)^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos^2 x dx}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\cos^2 x)=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{arctg}x)^2dx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mathrm{arctg}x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

5.3.15 证明:当 $x\to\infty$ 时,$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

证 用洛比达法则,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1.$$

所以,当 $x\to\infty$ 时,$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

5.3.16 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}$.

证 用洛比达法则,有

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=e.$$

5.3.17 设 $f'(x)$ 连续,$f(0)=0$,$f'(0)\neq0$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$.

解　在极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt/x^4}{\int_0^x f(t)dt/x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}f(t)dt}{x^4}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}}.$$

的分子、分母中分别用洛比达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{8x}=\frac{f'(0)}{2}.$$

及
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2}=\frac{f'(0)}{2}.$$

因 $f'(0)\neq 0$，所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}=1.$$

5.3.18　设 $f(x)$ 为连续正值函数，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 单调递增.

证　首先注意，$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$ 是 $x\geqslant 0$ 上的连续函数. 另外，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(\int_0^x f(t)dt)^2}\left\{xf(x)\cdot\int_0^x f(t)dt-f(x)\cdot\int_0^x tf(t)dt\right\}$$
$$=\frac{f(x)}{(\int_0^x f(t)dt)^2}\int_0^x(x-t)f(t)dt>0.$$

所以，$\varphi(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时是单调递增的.

5.3.19　设连续函数 $f(x)>0$. 试证当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt-\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 单调递增.

证 只要证明 $F'(x) \geqslant 0$ 即可.

因为 $F(x) = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt - \int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} - 1$. 于是依上题结果, $\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 的导数为正,所以 $F'(x) \geqslant 0$.

3. 牛顿—莱布尼兹公式

5.3.20 求 $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$.

$(|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0)$.

解 在公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right|+C$$

中,设 $Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)$,两端求导数,且同除以 2,得

$$Ax+\frac{B}{2}=-b(1-2ax+a^2)-a(1-2bx+b^2).$$

由此推得,当 $x=1$ 时,在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2-b(1-a)^2+2\sqrt{ab}(1-a)(1-b)$$
$$=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

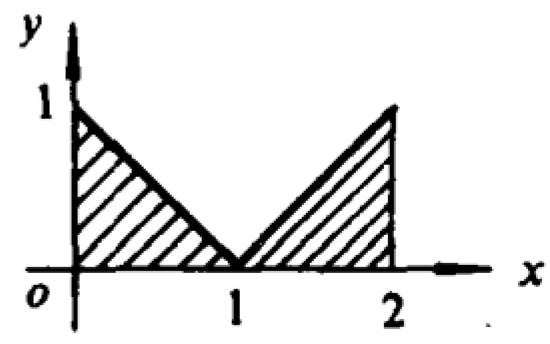
而当 $x=-1$ 时,得到对数符号下表达式的值为 $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$. 于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

注 本题在使用牛顿—莱布尼兹公式时,采用了技巧,使得代入上限时计算结果十分简单.

5.3.21 求 $\int_0^2 |1-x|dx$.

解　$\int_0^2 |1-x|dx$
$= \int_0^1 (1-x)dx - \int_1^2 (1-x)dx = 1.$



5.3.21 题图

注　对于被积函数 $f(x) = |1-x|$，在区间[0,2]上直接用牛顿—莱布尼兹公式求原函数不太容易．但是，在区间[0,1]与[1,2]上逐段积分却十分容易．对于一个复杂的函数，适当的分段，然后逐段积分往往是求定积分的一种好方法．

适当的分段，并将函数变形求解(5.3.22—5.3.33 题)：

5.3.22　求 $\int_a^b |x|dx\ (a < b)$.

解　(1) $a < b \leqslant 0$ 时，

$$原式 = \int_a^b -xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = -\frac{1}{2}(b^2 - a^2);$$

(2) $a < 0 < b$ 时，

$$原式 = \int_a^0 -xdx + \int_0^b xdx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_a^0 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^b = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

(3) $0 \leqslant a < b$ 时，

$$原式 = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

5.3.23　求 $\int_{-3}^2 \min(2, x^2)dx$.

解　由 $f(x) = \min(2,x^2) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant \sqrt{2}; \\ 2, & |x| > \sqrt{2}. \end{cases}$ 得

$$\int_{-3}^2 \min(2,x^2)dx = \int_{-3}^2 f(x)dx$$
$$= \int_{-3}^{-\sqrt{2}} 2dx + 2\int_0^{\sqrt{2}} x^2dx + \int_{\sqrt{2}}^2 2dx$$
$$= 2(-\sqrt{2} + 3) + \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 + 2(2 - \sqrt{2})$$
$$= 10 - \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

5.3.24 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ 求 $I(x)=\int_0^x f(t)dt.$

解 当 $x\leqslant-\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$I(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\sin tdt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^x 0dt=1,$$

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$I(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sin tdt=1-\cos x.$$

当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$I(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt+\int_{\frac{\pi}{2}}^x 0dt=1.$$

故 $$I(x)=\begin{cases}1, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2};\\ 1-\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

5.3.25 求 $\int_1^3\sqrt{|x(x-2)|}dx.$

解 $\int_1^3\sqrt{|x(x-2)|}dx$

$$=\int_1^2\sqrt{-x^2+2x}dx+\int_2^3\sqrt{x^2-2x}dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx+\int_2^3\sqrt{(x-1)^2-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+\arcsin(x-1)\Big]_1^2+$$

$$\frac{1}{2}\Big[(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}-\ln(x-1+\sqrt{(x-1)^2-1})\Big]_2^3$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

5.3.26 求 $\int_0^\pi\sqrt{\sin\theta-\sin^3\theta}d\theta.$

解　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{\sin\theta}d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\sqrt{\sin\theta}d\theta.$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{3}.$$

5.3.27　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 4x}dx.$

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 4x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\cos 2x-\sin 2x)^2}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos 2x-\sin 2x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\cos 2x-\sin 2x)dx+\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{2}(-\sin 2x-\cos 2x)\Bigg|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sqrt{2}.$$

5.3.28　求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\lg x|dx.$

解　$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\lg x|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\lg x)dx+\int_1^e\lg xdx$

$$=(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{\ln 10}dx)+x\lg x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{\ln 10}dx$$

$$=2(1-\frac{1}{e})\lg e.$$

5.3.29　求 $\int_{e^{-2}}^{e^2}\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx.$

解　$\int_{e^{-2}}^{e^2}\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx=\int_{e^{-2}}^{1}\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$$=8(1-e^{-1}).$$

5.3.30　求 $\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin^2 x+1}dx.$

解　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sqrt{\sin^2 x+1}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x}\,d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\sin^2 x}\,d\sin x$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}) + \frac{\sin x}{2}\sqrt{1+\sin^2 x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \left[\frac{1}{2}\ln(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}) + \frac{\sin x}{2}\sqrt{1+\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

5.3.31 求 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $(0 \leqslant \varepsilon < 1)$.

解 $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + \int_0^{\pi} \frac{d(2\pi - x)}{1+\varepsilon\cos(2\pi - x)} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\varepsilon\cos x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\varepsilon^2\cos^2 x}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-\varepsilon^2)\cos^2 x + \sin^2 x} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (1-\varepsilon^2)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

5.3.32 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$.

解 $$\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$$

$$= \int_1^2 \sin\frac{\pi x}{6}dx + \int_2^3 2\sin\frac{\pi x}{6}dx + \cdots + \int_5^6 5\sin\frac{\pi x}{6}dx = \frac{30}{\pi}.$$

5.3.33 求 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$.

解 $$\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$$

$$= \left[\int_{e^{-\pi}}^1 + \int_{e^{-2\pi}}^{e^{-\pi}} + \int_{e^{-3\pi}}^{e^{-2\pi}} + \cdots\right]\operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$$

$$= \int_{e^{-\pi}}^{1}(-1)dx + \int_{e^{-2\pi}}^{e^{-\pi}}1dx + \int_{e^{-3\pi}}^{e^{-2\pi}}(-1)dx + \cdots$$
$$= -(1-e^{-\pi}) + e^{-\pi}(1-e^{-\pi}) - e^{-2\pi}(1-e^{-\pi}) + \cdots$$
$$= (1-e^{-\pi})(-1+e^{-\pi}-e^{-2\pi}+e^{-3\pi}-\cdots)$$
$$= \frac{-1}{1+e^{-\pi}}\cdot(1-e^{-\pi}) = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}} = -\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

5.3.34　求 $I = \int_{-2}^{2}\frac{x^5+x^4+x^3+5x^2-2}{1+x^2}dx$.

解　$I = \int_{-2}^{2}\frac{x^5+x^4+x^3+5x^2+4}{1+x^2}dx + \int_{-2}^{2} -\frac{6}{1+x^2}dx$

$$= \int_{-2}^{2}(x^3+x^2+4)dx - \int_{-2}^{2}\frac{6}{1+x^2}dx$$
$$= 2(\frac{32}{3} - 6\operatorname{arctg}2).$$

注　本题被积函数较繁，但是用多项式的除法可将被积函数变得简单，易求原函数. 如果被积函数不易直接积分，经过适当的初等变换可变成易积分的形式是求定积分的一种有效途径.

将被积函数作适当的变换求定积分(5.3.35—5.3.40 题)：

5.3.35　求 $\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

解　由于 $\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2}{1+x^6}$，从而有

$$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx = (\operatorname{arctg}x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

5.3.36　求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\cos x-\sin x}}dx$.

解　原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})}}dx$

$$= 2^{\frac{1}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-d\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{\cos(x+\frac{\pi}{4})}}.$$

$$= -2^{\frac{5}{4}}\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

5.3.37 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin 2x^2}{1+\sin x^2}dx$.

解 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin x^2\cos x^2}{1+\sin x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x^2 - 1}{1+\sin x^2}d(\sin x^2)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\sin x^2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+\sin x^2)}{1+\sin x^2}$$

$$= [\sin x^2 - \ln(1+\sin x^2)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi^2}{4} - \ln(1+\sin\frac{\pi^2}{4}).$$

5.3.38 求对任意的实数 p、q 都满足等式

$$\int_0^1 (px+q)f(x)dx = 0$$

的二次函数 $f(x) = x^2 + ax + b$.

解 $\int_0^1 (px+q)(x^2+ax+b)dx$

$$= \int_0^1 [px^3 + (ap+q)x^2 + (aq+bp)x + bq]dx$$

$$= \left[\frac{p}{4}x^4 + \frac{1}{3}(ap+q)x^3 + \frac{1}{2}(aq+bp)x^2 + bqx\right]_0^1$$

$$= \frac{p}{4} + \frac{ap+q}{3} + \frac{aq+bp}{2} + bq$$

$$= p(\frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}) + q(\frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b) = 0.$$

因为对于任意的 p、q，$Ap + Bq = 0$ 的充要条件是 $A = B = 0$，所以

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b = 0. \end{cases}$$

解之，得 $a = -1$，$b = \frac{1}{6}$. 故所求的函数为 $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

5.3.39 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$.

解 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin^2x}{1+e^{-x}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2x}{1+e^{-x}}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^2x}{1+e^x}+\frac{\sin^2x}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+e^{-x}+1+e^x}{(1+e^x)(1+e^{-x})}\sin^2xdx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2xdx=\frac{\pi-2}{8}.$$

5.3.40 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\theta|d\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)}$.

解 由于被积函数为偶函数,故

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(-2r\cos\theta)}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2}=-\frac{1}{r}\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{r}\left[\frac{1}{1+r^2}-\frac{1}{(1-r)^2}\right]=\frac{2}{(1+r^2)(1-r)^2}.$$

5.3.41 求 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}$.

解 直接应用不定积分公式

$$\int\frac{dx}{1+\sin^2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x)+c$$

会导致错误的结果,应如下求解:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}.$$

令 $x=\pi-t$,代入得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-dt}{1+\sin^2t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin^2t},$$

于是,

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin^2x}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

5.3.42 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$,并求其值.

证法1 左端 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

同理右端 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}+\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)d\theta=\frac{\pi}{4}.$$

故左端 = 右端 $=\frac{\pi}{4}$.

证法2 令 $x=\frac{\pi}{2}-\theta$,得

$$\text{左端}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}(-dx)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\text{右端}.$$

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta\right]$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}.$$

5.3.43 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续,证明

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx,$$

并计算 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx.$

证　因为$f(x)+f(-x)$、$f(x)-f(-x)$分别为偶函数与奇函数，故

$$左端=\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(f(x)+f(-x))dx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(f(x)-f(-x))dx$$

$$=\int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))dx=右端.$$

于是
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1+\sin(-x)}\right]dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right]dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\right]dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x dx=2\mathrm{tg}x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

4. 定积分的换元法

5.3.44　求$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cdot\cos x}dx$.

解　令$x=\frac{\pi}{2}-t$,得

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cdot\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin t-\cos t}{1+\cos t\cdot\sin t}(-1)dt$$

$$=-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t-\sin t}{1+\cos t\cdot\sin t}dt.$$

所以
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cdot\cos x}dx=0.$$

5.3.45　求$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\mathrm{tg}\theta}{\sin 2\theta}d\theta$.

解　原式$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\mathrm{tg}\theta}{\sin 2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\mathrm{tg}\theta}{2\mathrm{tg}\theta\cos^2\theta}d\theta$　（令$\mathrm{tg}\theta=t$）

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1+t}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} (\frac{1}{t} + 1) dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\ln 3.$$

5.3.46 求 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$.

解 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = \int_0^{100\pi} \sqrt{2\sin^2 x} dx$

$$= \sqrt{2} \int_0^{100\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx = \sqrt{2} \cdot \sum_{k=1}^{100} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx$$

$$= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{100} \int_0^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}.$$

5.3.47 求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx$.

解法 1 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}} dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin x}{|\sin x|} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (-1) dx \right] = 0.$$

解法 2 令 $x = t + \pi$，得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos 2t}} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{2(\sin t)^2}} dt = 0.$$

（根据性质 5.(1)）

解法 3 令 $\sin x = t$，则 $dx = \frac{dt}{\cos x} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. 代入得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx = \int_1^{-1} \frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{|t|} = 0,$$

（根据性质 5.(1)）

5.3.48　求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx.$

解　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n+1}(x-\frac{\pi}{4})dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2n-1}(x-\frac{\pi}{4})[\sec^2(x-\frac{\pi}{4})-1]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{2(n-1)+1}(x-\frac{\pi}{4})d\,\mathrm{tg}(x-\frac{\pi}{4})-I_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2n}-I_{n-1},$$

以此类推，有

$$I_n=-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2})+(-1)^nI_0,$$

因 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}(x-\frac{\pi}{4})dx=-\ln\sqrt{2}$，所以

$$I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n})\right\}.$$

5.3.49　若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，求证

$$\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2x}dx.$$

证　设 $x=\pi-t$，则

$$\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2x}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)f(\sin(\pi-t))}{1+\cos^2(\pi-t)}d(\pi-t)$$

$$=-\pi\int_{\pi}^{0}\frac{f(\sin t)dt}{1+\cos^2t}+\int_{\pi}^{0}\frac{tf(\sin t)}{1+\cos^2t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{f(\sin t)dt}{1+\cos^2t}-\int_0^{\pi}\frac{tf(\sin t)}{1+\cos^2t}dt,$$

移项，得　$2\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2x}dx,$

所以　$\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2x}dx.$

5.3.50　求 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx.$

解法1　首先证明，若 $f(x)$ 连续，则

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx.$$

令 $t = 2a - x$,则

$$\int_0^a f(2a-x)dx = \int_{2a}^a f(t)(-dt) = \int_a^{2a} f(t)dt.$$

于是
$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx.$$

将所求的积分代入上式,得

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x + (\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$= \pi\mathrm{arctg}(\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi^2}{4}.$$

解法 2 首先证明,若 $f(x)$ 连续,则

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

令 $x = \pi - t$,则

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = -\int_\pi^0 (\pi - t)f(\sin t)dt$$

$$= +\pi\int_0^\pi f(\sin t)dt - \int_0^\pi tf(\sin t)dt.$$

于是
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

将所求积分代入上式,得

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{arctg}(\cos x)\Big|_\pi^0 = \frac{\pi^2}{4}.$$

解法 3 令 $x = \frac{\pi}{2} + t$,则

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\cos t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

5.3.51　求证下列各题.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

(2) 设函数 $f(x)$ 在[0,1]上连续,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx;$$

(3) 若 $f(x)$ 是定义在$(-\infty,\infty)$上的周期为 T 的连续函数,则 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$. （$a$ 为任意常数).

证　(1) 令 $u = \frac{\pi}{2} - x, x = \frac{\pi}{2} - u, dx = -du$.

$$左端 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - u))(-du)$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)du = 右端.$$

(2) 令 $y = \pi - x$,则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(|\cos(\pi - y)|)(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos y|)dy.$$

令 $y = x - \pi$,则

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|)dx = \int_0^{\pi} f(|\cos(\pi + y)|)dy = \int_0^{\pi} f(|\cos y|)dy.$$

故　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx.$

(3) 左端 $= \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$,

令 $x = u + T$,则 $u = x - T, dx = du$,于是

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(u+T)du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx,$$

所以,左端 $= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx =$ 右端.

5.3.52　设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$.

(1) 证明 $f(x+\pi)=f(x)$； (2) 求 $f(x)$ 的最大值、最小值.

解 (1) 令 $t=u-\pi$，则 $|\sin t|=|\sin u|$，故

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_{x+\pi}^{(x+\pi)+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=f(x+\pi).$$

(2) 由(1)知，$f(x)$ 是以 π 为周期的函数，故只需考虑 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 的情况即可.

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{2}\leqslant\pi$ 时，

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin tdt=\cos x+\sin x.$$

当 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$，即 $\pi<x+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 时，

$$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_{x}^{\pi}\sin tdt-\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{2}}\sin tdt=2+\cos x-\sin x.$$

且 $$f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt=1;\quad f(\frac{\pi}{2})=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin tdt=1;$$

$$f(\pi)=-\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin tdt=1.$$

可见，$f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，以 π 为周期.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x+\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 2+\cos x-\sin x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x+\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ -\sin x-\cos x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{3\pi}{4}$. 又 $f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，$f(\frac{3\pi}{4})=2-\sqrt{2}$. 故

$$\max f(x)=\sqrt{2},\ \min f(x)=2-\sqrt{2}.$$

5.3.53 求 $\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

解法 1　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，注意到 $x<0$ 时，$t>0$，故有

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-4}=-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{t}.$$

代入，得

$$\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{1}{3}}\frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}=\frac{1}{2}\arcsin 2t\Big|_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}.$$

解法 2　令 $x=-2\sec t$，则 $dx=-2\sec t\cdot \operatorname{tg}t dt$，故

$$\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{2}{3}}\frac{-2\sec t\cdot\operatorname{tg}t}{-2\sec t\cdot 2\operatorname{tg}t}dt=\frac{1}{2}(\arccos\frac{2}{3}-\frac{\pi}{3})$$

$$=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}.$$

5.3.54　试证 $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}$，$(a>0)$.

证　令 $x=a\sin t$，则 $dx=a\cos tdt$，故

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos tdt}{a\sin t+a\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt,$$

依 5.3.42 题的结果，有 $\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}$.

5.3.55　求 $\int_3^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{2+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$.

解　设 $t=\sqrt[3]{x-2}$，则 $x=t^3+2$，$dx=3t^2dt$，代入，得

$$\int_3^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{2+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx=\int_1^3\frac{t^2}{2+t^2}\cdot 3t^2dt$$

$$=\int_1^3(3t^2-6+\frac{12}{t^2+2})dt$$

$$=(t^3-6t+\frac{12}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}})\Big|_1^3$$

$$=14+6\sqrt{2}(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= 14 + 6\sqrt{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

因为 $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} < 1$，所以

$$\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

于是　$$\int_3^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{2+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx = 14 + 6\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

5.3.56　如果 $\int_x^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}$，求 x.

解　令 $\sqrt{e^t-1} = u$，则

$$\int\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^t-1} + c.$$

由题设，$$\int_x^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \left[2\operatorname{arctg}\sqrt{e^t-1}\right]_x^{2\ln 2}$$

$$= \frac{2}{3}\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} = \frac{\pi}{6}.$$

则　$$\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

故　$$x = \ln 2.$$

5.3.57　计算下列各题：

(1) $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(2) 试确定常数 a、b 使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{ax-\sin x}\int_0^x\frac{u^2}{\sqrt{b+3u}}du = 2$.

解　(1) 令 $\operatorname{arctg}\sqrt{x} = y$，则 $x = \operatorname{tg}^2 y$，$dx = 2\operatorname{tg}y\cdot\sec^2 y dy$，故

$$原式 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{y \cdot 2\text{tg}y \cdot \sec^2 y dy}{\text{tg}y(1 + \text{tg}^2 y)} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{y \cdot \sec^2 y dy}{\sec^2 y}$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} y dy = y^2 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi^2\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2}\right) = \frac{5\pi^2}{144}.$$

(1) 题解法 2

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\text{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{2\text{arctg}\sqrt{x}}{1+x} d\sqrt{x}$$

$$= 2\int_{\frac{1}{3}}^{1} \text{arctg}\sqrt{x}\, d(\text{arctg}\sqrt{x}) = (\text{arctg}\sqrt{x})^2 \Big|_{\frac{1}{3}}^{1}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{5}{144}\pi^2.$$

(2) 令 $F(x) = \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+3u}} du$，则 $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$. 应用洛比达法则有

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{ax - \sin x} \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+3u}} du = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(a - \cos x)\sqrt{b+3x}} = J.$$

欲使上式存在且不等于零，则 a 必等于 1. 即

$$J = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(a-\cos x)\sqrt{b+3x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{b+3x}\cdot \sin x + \frac{3}{2\sqrt{b+3x}}(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{b+3x}}{(b+3x)\sin x + \frac{3}{2}(1-\cos x)}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{b+3x} + \frac{3x}{2\sqrt{b+3x}}}{3\sin x + \cos x(b+3x) + \frac{3}{2}\sin x} = 2\cdot\frac{\sqrt{b}}{b} = 2.$$

所以 $b = 1$. 即当 $a = 1$，$b = 1$ 时，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{ax - \sin x} \int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+3u}} du = 2.$$

5.3.58 求 $\int_1^{16}\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$.

解 令 $\sqrt{\sqrt{x}-1}=u$，则 $x=(u^2+1)^2$，故

$$\int_1^{16}\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}u\,d(u^2+1)^2$$

$$=(u^2+1)^2\operatorname{arctg}u\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}(u^2+1)du$$

$$=\frac{16}{3}\pi-2\sqrt{3}.$$

5.3.59 求 $\int_{\frac{1}{2}}^2(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}})dx$.

解法 1 令 $u=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{u}$，$dx=-\frac{1}{u^2}du$，故

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^2(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int_2^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{u}-u)e^{\frac{1}{u}+u}(-\frac{1}{u^2})\,du$$

$$=\int_2^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{u}-u)e^ud(e^{\frac{1}{u}})=[(1+\frac{1}{u}-u)e^{u+\frac{1}{u}}]_2^{\frac{1}{2}}$$

$$-\int_2^{\frac{1}{2}}(1-u+\frac{1}{u})e^{u+\frac{1}{u}}du-\int_2^{\frac{1}{2}}(-1-\frac{1}{u^2})^{u+\frac{1}{u}}du$$

$$=3e^{\frac{5}{2}}-\int_{\frac{1}{2}}^2(1+u-\frac{1}{u})e^{u+\frac{1}{u}}du-\left[\int_2^{\frac{1}{2}}e^{u+\frac{1}{u}}du+\int_2^{\frac{1}{2}}e^ud(e^{\frac{1}{u}})\right]$$

$$=3e^{\frac{5}{2}}-I-\{\int_2^{\frac{1}{2}}e^{u+\frac{1}{u}}du+[e^{u+\frac{1}{u}}]_2^{\frac{1}{2}}-\int_2^{\frac{1}{2}}e^{u+\frac{1}{u}}du\}$$

$$=3e^{\frac{5}{2}}-I.$$

所以 $$I=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

解法 2 令 $x+\frac{1}{x}=t$，则 $(1-\frac{1}{x^2})dx=dt$，故

$$\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int e^tdx+\int x\cdot e^tdt=\int e^tdx+\int xde^t=xe^{x+\frac{1}{x}}+c.$$

于是，$\int_{\frac{1}{2}}^2(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx=x\cdot e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{1/2}^2=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$

5.3.60 求 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

解法 1 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x-1)+\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x+1)]\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

解法 2 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}2\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\int_{\varepsilon}^{1}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Big|_{\varepsilon}^{1}=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

注 解法 2 也可写成：

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Big|_{\varepsilon}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5.3.61 求 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}$.

解法 1 令 $x-\frac{1}{2}=t$,则

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^{3/2}}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t^2 + \frac{3}{4})^{3/2}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(t^2 + \frac{3}{4})^{3/2}}.$$

再令 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi$，则

$$I = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\varphi d\varphi = \frac{8}{3}[\sin\varphi]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3}.$$

解法 2　令 $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$，则 $x^2 - x + 1 - y^2 = 0$. 解方程得

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4y^2 - 3}}{2},$$

求导得　$\frac{dx}{dy} = \frac{\pm 2y}{\sqrt{4y^2 - 3}}.$

由 $y = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$. 可以看出，当 $x = \frac{1}{2}$ 时，y 有极小值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，y 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 内单调递减，在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调递增，因此，$x < \frac{1}{2}$ 时，$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} < 0$，当 $x > \frac{1}{2}$ 时，$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} > 0$. 由此，并注意到 y 恒取正值，故有

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^2 - x - 1)^{3/2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^{3/2}}.$$

$$= \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-2}{y^2\sqrt{4y^2 - 3}}dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{2}{y^2\sqrt{4y^2 - 3}}dy,$$

再令 $y = \frac{1}{t}$，可得

$$I = 4\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{tdt}{\sqrt{4 - 3t^2}} = -\frac{4}{6}\left[\frac{(4 - 3t^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{4}{3}.$$

解法 3　作第一欧拉变换 $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + t$，则

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + 2t},\ x + t = \frac{1 + t + t^2}{1 + 2t},\ dx = \frac{-2(1 + t + t^2)}{(1 + 2t)^2}dt.$$

代入得 $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}} = 2\int_0^1 \frac{1+2t}{(1+t+t^2)^2}dt$

$$= 2[\frac{-1}{1+t+t^2}]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

解法 4　作第二欧拉变换 $\sqrt{x^2-x+1} = 1+xt$，则

$$x = \frac{2t+1}{1-t^2},\ 1+xt = \frac{1+t+t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{2(1+t+t^2)}{(1-t^2)^2}dt.$$

代入得

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}} = 2\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1-t^2}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$= 2\int_{-\frac{1}{2}}^0 [\frac{1}{1+t+t^2} - \frac{t(1+2t)}{(1+t+t^2)^2}]dt$$

$$= 2\{\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dt}{1+t+t^2} - \int_{-\frac{1}{2}}^0 td(\frac{-1}{1+t+t^2})\}$$

$$= 2\{\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dt}{1+t+t^2} + [\frac{t}{1+t+t^2}]\Big|_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dt}{1+t+t^2}\}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

解法 5　由 $\frac{d}{dx}(\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}) = \frac{3}{2(x^2-x+1)^{3/2}}$　得

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}} = \frac{2}{3}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

5.3.62　求 $\int_{e^{-2n\pi}}^1 |[\cos(\ln\frac{1}{x})]'|dx.$

解法 1　$\int_{e^{-2n\pi}}^1 |(\cos(\ln x)'|dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\frac{d(\cos\ln x)}{d\ln x}\cdot\frac{d\ln x}{dx}|dx$

$$= \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\frac{d\cos\ln x}{d\ln x}|\cdot|\frac{d\ln x}{dx}|dx$$

$$= \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\frac{d\cos\ln x}{d\ln x}|\cdot d(\ln x)\quad(令\ln x = t)$$

$$= \int_{-2n\pi}^0 |\frac{d\cos t}{dt}|dt = \int_0^{2n\pi}|\sin t|dt = 2n\cdot\int_0^\pi \sin tdt = 4n.$$

解法 2　因 $(\cos\ln\frac{1}{x})' = (\cos\ln x)' = -\frac{\sin\ln x}{x}$. 所以

$$\int_{e^{-2n\pi}}^1 |(\cos\ln\frac{1}{x})'|dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\frac{\sin\ln x}{x}|dx$$

$$= \int_{e^{-2n\pi}}^{1} |\sin \ln x| d\ln x \quad (\text{令} \ln x = u)$$

$$= \int_{-2n\pi}^{0} |\sin u| du = 2n \int_{0}^{\pi} \sin u du = 4n.$$

5.3.63　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\text{ctg}x)^{\sqrt{3}}}$.

解　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\text{ctg}x)^{\sqrt{3}}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + (\text{ctg}x)^{\sqrt{3}}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\text{ctg}x)^{\sqrt{3}}}.$$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\text{ctg}x)^{\sqrt{3}}} = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dt}{1 + [\text{ctg}(\frac{\pi}{2} - t)]^{\sqrt{3}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + (\text{ctg}x)^{-\sqrt{3}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{ctg}^{\sqrt{3}} x}{1 + \text{ctg}^{\sqrt{3}} x} dx.$$

于是　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \text{ctg}^{\sqrt{3}} x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \text{ctg}^{\sqrt{3}} x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{ctg}^{\sqrt{3}} x}{1 + \text{ctg}^{\sqrt{3}} x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

5.3.64　求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg}x) dx$.

解　$1 + \text{tg}x = \text{tg}\frac{\pi}{4} + \text{tg}x = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + x)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x}$,

$$\ln(1 + \text{tg}x) = \ln\sin(\frac{\pi}{4} + x) - \ln\cos x - \ln\cos\frac{\pi}{4}.$$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{2} - t)(-dt)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4} + u) du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4} + x) dx.$$

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \mathrm{tg} x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4} + x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos \frac{\pi}{4} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

5.3.65　求 $\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx.$

解法 1　令 $x = \mathrm{tg}\varphi$，则 $\frac{dx}{1 + x^2} = d\varphi$，故

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \mathrm{tg}\varphi) d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \varphi)}{\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \ln 2 d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(\frac{\pi}{4} + \varphi) d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{8} \ln 2 + I_1 - I_2.$$

对积分 I_1 作代换 $\varphi = \frac{\pi}{4} - \theta$，则

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \varphi) = \cos\theta, d\varphi = - d\theta,$$

于是
$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \cos\theta(- d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\theta d\theta = I_2,$$

从而
$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

解法 2　令 $x = \frac{1 - t}{1 + t}$，则

$$1 + x = \frac{2}{1 + t}, \ 1 + x^2 = \frac{2(1 + t^2)}{(1 + t)^2}, \ dx = \frac{- 2dt}{(1 + t)^2},$$

于是
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx = \int_1^0 \frac{\ln \frac{2}{1 + t}}{\frac{2(1 + t^2)}{(1 + t)^2}} \cdot \frac{- 2dt}{(1 + t)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1 + t)}{1 + t^2} dt = \ln 2 \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1 + t)}{1 + t^2} dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

从而
$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

注　利用分部积分法，容易验证

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}dx = \frac{\pi}{4} - \ln 2 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

虽然 $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}dx$ 及 $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ 都不是初等函数，但我们仍可求出 I 的值.

5.3.66　求 $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}dx$，$(a>0)$.

解　令 $a-x=t$，则

$$\text{原式} = \int_a^{-a}(a-t)^2\sqrt{a^2-t^2}(-dt)$$

$$= \int_{-a}^{a}(a-t)^2\sqrt{a^2-t^2}dt \quad (\text{令 } t = a\sin\theta)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\theta)^2 a^2\cos^2\theta d\theta = \frac{5\pi}{8}a^4.$$

5.3.67　令 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt, x>0$. 求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

解　设 $u=\frac{1}{t}$，则

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)}du = \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)}dt.$$

所以
$$f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt$$

$$= \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)}dt = \int_1^x \frac{t\ln t + \ln t}{t(1+t)}dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}[\ln^2 t]_1^x = \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

5.3.68　证明等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx,\ (a>0).$$

证　令 $x^2=t$，则 $xdx=\frac{1}{2}dt$，由于 $x=\sqrt{t}$ 在$[0,a]$上是单调连续的，故

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \int_0^{a^2} \frac{1}{2} t f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)dx.$$

5.3.69　$\int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx, |\alpha| < 1.$

解　令 $I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx$，则 $I(0) = 0$.

$$I'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\alpha\cos x} = \int_0^\pi \frac{dx}{1-\alpha+2\alpha\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\int_0^\pi \frac{d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2\alpha+(1-\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

故　$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx = \int_0^\alpha I'(\alpha)d\alpha$

$$= \pi\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \pi\,\mathrm{arc\ sin}\alpha.$$

注　本题采用的是对含参变量积分所表函数的求导法.该方法对某些积分效果很好.

5.3.70　求　$I(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{arc\ tg}(xt)}{x\sqrt{1-x^2}}dx, t \geqslant 0.$

解　$I(0) = 0$，$I'(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+t^2x^2)}$，令 $x = \frac{1}{y}$，则

$$I'(t) = \int_1^\infty \frac{ydy}{(y^2+t^2)\sqrt{y^2-1}}.$$

再令 $u^2 = y^2 - 1$，则 $y^2 = u^2 + 1$，$udu = ydy$. 于是

$$I'(t) = \int_0^\infty \frac{du}{u^2+t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{arc\ tg}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

故　$$I(t) = \frac{\pi}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2}).$$

5.3.71 证明 $\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$.

证 设 $x^2=t$,则

$$\text{左端}=\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_1^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}+\int_a^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}\right].$$

再设 $u=\frac{a^2}{t}$,则

$$\int_a^{a^2}f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}=-\int_a^1 f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{du}{u}$$
$$=\int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{du}{u}=\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t},$$

故
$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\left[2\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{dt}{t}\right]$$
$$=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

5.3.72 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义且单调不增,证明:对于任何 $a\in(0,1)$,有

$$\int_0^a f(x)dx\geqslant a\int_0^1 f(x)dx.$$

证 设 $F(a)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx$,因 $f(x)$ 单调不增,则

$$\int_0^a f(x)dx\geqslant af(a),$$

即
$$\frac{1}{a}f(a)\leqslant\frac{1}{a^2}\int_0^a f(x)dx,$$

故 $F'(a)=\frac{1}{a}f(a)-\frac{1}{a^2}\int_0^a f(x)dx\leqslant 0$. 所以,$F(a)\geqslant F(1)$,即

$$\int_0^a f(x)dx\geqslant a\int_0^1 f(x)dx.$$

5.3.73 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,但不可微,$A<a<b<B,0<k<1$,求 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+ky)dy$.

解 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.所以它在 $[a,b]$ 上的原函数存在.设为 $F(x)$,则

$$\int_a^b f(x+ky)dy = \frac{1}{k}[F(x+kb) - F(x+ka)],$$

从而

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+ky)dy = \frac{1}{k}[F'(x+kb) - F'(x+ka)]$$

$$= \frac{1}{k}[f(x+kb) - f(x+ka)],$$

或令 $x+ky=t$，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+ky)dy = \frac{d}{dx}\int_{x+ka}^{x+kb}\frac{1}{k}f(t)dt$$

$$= \frac{1}{k}[f(x+kb) - f(x+ka)].$$

因 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，故 $x+kb \leqslant b, x+ka \geqslant a$，即

$$(1-k)a \leqslant x \leqslant (1-k)b.$$

5.3.74　设 $f'(x)$ 连续，$F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$，求证：

$$F(2a) - 2F(a) = [f(a)]^2 - f(0)f(2a).$$

证　$F(2a) - 2F(a)$

$$= \int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)dt - 2\int_0^a f(t)f'(2a-t)dt$$

$$= \int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)dt - \int_0^a f(t)f'(2a-t)dt,$$

令 $2a-t=y$，则

$$\int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)dt = -\int_a^0 f(2a-y)f'(y)dy$$

$$= -f(y)f(2a-y)\Big|_a^0 - \int_a^0 f'(2a-y)f(y)dy$$

$$= -f(0)f(2a) + f(a)f(a) + \int_0^a f'(2a-t)f(t)dt,$$

故　$F(2a) - 2F(a) = [f(a)]^2 - f(0)f(2a)$

$$+ \int_0^a f'(2a-t)f(t)dt - \int_0^a f(t)f'(2a-t)dt$$

$$= [f(a)]^2 - f(0)f(2a).$$

5.3.75　设 $f(x)$ 是任意的二次多项式，$g(x)$ 是某个二次多项式，已知 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)]$，求 $\int_a^b g(x)dx$.

解　设 $x = (b-a)t + a\ (a \neq b)$，则

$$I=\int_a^b g(x)dx=\int_0^1 g[(b-a)t+a](b-a)dt$$
$$=(b-a)\int_0^1 g[(b-a)x+a]dx$$

令 $g[(b-a)x+a]=f(x)$，则

$$f(0)=g(a),f(\frac{1}{2})=g(\frac{a+b}{2}),f(1)=g(b).$$

由题设，得　$I=\frac{b-a}{6}[g(a)+4g(\frac{b+a}{2})+g(b)].$

5. 定积分的分部积分法

5.3.76　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta}d\theta.$

解　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta+\sin\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta+\sin\theta)d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

$$=(\theta+\sin\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

5.3.77　已知 $f(0)=1,f(2)=3,f'(2)=5$，计算 $\int_0^1 xf''(2x)dx.$

解　$\int_0^1 xf''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xd[f'(2x)]$

$$=\frac{1}{2}[xf'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(2x)dx]=\frac{1}{2}[5-\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1]$$
$$=\frac{1}{2}[5-\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}f(0)]=2.$$

5.3.78　利用分部积分法，证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\{\int_0^u f(x)dx\}du.$$

证　在定积分的分部积分公式

$$\int_0^x\alpha(u)\beta'(u)du=\alpha(u)\beta(u)\Big|_0^x-\int_0^x\alpha'(u)\beta(u)du$$

中,取 $\alpha(u)=x-u,\beta'(u)=f(u)$. 则有

$$\alpha'(u)=-1,\ \beta(u)=\int_0^u\beta'(x)dx=\int_0^u f(x)dx.$$

代入,得

$$\begin{aligned}&\int_0^x f(u)(x-u)du\\&=[(x-u)\int_0^u f(x)dx]_0^x-\int_0^x\{(-1)\int_0^u f(x)dx\}du\\&=[(x-x)\int_0^x f(x)dx-(x-0)\int_0^0 f(x)dx]+\int_0^x\{\int_0^u f(x)dx\}du\\&=\int_0^x\{\int_0^u f(x)dx\}du.\end{aligned}$$

5.3.79 设 $f_1(x)=\int_0^x f(t)dt,\ f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt,\cdots,$

$f_{k+1}(x)=\int_0^x f_k(t)dx,\cdots$,试证

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt,\ (n=1,2,\cdots).$$

证 用分部积分法. 因 $f_k(0)=0,\ k=1,2,\cdots$,所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}df_1(t)\\&=\frac{1}{(n-1)!}[(x-t)^{n-1}f_1(t)\,|_0^x\\&\qquad+\int_0^x(n-1)\cdot(x-t)^{n-2}f_1(t)dt]\\&=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x(x-t)^{n-2}f_1(t)dt\\&=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x(x-t)^{n-2}df_2(t)=\cdots\\&=\frac{1}{1!}\int_0^x(x-t)df_{n-1}(t)=[(x-t)f_{n-1}(t)]_0^x+\int_0^x f_{n-1}(t)dt\\&=\int_0^x f_{n-1}(t)dt,\end{aligned}$$

于是 $$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}f(t)dt.$$

5.3.80 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2dt$,求证:

当 $x>0$ 时,有 $|f(x)|<\frac{1}{x}$.

证 令 $t=\sqrt{u}$，则

$$f(x)=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\sin u\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\cos u\Big|_{x^2}^{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u du}{u^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2x}\cos x^2-\frac{1}{2(x+1)}\cos(x+1)^2-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{u^{3/2}}du,$$

于是，当 $x>0$ 时，有

$$|f(x)|<\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}u^{-\frac{3}{2}}du\right|$$

$$=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

5.3.81 设 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n xdx$，证明

$$f(n)+f(n-2)=\frac{1}{n-1},\quad (n>2).$$

证 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{n-2}x\,\mathrm{tg}^2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{n-2}x(\sec^2x-1)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{n-2}xd\,\mathrm{tg}x-f(n-2)$$

$$=\frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-f(n-2)=\frac{1}{n-1}-f(n-2).$$

所以 $f(n)+f(n-2)=\frac{1}{n-1}$，$(n>2)$.

5.3.82 设 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^{n-1}xdx$，$n$ 是大于 1 的自然数，试证：

$$\frac{1}{2(n+1)}<f(n)<\frac{1}{2(n-1)}.$$

证 由上题，有 $f(n)+f(n-2)=\frac{1}{n-1}$.

如果 $f(n)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}$，那末 $f(n-2)\leqslant\frac{1}{2(n-1)}$. 于是，

$$f(n)+f(n-2)\leqslant\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n-1)}<\frac{1}{n-1}.$$

与上题矛盾，因此有 $f(n) > \frac{1}{2(n+1)}$.

同理可证　$f(n) < \frac{1}{2(n-1)}$.

5.3.83　求 $\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解　用分部分法，可求得不定积分

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + c$$

对 $0 < x < +\infty$ 成立.

由 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$，可定义被积函数在 $x=0$ 的值为 0，于是被积函数在 $[0,+\infty]$ 上连续.

又由 $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$，令

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2), & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

则在 $[0,+\infty]$ 上，有

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = F(x) + c.$$

因此　$\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4}\ln 2.$

5.3.84　已知 $f(\pi) = 2$，$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 5$，求 $f(0)$.

解　由 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx$

$$= \int_0^\pi f(x)d(-\cos x) + \int_0^\pi \sin x d(f'(x))$$

$$= [-\cos x f(x)]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x dx + [\sin x f'(x)]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\cos x dx$$

$$= f(\pi) + f(0) = 5.$$

故　$f(0) = 5 - f(\pi) = 5 - 2 = 3.$

5.3.85　利用递推公式计算积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$，其中 n 为正整数.

解　$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x d(\cos x)$

$$= -\sin^{n-1}x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

移项合并得 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$，

利用上述递推公式即可求得

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

5.3.86　求 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解　令 $x = \sin t$，则

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t \cdot \cos t dt}{\sqrt{(1-\sin t)(1+\sin t)}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t \cdot \cos t}{\cos t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数 } n = 2k; \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n \text{ 为奇数 } n = 2k+1. \end{cases}$$

5.3.87　若 $I_n(x) = \int_0^x t^n (t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} dt$，证明：

(1) $nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x)$　$(n \geqslant 2)$；

(2) $\int_0^2 x^5 (x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{168}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}$.

证　(1) $[nI_n(x)]' = nx^n (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$ $(n \geqslant 2)$，而

$$[x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)a^2 I_{n-2}(x)]'$$

$$= (n-1)x^{n-2}(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + x^{n-1}(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$- (n-1)a^2 x^{n-2}(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= nx^n(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

所以　$nI_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)a^2I_{n-2}(x) + c \quad (n \geqslant 2).$

令 $x=0$，由 $I_n(0)=I_{n-2}(0)=0\ (n\geqslant 2)$，得 $c=0$，于是(1)成立.

(2) 令 $x=2, a^2=5$，由(1)结果得

$$I_3(2) = \frac{1}{3}[2^2\sqrt{2^2+5} - 2\cdot 5I_1(2)]$$

$$= 4 - \frac{10}{3}\int_0^2 t(t^2+5)^{-\frac{1}{2}}dt = -6 + \frac{10\sqrt{5}}{3}.$$

故　$$\int_0^2 x^5(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}dx = I_5(2) = \frac{1}{5}[2^4\sqrt{2^2+5} - 4\cdot 5I_3(2)]$$

$$= \frac{48}{5} - 4\left(-6+\frac{10\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{168}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3}.$$

5.3.88　求 $\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x(1-x)}dx.$

解　原式 $= \int_0^1 \arcsin 2\sqrt{x(1-x)}d\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin 2\sqrt{x(1-x)}\Big|_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x(1-x)}}\cdot 2\cdot\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-2x}{|1-2x|}\frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}dx - \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}dx\right].$$

先令 $\sqrt{1-x}=t$，再设 $t=\sin u$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int\frac{(1-t^2)^2}{t\sqrt{1-t^2}}(-2t)dt$$

$$= -2\int(1-t^2)^{3/2}dt = -2\int\cos^4 u du.$$

而　$$\int\cos^4 u du = \int\cos^3 u d(\sin u)$$

$$= \cos^3 u\sin u + 3\int\sin^2 u\cos^2 u du$$

$$= \cos^3 u \sin u + 3\int \cos^2 u du - 3\int \cos^4 u du,$$

故
$$\int \cos^4 u du = \frac{1}{4}\cos^3 u \sin u + \frac{3}{4}\int \cos^2 u du$$
$$= \frac{1}{4}\cos^3 u \sin u + \frac{3}{8}u + \frac{3}{16}\sin 2u + c.$$

于是,可计算得

$$\text{原式} = -\frac{1}{2}\left[(-2)\left(\frac{4}{16} - \frac{3}{32}\pi + \frac{4}{16} + \frac{2}{32}\pi\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

5.3.89　求 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$,其中 n 为正整数.

解　(1) 当 $n=1$ 时,

$$\int_0^{\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx = \int_0^{\pi} x d(-\cos x)$$
$$= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx = \pi.$$

(2) 当 $n=2$ 时,

$$\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{\pi} x\sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x(-\sin x)dx = \pi + 3\pi.$$

(3) 设 $n=k$ (k 为奇数) 时,有

$$\int_0^{k\pi} x|\sin x|dx = \pi + 3\pi + \cdots + (2k-1)\pi.$$

则 $n=k+1$ 时,有

$$\int_0^{(k+1)\pi} x|\sin x|dx = \int_0^{k\pi} x|\sin x|dx + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|dx$$
$$= \pi + 3\pi + \cdots + (2k-1)\pi + (2k+1)\pi.$$

(4) 设 $n=k$ (k 为偶数) 时,有

$$\int_0^{k\pi} x|\sin x|dx = \pi + 3\pi + \cdots + (2k-1)\pi,$$

则 $n=k+1$ 时,有

$$\int_0^{(k+1)\pi} x|\sin x|dx = \pi + 3\pi + \cdots + (2k-1)\pi + (2k+1)\pi.$$

由数学归纳法知,对任何整数 n,有

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \pi + 3\pi + \cdots + (2n-1)\pi = n^2\pi.$$

5.3.90　证明:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right),$$

其中 n 为自然数，

证　用数学归纳法.

因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$，故原式当 $n=1$ 时成立，设 $n=k$ 时原式成立，即有

$$I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\sin kx dx=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^k}{k}\right).$$

那么 $I_{k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+1}x\sin(k+1)x dx$

$$=-\frac{1}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+1}x d(\cos(k+1)x)$$

$$=-\frac{1}{k+1}\cos^{k+1}x\cdot\cos(k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\cos(k+1)x\sin x dx$$

$$=\frac{1}{k+1}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\cos(k+1)x\sin x dx.$$

两边同加 I_{k+1}，得

$$2I_{k+1}=\frac{1}{k+1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\sin(k+1)x\cos x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\cos(k+1)x\sin x dx$$

$$=\frac{1}{k+1}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k x\sin kx dx=\frac{1}{k+1}+I_k,$$

由此可得 $I_{k+1}=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2}I_k$

$$=\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^k}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{k+2}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^k}{k}+\frac{2^{k+1}}{k+1}\right).$$

即 $n=k+1$ 时原式也成立，所以，原式对一切自然数 n 都成立.

5.3.91　证明：$I_{n,m}=\int_0^1(1-x)^n x^m dx=\frac{n!m!}{(n+m-1)!}$（$n,m$ 为整

数).

证 $$I_{n,m}=\int_0^1(1-x)^n x^m dx$$
$$=-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}x^m\Big|_0^1+\frac{m}{n+1}\int_0^1(1-x)^{n+1}x^{m-1}dx$$
$$=\frac{m}{n+1}\int_0^1(1-x)(1-x)^n\cdot x^{m-1}dx$$
$$=\frac{m}{n+1}\int_0^1(1-x)^n x^{m-1}dx-\frac{m}{n+1}\int_0^1(1-x)^n\cdot x^m dx.$$

因为 $(1+\frac{m}{n+1})\int_0^1(1-x)^n\cdot x^m dx=\frac{m}{n+1}\int_0^1(1-x)^n x^{m-1}dx$,

故 $$I_{n,m}=\int_0^1(1-x)^n\cdot x^m dx=\frac{m}{n+m+1}\int_0^1(1-x)^n\cdot x^{m-1}dx$$
$$=\frac{m}{n+m+1}I_{n,m-1}.$$

用上式递推,得
$$I_{n,m}=\frac{m(m-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(n+m+1)(n+m)\cdots(n+2)}\cdot I_{n,0}$$
$$=\frac{m!}{(n+m+1)(n+m)\cdots(n+2)}\int_0^1(1-x)^n dx$$
$$=\frac{m!}{(n+m+1)(n+m)\cdots(n+2)}\cdot\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\Big|_0^1$$
$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

§4　广义积分

内容提要

1. 广义积分的概念

(1) 积分区间为无限的广义积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，取 $b > a$，若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则定义
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$
此时，我们说广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 存在或收敛；若极限不存在，就说广义积分无意义或发散.

同样地，可以定义广义积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$. 而 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$. 如果上式右边的两个广义积分都收敛，就说左边的广义积分收敛，否则，就说左边的广义积分发散.

(2) 被积函数有无穷间断点的广义积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，而 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$，取 $\varepsilon > 0$，若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ 存在，则定义
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$
此时，我们说广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在或收敛；若极限不存在，就说广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 无意义或发散.

同样地，若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$，则
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$
若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除 $x = c$ 一点外连续，$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx.$$

如果上式右边的两个极限都存在，则左边的广义积分收敛，否则，左边广义积分发散.

(3) 广义积分的绝对收敛与条件收敛

如果 $f(x)$ 的广义积分与 $|f(x)|$ 的广义积分同时收敛，那么称 $f(x)$ 的广义积分是绝对收敛的；如果仅前者收敛，后者不收敛，那么称 $f(x)$ 的积分是条件收敛.

2. 广义积分的收敛判别法

极限判别法 1　设在区间 $a \leqslant x < +\infty (a > 0)$ 内的连续函数 $f(x) \geqslant 0$. 若存在常数 $p > 1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = d > 0$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$），则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

极限判别法 2　设区间 $a < x \leqslant b$ 内的连续函数 $f(x) \geqslant 0$，但 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. 如果存在常数 $0 < q < 1$，使得 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$ 存在，则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；如果存在常数 $q \geqslant 1$，使得 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x) = d > 0$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x) = +\infty$，则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

极限判别法 3　对于恒正的函数 $g(x)$，若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \mu,$$

且 μ 是非零的实数，则 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{\infty} g(x)dx$ 同时敛散.

极限判别法 4　对于恒正的函数 $g(x)$，若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \mu,$$

且 μ 是非零的实数，则 $\int_a^b f(x)$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同时敛散.

3. 无穷级数与广义积分的关系

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, +\infty)$ 上的一个正的非增连续函数，则级数 $f(a) + f(a+1) + \cdots + f(a+k) + \cdots$ 与积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 同时收

敛或同时发散.

问 题 与 解 答

1. 积分区间为无穷区间

5.4.1 计算下列积分

(1) $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, $(a>0)$;　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解 (1) $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=\frac{1}{a}$.

(2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{dx}{1+x^2}$$
$$=-\lim_{b\to-\infty}\text{arctg}b+\lim_{a\to+\infty}\text{arctg}\,a=\pi.$$

5.4.2 求 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

解 原式$=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}\text{arctg}(1+x)\Big|_0^b=\frac{\pi}{4}$.

5.4.3 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

解 因
$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

所以，
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_a^0\right)$$
$$+\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^b$$
$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.4.4 证明：$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证　令 $x=\frac{1}{t}$,则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$,故

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\int_\infty^0 \frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

于是
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}dx;$$

令 $x-\frac{1}{x}=t$,则 $dt=(1+\frac{1}{x^2})dx, x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$,

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}(1+\frac{1}{x^2})dx,$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\pi=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

5.4.5　求 $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$.

解　令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$, $dx=2tdt$. 故

$$\int_0^\infty e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^\infty e^t\cdot tdt=2\lim_{b\to\infty}\left[-te^{-t}\Big|_0^b-\int_0^b e^{-t}dt\right]$$

$$=2\cdot\lim_{b\to\infty}(-e^{-t}\Big|_0^b)=2.$$

5.4.6　求 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解　设 $\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$, 则当 $1\leqslant x<+\infty$ 时,
$\sqrt{3}+1\leqslant t<+\infty$. 代入得

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\frac{2}{5}\int_{\sqrt{3}+1}^\infty \frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{3}+1}^\infty=\frac{1}{5}\ln(1+\frac{2}{\sqrt{3}}).$$

5.4.7　求 $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$.

解　原式 $= 2\int_0^{\infty}\dfrac{d(\sqrt{x})}{2^2+(\sqrt{x})^2} = \text{arctg}\,\dfrac{\sqrt{x}}{2}\Big|_0^{\infty} = \dfrac{\pi}{2}$.

5.4.8　已知 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}$,证明

(1) $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{x}dx = \dfrac{\pi}{4}$;　(2) $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

解　(1) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty}\sin^2 x\left(-d\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{x}\Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{x}dx$$
$$= 2\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

5.4.9　已知积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}$,求积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x\cos xt}{x}dx$ 之值,其中 t 是参数,遍取 $(-\infty,\infty)$ 上各值.

解　$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\cos xt}{x}dx = \int_0^{\infty}\frac{\sin(xt+x)-\sin(xt-x)}{2x}dx$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{\sin(t+1)x}{2x}dx - \int_0^{\infty}\frac{\sin(t-1)x}{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(t+1)x}{(t+1)x}d(t+1)x - \int_0^{\infty}\frac{\sin(t-1)x}{2(t-1)x}\cdot d(t-1)x,$$

当 $|t|<1$ 时,$t+1>0$,$t-1<0$,故 $I = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$.

当 $|t|>1$ 时,若 $t+1>0$,则 $t-1>0$;若 $t+1<0$,则 $t-1<0$,故 $I=0$.

当 $t=1$ 时,$I = \int_0^{\infty}\dfrac{\sin x\cos x}{x}dx = \int_0^{\infty}\dfrac{\sin 2x}{2x}dx = \dfrac{\pi}{4}$. 所以,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cdot\cos xt}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1;\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

5.4.10 求 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$，($k$ 为常数)，

解 因 k 值不同，分三种情况讨论：

(1) 若 $k>1$，

$$原式=\int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^k}=\frac{1}{1-k}\lim_{b\to\infty}(\ln x)^{1-k}\Big|_2^b=\frac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1};$$

(2) 若 $k=1$，

$$原式=\int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}[\ln(\ln x)]\Big|_2^b=\infty.\ 积分发散;$$

(3) 若 $k<1$，

$$原式=\frac{1}{1-k}\lim_{b\to\infty}[(\ln x)^{1-k}]\Big|_2^b=+\infty.\ 积分发散.$$

5.4.11 证明：积分 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 不依赖于参数 a.

证 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)},$$

其中，令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}=\int_{\infty}^1\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^a}\right)}$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{-a})}.$$

于是，$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$

$$=\int_1^{\infty}\left[\frac{1}{(x^2+1)(1+x^a)}+\frac{1}{(1+x^2)(1+x^{-a})}\right]dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+x^a}+\frac{1}{1+x^{-a}}\right)dx$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot 1dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

即 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 不依赖于参数 a.

5.4.12 求 $\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 首先,

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \ln x d\frac{1}{1+x^2}$$
$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$
$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx$$
$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + c.$$

于是, $\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ b \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{b} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ b \to \infty}} \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} \right) \Big|_{\varepsilon}^{b}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ b \to \infty}} \left[(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{1+b^2}) + \frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)}\ln\varepsilon + \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2) \right) = 0.$$

注 $\varepsilon \to 0^+$ 和 $b \to \infty$ 的极限是独立的,因此可以分别取极限.

5.4.13 求 $\int_0^{\infty} e^{-st}\sin t\cos t dt$, $(s > 0)$.

解 原式 $= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin 2t dt = -\frac{1}{2s}\int_0^{\infty} \sin 2t de^{-st}$

$$= -\frac{1}{2s}\left(e^{-st}\sin 2t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2 \cdot e^{-st}\cos 2t dt \right)$$
$$= -\frac{1}{2s^2} \cdot 2\int_0^{\infty} \cos 2t \cdot de^{-st}$$
$$= -\frac{1}{s^2}\left(e^{-st} \cdot \cos 2t \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 2\sin 2t dt \right)$$
$$= -\frac{1}{s^2}(-1 + 4\int_0^{\infty} e^{-st}\sin t\cos t dt).$$

所以 $$\int_0^{\infty} e^{-st}\sin t \cdot \cos t dt = \frac{1}{s^2+4}.$$

5. 4. 14 求 $\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin^2 3t dt, (p > 0)$.

解 $$原式 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-pt}(1-\cos 6t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{-pt}dt - \int_0^{\infty} e^{-pt}\cos 6t dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-pt}(6\sin 6t - p\cos 6t)}{p^2+6^2}\right)\Bigg|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+6^2}\right) = \frac{p^2+6^2-p^2}{2p(p^2+6^2)} = \frac{18}{2p(p^2+6)}.$$

5. 4. 15 求 $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx$,（$n$ 为正整数）.

解 $$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = -\int_0^{\infty} x^n d(e^{-x})$$
$$= -\left(x^n \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n \cdot x^{n-1}e^{-x}dx\right)$$
$$= n \cdot \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x}dx = n \cdot I_{n-1}.$$

依此递推 $$I_n = nI_{n-1} = n \cdot (n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0.$$

而 $$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1,$$

所以 $$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!.$$

2. 被积函数有无穷间断点

5. 4. 16 求 $\int_0^1 \ln x dx$.

解 $$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(x\ln x\Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 1dx\right) = -1.$$

5. 4. 17 求 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\arcsin(1-\varepsilon')$$
$$= \pi.$$

5.4.18 求 $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}dx$.

解 因为 $x=0$ 是被积函数的无穷间断点，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}dx + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{\varepsilon'}^{1}\frac{d}{dx}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{\varepsilon'}^{1}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

5.4.19 求 $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解 令 $x=\sin^2 t$，则

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cos t dt}{(2-\sin^2 t)\cos t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t}$$
$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t} = -2\int_1^0\frac{du}{1+u^2} = 2\int_0^1\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

5.4.20 求 $\int_a^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x-\sin^2 a}}dx$, $(0<a<\frac{\pi}{2})$.

解 因

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{\sin^2 x-\sin^2 a}} = \int\frac{-d\cos x}{\sqrt{\cos^2 a-\cos^2 x}} = -\arcsin\left(\frac{\cos x}{\cos a}\right)+c.$$

所以
$$原式 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x-\sin^2 a}}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\arcsin\left(\frac{\cos x}{\cos a}\right)\right]\Big|_{a+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

5.4.21 求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$.

解 $x=\pi$ 是被积函数的无穷间断点. 故

$$原式=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{2}\cdot\sin x}dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{2}(-\sin x)}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx-\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}dx\right)=0.$$

5.4.22 求 $\int_0^1\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)dx$.

解 $$原式=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}[-\ln(1+x)-\ln(1-x)]dx$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}-[(x+1)\ln(x+1)-x]\Big|_0^{1-\varepsilon}$$
$$+[(1-x)\ln(1-x)+x]\Big|_0^{1-\varepsilon}$$
$$=2(1-\ln 2).$$

5.4.23 求 $\int_1^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx$.

解 $x=2$ 是被积函数的无穷间断点,故

$$原式=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx+\lim_{\varepsilon'\to0^+}\int_{2+\varepsilon'}^{3}\ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}dx$$
$$=\ln\pi+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon}-\frac{1}{2}\ln(2-x)dx$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon'\to0^+}\int_{2+\varepsilon'}^{3}-\ln(x-2)dx$$
$$=\ln\pi+\frac{1}{2}\left[\lim_{\varepsilon\to0^+}(2-x)\ln(2-x)+x\right]\Bigg|_1^{2-\varepsilon}$$
$$-\frac{1}{2}\left[\lim_{\varepsilon'\to0^+}(x-2)\ln(x-2)-x\right]\Bigg|_{2+\varepsilon'}^{3}=\ln\pi+1.$$

5.4.24 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

解 先证明原积分存在.

在积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{\sin x}dx$ 中，被积函数为正值，且 $x=0$ 为它的无穷间断点. 又

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1}{\sin x}}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x}{\sin x}=1.$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln xdx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}[x-x\ln x]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}$. 即该积分收敛，故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1}{\sin x}dx$ 存在，故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$ 存在.

令 $x=2t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin2xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin x\cdot\cos x)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln2+\ln\sin x+\ln\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx.$$

在后一个积分中，令 $x=\frac{\pi}{2}-u$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos tdt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{2}-u)(-du)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin udu=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin udu.$$

于是　$I=\frac{\pi}{2}\ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin tdt+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt$

$$=\frac{\pi}{2}\ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=\frac{\pi}{2}\ln2+2I.$$

所以
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=-\frac{\pi}{2}\ln2.$$

5.4.25　计算 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$，$(a>0,b>0)$.

解　首先讨论被积函数在 $x=0$ 及 $x=1$ 的情形，不妨设 $b>a>0$. 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a(x^{b-a}-1)}{\ln x}=0;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{\frac{1}{x}}=b-a.$$

所以被积函数在边界上有可去间断点，而在区间内是连续的，故该积分收敛.

记 $\Phi(b)=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$，则 $\Phi'(b)=\int_0^1\frac{x^b\ln x}{\ln x}dx=\frac{1}{b+1}$，于是

$$\Phi(b)=\int_0^b\frac{db}{b+1}=\ln(b+1)+c.$$

但 $\Phi(a)=0$，故由 $\Phi(a)=\ln(a+1)+c$ 可得 $c=-\ln(a+1)$，所以

$$\Phi(b)=\ln(b+1)-\ln(a+1)=\ln\frac{b+1}{a+1},$$

即
$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

5.4.26 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$.

解 因 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-2x}=-\frac{1}{2}$，故 $x=1$ 是被积函数的可去间断点. 又由 5.4.16 题知，该广义积分收敛.

$$\frac{\ln x}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x \qquad (0<x<1)$$

和式中各项为负，且和函数在[0,1]上可积，故可逐项积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(x^{2n+1}\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x^{2n}dx\right)\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=-\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]\\&=-\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

5.4.27 求 $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $(a<b)$.

解 当 $x \to a^+$ 或 $x \to b^-$ 时，$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \to \infty$，所以，该积分是广义积分. 若 $a < c < b$，则

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

令 $x = a + (b-a)\sin^2 t$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)[(b-a)-(x-a)]}}$$

$$= \int \frac{(b-a)\cdot 2\cdot \sin t\cdot \cos t dt}{\sqrt{(b-a)\sin^2 t\cdot (b-a)(1-\sin^2 t)}}$$

$$= 2\int dt = 2t + c = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c.$$

于是 $$\int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\Bigg|_{a+\varepsilon}^c = 2\arcsin\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}.$$

$$\int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\Bigg|_c^{b-\varepsilon} = 2\arcsin\sqrt{\frac{b-a}{b-a}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}.$$

由此可得 $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi.$$

5.4.28 $\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a < b)$.

解 令 $x - a = (b-a)\sin^2 t$，则

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$- \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}(1-\frac{x-a}{b-a})^{\frac{1}{2}} + c.$$

任取一点 c $(a < c < b)$，则有

$$\int_a^c \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^c \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}(1-\frac{x-a}{b-a})^{\frac{1}{2}}\Big|_{a+\varepsilon}^{c}$$

$$=(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}(1-\frac{c-a}{b-a})^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_c^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_c^{b-\varepsilon} \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-a)}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$-\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}(1-\frac{x-a}{b-a})^{\frac{1}{2}}\Big|_{c}^{b-\varepsilon}$$

$$=\frac{\pi}{2}(a+b)-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}$$

$$+\frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{c-a}{b-a}}(1-\frac{c-a}{b-a})^{\frac{1}{2}}.$$

由此可得　$\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

$$=\int_a^c \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}+\int_c^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$=\frac{\pi}{2}(a+b).$$

3. 综合问题

5. 4. 29　已知 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$，求

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)dx.$$

解　$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)de^{-\frac{x^2}{2}}$

$$= -\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

5.4.30　求 $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1}$，(已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$).

解　由 $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-nx}\ (x>0)$，得

$$\text{原式} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{xdx}{e^x+1} = \lim_{b\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^b xe^{-nx}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

5.4.31　求 $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}dx$，(已知 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

解　令 $\frac{\pi}{x} = y$，则 $x = \frac{\pi}{y}$，$dx = -\frac{\pi}{y^2}dy$，故

$$\text{原式} = \int_0^{\infty}\frac{1}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}dx = \frac{1}{\pi^2}\int_{\infty}^{0}\frac{-y}{e^y-1}dy = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{y}{e^y-1}dy.$$

又　$\frac{1}{e^y-1} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-ky}$，　$y>0$.

由级数 $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ky}$ 在任意区间 $[\delta,A]$ $(0<\delta<A<+\infty)$ 上一致收敛，得

$$\lim_{\substack{\delta\to0\\A\to\infty}}\int_\delta^A\frac{y}{e^y-1}dy = \lim_{\substack{\delta\to0\\A\to\infty}}\int_\delta^A\sum_{k=1}^{\infty}ye^{-ky}dy$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to0\\A\to\infty}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cdot e^{-ky}\Big|_\delta^A = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

所以，
$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.4.32　求 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}}$，$(a>0$ 为常数$)$.

解　本题不仅是积分区间为无限的积分，而且 $x=1$，$x=a$ 是被积

函数的无穷间断点.

先令 $x=\frac{1}{\sqrt{u}}$,则

$$\text{原式}=\int \frac{1}{(\frac{1}{u}-a^2)\sqrt{\frac{1}{u}-1}}\cdot(-\frac{1}{2u\sqrt{u}})du$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-a^2u)\cdot\sqrt{1-u}},$$

再令 $1-u=v^2$,则

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int\frac{2vdv}{[1-a^2(1-v^2)]\cdot v}=\int\frac{dv}{1-a^2+a^2v^2}.$$

(1) 若 $a=1$,则原式 $=\int_0^1\frac{dv}{v^2}$. 发散.

(2) 若 $0<a<1$,则

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{dv}{1-a^2+a^2v^2}=\frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\text{arctg}\sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}}v\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\text{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

(3) 若 $a>1$,则原式 $=\int_0^1\frac{dv}{a^2v^2+(1-a^2)}$

$$=-\frac{1}{2a\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-1}+av}{\sqrt{a^2-1}-av}\right|\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{1}{2a\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-1}+a}{\sqrt{a^2-1}-a}\right|.$$

5.4.33 设积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 收敛于 J. 试证积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\frac{1}{x})dx$ 也收敛于 J.

证 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\frac{1}{x})dx=\int_0^{\infty}f(x-\frac{1}{x})dx+\int_{-\infty}^{0}f(x-\frac{1}{x})dx,$

对每个积分作变量代换 $x-\frac{1}{x}=t$,于是

当 $x>0$ 时,有 $x=\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$;

当 $x<0$ 时，有 $x=\dfrac{t-\sqrt{t^2+4}}{2}$.

即　$$I_1=\int_0^{\infty}f(x-\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{0}f(x-\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$$

因 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt$ 收敛于 J，函数 $\varphi(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$ 单调有界，且 $\left|\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right|\leqslant\left|\dfrac{t}{\sqrt{t^2}}\right|=1$，$\varphi'(t)=\dfrac{4}{(t^2+4)^{3/2}}>0$，由阿贝尔判别法知，$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt$ 与 $-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt$ 也收敛. 所以 I_1,I_2 也收敛，且 $I_1+I_2=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，故积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\dfrac{1}{x})dx$ 也收敛于 J.

5.4.34　证明等式

$$\int_0^{\infty}f(ax+\frac{b}{x})dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx,$$

其中 $a>0,b>0$ (假定等式左端的积分有意义).

证　设 $ax-\dfrac{b}{x}=t$，则当 $0<x<+\infty$，$-\infty<t<+\infty$ 时，有

$$ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}.$$

将两式相加，得 $x=\dfrac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab})$. 从而有

$$dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

代入得

$$\int_0^{\infty}f(ax+\frac{b}{x})dx=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0}f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})dt.$$

5.4.35 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，并且满足条件 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to b^-} g(x)=\infty$，试证

(1) 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，那末 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，

(2) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，那末 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

证 (1) 设 $0<\varepsilon<b$，由于 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\leqslant\int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx.$$

由题设，上式右边是个定数，而左边随 ε 减小而增大，故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ $=\int_a^b f(x)dx$ 存在，即广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(2) 设 $0<\varepsilon<b$，由于 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 则

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\leqslant\int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx$$

由题设，左边积分随 $\varepsilon\to 0^+$ 而趋于无穷，故右边积分当 $\varepsilon\to 0^+$ 时极限不存在，即广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散.

此题也可作为判别广义积分收敛的法则.

5.4.36 讨论积分 $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2\cos^2x}$ 的敛散性.

解 $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2\cos^2x}\geqslant\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$，然而

$$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d(x^2+1)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln(1+x^2)=\infty$$

是发散的. 所以 $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2\cos^2x}$ 发散.

5.4.37　证明广义积分 $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 收敛,且 $\left|\int_0^{\infty}\frac{\cos xdx}{1+x}\right|\leqslant 1$.

证　对任意的 $b>0$,由分部积分得

$$\int_0^b\frac{\cos x}{1+x}dx=\frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^b+\int_0^b\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx=\frac{\sin b}{1+b}+\int_0^b\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx.$$

然而 $\frac{|\sin x|}{(1+x)^2}\leqslant\frac{1}{(1+x)^2}$,而积分 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}$ 收敛,故 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ 收敛,从而 $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\cos x}{1+x}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ 也收敛.

$$\left|\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}dx\right|\leqslant\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}$$
$$=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^{\infty}=1.$$

5.4.38　讨论积分 $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$ 的敛散性.

解　由于 x^4-x^2+1 恒为正,故积分下限 0 不是被积函数的无穷间断点. 又当 x 充分大时,$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\leqslant\frac{1}{x^{3/2}}$,而 $\int_1^{\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx$ 收敛. 由 5.4.35 题知,$\int_1^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$ 收敛. 所以,积分 $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$ 收敛.

5.4.39　讨论积分 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 的敛散性.

解　因 $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\leqslant\frac{1}{x^{5/3}}$,又 $\int_1^{\infty}x^{-\frac{5}{3}}dx$ 收敛,由 5.4.35 题可知,积分 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

5.4.40　讨论积分 $\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$ 的敛散性.

解　$\int_0^2\frac{dx}{\ln x}=\int_0^1\frac{dx}{\ln x}+\int_1^2\frac{dx}{\ln x}$. 考虑积分 $\int_0^1-\frac{dx}{\ln x}$,由于

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-\dfrac{1}{\ln x}}{\dfrac{1}{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{-\ln x}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{-\dfrac{1}{x}}=1.$$

根据极限判别法3,原积分与$\int_0^1\frac{dx}{1-x}$同时敛散.然而$\int_0^1\frac{dx}{1-x}$发散,所以$\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$发散,因此$\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$发散.

5.4.41 讨论积分$\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$的敛散性.

解 $\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx+\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx,$

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}}{\dfrac{1}{x^{n-1}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. 由极限判别法3知,积分$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$当$n<2$时收敛,$n\geqslant2$时发散.

又对任意的$\varepsilon>0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\varepsilon}}=0$,故对充分大的$x$,有

$$\frac{1}{x^n}<\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{1}{x^{n-\varepsilon}}.$$

故$\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$当$n>1$时收敛,$n\leqslant1$时发散.

综上所述,当$1<n<2$时,积分$\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$收敛.

5.4.42 讨论积分$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx$的敛散性.

解 $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx+\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx.$

首先,因$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$,故$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^n}}{\dfrac{1}{x^{n-1}}}=1$,故积分$\int_0\frac{dx}{x^{n-1}}$当$n<2$时收敛,$n\geqslant2$时发散,所以$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx$当$n<2$时收敛,$n\geqslant2$时发散.

其次，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\operatorname{arctg}x}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$. 而积分 $\int_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^n}$ 当 $n>1$ 时收敛，$n\leqslant 1$ 时发散. 故 $\int_1^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx$ 当 $n>1$ 时收敛，$n\leqslant 1$ 时发散.

综上所述，当 $1<n<2$ 时，积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^n}dx$ 收敛.

5.4.43　讨论积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^4\cos^2x}$ 的敛散性.

解　假定 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4\cos^2x}>0$，则当 $n\pi\leqslant x\leqslant(n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{1}{1+x^4(n+1)^4\cos^2x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1+(n\pi)^4\cos^2x}.$$

于是
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+\pi^4(n+1)^4\cos^2x}\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)dx$$
$$\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+(n\pi)^4\cos^2x}.$$

但是
$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\pi^4(n+1)^4\cos^2x}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x+1+\pi^4(n+1)^4}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2x+1+\pi^4(n+1)^4}$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^4(n+1)^4}},$$

对 n 求和，得

$$\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^4(n+1)^4}}\leqslant\int_0^{\infty}f(x)dx\leqslant\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^4n^4}}.$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^4n^4}}$ 收敛，故积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^4\cos^2x}$ 收敛.

5.4.44　讨论积分 $\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^{\alpha}\sin^2x}$ 的敛散性.

解　原积分的敛散性等价于级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\sin^2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi+t)^{\alpha}\sin^2t}$$

的敛散性. 对此级数的通项 a_n 估计如下：

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+[\pi(n+1)]^{\alpha}\sin^2 t}\leqslant a_n\leqslant\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n\pi)^{\alpha}\sin^2 t}.$$

令 $y=\operatorname{tg}t$，则 $\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+b^{\alpha}\sin^2 t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+b^{\alpha}\sin^2 t}=2\int_0^{\infty}\frac{dy}{1+(b^{\alpha}+1)y^2}$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{b^{\alpha}+1}}.$$

因此 $a_n\sim cn^{-\frac{\alpha}{2}}$. 即当 $\alpha>2$ 时，积分收敛；当 $\alpha\leqslant 2$ 时，积分发散.

5.4.45 设 $f(x)$ 当 $x\to 0^+$ 时单调趋向于 ∞，则当积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}xf(x)=0$.

证 因为积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，故由无界函数广义积分收敛的定义及函数极限的柯西收敛原理可知，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于任意的 x $(0<x<\delta)$，必有 $0\leqslant\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt<\varepsilon$. 又由 $f(x)$ 单调递增，得

$$\varepsilon\geqslant\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt\geqslant\frac{x}{2}f(\frac{x}{2})\geqslant 0.$$

所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时，有 $0<xf(x)<\varepsilon$，故

$$\lim_{x\to 0}xf(x)=0.$$

5.4.46 如果 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则当 $x\to+\infty$ 时，是否一定有 $f(x)\to 0$，举例说明.

解 虽然 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，但当 $x\to+\infty$ 时，不一定有 $f(x)\to 0$，

例如，设 $$f(x)=\begin{cases}1, & x=1+a,2+a,\cdots,n+a,\cdots;\\ \frac{1}{(x+a)^2}, & 其它(a\neq 0).\end{cases}$$

则 $$\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)+a}^{k+a}\frac{dt}{(t+a)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{k+2a}+\frac{1}{(k-1)+2a}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{n+2a}\right)=\frac{1}{2a}$$

即积分 $\int_a^{\infty}f(x)dx$ 收敛，但 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 不趋于零.

§5　定积分的近似计算

内 容 提 要

1. 矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx J_n = \frac{b-a}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_{k-\frac{1}{2}}\right).$$

其中 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$，$x_{i-\frac{1}{2}} = a + (i-\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$，

$y_{i-\frac{1}{2}} = f(x_{i-\frac{1}{2}})$.

误差估计　$R_n = \int_a^b f(x)dx - J_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi)$.　$a \leqslant \xi \leqslant b$.

2. 梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{b-a}{n}\cdot\left\{\frac{1}{2}(f(a)+f(b)+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right\}$$

误差估计　$R_n = \int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$.　$a \leqslant \xi \leqslant b$.

3. 辛卜生公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{b-a}{6n}\Big[f(a)+f(b) + 2\Big(\sum_{k=1}^{n-1}y_k\Big) + 4\Big(\sum_{k=1}^{n}y_{k-\frac{1}{2}}\Big)\Big]. \tag{1}$$

误差估计　$R_n = \int_a^b f(x)dx - S_n = \frac{-(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4}f^{(4)}(\zeta_1)$，$a \leqslant \zeta_1 \leqslant b$.

或取 $n = 2k$ 个分点时，

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{b-a}{3n}\Big[y_0 + y_{2k} + 4\Big(\sum_{i=1}^{k}y_{2i-1}\Big) + 2\Big(\sum_{i=2}^{k}y_{2i-2}\Big)\Big]. \tag{2}$$

误差估计　$R_n = \int_a^b f(x)dx - S_n = \frac{-(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\zeta_2)$，$a \leqslant \zeta_2 \leqslant b$.

注　公式(1)选用了半分点，而公式(2)没有采用半分点.

问 题 与 解 答

1. 矩形公式

5.5.1　应用矩形公式近似计算定积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

解　将区间[1,2]分为十等分,分点是 $x_i = 1 + \frac{i}{10}$,($i = 1,2,\cdots,9$). 利用矩形公式时,为了提高精度,通常取小区间中点的函数值 $y_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}})$. 计算数据如下:

$x_{\frac{1}{2}} = 1.05$　　　$y_{\frac{1}{2}} = 0.9524$

$x_{\frac{3}{2}} = 1.15$　　　$y_{\frac{3}{2}} = 0.8696$

$x_{\frac{5}{2}} = 1.25$　　　$y_{\frac{5}{2}} = 0.8000$

$x_{\frac{7}{2}} = 1.35$　　　$y_{\frac{7}{2}} = 0.7407$

$x_{\frac{9}{2}} = 1.45$　　　$y_{\frac{9}{2}} = 0.6897$

$x_{\frac{11}{2}} = 1.55$　　　$y_{\frac{11}{2}} = 0.6452$

$x_{\frac{13}{2}} = 1.65$　　　$y_{\frac{13}{2}} = 0.6061$

$x_{\frac{15}{2}} = 1.75$　　　$y_{\frac{15}{2}} = 0.5714$

$x_{\frac{17}{2}} = 1.85$　　　$y_{\frac{17}{2}} = 0.5405$

$x_{\frac{19}{2}} = 1.95$　　　$y_{\frac{19}{2}} = 0.5128$

$$\sum_{i=0}^{9} y_{i+\frac{1}{2}} = 6.9284$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2-1}{10}(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{\frac{19}{2}}) = \frac{1}{10} \times 6.9284$$
$$= 0.69284.$$

5.5.2　利用矩形公式($n = 12$),近似计算 $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$,并把结果同精确答案比较.

解　$x_{i-\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2}) \times \frac{2\pi}{12} = (i - \frac{1}{2}) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{i\pi}{6} - \frac{\pi}{12}$.

$$x_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}\qquad y_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=0.0678$$

$$x_{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{4}\qquad y_{\frac{3}{2}}=\frac{3\pi}{12}\sin\frac{3}{12}\pi=0.5554$$

$$x_{\frac{5}{2}}=\frac{5}{12}\pi\qquad y_{\frac{5}{2}}=\frac{5\pi}{12}\sin\frac{5}{12}\pi=1.2644$$

$$x_{\frac{7}{2}}=\frac{7}{12}\pi\qquad y_{\frac{7}{2}}=\frac{7\pi}{12}\sin\frac{7}{12}\pi=1.7702$$

$$x_{\frac{9}{2}}=\frac{9}{12}\pi\qquad y_{\frac{9}{2}}=\frac{9\pi}{12}\sin\frac{9}{12}\pi=1.6661$$

$$x_{\frac{11}{2}}=\frac{11}{12}\pi\qquad y_{\frac{11}{2}}=\frac{11}{12}\pi\sin\frac{11}{12}\pi=0.7453$$

$$x_{\frac{13}{2}}=\frac{13}{12}\pi\qquad y_{\frac{13}{2}}=\frac{13}{12}\pi\sin\frac{13}{12}\pi=-0.8809,$$

$$x_{\frac{15}{2}}=\frac{15}{12}\pi\qquad y_{\frac{15}{2}}=\frac{15}{12}\pi\sin\frac{15}{12}\pi=-2.7768,$$

$$x_{\frac{17}{2}}=\frac{17}{12}\pi\qquad y_{\frac{17}{2}}=\frac{17}{12}\pi\sin\frac{17}{12}\pi=-4.2989,$$

$$x_{\frac{19}{2}}=\frac{19}{12}\pi\qquad y_{\frac{19}{2}}=\frac{19}{12}\pi\sin\frac{19}{12}\pi=-4.8047,$$

$$x_{\frac{21}{2}}=\frac{21}{12}\pi\qquad y_{\frac{21}{2}}=\frac{21}{12}\pi\sin\frac{21}{12}\pi=-3.8875,$$

$$x_{\frac{23}{2}}=\frac{23}{12}\pi\qquad y_{\frac{23}{2}}=\frac{23}{12}\pi\sin\frac{23}{12}\pi=-1.5584,$$

根据矩形公式，有

$$\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx\approx\frac{2\pi}{12}\times\left(\sum_{k=1}^{12}y_{k-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{\frac{23}{2}}\right)=-6.3555.$$

精确值为
$$\int_0^{2\pi}x\sin x\,dx=-x\cos x\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos x\,dx$$
$$=-2\pi=-6.2832.$$

2. 梯形公式

5.5.3　应用 $n=6$ 的梯形公式，计算定积分 $\int_0^3(1+{}^2)^{\frac{3}{2}}dx$，并估计它的误差.

解　计算数值如下：

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$

$x_1 = 0.5 \qquad y_1 = 1.398$

$x_2 = 1 \qquad y_2 = 2.828$

$x_3 = 1.5 \qquad y_3 = 5.859$

$x_4 = 2 \qquad y_4 = 11.180$

$x_5 = 2.5 \qquad y_5 = 19.521$

$x_6 = 3 \qquad y_6 = 31.623$

所以梯形公式的计算结果如下：

$$\int_0^3 (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx \approx \frac{3}{6} \times \{\frac{1}{2}(1+31.623) + 1.398 + 2.828 + 5.859 + 11.180 + 19.521\} \approx 28.549.$$

下面估计误差. 因 $f(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$, $f'(x) = 3x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$f''(x) = \frac{3(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{3(1+2x^2)}{\sqrt{(1+2x^2)/2}}$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+2x^2} \leqslant 3\sqrt{38} < 19, \ (0 \leqslant x \leqslant 3),$$

故 $$|R_n| \leqslant \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot M_2 < \frac{3}{12} \times (\frac{3}{6})^2 \cdot 19 \approx 1.188.$$

由于在估计 M_4 时产生了误差，所以实际差远比 1.2 要小.

5.5.4 利用梯形公式近似计算 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $(n = 12)$，并估计它的误差.

解 由梯形公式求出数据如下：

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{12} \qquad y_1 = 0.99942$

$x_2 = \frac{2}{12} \qquad y_2 = 0.99359$

$x_3 = \frac{3}{12} \qquad y_3 = 0.98462$

$x_4 = \frac{4}{12} \qquad y_4 = 0.96429$

$x_5 = \frac{5}{12} \qquad y_5 = 0.93254$

$x_6 = \frac{6}{12} \qquad y_6 = 0.88889$

$$x_7 = \frac{7}{12} \qquad y_7 = 0.83437$$

$$x_8 = \frac{8}{12} \qquad y_8 = 0.77143$$

$$x_9 = \frac{9}{12} \qquad y_9 = 0.70333$$

$$x_{10} = \frac{10}{12} \qquad y_{10} = 0.63343$$

$$x_{11} = \frac{11}{12} \qquad y_{11} = 0.56489$$

$$x_{12} = 1 \qquad y_{12} = 0.5 \Rightarrow \frac{y_0 + y_{12}}{2} = 0.75$$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 0.92808$$

于是 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{12} \cdot \left(\frac{y_0 + y_{12}}{2} + \sum_{i=1}^{11} y_i \right)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \approx \frac{1}{12} \times (0.75 + 9.2808) = 0.83587.$$

误差 $|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{M_2}{12 \times 12^2}$，其中 $M_2 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f''(x)|$.

而 $f''(x) = \frac{12x^4 - 6x}{(1+x^3)^3}$，故 $M_2 = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f''(x)| \leqslant 2$.

于是 $|R_n| \leqslant \frac{2}{12 \times 12^2} < 0.00116$.

精确值为

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.83566.$$

3. 辛卜生公式

5.5.5 用辛卜生公式计算积分 $\int_0^1 e^{x^2} dx$，要求精确到 0.001.

解 $f(x) = e^{x^2}, f'(x) = 2xe^{x^2}, \cdots, f^{(4)}(x)$

$$= 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3).$$

由辛卜生公式(2)有

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4 \leqslant \frac{4 \cdot e \cdot 19}{180 \cdot n^4} < 0.001.$$

$$(\text{其中 } M_4 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(4)}(x)| < 4 \cdot e \cdot 19)$$

由此解得 $n = 6$. 数值计算如下:

$x_0 = 0$ $\qquad y_0 = 1.$

$x_1 = \frac{1}{6}$ $\qquad y_1 = e^{\frac{1}{36}} = 1.0282.$

$x_2 = \frac{1}{3}$ $\qquad y_2 = e^{\frac{1}{9}} = 1.1175.$

$x_3 = \frac{1}{2}$ $\qquad y_3 = e^{\frac{1}{4}} = 1.2840.$

$x_4 = \frac{2}{3}$ $\qquad y_4 = e^{\frac{4}{9}} = 1.5596.$

$x_5 = \frac{5}{6}$ $\qquad y_5 = e^{\frac{25}{36}} = 2.0026.$

$x_6 = 1$ $\qquad y_6 = e^1 = 2.7182.$

于是

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]$$

$$= 1.463.$$

5.5.6 应用辛卜生公式计算定积分 $\int_0^1 e^{-x^2}$,要求精确到0.00001.

解 由于 $f(x) = e^{-x^2}$; $|f^{(4)}(x)| \leqslant 12$, $(0 < x < 1)$,故由辛卜生公式(1)有

$$|R_n(x)| < \left|\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \cdot M_4\right| = \frac{12}{180 \cdot 2^4 \cdot n^4} = \frac{1}{240n^4} < 0.00001.$$

$$(M_4 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(4)}(x)|)$$

由此解得 $n = 5$. 数值计算如下:

$x_0 = 0$	$y_0 = 1.00000$	$y_0 = 1.00000,$
$x_{\frac{1}{2}} = 0.1$	$y_{\frac{1}{2}} = 0.99005$	$4y_{\frac{1}{2}} = 3.96020,$
$x_1 = 0.2$	$y_1 = 0.96079$	$2y_1 = 1.92158,$
$x_{\frac{3}{2}} = 0.3$	$y_{\frac{3}{2}} = 0.91393$	$4y_{\frac{3}{2}} = 3.65572,$
$x_2 = 0.4$	$y_2 = 0.85214$	$2y_2 = 1.70428$
$x_{\frac{5}{2}} = 0.5$	$y_{\frac{5}{2}} = 0.77880$	$4y_{\frac{5}{2}} = 3.11520,$

$x_3 = 0.6$　　$y_3 = 0.69768$　　$2y_3 = 1.39536$

$x_{\frac{7}{2}} = 0.7$　　$y_{\frac{7}{2}} = 0.61263$　　$4y_{\frac{7}{2}} = 2.45052,$

$x_4 = 0.8$　　$y_4 = 0.52729$　　$2y_4 = 1.05458,$

$x_{\frac{9}{2}} = 0.9$　　$y_{\frac{9}{2}} = 0.44486$　　$4y_{\frac{9}{2}} = 1.77944,$

$x_5 = 1.0$　　$y_5 = 0.36788$　　$y_{10} = 0.36788$

$\sum = 22.40476.$

所以，
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1-0}{6\times 5}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{4}y_k+4\sum_{k=1}^{5}y_{k-\frac{1}{2}}\right]$$
$$=\frac{1}{30}\times 22.40476 = 0.746825.$$

5.5.7　利用辛卜生公式近似计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$，$(n=10)$.

解　计算数据如下：

$x_0 = 1$　　$y_0 = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{20}$　　$y_1 = \frac{20}{\pi}\sin\frac{\pi}{20} = 0.99588$

$x_2 = \frac{\pi}{10}$　　$y_2 = 0.98362$

$x_3 = \frac{3}{20}\pi$　　$y_3 = 0.96340$

$x_4 = \frac{4}{20}\pi$　　$y_4 = 0.93550$

$x_5 = \frac{5}{20}\pi$　　$y_5 = 0.90032$

$x_6 = \frac{6}{20}\pi$　　$y_6 = 0.85840$

$x_7 = \frac{7}{20}\pi$　　$y_7 = 0.81032$

$x_8 = \frac{8}{20}\pi$　　$y_8 = 0.75683$

$x_9 = \frac{9}{20}\pi$　　$y_9 = 0.69865$

$x_{10} = \frac{10}{20}\pi$　　$y_{10} = 0.63662$

由辛卜生公式，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_9) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_8)]$$

$$= \frac{\pi}{60}[(1 + 0.63662) + 4(0.99588 + \cdots + 0.69865) + 2(0.98362 + \cdots + 0.75683)]$$

$$\approx 1.37079.$$

5.5.8　用积分近似计算公式求半轴为 $a = 10$ 及 $b = 6$ 的椭圆周长.

解　设椭圆参数方程为 $x = 10\cos t, y = 6\sin t$. 于是有

$$ds = \sqrt{\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2}dt = 10\sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t}dt.$$

从而得椭圆周长为

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = 40 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 10\sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t}dt.$$

现取 $n = 2k = 6$,近似计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t}dt$. 注意到

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \cos^2\frac{5\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, h = \frac{\pi}{12},$$

则有

$t_0 = 0$　　　$y_0 = 1$

$t_1 = \frac{\pi}{12}$　　　$4y_1 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \times \frac{2-\sqrt{3}}{4}} = 3.913.$

$t_2 = \frac{\pi}{6}$　　　$2y_2 = 1.833$

$t_3 = \frac{\pi}{4}$　　　$4y_3 = 3.298$

$t_4 = \frac{\pi}{3}$　　　$2y_4 = 1.442$

$t_5 = \frac{5}{12}\pi$　　　$4y_5 = 2.538$

$t_6 = \frac{\pi}{2}$　　　$y_6 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 0.6$

由辛卜生公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}dt$$

$$\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]=$$

$$\frac{\pi}{36}[(1+0.6)+(3.913+3.298+2.538)+(1.833+1.442)]$$

$$=1.276,$$

所以椭圆周长的近似值为

$$S=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}dt=40\times1.276=51.04.$$

5.5.9　求 $\int_0^{0.2}\frac{\sin t}{t}dt$ 的近似值(精确到 0.001).

解　$$\int_0^{0.2}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{0.2}(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}+\cdots)dt$$

$$=0.2-\frac{(0.2)^3}{3\cdot3!}+\frac{(0.2)^5}{5\cdot5!}+\cdots,$$

然而 $\frac{(0.2)^5}{5\cdot5!}<0.0000005$. 所以

$$\int_0^{0.2}\frac{\sin t}{t}dt\approx0.2-\frac{(0.2)^3}{3\cdot3!}\approx0.1996,$$误差小于 0.001.

5.5.10　设 n 为大于 1 的整数,证明:

$$\frac{3n+1}{2n+2}<(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots(\frac{n}{n})^n<2-\frac{1}{n+1}.$$

证　在区间[0,1]上考虑函数 $f(x)=x^n$,显然,当 $n>1$ 时,函数 $f(x)$ 是下凸的. 将区间[0,1]分为 n 等分,由定积分的近似计算公式可得

$$\frac{1}{n}\left[f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right]<\int_0^1 x^n dx$$

$$<\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}(f(0)+f(\frac{n}{n}))+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})\right]$$

因此有　$$(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n-1}{n})^n<\frac{n}{n+1}$$

$$<\frac{1}{2}+(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n-1}{n})^n$$

即有　$$(\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n-1}{n})^n+(\frac{n}{n})^n$$

$$< \frac{n}{n+1} + 1 = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

及　$$(\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \cdots + (\frac{n-1}{n})^n + (\frac{n}{n})^n$$

$$= \left[(\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \cdots + (\frac{n-1}{n})^n + (\frac{1}{2})\right] + \frac{1}{2}$$

$$> \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{3n+1}{2n+2}.$$

5.5.11　用 $f(x)$ 在 $x_0 - h, x_0, x_0 + h$ 三点的函数值的线性组合近似计算定积分 $\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx$，并使被积函数 $f(x)$ 为 $1, x, x^2$ 时能得到定积分的精确值．其中 $h > 0$．

解　设 $\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = Af(x_0 - h) + Bf(x_0) + Cf(x_0 + h)$，

其中 A、B、C 为待定系数．依次用 $f(x) = 1, f(x) = x, f(x) = x^2$ 代入，得

$$A + B + C = 2h, \tag{1}$$

$$A(x_0 - h) + Bx_0 + C(x_0 + h) = 2x_0h \tag{2}$$

$$A(x_0 - h)^2 + Bx_0^2 + C(x_0 + h)^2 = \frac{2}{3}h(3x_0^2 + h^2) \tag{3}$$

(2) 式减去(1) 式的 x_0 倍，再约去 h，得

$$-A + c = 0 \tag{4}$$

(3) 式减去(1) 式的 x_0^2 倍，再减去(4) 式的 $2x_0h$ 倍，约去 h^2，得

$$A + C = \frac{2}{3}h \tag{5}$$

解(1)、(4)、(5) 式，得 $A = C = \frac{1}{3}h, B = \frac{4}{3}h$，由此可得

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0 + h) - 4f(x_0) + f(x_0 - h)].$$

5.5.12　在下面数值求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) \tag{1}$$

中，确定系数 A, B 以及点 x_1, x_2 使这个公式对次数尽可能高的多项式被积函数能得到精确值．

证　依次取 $f(x) = 1, x^2, x^3, \cdots$，代入(1) 式，得如下方程

$$A + B = 2 \tag{2}$$

$$Ax_1 + Bx_2 = 0 \tag{3}$$

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 = \frac{2}{3} \tag{4}$$

$$Ax_1^3 + Bx_2^3 = 0 \tag{5}$$

$$Ax_1^4 + Bx_2^4 = \frac{2}{5} \tag{6}$$

……

这是非线性代数方程组，由(2)式和(3)式解出 A、B，得

$$A = \frac{2x_2}{x_2 - x_1},\quad B = \frac{2x_1}{x_1 - x_2},$$

把 A,B 的值代入(4)式并化简得　$x_1x_2 = -\frac{1}{3}$，　(7)

再把 A、B 的值代入(5)式并化简得

$$-2x_1x_2(x_1 + x_2) = 0 \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可解得 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

这两组解对构造公式(1)来说没有本质差别，用前一组，把 x_1,x_2 的值代入 A,B 的公式可算出 $A = B = 1$. 于是(1)式成为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \tag{9}$$

上面的公式所用的 A,B,x_1,x_2 满足方程(2)～(5). 故对被积数 $f(x) = 1,x,x^2,x^3$ 能得到定积分的精确值. 从而对次数不超过 3 的多项式都能得到定积分的精确值. 又因 $A = B = 1, x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 不能满足(6)式，故对四次以上(包括四次)的多项式，一般而言，不一定能得到精确值.

§ 6　定积分的应用

内 容 提 要

1. 求平面图形的面积

在直角坐标系下，由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b(a<b)$，以及 ox 轴围成的曲边梯形面积的数值为

$$S=\int_a^b|f(x)|dx.$$

同样，由连续曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c,y=d(c<d)$ 以及 oy 轴围成的曲边梯形面积的数值为

$$S=\int_c^d|\varphi(y)|dy.$$

若平面连续曲线由极坐标方程 $r=r(\theta),(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$，给出，则由曲线 $r(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的平面图形面积的数值为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

2. 求平面曲线的弧长

在$[a,b]$上光滑的曲线 $y=f(x)$（即 $f'(x)$ 连续）在该区间上的弧长为

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx.$$

同样，在$[c,d]$上光滑的曲线 $x=\varphi(y)$ 在该区间上的弧长为

$$L=\int_c^d\sqrt{1+x'^2}dy.$$

若曲线由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t).\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，并且 $x'(t),y'(t)$ 连续，则其弧长为

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

若曲线由极坐标方程 $r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，给出，并且 $r'(\theta)$ 连续，则

其弧长为

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta.$$

3. 求立体的体积

设立体被垂直于 ox 轴的平面所截，截面的面积函数为连续函数 $S(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，那么介于平面 $x = a, x = b$ 间的立体体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

由连续曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = a, x = b, y = 0$ 围成的曲边梯形绕 ox 轴旋转，所成旋转体的体积为

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx.$$

同样，由连续曲线 $x = \varphi(y)$ 及直线 $y = c, y = d, x = 0$ 围成的曲边梯形绕 oy 轴旋转，所成旋转体的体积为

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy.$$

4. 旋转曲面的面积

光滑曲线 $y = f(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，绕 ox 轴旋转，旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

若光滑曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

给出，则它绕 ox 轴旋转所得的旋转曲面的面积的数值为

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

若曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$，$(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$，给出，则它绕极轴旋转所得的旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2 + r'^2}d\theta.$$

5. 平面图形的静力矩、转动惯量和重心

若平面连续曲线弧段的方程为 $y = f(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，则

平面光滑曲线弧段的静力矩 $M_x = \int_a^b yds$，　$M_y = \int_a^b xds$.

转动惯量　　$I_x=\int_a^b y^2ds,\quad I_y=\int_a^b x^2ds.$

平面光滑曲线弧段的重心坐标

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int_a^b xds,\quad \bar{y}=\frac{1}{s}\int_a^b yds.$$

其中 s 为弧长，$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$.

若曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a,x=b,y=0$ 围成，则

静力矩　　$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\quad M_y=\int_a^b xydx;$

转动惯量　　$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b y^3dx,\quad I_y=\int_a^b x^2ydx;$

重心坐标　　$\bar{x}=\frac{1}{S}\int_a^b xydx,\quad \bar{y}=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx;$

其中 S 为曲边梯形的面积.

6. 变力作功和液体压力

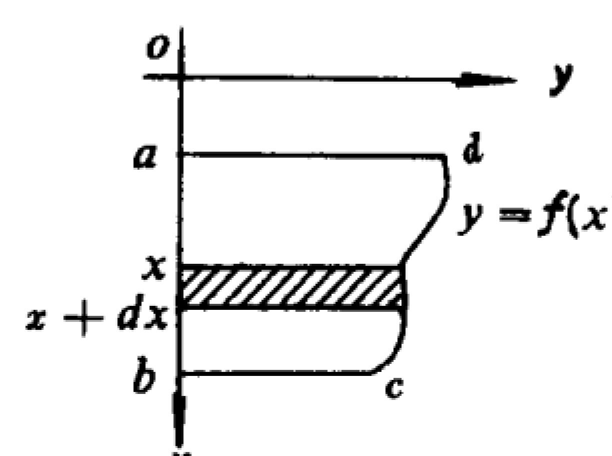
沿 ox 轴的变力 $F=f(x)$（设 $f(x)$ 连续）在线段 $[x_0,x_1]$ 上所作的功为

$$W=\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx.$$

浸没在液体中垂直板 $abcd$（如图所示）所受液体总压力为

$$P=\int_a^b \mu xf(x)dx,$$

其中 μ 为液体密度.



问题与解答

1. 求平面图形的面积

5.6.1　求下列直角坐标方程所表示的曲线围成的面积.

(1) $ax=y^2, ay=x^2$;

(2) $y=|\lg x|, y=0, x=0.1, x=10$;

(3) $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}, y=0$;

(4) $Ax^2+2Bxy+cy^2=1, (AC-B^2>0)$;

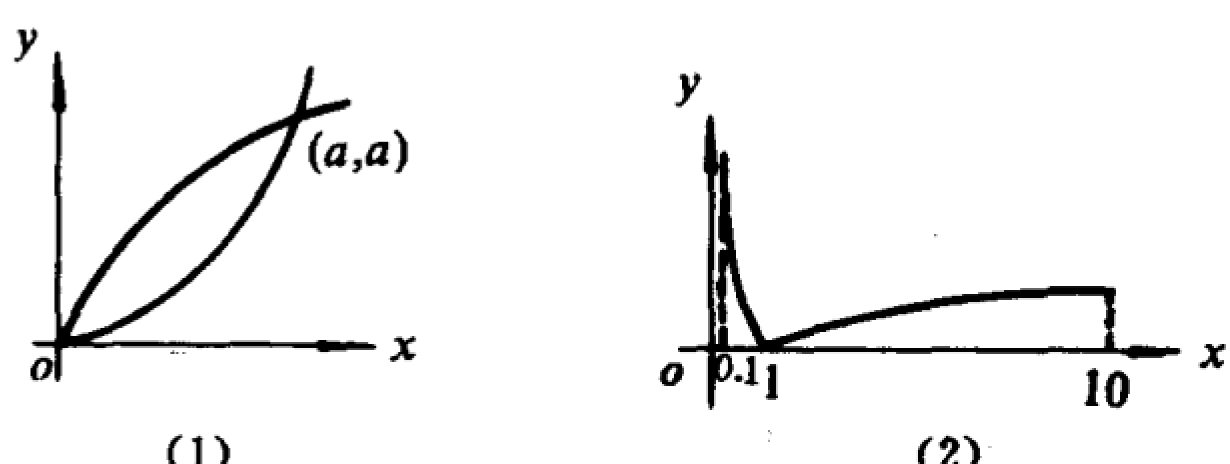
(5) 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆 $x^2 + y^2 = 8$ 分为两部分，求这两部分面积之比.

解(1) 如图所示，交点为 $A(a,a)$，$O(0,0)$，所求面积为

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \left[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a}x^3\right]\Big|_0^a = \frac{a^2}{3}.$$

(2) 如图所示，所求面积为

$$\begin{aligned} S &= -\int_{0.1}^{1} \lg x dx + \int_1^{10} \lg x dx \\ &= (-x\lg x + x\lg e)\Big|_{0.1}^{1} + (x\lg x - x\lg e)\Big|_1^{10} \\ &= 9.9 - 8.1 \cdot \lg e = 6.38. \end{aligned}$$



5.6.1 题图

(3) 所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2}dx = 2a^3 \cdot \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{a^2 + x^2} \\ &= 2a^3 \cdot \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{a}\mathrm{arctg} b = \pi a^2. \end{aligned}$$

(4) 解此方程，得

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

当 $B^2x^2 - C(Ax^2 - 1) \geqslant 0$，即 $|x| \leqslant \sqrt{\dfrac{C}{AC - B^2}}$ 时，y_1 及 y_2 才有实数值，设 $a = \sqrt{\dfrac{C}{AC - B^2}}$，则所求的面积为

$$S = \int_{-a}^{a}(y_2 - y_1)dx = \frac{2}{C}\int_{-a}^{a}\sqrt{C^2 - (AC - B^2)x^2}dx$$

$$= \frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$= \frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{\pi}{2}a^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

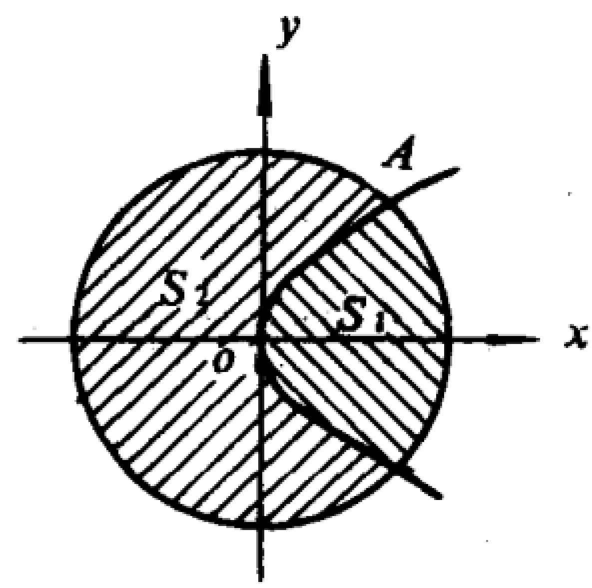
(5) 抛物线 $y^2=2x$ 和圆 $x^2+y^2=8$ 在第一象限内的交点为 $A(2,2)$. 设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2(如图),则有

$$S_1 = 2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= 2\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2} + \frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2$$

$$= 2\pi + \frac{4}{3}, \text{及}$$

$$S_2 = 8\pi - \left(2\pi+\frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$



(5)

于是,二者之比为

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}} = \frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$

5.6.2 求当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\sin 2x$ 所围成的图形面积.

解 为求交点的横坐标,由方程 $\sin x=\sin 2x$ 得 $\sin x(1-2\cos x)=0$,即 $\sin x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$.

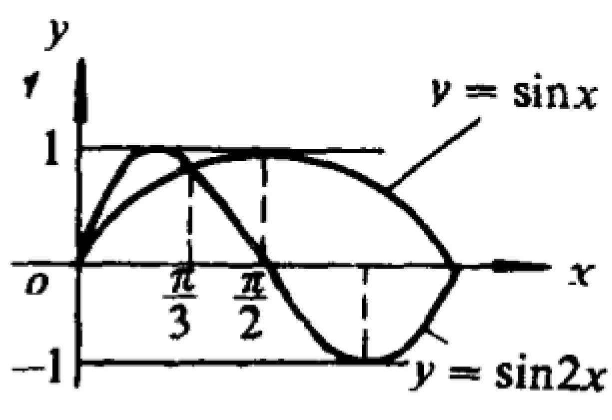
在 $[0,\pi]$ 上,$\sin x=0$ 的解为 $x=0,\pi$; $\cos x=\frac{1}{2}$ 的解为 $x=\frac{\pi}{3}$.

在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上,曲线 $y=\sin 2x$ 在 $y=\sin x$ 之上;而在 $[\frac{\pi}{3},\pi]$ 上,曲线 $y=\sin x$ 在 $y=\sin 2x$ 之上. 因此所求面积为

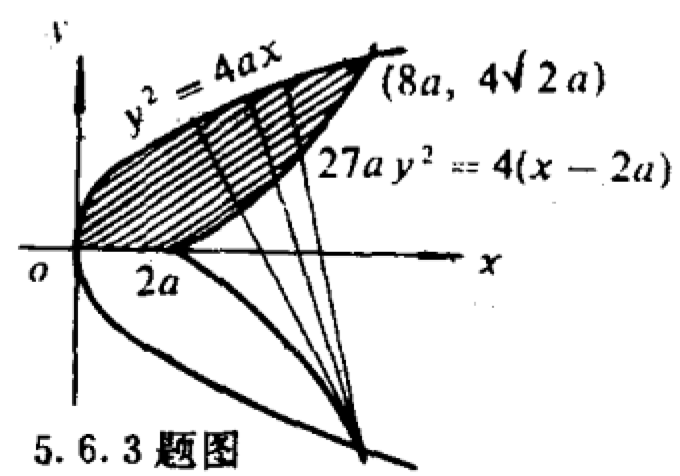
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{5}{2}.$$

5.6.3　求抛物线 $y^2=4ax$ 与它的渐曲线(即曲率中心的轨迹曲线) $27ay^2=4(x-2a)^3$ 所围成图形的面积 S.



5.6.2 题图



5.6.3 题图

解　如图所示,两曲线的交点为

$$\begin{cases} y^2=4ax, \\ 27ay^2=4(x-2a)^3, \end{cases}$$

解方程组,得 $27a(4ax)=4(x-2a)^3$,

$$(x-8a)(x+a)^2=0.$$

所以,$x=8a$, $x=-a$(舍去), $y=\pm 4\sqrt{2}a$.

即两条曲线的两个交点为$(8a,4\sqrt{2}a)$与$(8a,-4\sqrt{2}a)$,于是

$$S=2\left[\int_0^{8a}\sqrt{4ax}dx-\int_{2a}^{8a}\sqrt{\frac{4(x-2a)^3}{27a}}dx\right].$$

而　$\int_0^{8a}\sqrt{4ax}dx=2\sqrt{a}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^{8a}=\frac{64\sqrt{2}}{3}a^2$,

$$\int_{2a}^{8a}\sqrt{\frac{4(x-2a)^3}{27a}}dx=\frac{2}{3\sqrt{3a}}\int_{2a}^{8a}(x-2a)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3a}}\left[\frac{2}{5}(x-2a)^{\frac{5}{2}}\right]_{2a}^{8a}=\frac{48\sqrt{2}}{5}a^2,$$

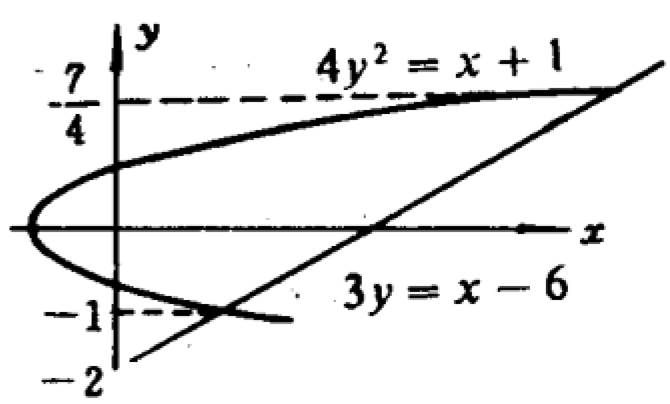
故　$S=2\left(\frac{64\sqrt{2}}{3}a^2-\frac{48\sqrt{2}}{5}a^2\right)=\frac{352}{15}\sqrt{2}a^2$.

5.6.4　求满足 $4y^2\leqslant x+1, 3y\geqslant x-6$ 的点(x,y)所形成的平面图形的面积.

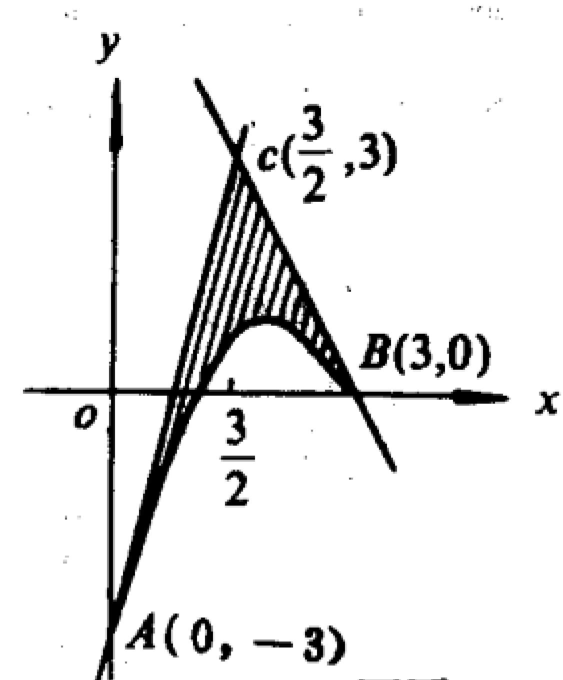
解　如图所示,取 y 作为积分变量.相应地,右边界曲线为 $x=3y$

$+ 6$,左边界曲线为 $x = 4y^2 - 1$. 为确定积分区间,解方程 $3y + 6 = 4y^2 - 1$,得 $y = -1, \frac{7}{4}$. 因此所求面积为

$$S = \int_{-1}^{7/4} [(3y + 6) - (4y^2 - 1)] dy$$
$$= \int_{-1}^{7/4} (-4y^2 + 3y + 7) dy = 13\frac{83}{96}.$$



5.6.4 题图



5.6.5 题图

5.6.5　求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及过点 $(0, -3)$, $(3, 0)$ 的切线所围成图形的面积.

解　切线 AC 与 BC 的方程分别为

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

因为物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 的导数为 $y' = -2x + 4$,

故　$k_1 = y'|_{x=0} = 4$,　$k_2 = y'|_{x=3} = -2$,因此二切线方程为

$$y = 4x + b_1, \quad y = -2x + b_2.$$

由 $y = 4x + b_1$ 过 $A(0, -3)$, $y = -2x + b_2$ 过 $B(3, 0)$ 知, $b_1 = -3$, $b_2 = 6$. 由此得二切线方程为 $\begin{cases} y = 4x - 3, \\ y = -2x + 6. \end{cases}$

解此方程组,得交点为 $C(\frac{3}{2}, 3)$. 因此所求面积为

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} [(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)] dx$$
$$+ \int_{\frac{3}{2}}^{3} [(-2x + 6) - (-x^2 + 4x - 3)] dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x^2 - 6x + 9) dx = \frac{9}{4}.$$

5.6.6　求由下列极坐标方程表示的曲线围成的面积.

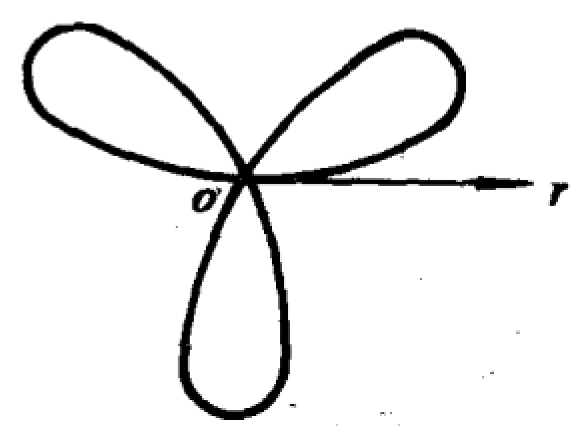
(1) $r = a\sin 3\theta$　(三叶线),

(2) $r = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$　(抛物线), $(\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$.

解　(1) 如图所示,所求面积为

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2 3\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}a^2.$$



5.6.6题图

(2) 所求面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{(1-\cos\theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^4 \frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= -\frac{p^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2} + 3).$$

5.6.7　求由曲线 $\theta = r\operatorname{arctg} r$ 及二射线 $\theta = 0$ 及 $\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成的扇形的面积.

解　当 θ 由 0 变到 $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ 时, r 从 0 变到 $\sqrt{3}$, 又

$$d\theta = \left(\frac{r}{1+r^2} + \operatorname{arctg} r\right) dr,$$

故所求面积为

$$S' = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} r^2\left(\frac{r}{1+r^2} + \operatorname{arctg} r\right) dr$$

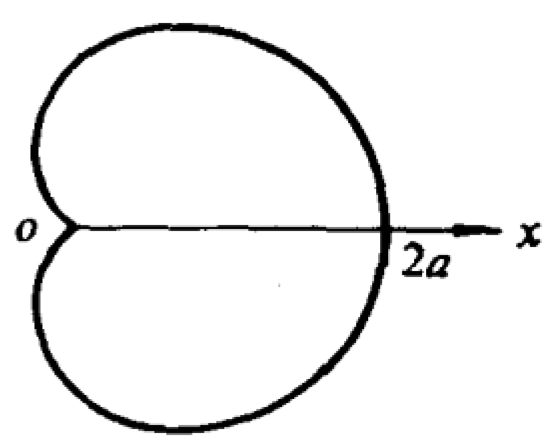
$$= \left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{6}\ln(1+r^2) + \frac{1}{6}r^3 \operatorname{arctg} r\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

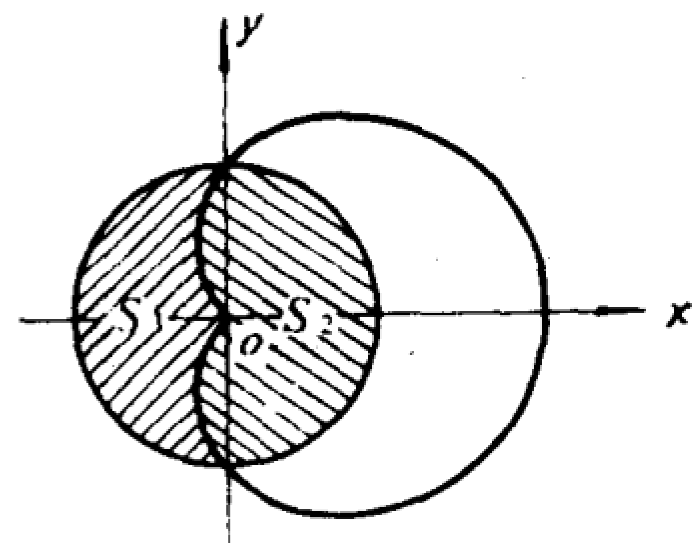
5.6.8　求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$, $(a > 0)$, 所围成的图形的面积.

解 由于图形关于极轴是对称的，所求面积等于上半部分($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)面积的两倍. 于是根据极坐标中求面积公式，得

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2d\theta=\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$
$$=a^2\int_0^\pi\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^\pi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$



5.6.8 题图



5.6.9 题图

5.6.9 圆 $r^2\leqslant1$ 被心形线 $r=1+\cos\theta$ 分成两部分，求这两部分的面积.

解 如图所示，圆被心形线分为 S_1 和 S_2 两部分. 由方程组

$$\begin{cases}r^2=1,\\r=1+\cos\theta\end{cases}$$

求得两曲线的交点为 $A(1,\frac{\pi}{2})$ 和 $B(1,-\frac{\pi}{2})$，由对称性知，S_2 的面积为

$$S_2=2\left[\frac{\pi}{4}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\frac{5}{4}\pi-2.$$

从而 S_1 的面积为

$$S_1=\pi-\frac{5\pi}{4}+2=2-\frac{\pi}{4}.$$

2. 求曲线的弧长

5.6.10　求下列曲线的弧长.

(1) $y^2=2px,\ 0\leqslant x\leqslant x_0$;　(2) $\begin{cases}x=a\cos^4 t,\\ y=a\sin^4 t;\end{cases}$

(3) $r=ae^{m\theta}\ (m>0,0<r<a)$;

(4) $\varphi=\dfrac{1}{2}(r+\dfrac{1}{r}),\ (1\leqslant r\leqslant 3)$.

解(1) $y'=\dfrac{p}{y}$,

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}=\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}.$$

因此所求弧长为

$$s=2\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{2}\int_0^{x_0}\sqrt{p+2x}d(\sqrt{x})$$

$$=2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{x(p+2x)}+\frac{p}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{p}{2}}\right)\right\}\Bigg|_0^{x_0}$$

$$=2\sqrt{x_0(x_0+\frac{p}{2})}+p\ln\left(\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right).$$

(2) $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}$,故所求的弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}dt$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(\sin^2 t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}d(\sin^2 t-\frac{1}{2})$$

$$=2a\left\{\frac{\sin^2 t-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sin^2 t-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t+\sin^4 t)}\right|\right\}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})\right)a.$$

(3) 因 $0<r<a$,故 $-\infty<\theta<0$,因此所求的弧长为

$$s=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{a^2e^{2m\theta}+a^2m^2e^{2m\theta}}d\theta=a\sqrt{m^2+1}\int_{-\infty}^{0}e^{m\theta}d\theta$$

$$=\frac{a\sqrt{m^2+1}}{m}.$$

(4) 由原式得 $r^2-2r\theta+1=0$. 两端对 θ 求导,得 $2rr'-2\theta r'-2r=0$. 由此可得 $r'=\frac{r}{r-\theta}$. 从而 $\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{r\theta}{r-\theta}=\frac{r^3+r}{r^2-1}$, $d\theta=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r^2})dr$. 因此所求的弧长为

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{r^3+r}{r^2-1}\cdot\frac{r^2-1}{r^2}dr=\frac{1}{2}\int_1^3(r+\frac{1}{r})dr=2+\frac{1}{2}\ln3.$$

5.6.11 求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos x}dx$ 的全长.

解 函数 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos x}dx$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,且 $y'=\sqrt{\cos x}$. 由弧长公式得所求曲线的全长为

$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}d(\frac{x}{2})$$

$$=4\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4.$$

5.6.12 求悬链线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$,$(-l\leqslant x\leqslant l)$ 的长度.

解 $y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$,故

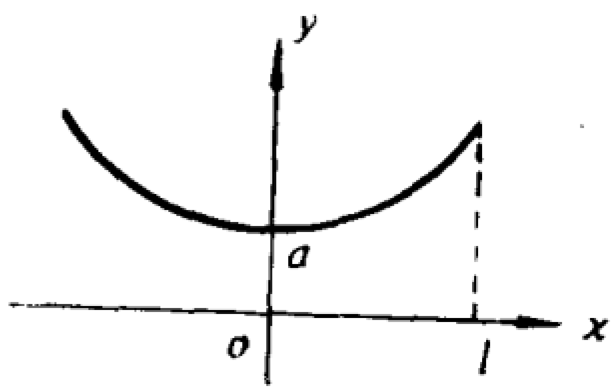
$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}-2)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}+2)}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}).$$

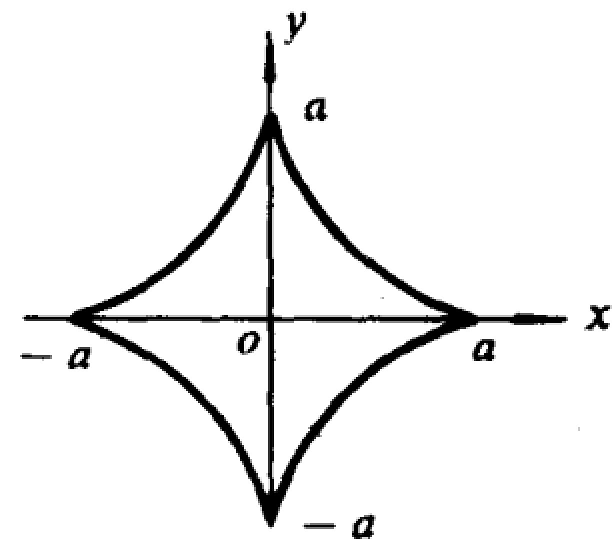
于是所求的弧长为

$$s=\int_{-l}^{l}\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})dx$$

$$=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})\Big|_{-l}^{l}=a(e^{\frac{l}{a}}-e^{-\frac{l}{a}}).$$



5.6.12 题图



5.6.13 题图

5.6.13　求星形线

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi \text{ 的弧长.}$$

解　由对称性，只需求出 $0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$ 的一段弧长，再乘以 4 即可. 因为

$$s_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t dt=\frac{3}{2}a.$$

故星形线的弧长为 $s=4s_1=4\cdot\frac{3}{2}a=6a$.

5.6.14　一根弹簧按阿基米德螺线 $r=a\theta$ 盘旋，共 10 圈，每圈间隔 10mm，求弹簧的全长 s.

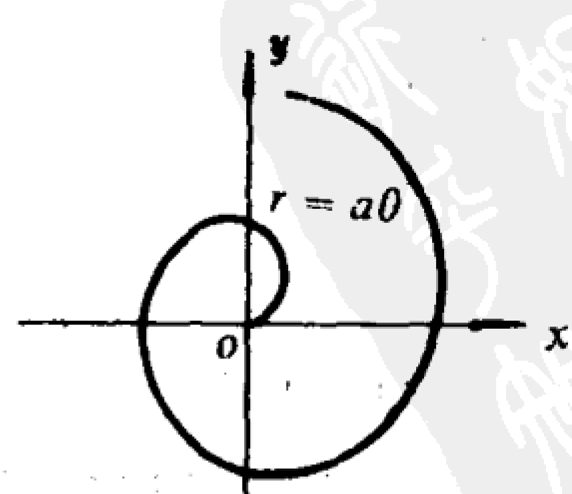
解　极轴与第一圈、第二圈分别相交于点 $A(2\pi,2\pi a)$ 和 $B(4\pi,4\pi a)$. 由题设知，AB 长 10mm. 于是

$$4\pi a-2\pi a=10,\ 即\ a=\frac{5}{\pi},$$

又弹簧共 10 圈，故 θ 从 0 变到 20π，因此弹簧全长为

$$s=\int_0^{20\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{20\pi}\sqrt{a^2+a^2\theta^2}d\theta$$



5.6.14 题图

$$= \frac{5}{\pi}\int_0^{20\pi} \sqrt{1+\theta^2}d\theta$$

$$= \frac{5}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]\Big|_0^{20\pi}$$

$$= \frac{5}{2\pi}\left[20\pi\sqrt{1+400\pi^2}+\ln(20\pi+\sqrt{1+400\pi^2})\right].$$

5.6.15 证明：椭圆 $x = a\cos t,\ y = a\sin t$ 的周长等于正弦曲线 $y = c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长，其中 $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

证 椭圆的周长为

$$s_1 = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2t}dt$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2\cos^2t}dt,$$

正弦曲线 $y = c\sin\frac{x}{b}$ 一波（x 从 0 到 $2\pi b$）的长等于余弦曲线 $y = c\cos\frac{x}{b}$ 一波（x 从 0 到 $2\pi b$）的长，故

$$s_2 = \int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\left(c\cos\frac{x}{b}\right)'^2}dx = \int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\sin^2\frac{x}{b}}dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\sin^2t}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2t}dt$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2\cos^2t}dt,$$

所以 $s_1 = s_2$.

5.6.16 求环线 $y = \pm(\frac{1}{3}-x)\sqrt{x}$ 所包围的面积，与以该环线长为周长的圆面积的比.

解 环线所包围的面积为

$$S_1 = 2\int_0^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3}-x)\sqrt{x}\,dx = \frac{8}{135\sqrt{3}},$$

又该环线的周长为

$$2\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left[\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right]^2}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)dx = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

设以该环线长为周长的圆的半径为 r，则

$$2\pi r = \frac{4}{3\sqrt{3}},\quad r = \frac{2}{3\pi\sqrt{3}},$$

于是圆面积为

$$S_2 = \pi\cdot\left(\frac{2}{3\pi\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27\pi}.$$

因此，

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}}.$$

5.6.17　证明：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的周长介于 $\pi(a+b)$ 与 $\pi\sqrt{2a^2+2b^2}$ 之间.

证　不妨设 $a>b>0$. 椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t. \end{cases}$ 椭圆周长为

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} + 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} + \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)dt, \end{aligned}$$

令 $\varphi(t) = (a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^{\frac{1}{2}} + (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}$，求导并整理得

$$\varphi'(t) = \frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t\left(\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} - \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\right)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}.$$

当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，有 $\cos^2 t\geqslant\sin^2 t$，因此

$$(a^2-b^2)\cos^2 t \geqslant (a^2-b^2)\sin^2 t,$$

进而

$$\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} \geqslant \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t},$$

于是，当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时 $\varphi'(t)>0$，即 $\varphi(t)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递增，从而

$$\varphi(0)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(\frac{\pi}{4}).$$

即 $$a+b\leqslant\varphi(t)\leqslant\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

由此可得 $$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(a+b)dt\leqslant l\leqslant 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2a^2+2b^2}dt.$$

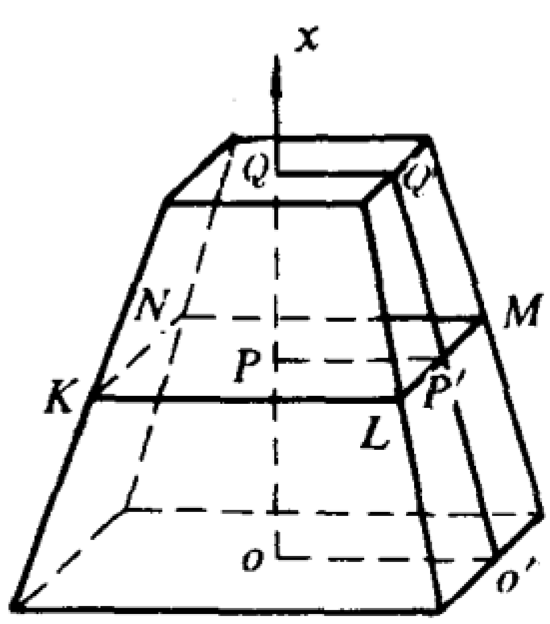
即 $$\pi(a+b)\leqslant l\leqslant\pi\sqrt{2a^2+2b^2}.$$

3. 求立体的体积与表面积

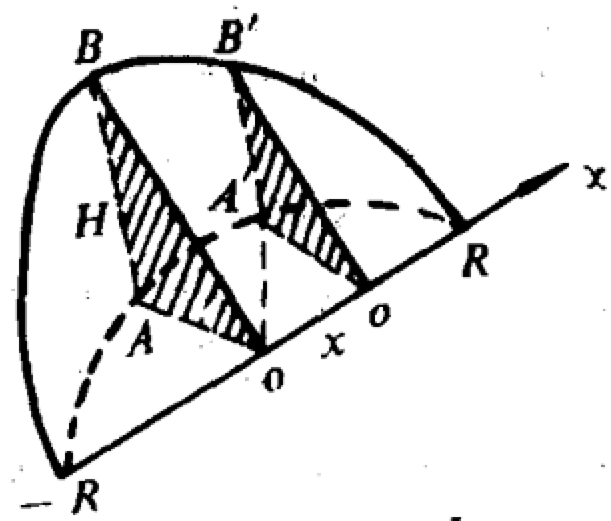
5.6.18 求截楔形的体积，其平行的上下底是边长分别为 A、B 和 a、b 的矩形，高等于 h.

解 如图，$OO'=\frac{A}{2}$，$QQ'=\frac{a}{2}$，$OQ=h$，设 $OP=x$，则

$$PP'=\frac{a}{2}+\frac{h-x}{h}\cdot\frac{A-a}{2}$$



5.6.18 题图



5.6.19 题图

同样可得，$LP'=\frac{b}{2}+\frac{h-x}{h}\cdot\frac{B-b}{2}$，

从而截面 $KLMN$ 的面积为

$$f(x)=ab+(A-a)(B-b)(1-\frac{x}{h})^2$$
$$+[a(B-b)+b(A-a)](1-\frac{x}{h}).$$

于是截楔形的体积为

$$V=\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{2}[(2A+a)B+(2a+A)b].$$

5.6.19 设半径为 R 的圆柱被通过其底面直径的平面斜截，得一

圆柱楔. 若楔的最大高度为 H. 试求其体积.

解 如图, $OA=R$, $AB=H$ 并且楔体上平行于 $\triangle OAB$ 的任意截面都是三角形, 过 O' 点的截面 $O'A'B'$ 的面积为

$$\frac{1}{2}O'A'\cdot A'B'=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{tg}\angle A'O'B'$$
$$=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\frac{H}{R},$$

由此可得楔体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{H}{2R}(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^2H.$$

5.6.20 证明: 若垂直于 x 轴的平面截具有平行底面的立体, 所得截面是 x 的不超过二次的多项式, 则该立体的体积为

$$V=\frac{h}{6}(B_1+4M+B_2),$$

其中 $h=b-a$ 为立体的高, B_1,B_2 为底面面积, M 为中截面面积, 进而由此公式推得圆台的体积公式.

证 设平行截面面积为 $s(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, 则

$$B_1=s(a)=\alpha+\beta a+\gamma a^2,$$
$$B_2=s(b)=\alpha+\beta b+\gamma b^2,$$
$$M=s\left(\frac{a+b}{2}\right)=\alpha+\beta\cdot\frac{a+b}{2}+\gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

于是, $V=\int_a^b s(x)dx=\int_a^b(\alpha+\beta x+\gamma x^2)dx$

$$=\left(\alpha x+\frac{\beta}{2}x^2+\frac{\gamma}{3}x^3\right)\Big|_a^b$$
$$=\alpha(b-a)+\frac{\beta}{2}(b^2-a^2)+\frac{\gamma}{3}(b^3-a^3)$$
$$=\frac{b-a}{6}[6\alpha+3\beta(b+a)+2\gamma(a^2+ab+b^2)]$$
$$=\frac{b-a}{6}\Big[(\alpha+\beta a+\gamma a^2)+(\alpha+\beta b+\gamma b^2)$$
$$+4\left(\alpha+\frac{\beta}{2}(a+b)+\frac{\gamma}{4}(a+b)^2\right)\Big]$$
$$=\frac{h}{6}(B_1+B_2+4M).$$

对于圆台, 设上下底面半径分别为 r, R 则

$$B_1 = \pi r^2,\ B_2 = \pi R^2,\ M = \pi(\frac{r+R}{2})^2,$$

故圆台的体积为

$$V = \frac{h}{6}\left[\pi r^2 + \pi R^2 + \pi(\frac{r+R}{2})^2\right] = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2).$$

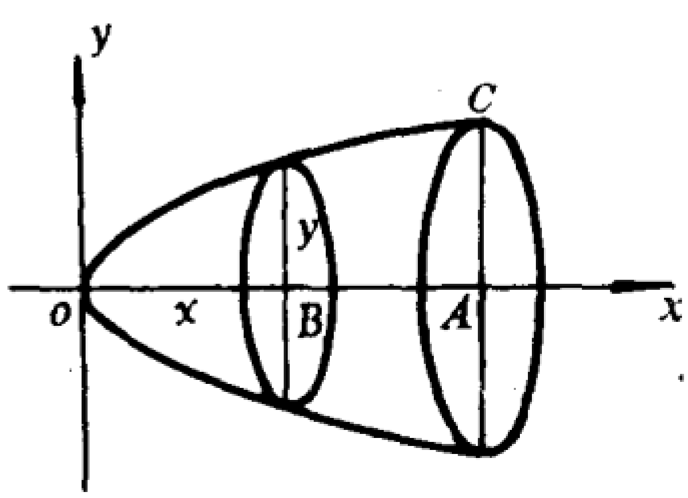
5.6.21 求旋转抛物体的体积，其底面积为 S，高为 h.

解 不失一般性，设旋转抛物体由抛物线 $y^2 = 2px$ 绕 ox 轴旋转所得，如图，记 $OA = h, OB = x$，并且由题设有

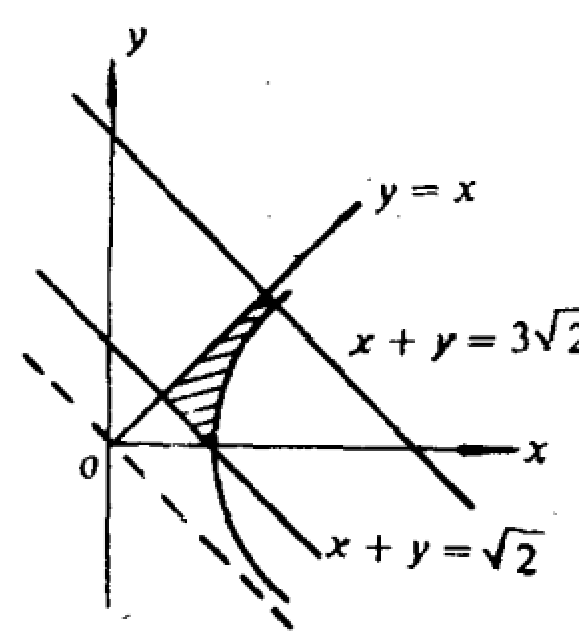
$$S = \pi AC^2 = \pi(2ph) = 2\pi ph.$$

又距原点为 x 处截面面积为 $S(x) = 2\pi px$，故体积为

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h 2\pi px dx = \pi ph^2 = \frac{Sh}{2}.$$



5.6.21 题图



5.6.22 题图

5.6.22 求由曲线 $x^2 - y^2 = 2, x + y = \sqrt{2}, x + y = 3\sqrt{2}$, $y = x$ 围成的图形绕直线 $y = x$ 旋转所成的旋转体的体积.

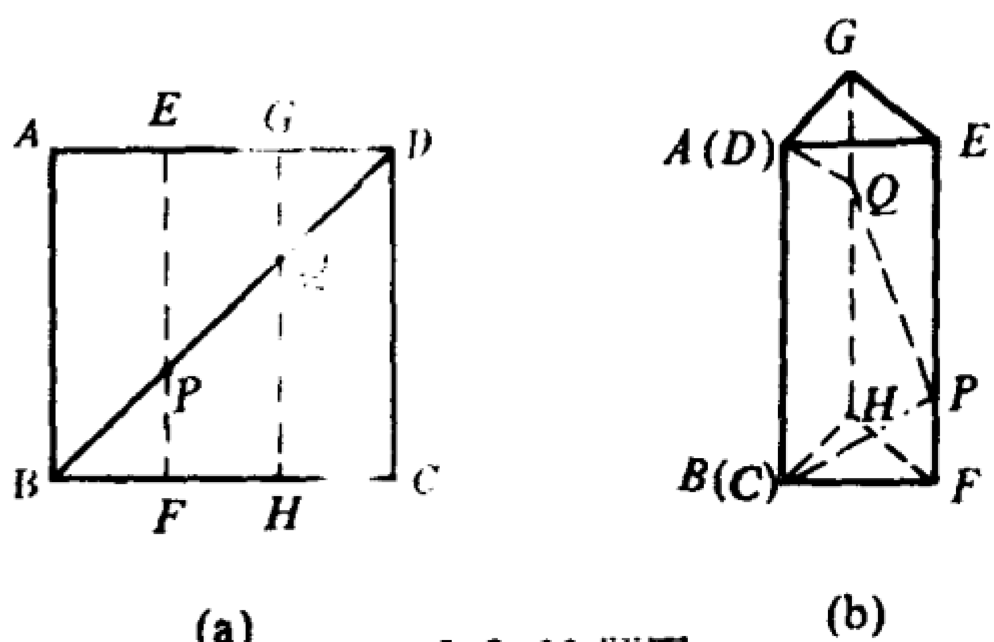
解 先旋转坐标系，因 $y = x$ 与 ox 轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，故令新坐标系为 $x'oy'$ 则，

$$\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \end{cases}$$

从而曲线 $x^2-y^2=2,x+y=2,x+y=3\sqrt{2}$ 在新坐标系 $x'oy'$ 下的方程分别为 $x'y'=1,x'=1,x'=3$. 故所求的体积为

$$V=\pi\int_1^3 y'^2dx'=\pi\int_1^3(-\frac{1}{x'})^2dx=\frac{2\pi}{3}.$$

5.6.23 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 分为三等分，然后沿 EF、GH 将它折围成三棱柱(如图). 此时正方形对角线 BD 被折成空间曲线 BP—PQ—QA，求此折线绕 AB 轴旋转所得的体积.



5.6.23 题图

解 因为折线 BP—PQ—QA 由三个直线段组成，故它绕 AB 轴旋转所得的旋转体也由三部分组成. 现分别求各部分的体积.

(1) 上下两端是体积相等的两个圆锥体，其底面半径为 P(或 Q) 点到 AB 轴的距离，即等于 $\frac{1}{3}a$，高为 $PF=QG=\frac{1}{3}a$. 因此体积为

$$V_1=V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}=\frac{\pi a^3}{81}.$$

(2) 中间部分是一直纹单叶双曲面. 选取坐标系，以有向直线 $B(C)F$ 为 x 轴，有向直线 $B(C)A(D)$ 为 z 轴，$B(C)$ 为坐标原点，与 $FB(C)A(D)E$ 平面垂直的有向直线为 y 轴，构成空间直角坐标系. 依题意，P 点的坐标为 $(\frac{a}{3},0,\frac{a}{3})$，$Q$ 点的坐标为 $(\frac{a}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}a,\frac{2}{3}a)$. 于是得直线 PQ 的方程为

$$\frac{x-\frac{a}{3}}{-\frac{a}{6}}=\frac{y-0}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}=\frac{z-\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}},$$

化为参数方程，得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{6}a(2-t), \\ y=\frac{\sqrt{3}}{6}at, \\ z=\frac{1}{3}a(1+t). \end{cases}$$

由此得旋转面上任一点至 z 轴的距离为

$$d_z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{36}a^2(2-t)^2+\frac{3}{36}a^2t^2}=\frac{a}{3}\sqrt{1-t+t^2}.$$

d_z 即为旋转体垂直于 z 轴的各截面（都是圆）的半径，于是体积为

$$V_2=\pi\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}d_z^2dz=\frac{1}{27}\pi a^3\int_0^1(1-t+t^2)dt=\frac{5}{162}\pi a^3.$$

由此得整个旋转体的体积为

$$V=2\cdot\frac{1}{81}\pi a^3+\frac{5\pi}{162}a^3=\frac{1}{81}\pi a^3.$$

5.6.24　曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体，它在 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记为 $V(\xi)$，问 a 为何值时，$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)$.

解　$V(\xi)=\pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{1+\xi^2})$，

由此可得　$\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)=\frac{\pi}{4}$.

解方程 $\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{1+a^2})=\frac{\pi}{4}$，得 $a=\pm 1$，舍去负值，故 $a=1$.

5.6.25　证明由极坐标方程（r,θ 为极坐标）

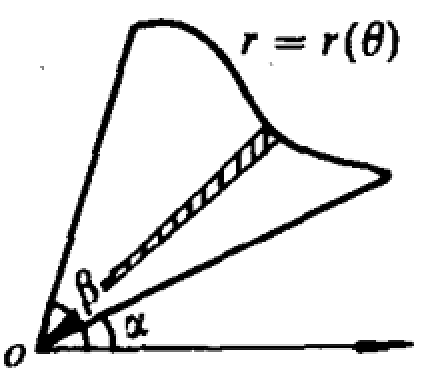
$\begin{cases} 0\leqslant\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi, \\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta). \end{cases}$ 构成的图形绕极轴旋转所得旋转体的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

证法 1　面积微元 $ds = rdrd\theta$ 绕极轴旋转所得微环形的体积 $dv = 2\pi r r\sin\theta ds$，于是所求体积为

$$V = \int_\alpha^\beta 2\pi\sin\theta d\theta\int_0^{r(\theta)} r^2dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$



5.6.25 题图

证法 2　应用直角坐标系下的古尔金第二定理，对于微小面积元，它的重心可以看成在 $(\frac{2}{3}r\cos\theta,\ \frac{2}{3}r\sin\theta)$ 处，于是面积元素为 $ds = \frac{1}{2}r^2d\theta$，对应旋转体的体积元素为 $dv = 2\pi\cdot\frac{2}{3}r\sin\theta\ \frac{1}{2}r^2d\theta$，由此可得

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

5.6.26　求 $a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\sin 2\theta}$ 绕极轴旋转所成旋转体的体积.

解　$r = a$ 与 $r = a\sqrt{2\sin 2\theta}$ 在第一象限部分交点的极角分别为 $\frac{\pi}{12}$ 与 $\frac{5\pi}{12}$，利用对称性知，体积为

$$V = \frac{4\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\left[(a\sqrt{2\sin 2\theta})^3 - a^3\right]\sin\theta d\theta.$$

计算这个积分，令

$$I_1 = \int\sqrt{\sin 2\theta}\sin^2\theta\cos\theta d\theta,\quad I_2 = \int\sqrt{\sin^2 2\theta}\cos^2\theta\cos\theta d\theta,$$

则　$I_2 - I_1 = \frac{1}{3}\cos\theta(\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}I_1,$　(1)

即　$I_2 - \frac{5}{3}I_1 = \frac{1}{3}\cos\theta(\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}},$

又　$I_1 + I_2 = \int\sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta d\theta = \int\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\theta\cos^2\theta\sqrt{\mathrm{ctg}\theta}d\theta.$

令 $\mathrm{tg}\theta = t$，上式化为二项式微分的积分，求此积分得

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{\sin 2\theta} + \frac{1}{2}\ln(\cos\theta + \sin\theta - \sqrt{\sin 2\theta})$$

$$+\frac{1}{4}\ln(\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{\sin2\theta})+\arcsin(\sin\theta-\cos\theta),\quad(2)$$

(2) − (1) 得

$$I_1=\frac{3}{8}\left\{\frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{\sin2\theta}+\frac{1}{2}\ln(\sin\theta+\cos\theta-\sqrt{\sin2\theta})\right.$$
$$+\frac{1}{4}\ln(\sin\theta+\cos\theta+\sqrt{\sin2\theta})+\arcsin(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cos\theta(\sin2\theta)^{\frac{3}{2}}\right\}+C,$$

从而　$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sqrt{\sin2\theta}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\frac{1}{8}+\frac{3}{64}\pi.$

因此 $V=\frac{4}{3}\pi a^3\left[4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{64}\pi\right)+\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right]=\frac{\pi^2a^3}{2\sqrt{2}}.$

5.6.27　试求环体(半径为 r 的圆绕与它不相交的轴旋转而成的几何体)的体积.

解　设环体由圆周 $y=R\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转而成,则它的体积为

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(R+\sqrt{r^2-x^2})^2dx-\pi\int_{-r}^{r}(R-\sqrt{r^2-x^2})^2dx$$
$$=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=4\pi Rr^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=2\pi^2Rr^2.$$

5.6.28　设半径为 R 的球被距球心分别为 a,b 的两平面所截,求所截得的球带的表面积,连同上下底面构成球台的表面积及体积.

解　此球可以看作圆 $x^2+y^2=R^2$(如图)绕 y 轴旋转而得,因为

$$x'=(\sqrt{R^2-y^2})'=\frac{y}{-\sqrt{R^2-y^2}},\quad 1+x'^2=\frac{y^2}{R^2-y^2},$$

于是球带的表面积为

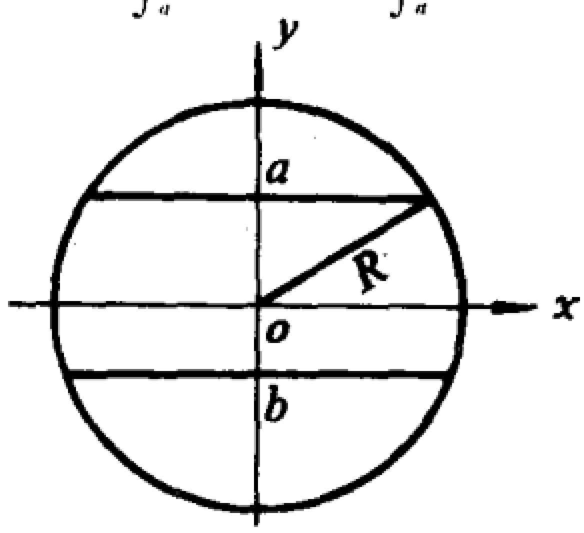
$$S=\int_a^b2\pi x\sqrt{1+x'^2}dy=2\pi\int_a^b\sqrt{R^2-y^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{R^2-y^2}}dy$$
$$=2\pi Ry\Big|_a^b=2\pi R(b-a),$$

又上底半径为 $\sqrt{R^2-b^2}$,下底半径为 $\sqrt{R^2-a^2}$,故球台的表面积为

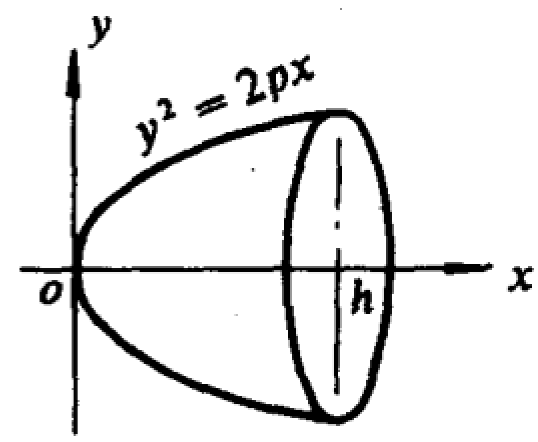
$$S_1=\pi(2R^2+2Rb-b^2-a^2-2Ra),$$

球台的体积为

$$V=\int_a^b \pi x^2dy=\pi\int_a^b(R^2-y^2)dy=\pi R^2(b-a)-\frac{\pi}{3}(b-a)^2.$$



5.6.28 题图



5.6.29 题图

5.6.29　求抛物线 $y^2=2px(0\leqslant x\leqslant h)$ 绕 x 轴旋转所得曲面的侧面积.

解　由 $y=\sqrt{2px}$ 知，$y'=\sqrt{2p}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}$，因此

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}},$$

故所求的面积为

$$S=2\pi\int_0^h\sqrt{2px}\cdot\frac{\sqrt{2x+p}}{\sqrt{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^h\sqrt{2x+p}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{p}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^h$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{p}\left(\sqrt{(2h+p)^3}-\sqrt{p^3}\right).$$

5.6.30　求由悬链线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的一段弧 $(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 ox 轴旋转所得的表面积.

解　$y'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$\sqrt{1+y'^2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，因此表面积为

$$S=2\pi\int_a^b\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}\int_a^b(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx$$

$$=\left(\frac{\pi(e^{2x}-e^{-2x})}{4}+\pi x\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{\pi}{4}(e^{2b} - e^{-2b} - e^{2a} + e^{-2a}) + \pi(b-a).$$

5.6.31 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 及 ox 轴所围成的图形绕 ox 轴旋转构成一旋转体，求其表面积与等体积球的表面积之比.

解 首先求旋转体的表面积与体积. 因

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a},$$

故 $S = 2 \cdot 2\pi\int_0^a (a - \frac{x^2}{a}) \cdot \frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a}dx$

$$= 8\pi\int_0^a \sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx - \frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx$$

$$= 8\pi\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}} + \frac{a^2}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}})\right]_0^a$$

$$-\frac{8\pi}{a^2}\left[\frac{x(2x^2+\frac{a^2}{4})}{8}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}} - \frac{a^4}{128}\ln(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}})\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right],$$

$$V = \pi\int_{-a}^a (a - \frac{x^2}{a})^2 dx = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等积的球的半径为 R，则 $\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{16\pi a^3}{15}$，由此 $R = \sqrt[3]{\frac{4}{5}}a$，于是此球的表面积为

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi\sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2.$$

由此可得 $$\frac{S}{S_1} = \frac{\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{\frac{8\pi}{5}a^2\sqrt[3]{10}} \approx 1.013$$

5.6.32 求曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

(1) 绕 ox 轴；(2) 绕 oy 轴；(3) 绕直线 $y = 2a$ 旋转所得曲面的面积.

解 由 $ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$,有

(1) $S_x = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$

(2) $S_y = 2\pi\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt = 16\pi^2a^2.$$

(3) 坐标平移,令 $x=\bar{x}, y=\bar{y}+2a$,则

$$S = \left|2\pi\int_0^{2\pi}[-a(1+\cos t)]2a\sin\frac{t}{2}dt\right| = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

5.6.33 求曲线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ (1) 绕极轴;(2) 绕 $\theta = \frac{\pi}{2}$;(3) 绕 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 旋转所得曲面的面积.

解 (1) $S_0 = 2\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2\cos 2\theta}\sin\theta\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin^2\theta d\theta = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(2) $S_{\frac{\pi}{2}} = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\theta d\theta = 4\pi a^2\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi\sqrt{2}a^2.$

(3) 若以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 为新的极轴,则双纽线的方程化为

$$r_1^2 = a^2\cos 2(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}) = -a^2\sin 2\varphi_1,$$

故
$$S_{\frac{\pi}{4}} = 2\cdot 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y_1\sqrt{r_1^2 + r_1'^2}d\varphi_1$$

$$= 4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r_1\sin\varphi_1\frac{ad\varphi_1}{\sqrt{-\sin 2\varphi_1}}$$

$$= 4\pi a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi_1 d\varphi_1 = 4\pi a^2.$$

4. 定积分在物理学中的应用

5.6.34 求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两端点的直径的静力矩和转动惯量.

解 取此直径所在直线为 ox 轴,圆心为坐标原点,则圆的方程为

$x^2+y^2=a^2$，由此有 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{a}{y}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

于是，　$M=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2,$

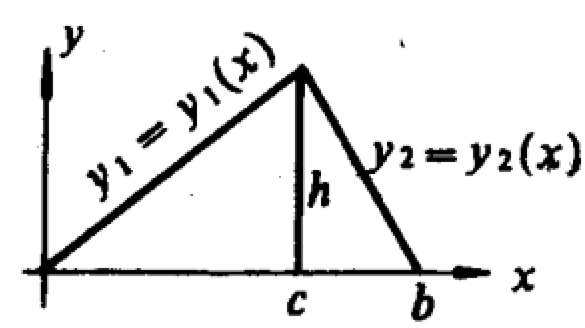
$$I=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^3}{2}.$$

5.6.35　求底为 b，高为 h 的均匀三角形薄板对于底边的静力矩和转动惯量($\rho=1$).

解　取坐标系如图，则

$$y_1=y_1(x)=\frac{h}{c}x,$$

$$y_2=y_2(x)=\frac{h}{c-b}(x-b).$$



5.6.35 题图

于是，

$$M=\frac{1}{2}\int_0^c y_1^2dx+\frac{1}{2}\int_c^b y_2^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^c\frac{h^2}{c^2}x^2dx+\frac{1}{2}\int_c^b\frac{h^2}{(c-b)^2}(x-b)^2dx=\frac{bh}{6}.$$

$$I=\frac{1}{3}\int_0^c y_1^3dx+\frac{1}{3}\int_c^b y_2^3dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^c\frac{h^3}{c^3}x^3dx+\frac{1}{3}\int_c^b\frac{h^3}{(c-b)^3}(x-b)^3dx=\frac{bh^3}{12}.$$

5.6.36　求圆弧 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ ($|\theta|\leqslant\alpha<\pi$) 重心的坐标.

解　显然，重心的纵坐标 $\bar{y}=0$，又圆弧长为 $2a\alpha$，故

$$\bar{x}=\frac{1}{2a\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}a^2\cos\theta d\theta=\frac{a}{2\alpha}\cdot 2\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha}{\alpha},$$

即重心为$(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},0)$.

5.6.37　求抛物线 $ax=y^2, ay=x^2$ ($a>0$) 所围面积的重心.

解　抛物线 $y^2=ax$ 与 $x^2=ay$ 的交点为$(0,0)$，(a,a)，它们所围的面积为

$$S=\int_0^a(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a})dx=\frac{a^2}{3}.$$

由此，$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a\left[(\sqrt{ax})^2-(\frac{x^2}{a})^2\right]dx$

$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{3a^3}{20},$$

$$M_y=\int_0^a x(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a})dx=\frac{2}{5}\sqrt{a}\,a^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{3a^3}{20},$$

故 $\bar{x}=\frac{\frac{3}{20}a^3}{\frac{a^2}{3}}=\frac{9a}{20},\quad \bar{y}=\frac{9a}{20}.$

5.6.38 求对数螺线 $r=ae^{m\theta}$ $(m>0)$ 上由点 $O(-\infty,0)$ 到点 $P(\theta,r)$ 的弧 OP 的重心 $C(\theta_0,r_0)$ 的坐标，当 P 点移动时，C 点画出怎样的曲线.

解 重心的直角坐标为

$$\bar{x}=\frac{\int xdL}{\int dL}=\frac{\int_{-\infty}^{\theta}r\cos\theta\sqrt{a^2(1+m^2)}e^{m\theta}d\theta}{\int_{-\infty}^{\theta}\sqrt{a^2(1+m^2)}e^{m\theta}d\theta}=\frac{\int_{-\infty}^{\theta}re^{m\theta}\cos\theta d\theta}{\int_{-\infty}^{\theta}e^{m\theta}d\theta}$$

$$=\frac{a\int_{-\infty}^{\theta}e^{2m\theta}\cos\theta d\theta}{\int_{-\infty}^{\theta}e^{m\theta}d\theta}=\frac{mae^{m\theta}(\sin\theta+2m\cos\theta)}{4m^2+1},$$

同法可得 $\bar{y}=\frac{\int ydL}{\int dL}=\frac{mae^{m\theta}(2m\sin\theta-\cos\theta)}{4m^2+1},$

于是重心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{mae^{m\theta}}{\sqrt{4m^2+1}}=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}}.$$

又 $\operatorname{tg}\theta_0=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\frac{2m\operatorname{tg}\theta-1}{\operatorname{tg}\theta+2m}=\frac{\operatorname{tg}\theta-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\operatorname{tg}\theta},$

即 $\theta_0=\theta-\alpha$，其中 $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2m}$.

当 P 点移动时，$C(\theta_0,r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m\theta} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m(\theta_0+\alpha)}.$$

它也是一条对数螺线.

5.6.39　一质量为 M,长为 l 的均匀细杆 AB 吸引着质量为 m 的一质点 C,此质点 C 位于 AB 杆的延长线上,并与较近的端点 B 的距离为 a.

(1) 求杆和质点间的相互引力;

(2) 当质点在杆的延长线上从距离 r_1 移至 r_2 处时,求引力所作之功.

解　(1) 取点 A 为坐标原点,ox 轴在 AB 上且向右为正,在 AB 上点 t 处取小段长 dx,则引力元素为

$$dF = \frac{Km\frac{Mdx}{l}}{(l+a-x)^2} \cdot \frac{KmM}{l} \cdot \frac{dx}{(l+a-x)^2},$$

于是杆 AB 与质点 C 之间的引力为

$$F = \frac{KmM}{l}\int_0^l \frac{dx}{(l+a-x)^2} = \frac{KmM}{a(l+a)}.$$

(2) 由(1)知,位于 B、C 之间且距 A 端为 x 的点,与杆 AB 的引力为 $F = \frac{KmM}{x(x-l)}$,于是点 C 由距 B 端 r_1 处移至 r_2 处时,引力所作之功为

$$W = \int_{l+r_2}^{l+r_1} \frac{KmM}{x(x-l)}dx = \frac{KmM}{l}\int_{l+r_2}^{l+r_1}\left(\frac{1}{x-l} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{KmM}{l} \cdot \ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}.$$

5.6.40　没有盛满水的半球形蓄水池,其深度为 10m,计算抽完池中水所需做的功.

解　如图建立坐标系,先考虑抽出深为 x 处高度为 dx 的一层水需克服重力做的功.

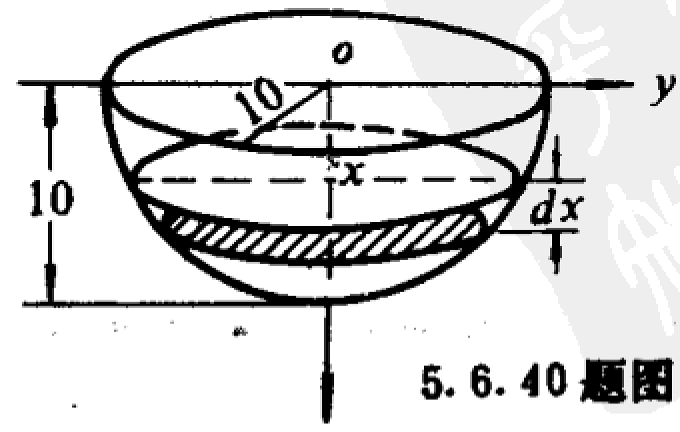
由 $F = \rho s dx$,得

$$dw = Fx = \rho s x dx,$$

又截面积 $s = \pi(\sqrt{10^2 - x^2})^2$

$$= \pi(100 - x^2)(\text{m}^2),$$

水的密度 $\rho = 1$,因此



5.6.40 题图

$$dw = \pi x(100 - x^2)dx,$$

故抽完蓄水池中的水所作的功为

$$w = \int_0^{10} \pi x(100 - x^2)dx = \pi(50x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^{10} = 2500\pi.$$

5.6.41　其轴为 $2a$ 及 $2b(a > b)$ 的半椭圆形薄板铅直沉入水中，其短轴与水面平行且位于水面下 c 处，试求液体对下半椭圆形薄板每面的压力.

解　取短轴为 y 轴，x 轴向下，椭圆中心在 C 处，则椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

薄板一面之压力元素为

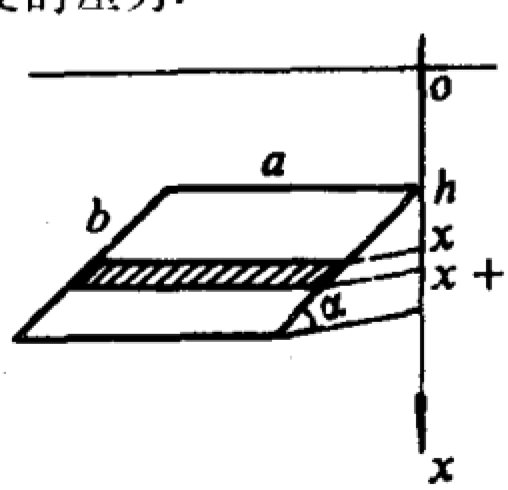
$$dp = 1 \cdot (x + c) \cdot 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx,\ (\text{水的密度为 } 1).$$

所以，薄板一面所受之压力为

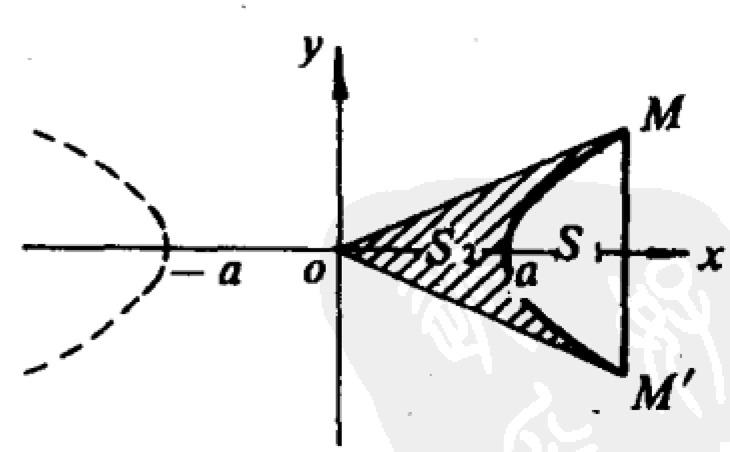
$$p = \int_0^a 2b(x + c)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \frac{2}{3}a^2b + \frac{1}{2}abc,$$

薄板另一面所受之压力也是 $\frac{2}{3}a^2b + \frac{1}{2}abc$.

5.6.42　设边长为 a、$b(a > b)$ 的矩形薄板与液面成 α 角斜沉于密度为 γ 的液体内，其长边平行于液面且位于深 h 处(如图)，试求薄板每面所受的压力.



5.6.42 题图



5.6.43 题图

解　坐标的选择如图所示. 在区间 $[h, h + b\sin\alpha]$ 上任取微段 $[x, x + dx]$，则薄板上相应的面积为 $\frac{a}{\sin\alpha}dx$，于是 $dF = \gamma \cdot x \cdot \frac{a}{\sin\alpha}dx$. 于是

$$F=\int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{\gamma ax}{\sin\alpha}dx=\frac{1}{2}\gamma ab(2h+b\sin\alpha).$$

5.6.43 把双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 上的点 $M(x,y)$ 的坐标表成双曲线扇形 $OM'aM$ 面积的函数. 这个扇形是双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM'，OM 围成的，其中 $M'(x,-y)$ 是关于 ox 轴与 M 对称的点.

解 如图，

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{2}&=\int_a^x\sqrt{x^2-a^2}dx\\&=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]_a^x\\&=\frac{1}{2}xy-\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}\end{aligned}$$

$$S_2=2(\frac{xy}{2}-\frac{S_1}{2})=a^2\ln\frac{x+y}{a},$$

若记 $S_2=S$，则 $x+y=ae^{s/a^2}$， (1)

把(1)代入 $x^2-y^2=a^2$ 中，得 $x-y=ae^{-s/a^2}$，

解(1)、(2)得

$$\begin{cases}x=a\mathrm{ch}\dfrac{S}{a^2},\\y=a\mathrm{sh}\dfrac{S}{a^2}.\end{cases}$$

5.6.44 设摆线方程为

$$\begin{cases}x=a(\theta+\sin\theta),\\y=a(1-\cos\theta).\end{cases}\quad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

有一质量为 M 的质点，在重力的作用下沿摆线运动，以 s 表示坐标原点沿摆线到质点的弧长，试求质点的运动规律 $s=s(t)$，(不计摩擦力).

解 质点在 (x,y) 处的切向量为

$$\tau=\frac{dx}{d\theta}i+\frac{dy}{d\theta}j=a(1+\cos\theta)i+a\sin\theta j.$$

因此，质点在该处的加速度为

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{-gj\cdot\tau}{|\tau|}=-g\sin\frac{\theta}{2}.$$

另一方面，$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=2a\cos\frac{\theta}{2}$，所以 $s=4a\sin\frac{\theta}{2}$，

从而得方程 $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{4a}s=0$. 故质点的一般运动规律为

$$s(t)=A\cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t+B\sin\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t.$$

5. 6. 45　镭在每一时刻的分解速度与其现存的量成比例，设在开始时刻 $t=0$ 有镭 Q_0 克，经过 $T=1600$ 年，它的量减少了一半，求镭的分解规律.

解　设镭的现存量为 Q，则有$\frac{dQ}{dt}=kQ$，其中 k 为比例系数，于是

$$\frac{dQ}{Q}=kdt,$$

积分得 $\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{dQ}{Q}=\int_0^{1600}kdt$,

即

$$k=-\frac{\ln 2}{1600}.$$

因此，

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t dt,\quad \ln\frac{Q}{Q_0}=\ln 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

故镭的分解规律为 $Q=Q_0 2^{-\frac{t}{1600}}$.

§7　综合问题

问题与解答

5.7.1　当 $x\to 0$ 时，判断 $\varphi(x)=\int_0^{x^2}t\cdot\mathrm{arctg}t\,dt$ 无穷小的阶.

解　$$\varphi(x)=\int_0^{x^2}t\cdot\mathrm{arctg}t\,dt=\frac{1}{2}(t^2+1)\cdot\mathrm{arctg}t\Big|_0^{x^2}-\frac{1}{2}\int_0^{x^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}x^2+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2-\frac{1}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2(x^2+o(x^5))+\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^6}{6}+0(x^9))-\frac{1}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^4+o(x^5).$$

故当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)$ 是 4 阶无穷小.

5.7.2　函数在区间 $[0,\infty)$ 上不减，对于任意的 $T>0$，$f(x)$ 在区间 $[0,T]$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=c$. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$.

证　因 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上不减，则对于任意的 $\varepsilon>0$，都有

$$\frac{1}{\varepsilon x}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x}f(t)dt\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon x}\int_x^{(1+\varepsilon)x}f(t)dt.\qquad(*)$$

成立. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=c$，所以，当 x 充分大时，根据极限值与无穷小量之间的关系，有

$$\int_0^x f(t)dt=x(c+\alpha(\frac{1}{x}))\text{，其中}\lim_{x\to\infty}\alpha(\frac{1}{x})=0.$$

因此，$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\int_x^{(1+\varepsilon)x}f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\left[\int_0^{(1+\varepsilon)x}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\left[(c+\alpha(\frac{1}{x}))((1+\varepsilon)x-x)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\cdot\varepsilon x(c+\alpha(\frac{1}{x}))=c.$$

类似可证

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varepsilon x}\int_{(1-\varepsilon)x}^{x} f(t)dt = c.$$

对于（*）采用夹逼定理，易知$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$.

5.7.3　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+a}\frac{\sin t}{t}dt$，$a$ 为常数.

解　$$\left|\int_x^{x+a}\frac{\sin t}{t}dt\right| \leqslant \int_x^{x+a}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$$

$$\leqslant \int_x^{x+a}\frac{1}{t}dt = \ln(x+a) - \ln x$$

$$= \ln(1+\frac{a}{x}) \to 0, (x\to+\infty),$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+a}\frac{\sin t}{t}dt = 0.$

5.7.4　设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，求证：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

证　令 $x = nT + y$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^{nT} f(t)dt + \int_{nT}^{nT+y} f(t)dt}{nT+y}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{nT+y}\cdot\int_0^T f(t)dt + \frac{1}{nT+y}\cdot\int_0^y f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

5.7.5　设函数 $f(t)$ 在 $x = 0$ 处可微，又设函数

$$\varphi(x) = \begin{cases}\frac{1}{x^2}(\sin\frac{x}{\sqrt{5}})^2, & x < 0;\\ \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{5}, & x > 0.\end{cases}$$

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2 f(x)(1+x)^{-\frac{x+1}{x}} + \varphi(x)\int_{x^2}^0\sqrt{1-t^2}dt}{x^2\varphi(x)}$.

证　由 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$；

$$\lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}\sin^2\frac{x}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}.$$

有$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\frac{1}{5}$.

又　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{e}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{0}\sqrt{1-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt{1-x^4}\cdot 2x}{2x}=-1.$$

于是,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)(1+x)^{-\frac{x+1}{x}}+\varphi(x)\int_{x^2}^{0}\sqrt{1-t^2}dt}{x^2\varphi(x)}$

$$=\frac{f(0)\cdot\frac{1}{e}}{\varphi(0)}+(-1)=\frac{5}{e}f(0)-1.$$

5.7.6　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$.

证　对任意的 $\varepsilon>0$,因为 $\sin(\frac{\pi-\varepsilon}{2})<1$,所以,当 $n\to\infty$ 时,$\sin^n(\frac{\pi-\varepsilon}{2})\to 0$. 故存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}.$$

于是

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}\sin^n xdx+\int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}dx+\int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi-\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

所以　$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0.$$

5.7.7　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+n)}{(n^2-1)(n^2-2)\cdots(n^2-n)}$.

解　取积分区间为$[0,1]$;$f(x)=x$ 及 $f(x)=-x$,分别得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n})=e^{\int_0^1 xdx};$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n})=e^{\int_0^1(-x)dx}.$$

利用上面两个极限可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+n)}{(n^2-1)(n^2-2)\cdots(n^2-n)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{e^{\int_0^1 x dx}}{e^{\int_0^1(-x)dx}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=e.$$

5.7.8　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，记 $f_{kn}=f(a+k\cdot\frac{b-a}{n})$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}(1+f_{1n}\cdot\frac{b-a}{n})(1+f_{2n}\cdot\frac{b-a}{n})\cdots(1+f_{nn}\cdot\frac{b-a}{n})=e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

证　由泰勒公式，有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2},0<\theta<1.$$

于是，当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，有

$$|\ln(1+x)-x|=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2}\leqslant 2x^2.\tag{1}$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立.

当正数 $\frac{b-a}{n}\leqslant\frac{1}{2M}$ 时，利用(1)，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln(1+f_{kn}\cdot\frac{b-a}{n})-\sum_{k=1}^{n}f_{kn}\cdot\frac{b-a}{n}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}f_{kn}^2\cdot 2(\frac{b-a}{n})^2=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}f_{kn}^2\cdot\frac{b-a}{n}.\tag{2}$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f^2(x)=f(x)\cdot f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，(2) 式右端的和数是将 $[a,b]$ n 等分，取 ξ_k 为第 k 个子区间的右端点时，$f(x)$ 在区间上 $[a,b]$ 上的积分和，所以当 $n\to\infty$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}f_{kn}^2\frac{b-a}{n}\to\int_a^b f^2(x)dx,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(b-a)}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}f_{kn}^{2}\dfrac{b-a}{n}=0\cdot\int_a^b f^2(x)dx=0.$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[(1+f_{1n}\dfrac{b-a}{n})(1+f_{2n}\dfrac{b-a}{n})\cdots(1+f_{nn}\dfrac{b-a}{n})\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+f_{kn}\frac{b-a}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{kn}\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx.$$

根据指数函数的连续性，得

$$\lim_{n\to\infty}(1+f_{1n}\frac{b-a}{n})(1+f_{2n}\frac{b-a}{n})\cdots(1+f_{kn}\frac{b-a}{n})=e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

5.7.9 设 $f(x)$ 与 $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为正. 证明：

$$\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx\right\}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

其中 $\exp\{\cdots\}$ 表示 $e^{\{\cdots\}}$.

证 由 $\sqrt[n]{f_1f_2\cdots f_n}\leqslant\dfrac{1}{n}(f_1+f_2+\cdots+f_n)$，得

$$\exp\left\{\frac{1}{n}(\ln f_1+\ln f_2+\cdots+\ln f_n)\right\}\leqslant\frac{1}{n}(f_1+f_2+\cdots+f_n).$$

令 $f_i=f(a+\dfrac{b-a}{n}i)$，$1\leqslant i\leqslant n$，根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{n}(\ln f_1+\ln f_2+\cdots+\ln f_n)\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln f_1+\ln f_2+\cdots+\ln f_n)\right\}$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx\right\}.$$

所以 $\exp\left\{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\ln f(x)dx\right\}\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\ln f(x)dx.$

5.7.10 设 $f(x)$、$p(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且取正值，$f(x)$ 不为常数. 证明：

$$\frac{\int_a^b p(x)dx}{\int_a^b\frac{p(x)}{f(x)}dx}<\exp\left[\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right]<\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

证 将 $[a,b]$ 分为 n 等分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

记 $p_i=p(x_i)$，$f_i=f(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，$p=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$. 由于 $(e^x)''>0$，所以 e^x

是凸函数.应用凸函数的性质有：

$$\exp\left[\frac{p_1}{p}\ln f_1+\frac{p_2}{p}\ln f_2+\cdots+\frac{p_n}{p}\ln f_n\right]$$

$$\leqslant\frac{p_1}{p}e^{\ln f_1}+\frac{p_2}{p}e^{\ln f_2}+\cdots+\frac{p_n}{p}e^{\ln f_n}=\frac{p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_nf_n}{p}.$$

又 $$\exp\left[\frac{p_1}{p}\ln f_1^{-1}+\frac{p_2}{p}\ln f_2^{-1}+\cdots+\frac{p_n}{p}\ln f_n^{-1}\right]\leqslant\frac{p_1f_1^{-1}+p_2f_2^{-1}+\cdots+p_nf_n^{-1}}{p}.$$

即 $$\frac{p}{p_1f_1^{-1}+p_2f_2^{-1}+\cdots+p_nf_n^{-1}}\leqslant\exp\left[\frac{p_1\ln f_1+p_2\ln f_2+\cdots+p_n\ln f_n}{p}\right]\leqslant\frac{p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_nf_n}{p}.$$

最后可以得到

$$\frac{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)}{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p(x_i)}{f(x_i)}}\leqslant\exp\left[\frac{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\ln f(x_i)}{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)}\right]\leqslant\frac{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)f(x_i)}{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)}$$

只要注意到 $f(x),p(x),\frac{1}{f(x)}$ 是可积函数.e^x 连续，在上式中令 $n\to\infty$，则得

$$\frac{\int_a^b p(x)dx}{\int_a^b\frac{p(x)}{f(x)}dx}<\exp\left[\frac{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right]<\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

5.7.11　设 $F(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 内具有非负二阶导数的函数.证明：

(1) 对任何实数 x_1,x_2，有 $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}$；

(2) 对于任何在有限区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的连续函数 $f(x)$，有

$$F\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx\right] \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} F[f(x)]\sin x dx.$$

证 (1) 设 x_1, x_2 为任意实数,记 $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$,因 $F''(x) \geqslant 0$,由泰勒公式,有

$$F(x_1) = F(a) + F'(a)(x_1 - a) + F''(\xi)\frac{(x_1 - a)^2}{2!}$$
$$\geqslant F(a) + F'(a)(x_1 - a),$$

同理

$$F(x_2) \geqslant F(a) + F'(a)(x_2 - a).$$

将上面二式相加,得

$$F(x_1) + F_1(x_2) \geqslant 2F(a) + F'(a)(x_1 + x_2 - 2a) = 2F(a).$$

即(1)得证.

(2) 设 $p_k > 0, y_k \geqslant 0$ $(k = 1,2,\cdots,n)$. 下面先证明

$$F\left(\frac{p_1y_1 + \cdots + p_ny_n}{p_1 + \cdots + p_n}\right) \leqslant \frac{p_1F(y_1) + \cdots + p_nF(y_n)}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

事实上,记 $a = \frac{p_1y_1 + \cdots + p_ny_n}{p_1 + \cdots + p_n}$,由泰勒公式得

$$F(y_k) = F(a) + F'(a)(y_k - a) + F''(\xi_k)\frac{(y_k - a)^2}{2}$$
$$\geqslant F(a) + F'(a)(y_k - a),$$
$$(k = 1,2,\cdots,n).$$

把 $F(y_k)$ 乘以 P_k,并关于 k 从 1 到 n 求和,得

$$P_1F(y_1) + \cdots + p_nF(y_n)$$
$$\geqslant (p_1 + \cdots + p_n)F(a) + F'(a)[p_1(y_1 - a) + \cdots + p_n(y_n - a)]$$
$$= (p_1 + \cdots + p_n)F(a)$$
$$+ F'(a)[p_1y_1 + \cdots + p_ny_n - (p_1 + \cdots + p_n)a]$$
$$= (p_1 + \cdots + p_n)F(a)$$

故(1)式成立.

将$[0,\frac{\pi}{2}]$分成 n 等分,设 $p_k = \sin\frac{k\pi}{2n}, y_k = f\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ $(k = 1,2,\cdots,n)$,由(1)式有

$$F\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k\pi}{2n})\sin\frac{k\pi}{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}}\right]\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}F\left[f(\frac{k\pi}{2n})\right]\sin\frac{k\pi}{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}}.$$

$$F\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k\pi}{2n})\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}}\right]\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}F\left[f(\frac{k\pi}{2n})\right]\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}},$$

则

$$F\left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k\pi}{2n})\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}}\right]\leqslant\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F\left[f(\frac{k\pi}{2n})\right]\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}},$$

于是

$$F\left[\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx}\right]\leqslant\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}F[f(x)]\sin x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx}.$$

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$，所以 $F\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin x dx\right]\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}F[f(x)]\sin x dx$.

5.7.12　设函数 $f(x)$ 二阶可导，若对每一点 x，$f''(x)\geqslant 0$，$u(t)$ 为任意一个连续函数. 证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right],\quad a>0.$$

证法 1　将 $[0,a]$ 分为 n 等分，设 $x_k=u(t_k)=u(\frac{ka}{n})$，其中 $k=1,2,\cdots,n$，由凸函数的性质可知，

$$f\left[\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right]\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

即　$$f\left[\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}u(\frac{ka}{n})\cdot\frac{a}{n}\right]\leqslant\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}f\left[u(\frac{ka}{n})\right]\cdot\frac{a}{n}.$$

于是　$$f\left[\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u(\frac{ka}{n})\cdot\frac{a}{n}\right]\leqslant\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left[u(\frac{ka}{n})\right]\cdot\frac{a}{n},$$

即 $$f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right]\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt.$$

证法 2 设 $A=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt$，则 $y=f(x)$ 在 $x=A$ 处的切线方程为 $y=f(A)+f'(A)(x-A)$，等式右端记为 $g(x)$，由于 $f''(x)\geqslant 0$，故曲线在一切 x 处上凹，所以有

$$f(x)\geqslant g(x)=f(A)+f'(A)(x-A).$$

令 $x=u(t)$，代入上式，得

$$f(u(t))\geqslant f(A)+f'(A)(u(t)-A),$$

$$\int_0^a f(u(t))dt\geqslant af(A)+f'(A)\int_0^a u(t)dt-f'(A)A\cdot a$$

$$=af(A)+f'(A)Aa-f'(A)A\cdot a=af(A).$$

即 $$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))dt\geqslant f(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt).$$

证法 3 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt$，根据泰勒定理，得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(\xi)$$

$$\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

上式对任何 x 均成立，故，

$$f(u(t))\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(u(t)-x_0),$$

从而有

$$\int_0^a f(u(t))dt\geqslant\int_0^a[f(x_0)+f'(x_0)(u(t)-x_0)]dt$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\int_0^a\varphi(t)dt-x_0af'(x_0)$$

$$=af(x_0)+x_0af'(x_0)-x_0af'(x_0)=af(x_0).$$

即 $$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))dt\geqslant f(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt).$$

5.7.13 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且上凸，证明：

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant(b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2}).$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且上凸，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是连续的，于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 由凸函数的定义，有

$$f(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+\xi}{2}+\frac{b-\xi}{2})\geqslant\frac{1}{2}[f(a+\xi)+f(b-\xi)],$$

$$(0 \leqslant \xi \leqslant \frac{b-a}{2}).$$

在$[0,\frac{b-a}{2}]$上积分上式，得

$$\frac{b-a}{2}f\left(\frac{b+a}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{b-a}{2}} f(a+\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{b-a}{2}} f(b-\xi)d\xi. \qquad (1)$$

在(1)式右端的第一个积分中，作替换 $x = a+\xi$，得

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} f(a+\xi)d\xi = \int_a^{\frac{b+a}{2}} f(x)dx. \qquad (2)$$

在(1)式右端的第二个积分中，作替换 $x = b-\xi$，得

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} f(b-\xi)d\xi = \int_b^{\frac{b+a}{2}} f(x)(-dx) = \int_{\frac{b+a}{2}}^b f(x)dx \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)得

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \geqslant \int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

在恒等式 $x = \frac{x-a}{b-a}\cdot b + \frac{b-x}{b-a}\cdot a$ 中，当 $x \in (a,b)$ 时，有

$$0 < \frac{x-a}{b-a} < 1,\ 0 < \frac{b-x}{b-a} < 1,\ \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1.$$

由凸函数的定义，有

$$f(x) \geqslant \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

在$[a,b]$上积分上式，得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\geqslant \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx + \frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (b-x)dx \\ &= \frac{f(b)}{b-a}\cdot\frac{(b-a)^2}{2} + \frac{f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} \\ &= (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (5)\end{aligned}$$

由不等式(4)、(5)即得

$$(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

5.7.14 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上单调递增的连续函数，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx \leqslant 2\int_a^b xf(x)dx$$

证 $\int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)(x - \frac{a+b}{2})dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})dx,$$

在等式右端的第一项中，令 $x = a + y$，在第二项中，令 $x = b - y$，则有

$$\int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{b-a}{2}} f(a+y)(y - \frac{b-a}{2})dy + \int_0^{\frac{b-a}{2}} f(b-y)(\frac{b-a}{2} - y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{b-a}{2}} (\frac{b-a}{2} - y)[f(b-y) - f(a+y)]dy \geqslant 0,$$

因此

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx \leqslant 2\int_a^b xf(x)dx.$$

5.7.15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且对任意的 $k = 0,1,\cdots,n-1$，均有

$$\int_0^1 x^k f(x)dx = 0, \quad \int_0^1 x^n f(x)dx = 1. \qquad (*)$$

则存在一区间 $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$，使得

$$|f(x)| \geqslant 2^n(n+1), \quad x \in [\alpha,\beta].$$

证 假设 $|f(x)| < 2^n(n+1)$，由 $(*)$ 式可知

$$1 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^n f(x)dx \leqslant \int_0^1 |x - \frac{1}{2}|^n |f(x)|dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^n |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x - \frac{1}{2}|^n |f(x)|dx$$

（积分第一中值定理）

$$= |f(\xi_1)| \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^n dx + |f(\xi_2)| \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})^n dx$$

$$(0 < \xi_1 < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < \xi_2 < 1)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(|f(\xi_1)| + |f(\xi_2)|)$$

$$< \frac{1}{n+1}(\frac{1}{2})^{n+1} \cdot 2^{n+1}(n+1) = 1.$$

与假设矛盾，所以假设不成立，故有 $|f(x)| \geqslant 2^n(n+1)$.

5.7.16　设 $f(x)$ 为连续函数，记 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$，证明：

$$\Delta \int_a^x f(t)dt = \int_a^{a+1} f(t)dt + \int_a^x \Delta f(t)dt.$$

证　$\Delta \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+1} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$

对等式右端的第一个积分作代换 $t = 1 + u$，得

$$\begin{aligned}\Delta \int_a^x f(t)dt &= \int_{a-1}^x f(u+1)du - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_{a-1}^a f(t+1)dt + \int_a^x f(t+1)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^{a+1} f(t)dt + \int_a^x [f(t+1) - f(t)]dt \\ &= \int_a^{a+1} f(t)dt + \int_a^x \Delta f(x)dx.\end{aligned}$$

5.7.17　设在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = T$ 对称，且 $a < T < b$，则

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_T^b f(x)dx + \int_a^{2T-b} f(x)dx.$$

证　依题意可知，$f(2T - x) = f(x)$ 是恒等式，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^T f(x)dx + \int_T^b f(x)dx \\ &= \int_a^{2T-b} f(x)dx + \int_{2T-b}^T f(x)dx + \int_T^b f(x)dx.\end{aligned}$$

其中，令 $x = 2T - u$，则

$$\int_{2T-b}^T f(x)dx = \int_b^T f(2T-u)(-du) = \int_T^b f(2T-u)du = \int_T^b f(u)du$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{2T-b} f(x)dx + \int_T^b f(x)dx + \int_T^b f(x)dx \\ &= 2\int_T^b f(x)dx + \int_a^{2T-b} f(x)dx.\end{aligned}$$

5.7.18　对于实数 $x > 0$，定义对数函数 $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$，依此定义证明：

(1) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$，$(x > 0)$；

(2) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$，$(x > 0, y > 0)$.

证　(1) 令 $u=\frac{1}{t}$,则有

$$\ln\frac{1}{x}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{t}dt=\int_1^x u\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\cdot du=\int_1^x-\frac{du}{u}=-\ln x.$$

(2) $\ln(xy)=\int_1^{xy}\frac{dt}{t}=\int_1^x\frac{dt}{t}+\int_x^{xy}\frac{dt}{t}$;

在积分 $\int_x^{xy}\frac{dt}{t}$ 中,令 $t=ux$,则

$$\int_x^{xy}\frac{dt}{t}=\int_1^y\frac{xdu}{ux}=\int_1^y\frac{du}{u}=\ln y,$$

所以

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y.$$

5.7.19　设 $f(x)$ 在 $[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}]$ 上连续,证明:

(1) $\int_0^{2\pi}f(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)d\theta$;

(2) $\int_0^{2\pi}f(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta)d\theta$.

证　(1) 若 $a=b=0$,则上式显然成立. 若 $a^2+b^2\neq0$,则令

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

于是,$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$,从而有,

$$\int_0^{2\pi}f(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)d\theta$$

$$=\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)d\theta.$$

再令 $\theta-\alpha=\lambda$,则 $d\theta=d\lambda$,代入得

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda)d\lambda$$

$$=2\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)d\theta.$$

于是,$\int_0^{2\pi}f(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)d\theta$.

类似的可证出(2).

5.7.20　设 $a>1$,证明:$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}dx=\pi(a-\sqrt{a^2-1})$.

证　令 $x=\sin t\ (-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$,则

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{a-\sin t}dt. \qquad (1)$$

又
$$\int\frac{\cos^2 t}{a-\sin t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t+a^2-a^2}{a-\sin t}dt$$
$$=(1-a^2)\int\frac{dt}{a-\sin t}+\int\frac{a^2-\sin^2 t}{a-\sin t}dt$$
$$=(1-a^2)\int\frac{dt}{a-\sin t}+at-\cos t, \qquad (2)$$

用万能代换 $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=u$,则有

$$\int\frac{dt}{a-\sin t}=-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1}{\sqrt{a^2-1}}+c. \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)　得

$$I=\left(-2\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1}{\sqrt{a^2-1}}+at-\cos t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-2\sqrt{a^2-1}\left(\operatorname{arctg}\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}-\operatorname{arctg}\frac{-a-1}{\sqrt{a^2-1}}\right)+a\pi$$
$$=-2\sqrt{a^2-1}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)+a\pi$$
$$=-2\sqrt{a^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}+a\pi=\pi(a-\sqrt{a^2-1}).$$

5.7.21　若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数,证明函数 $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$ 在一般情形下是线性函数与周期函数的和.

证　因为 $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$,所以

$$F(x+T)-F(x)=\int_{x}^{x+T}f(x)dx.$$

又因 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数,所以

$$\int_{x}^{x+T}f(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx=k,$$

于是,$F(x+T)-F(x)=k$.

如果 $k=0$,则 $F(x)$ 为周期函数.

如果 $k \neq 0$，可考虑函数 $\varphi(x) = F(x) - \frac{k}{T}x$，因

$$\varphi(x+T) = F(x+T) - \frac{k}{T}(x+T)$$
$$= F(x+T) - \frac{k}{T}x - k = F(x) - \frac{k}{T}x = \varphi(x),$$

所以，$\varphi(x)$ 也为周期函数，从而 $F(x) = \varphi(x) + \frac{k}{T}x$，

即 $F(x)$ 是线性函数与周期为 T 的周期函数之和.

5.7.22 设函数 $\varphi(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，且 $\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx = 0$. 证明：对于任意的连续函数 $f(t)$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(nt)dt = 0.$$

（假定极限与积分可以交换次序）

证 设 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\varphi(nt)dt$,

$$A_n = \int_0^{2\pi} f(t)\varphi(nt)dt = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\varphi(u)du$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)\varphi(u)du$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f\left[\frac{v}{n} + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right]\varphi[v + 2(k-1)\pi]dv$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f\left[\frac{2(k-1)\pi}{n} + \frac{v}{n}\right]\varphi(v)dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{2\pi}{n}\right]\varphi(v)dv,$$

其中 $u = nt = v + 2(k-1)\pi$，$\varphi(v)$ 是以 2π 为周期的连续函数. $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$，$\frac{2(k-1)}{n}\pi \leqslant \xi_k = \frac{2(k-1)}{n}\pi + \frac{v}{n} \leqslant \frac{2k}{n}\pi$，$k = 1,2,3,\cdots$

又因 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{2\pi}{n} = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ 存在. 所以

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{2\pi}{n}\right]\varphi(v)dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\frac{2\pi}{n}\right]\varphi(v)dv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}f(x)dx\right]\varphi(v)dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}f(x)dx\right]\cdot\left[\int_0^{2\pi}\varphi(v)dv\right].$$

而 $\int_0^{2\pi}\varphi(v)dv = 0$. 所以 $A = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(t)\varphi(nt)dt = 0$.

5.7.23　设 $f(x)$ 连续，且对一切 x 均有

$$\int_0^x 2(f(t)-1)dt = f(x)-1.$$

求 $f(x)$.

证　由题设，显然 $f(x)$ 可导，题中等式两边对 x 求导，有

$$2(f(x)-1) = f'(x).$$

当 $f(x)\neq 1$ 时，由上述微分方程得

$$\frac{d[f(x)-1]}{f(x)-1} = 2dx,$$

积分，得 $\ln|f(x)-1| = 2x+c_1$；

当 $f(x)-1>0$ 时，$f(x)-1 = e^{2x}\cdot e^{c_1}$；

当 $f(x)-1<0$ 时，$1-f(x) = e^{2x}\cdot e^{c_1}$.

从而有 $f(x) = 1+ce^{2x}$，c 为任意常数.

5.7.24　设 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 内连续，$f(1)=3$，且对所有的 $x,y\in(0,\infty)$，皆有 $\int_1^{xy}f(t)dt = y\int_1^x f(t)dt + x\int_1^y f(t)dt$，求 $f(x)$.

证　等式 $\int_1^{xy}f(t)dt = y\int_1^x f(t)dt + x\int_1^y f(t)dt$ 两边对 x 求导，得

$$yf(xy) = yf(x) + \int_1^y f(t)dt.$$

令 $x=1$，由 $f(1)=3$，得 $yf(y) = y\cdot 3+\int_1^y f(t)dt$. $f(y)$ 是在 $(0,+\infty)$ 内可导的函数. 上面等式两端对 y 求导，得 $yf'(y)=3$，解此微分方程，得 $f(y) = 3\ln y + c$.

又由 $f(1)=3$ 得，$c=3$. 所以 $f(x) = 3(\ln x+1)$.

5.7.25　已知 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$，求证：$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$.

证　由 $\int_0^y e^t dt = e^y - 1$，$\int_0^x \cos t dt = \sin x$ 可得 $e^y+\sin x - 1 = 0$，两边求导，得

$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} + \cos x = 0,$$

于是
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{e^y} = \frac{\cos x}{\sin x - 1}.$$

5.7.26 设 $f(x)$ 有连续的导数，且经变换 $y = \int_0^x f(t)dt$ 后变成 e^y，求 $f(x)$.

证 由题设应有 $f(x) = e^y = e^{\int_0^x f(t)dt}$. 两端对 x 求导，得

$$f'(x) = e^{\int_0^x f(t)dt} \cdot f(x) = f^2(x)$$

即 $f'(x) - f^2(x) = 0$，解此微分方程，得

$$f(x) = -\frac{1}{x+c}.$$

5.7.27 已知 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，证明：

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

证 令 $I(b) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx dx$，因这里符合积分号下求导的条件，故有

$$\begin{aligned} I'(b) &= \int_0^\infty e^{-x^2}(-\sin 2bx) \cdot 2x dx = \int_0^\infty \sin 2bx de^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} \cdot \sin 2bx \Big|_0^\infty - 2b\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx dx \\ &= -2b\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx dx = -2bI(b). \end{aligned}$$

即 $I(b)$ 满足一阶微分方程

$$I'(b) + 2bI(b) = 0.$$

解之得 $\qquad I(b) = ce^{-b^2}$，(c 为待定常数).

因 $I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 所以，$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，于是

$$I(b) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

5.7.28 已知在 $x > -1$ 时所定义可微函数 $f(x)$ 满足条件：

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt = 0, f(0) = 1 \qquad (*)$$

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 证明：$f(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 时满足不等式 $e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

证　(1) 将 $x=0$ 代入(＊)式，得 $f'(0)+f(0)-0=0$, $f(0)=1$. 所以，$f'(0)=-1$. 又(＊)式可化为

$$(x+1)(f'(x)+f(x))=\int_0^x f(t)dt,$$

上式两边对 x 求导，得

$$f'(x)+f(x)+(x+1)[f''(x)+f'(x)]=f(x).$$

所以，$(x+2)f'(x)+(x+1)f''(x)=0$.

令 $z=f'(x)$，则 $z'=f''(x)$，上式可化为 $\dfrac{z'}{z}=-\dfrac{x+2}{x+1}$，解之得

$$\ln|z|=-x-\ln|x+1|+c.$$

以 $x=0, f'(0)=-1$ 代入上式，得 $c=0$. 于是

$$|f'(x)|=e^{-x}\cdot e^{-\ln|x+1|}.$$

即 $f'(x)=\pm\dfrac{e^{-x}}{x+1}$，因 $f'(0)=-1$，故应取 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

(2) 当 $x \geqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)\leqslant f(0)=1$.

另一方面，由于 $f'(x)\geqslant -e^{-x}$，故 $\int_0^x f'(x)dx \geqslant -\int_0^x e^{-x}dx$，所以

$$f(x)-f(0)\geqslant e^{-x}-1.$$

由此可得　　$f(x)\geqslant e^{-x}$.

5.7.29　证明：若 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)+\varphi'(x)\to a$，且 $\varphi'(x)$ 连续，则　$\varphi(x)\to a, \varphi'(x)\to 0, (x\to+\infty)$.

证　设 $f(x)=\varphi(x)+\varphi'(x)$，则 $f(x)$ 连续，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to a$. 上式两端同乘以 e^x，得 $[e^x\varphi(x)]'=e^x f(x)$.

任取一点 x_0，将上式从 x_0 到 $x(x>x_0)$ 积分得

$$e^x\varphi(x)=e^{x_0}\varphi(x_0)+\int_{x_0}^x e^t f(t)dt,$$

即
$$\varphi(x)=\frac{\int_{x_0}^x e^t f(t)dt+e^{x_0}\varphi(x_0)}{e^x}. \tag{1}$$

如果 $a>0$，则当 x 充分大时，$f(x)>\dfrac{1}{2}a>0$，从而 $\int_{x_0}^x e^t f(t)dt\to+\infty(x\to+\infty)$. 利用洛比达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=a,$$

如果 $a<0$,则当 x 充分大时,$f(x)<\frac{a}{2}<0$,从而 $\int_{x_0}^{x}e^t f(t)dt\to-\infty$,$(x\to+\infty)$,由洛比达法则,同样可求得 $\varphi(x)\to a(x\to+\infty)$.

如果 $a=0$,对任意的正数 ε,存在 x_0 使得 $x>x_0$ 时,有 $|f(x)|<\varepsilon$,这时,

$$|\varphi(x)|\leqslant e^{-x}(\varepsilon\int_{x_0}^{x}e^t dt+e^{x_0}|\varphi(x_0)|),$$

$$|\varphi(x)|\leqslant\varepsilon-\varepsilon e^{-x+x_0}+e^{-x+x_0}|\varphi(x_0)|,$$

即

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}|\varphi(x)|\leqslant\varepsilon,$$

因此,由 ε 之任意性,知

$$0\leqslant\underline{\lim_{x\to+\infty}}|\varphi(x)|\leqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}|\varphi(x)|=0,$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0=a.$$

综上所述,对任何 a,恒有 $\varphi(x)\to a\ (x\to+\infty)$. 从而

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi'(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.$$

5.7.30　求 $I=\int_0^x(1+y)\mathrm{arctg}y\,dy$ 的极小值.

证　由 $\frac{dI}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^x(1+y)\cdot\mathrm{arctg}y\,dy=(1+x)\cdot\mathrm{arctg}x=0$

求得驻点为 $x=0$ 和 $x=-1$.

再考虑 $\frac{d^2I}{dx^2}=\mathrm{arctg}x+\frac{1+x}{1+x^2}$,$I''(0)=1>0$,$I''(-1)=-\frac{\pi}{4}<0$.

故极小值为 $\quad I(0)=\int_0^0(1+y)\mathrm{arctg}y\,dy=0.$

5.7.31　证明:$\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$ 在 $[0,\infty)$ 上的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$,其中 n 为正整数.

证　令 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,dt$, $(x\geqslant0)$,则

$$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x.$$

由此得 $f(x)$ 的驻点为 $x=0,x=1,x=n\pi(n=1,2,3\cdots)$.

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x>0$,所以 $f(x)$ 单调递增;当 $x>1$ 但 $x\neq n\pi$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. 因此,在 $x=n\pi(n=1,2,3\cdots)$ 点处,$f(x)$ 不会出现极值,而在 $x=1$ 处,$f(x)$ 取极大值

$$f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt.$$

因当 $0<t<1$ 时，$t-t^2>0$，$0<\sin t<t$，故 $\sin^{2n}t<t^{2n}$，从而 $(t-t^2)\sin^{2n}t<(t-t^2)t^{2n}$. 于是

$$f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n}t\,dt<\int_0^1 (t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

又因 $f(0)=0$，当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调减少，所以此极大值是 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上的最大值.

5.7.32　设 $F(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$，试求(1) $F(0)$；(2) $F'(0)$；(3) $F''(0)$；(4) $F(x)$ 在闭区间 $[0,\pi]$ 上的极值.

解　(1) $F(0)=0$；

(2) $F'(x)=e^{-x}\cos x$，所以，$F'(0)=1$；

(3) $F''(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$，所以，$F''(0)=-1$；

(4) 令 $F'(x)=0$，在 $[0,\pi]$ 上得唯一驻点 $x=\frac{\pi}{2}$，而 $F''(\frac{\pi}{2})=-e^{-\frac{\pi}{2}}<0$，故 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上无极小值，极大值为

$$F(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\cos t\,dt=\frac{1}{2}[e^{-t}(\sin t-\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(1+e^{-\frac{\pi}{2}}).$$

5.7.33　求函数 $F(x)=\int_x^{x+1} t(t^2-1)dt$ 的极值.

解　由
$$F(x)=\int_x^0 t(t^2-1)dt+\int_0^{x+1} t(t^2-1)dt=-\int_0^x t(t^2-1)dt+\int_0^{x+1} t(t^2-1)dt,$$

故　$F'(x)=-x(x^2-1)+(x+1)[(x+1)^2-1]=3x(x+1)$，

$F''(x)=6x+3$，

令 $F'(x)=0$，得驻点为 $x=0$，$x=1$. 而 $F''(0)=3>0$，$F''(-1)=-3<0$. 由极值的第二判别法知，极大值为 $F(-1)=\int_{-1}^0 t(t^2-1)dt=\frac{1}{4}$，极小值为 $F(0)=\int_0^1 t(t^2-1)dt=-\frac{1}{4}$.

5.7.34　试求通过点(1,1)的直线 $y=f(x)$ 中使得 $\int_0^2 [x^2-f(x)]^2dx$ 为最小的直线方程.

解　设 $y=ax+b$，因直线通过点(1,1)，故得 $b=1-a$，于是

$y = f(x) = ax + 1 - a$. 令

$$u(a) = \int_0^2 [x^2 - (ax + 1 - a)]^2 dx$$

则
$$\frac{du}{da} = \int_0^2 \frac{d}{da}[x^2 - (ax + 1 - a)]^2 dx$$
$$= \int_0^2 2(x^2 - ax + a - 1)(-x + 1)dx = 2(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}a).$$

令$\frac{du}{da} = 0$,得唯一驻点 $a = 2$,又$\frac{d^2u}{da^2} = \frac{4}{3} > 0$,因此,$a = 2$ 使 $u(a)$ 取得极小值.即最小值.故所求的直线方程为 $y = 2x - 1$.

5.7.35　求函数 $F(x) = \int_x^{x+1} |t(t^2 - 1)| dt$ 的最小值.

解　因 $F(x) = \int_x^{x+1} |t(t^2 - 1)| dt$
$$= \int_0^{x+1} |t(t^2 - 1)| dt - \int_0^x |t(t^2 - 1)| dt,$$

所以
$$F'(x) = |(x + 1)[(x + 1)^2 - 1]| - |x(x^2 - 1)|$$
$$= |x(x + 1)|(|x + 2| - |x - 1|).$$

(1) 当 $x \leqslant -2$ 时,$F'(x) = -3x(x + 1) < 0$,故 $F(x)$ 单调递减.

(2) 当 $-2 < x \leqslant -1$ 时,$F'(x) = x(x + 1)(2x + 1) \leqslant 0$,故 $F(x)$ 单调递减.

(3) 当 $-1 < x \leqslant 0$ 时, $F'(x) = -x(x + 1)(2x + 1) > 0$,

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,$F(x)$ 取得极小值.

(4) 当 $0 < x \leqslant 1$ 时,$F'(x) = x(x + 1)(2x + 1) > 0$,故 $F(x)$ 单调递增.

(5) 当 $1 < x$ 时,$F'(x) = 3x(x + 1) > 0$,故 $F(x)$ 单调递增.

综上所述,$F(x)$ 在 $x = -\frac{1}{2}$ 处取得最小值.

$$F(-\frac{1}{2}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t(t^2 - 1)| dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t(t^2 - 1)dt = \frac{7}{32}.$$

5.7.36　设 $a > 0$,求使 $\int_0^1 |x^2 - a^2| dx$ 为最小的 a 值.

解　(1) 当 $0 < a \leqslant 1$ 时,

$$F(a) = \int_0^1 |x^2 - a^2| dx = \int_0^a (a^2 - x^2)dx + \int_a^1 (x^2 - a^2)dx$$

$$= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}.$$

所以　$F'(a) = 2a(2a-1)$，　$F''(a) = 2(2a-1) + 4a$.

故当 $a = \frac{1}{2}$ 时，$F(a)$ 取得极小值$\frac{1}{4}$.

(2) 当 $a > 1$ 时

$$F(a) = \int_0^1 (a^2 - x^2)dx = a^2 - \frac{1}{3},$$

$$F'(a) = 2a > 0,$$

由(1)、(2) 可知，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，$F(a)$ 为最小值.

5.7.37　求函数 $I(x) = \int_1^x \frac{dx}{2x-1}$ 在区间[1,2]上取得的最大值与最小值.

解　$I'(x) = \frac{1}{2x-1}$，在区间[1,2]上，$I'(x) > 0$，故 $I(x)$ 单调递增，所以，最小值为 $I(1) = 0$，最大值为 $I(2) = \ln 3/2$.

5.7.38　两个函数 $f(x) = x^4 - x$，$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足条件 $f(1) = g(1)$，$f(-1) = g(-1)$，求使积分 $\int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx$ 为最小的 a,b,c,d.

解　由 $f(1) = g(1)$，$f(-1) = g(-1)$ 得

$$a + b + c + d = 0,$$

$$-a + b - c + d = 2.$$

因此 $a + c = -1, b + d = 1$，　　(1)

于是　$f(x) - g(x) = x^4 - ax^3 - bx^2 - (c+1)x - d$

$$= x^4 - ax^3 - bx^2 + ax + (b-1).$$

由于$[f(x) - g(x)]^2$的奇次项在[-1,1]上的积分为零，故有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \\ &= 2\int_0^1 [x^8 - (a^2 - 2b)x^6 + (-2a^2 + b^2 + 2b - 2)x^4 \\ &\quad + (a^2 - 2b^2 + 2b)x^2 + (b-1)^2]dx \\ &= 2(\frac{1}{9} + \frac{a^2 - 2b}{7} + \frac{-2a^2 + b^2 + 2b - 2}{5} \\ &\quad + \frac{a^2 - 2b^2 + 2b}{3} + b^2 - 2b + 1) \end{aligned}$$

$$= 2(\frac{8}{105}a^2 + \frac{8}{15}b^2 - \frac{128}{105}b + \frac{32}{45})$$
$$= 2[\frac{8}{105}a^2 + \frac{8}{15}(b - \frac{8}{7})^2 + \frac{32}{45} - \frac{8}{15}\cdot(\frac{8}{7})^2].$$

因此，当 $a = 0, b = \frac{8}{7}$ 时，I 的值最小. 将 $a = 0, b = \frac{8}{7}$ 代入(1)，求得 $c = -1, d = -\frac{1}{7}$.

所以 $a = 0, b = \frac{8}{7}, c = -1, d = -\frac{1}{7}$ 时，I 的值最小.

5.7.39　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b |f(x) - k| dx = 0$，试证在区间 $[a,b]$ 上，$f(x) \equiv k$.（k 为常数）

证　令 $\varphi(x) = |f(x) - k|$，则 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且 $\varphi(x) \geqslant 0$. 于是，实际上就是要证明在 $[a,b]$ 上 $\varphi(x) = 0$.

再令 $F(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$，$(a \leqslant x \leqslant b)$，则 $F(x)$ 可导，且

$$0 \leqslant F(x) = \int_a^x \varphi(t)dt = \int_a^x \varphi(t)dt + \int_x^b \varphi(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt = 0.$$

故在 $[a,b]$ 上，$F(x) \equiv 0$ 推出 $\varphi(x) = F'(x) \equiv 0$.

于是，在 $[a,b]$ 上，$f(x) \equiv k$.

5.7.40　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f^2(x)dx = 0$ 的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于零.

证　必要性，用反证法.

若 $f(x) \not\equiv 0$，则不妨设 $f(x_0) > 0$，由 $f(x)$ 的连续性可知，存在着 $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$，当 $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 时，$f(x) > 0$，于是

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(x)dx > 0.$$

又因 $f^2(x) > 0$，故

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^{x_0-\varepsilon} f^2(x)dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f^2(x)dx > 0.$$

这与假设矛盾，所以 $f^2(x) = 0$.

充分性. 因当 $x \in [a,b]$ 时有 $f(x) \equiv 0$，故 $f^2(x) \equiv 0$，故有

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

5.7.41　在 $0 \leqslant x < +\infty$ 上构造连续函数 $g(x)$，使它的积分

$$\int_0^{\infty} g(x)dx = 0.$$

但在 $x \to +\infty$ 时，$g(x) \to 0$ 不成立.

证　由于调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

发散，令 $x_0 = 0$，$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，$n = 1,2,\cdots$，把区间$[0,\infty)$分成

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n], \cdots$$

其中区间$[x_{n-1}, x_n]$的长为$\frac{1}{n}$. 由于在形式上有

$$\int_0^{\infty} g(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} g(x)dx + \cdots$$

构造函数 $g(x)$，使它在区间$[x_{n-1}, x_n]$上的函数为 $\sin(2n\pi(x - x_{n-1}))$. 因

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \sin(2n\pi(x - x_{n-1}))dx = -\frac{\cos(2n\pi(x - x_{n-1}))}{2n\pi}\Bigg|_{x_{n-1}}^{x_n} = 0.$$

而当 $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$ 时，有

$$\left|\int_{x_{n-1}}^{x} \sin(2n\pi(x - x_{n-1}))dx\right| \leqslant \int_{x_{n-1}}^{x} |\sin(2n\pi(x - x_{n-1}))| dx$$

$$\leqslant \int_{x_{n-1}}^{x_n} 1dx = \frac{1}{n},$$

又

$$\int_0^x g(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x} g(x)dx$$

$$= \int_{x_{n-1}}^{x} g(x)dx,$$

于是

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x g(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_{x_{n-1}}^{x} g(x)dx = 0.$$

另一方面，由于当 $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$ 时，有

$$g(x) = \sin(2n\pi(x - x_{n-1})),$$

故总存在着 $x^* = x_{n+1} + \frac{1}{4n}$，使 $g(x^*) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

即当 $x \to \infty$ 时，$g(x) \not\to 0$.

5.7.42 如果 $f(x)$ 满足 $\int_0^T f(s)ds = 0$（例如，当 $f(x)$ 为奇函数时，但不仅限于这一情形）则函数 $g(x) = \int_0^x f(s)ds$
为周期函数，并且 T 也是它的周期.

证 因 $g(x+T) - g(x) = \int_0^{x+T} f(s)ds - \int_0^x f(s)ds$
$$= \int_x^{x+T} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds = 0.$$
故对任意的 x，有 $g(x+T) = g(x)$. 故 $g(x)$ 是周期为 T 的函数.

5.7.43 设 $f(x)$ 是在实轴上连续的周期函数，且周期为 T. 问函数 $g(x) = \int_0^x f(s)ds$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界.

解 当定积分 $\int_0^T f(s)ds = 0$ 时，由上题知，$g(x)$ 也是周期函数且周期为 T. 显然 $g(x)$ 连续，因此 $g(x)$ 在全实轴上有界.

当定积分 $\int_0^T f(s)ds \neq 0$ 时，令 $k = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds$. 然而 $g(x) - kx$ 是连续的周期函数，而且周期也是 T，故有界. 然而函数 kx 在全实轴上为无界，故 $g(x)$ 也无界，如果不然，则 $g(x) - kx$ 成为有界函数.

5.7.44 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：存在连续函数序列 $\varphi_n(x)(n = 1,2,\cdots)$，使
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

证 将 (a,b) 分为 n 等分，分点为
$$x_i = a + \frac{(b-a)}{n}i, \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

在每一分点 x_i 处作 x 轴的垂线，交曲线 $y = f(x)$ 于点 $M_i(x_i, f(x_i))$. 依次连结 M_{i-1}、$M_i(i = 1,2,\cdots,n)$，得一折线，其函数表达式为
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0), & a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1}). & x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ & i = 2,3,\cdots,n, \end{cases}$$

$\varphi_n(x)$ 显然是 $[a,b]$ 上的连续函数. 计算定积分
$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) + f(x_{i-1})\right]dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\Delta x_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \frac{b-a}{n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{b-a}{n}.$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \frac{b-a}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{b-a}{n}$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

5.7.45　在区间[0,1]上已知函数 $f(x) > 0$ 且连续，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

证　在[0,1]上，$f(x) > 0$ 且连续，所以在[0,1]上 $\ln f(x)$ 有意义且连续，从而，函数 $\ln f(x)$ 在[0,1]上可积. 因此有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right] = \int_0^1 \ln f(x)dx.$$

再由指数函的连续性可知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

5.7.46　设 $f(x)$ 是[0,1]上的可导函数，且 $0 < f'(x) \leqslant 1$；$f(0) = 0$；$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，证明：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)dx.$$

证　因 $0 < f'(x) \leqslant 1$，$f(0) = 0$，故当 $0 < x \leqslant 1$ 时，$f(x) > 0$.

设 $F(x) = \left[\int_0^x f(x)dx\right]^2$，$G(x) = \int_0^x f^3(x)dx$. 在[0,1]上应用柯西中值定理，有

$$\frac{F(1) - F(0)}{G(1) - G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

即
$$\frac{\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2}{\int_0^1 f^3(x)dx} = \frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(x)dx}{f^3(\xi)} = \frac{2\int_0^\xi f(x)dx}{f^2(\xi)},$$

$$(0 < \xi < 1) \qquad (1)$$

再用一次柯西中值定理，有

$$\frac{2\int_0^{\xi} f(x)dx - 0}{f^2(\xi) - 0} = \frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)} = \frac{1}{f'(\eta)} \geqslant 1,\ (0 < \eta < \xi) \quad (2)$$

由(1)与(2),得 $\dfrac{[\int_0^1 f(x)dx]^2}{\int_0^1 f^3(x)dx} \geqslant 1.$

即 $$[\int_0^1 f(x)dx]^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)dx.$$

5.7.47 利用定积分,证明:

(1) $c_n^0 - \frac{1}{2}c_n^1 + \frac{1}{3}c_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}c_n^n = \frac{1}{n+1}$;

(2) $c_n^0 + \frac{1}{2}c_n^1 + \cdots + \frac{1}{n+1}c_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

(3) $c_n^1 - \frac{1}{2}c_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}c_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

证 (1) 用两种方法计算积分

$$I = \int_0^1 (1-x)^n dx.$$

先作变换 $u = 1 - x$,得

$$I = -\int_1^0 u^n du = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}. \quad (1)$$

再将被积函数作二项式展开,然后积分,得

$$I = \int_0^1 (\sum_{i=0}^n c_n^i (-x)^i 1^{n-i})dx = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_n^i \int_0^1 x^i dx$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i c_n^i \frac{1}{i+1} = c_n^0 - \frac{1}{2}c_n^1 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}c_n^n. \quad (2)$$

由(1)与(2)即可得欲证的等式.

(2) 考虑积分 $\int_0^1 (1+x)^n dx$,用与(1)一样的方法,即可得到欲证的等式.

(3) 考虑等式

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}dx \quad (1)$$

$$\text{左端} = \int_0^1 \frac{1}{x}[1 - \sum_{k=0}^n c_n^k (-x)^k]dx = \int_0^1 [\sum_{k=1}^n c_n^k (-1)^{k+1} x^{k-1}]dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}c_n^k\int_0^1 x^{k-1}dx = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot c_n^k\cdot\frac{1}{k}$$

$$= c_n^1 - \frac{1}{2}c_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}c_n^n, \tag{2}$$

$$右端 = \int_0^1 \frac{[1-(1-x)][1+(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{n-1}]}{1-(1-x)}dx$$

$$= \int_0^1[\sum_{k=0}^{n}(1-x)^k]dx = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1(1-x)^k dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3) 式即得欲证的等式.

注　(3) 中被积函数在 $x=0$ 处无意义，但是

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-(1-x)^n}{x} = n.$$

我们将此极限值看成函数值，于是，被积函数在[0,1] 上连续. 以后遇到类似情形都是如此看待，不再说明.

5.7.48　证明：$\sigma(n) = \sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}dx$ 等于 n 的所有因数之和. 其中 $[x+1]$ 表示 $x+1$ 的整数部分. ($n\geqslant 2$ 时，n 的因数包括 1 和 n 本身. 例如，6 的因数是 1,2,3,6，$\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$).

证　$$\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n(x+1)}{m}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n\cdot k}{m}dx = \sum_{k=1}^{m}\cos k(\frac{2\pi n}{m}), \tag{1}$$

显然，如果 m 是 n 的因数，则

$$\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}dx = m. \tag{2}$$

当 m 不是 n 的因数时，应用恒等式

$$\sum_{k=1}^{m}\cos kt = \cos\frac{m+1}{2} + \frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

由(1) 有

$$\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}dx$$

$$= \cos(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}) + \frac{\sin(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m})}{\sin\frac{2\pi n}{2m}} = 0. \qquad (3)$$

由(2)与(3)即得欲证的结论.

5.7.49 设 $a(x)$、$b(x)$、$c(x)$ 和 $d(x)$ 都是 x 的多项式，试证：$\int_1^t a(x)c(x)dx \cdot \int_1^t b(x)d(x)dx - \int_1^t a(x)d(x)dx \cdot \int_1^t a(x)c(x)dx$ 可被 $(t-1)^4$ 整除.

证 由于 $a(t)$,$b(t)$,$c(t)$,$d(t)$ 都是多项式，故

$$F(t) = \int_1^t a(x)c(x)dx \int_1^t b(x)c(x)dx - \int_1^t a(x)d(x)dx \cdot \int_t^1 b(x)c(x)dx$$

也是一个多项式，显然 $F(1)=0$，故 $F(t)$ 可被 $(t-1)$ 整除. 容易求得，$F'(1)=F''(1)=F'''(1)=0$，因此 $F(t)$ 可被 $(t-1)^4$ 整除.

5.7.50 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有 $2n$ 阶连续导函数，且 $|f^{(2n)}(x)| \leqslant M$，$f^{(m)}(a)=f^{(m)}(b)=0$，$m=0,1,2,\cdots,n-1$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.$$

证 令 $g(x)=(x-a)^n(b-x)^n$，逐次利用分部积分法，得

$$\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g^{(2n)}(x)dx = (2n)!\int_a^b f(x)dx.$$

从而

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \frac{1}{(2n)!}\left|\int_a^b f^{(2n)}(x)g(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{(2n)!}\int_a^b (x-a)^n(b-x)^n dx,$$

令 $y=\frac{x-a}{b-a}$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{(2n)!}\int_0^1 (b-a)^{2n+1}y^n(1-y)^n dy = \frac{M}{(2n)!}(b-a)^{2n+1}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

第六章　空间解析几何

§1　空间直角坐标系

内容提要

1. 空间直角坐标系

在空间作两两互相垂直并相交于同一点 o 的三条直线 ox,oy,oz，在每一条直线上取定一个方向，并取定一个长度单位，这样，就构成了空间直角坐标系，记作 $oxyz$.

2. 空间两点间的距离

空间直角坐标系中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3. 线段的定比分点

设在连接 P_1 与 P_2 两点的直线上有一点 $P(x,y,z)$，使得 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ $(\lambda\neq-1)$，则点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，得 P_1 与 P_2 两点连线的中点 P 的坐标为

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad z=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

问题与解答

6.1.1　一个长为 a 的正方体放置在 xoy 平面上，其底面的中心与

原点重合，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求立方体各顶点的坐标.

解　先求正方体在 xoy 面上的四个顶点，设它在 x,y 轴上的顶点分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$. 由题设，有

$$x^2+y^2=a^2\quad x^2=y^2=\frac{1}{2}a^2.$$

故 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$，$y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$，所以它在 xoy 平面上的四个顶点为 $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0)$、$(0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a,0)$，另外四个顶点为 $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a)$、$(0,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a,a)$.

6.1.2　求点 $A(3,-4,1)$，$B(a,b,c)$ 分别关于各坐标平面、各坐标轴和原点的对称点的坐标.

解　点 A 关于 xoy 平面的对称点是 $(3,-4,-1)$；关于 yoz 和 xoz 面的对称点分别是 $(-3,-4,1)$ 和 $(3,4,1)$.

同理，A 点关于 x 轴、y 轴、z 轴的对称点分别为 $(3,4,-1)$、$(-3,-4,-1)$ 和 $(-3,4,1)$. 而关于原点的对称点为 $(-3,4,-1)$.

一般地，点 $B(a,b,c)$ 关于坐标面、坐标轴和原点的对称点分别为 $(a,b,-c)$、$(a,-b,c)$、$(-a,b,c)$ 和 $(a,-b,-c)$、$(-a,b,-c)$、$(-a,-b,c)$ 及 $(-a,-b,-c)$.

6.1.3　求点 $A(-3,2,5)$ 关于点 $B(4,-2,8)$ 的对称点.

解　设对称点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，由

$$4=\frac{1}{2}(-3+x_0),\ -2=\frac{1}{2}(2+y_0),\ 8=\frac{1}{2}(5+z_0)$$

得对称点为 $M(11,-6,11)$.

6.1.4　在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 z 轴上，故设该点为 $(0,0,z)$. 由题意，有

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2},$$

两边平方后解得 $z=\frac{14}{9}$. 故所求的点为 $(0,0,\frac{14}{9})$.

6.1.5　已知点 $A(7,-1,12)$，$B(1,7,-12)$，在 z 轴上求一点 C，

使 $\angle ACB$ 为直角.

解　设点 C 为 $(0,0,z)$，由 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ 有

$$(1-7)^2+(7+1)^2+(-12-12)^2=[(0-7)^2+(0+1)^2+(z-12)^2]+[(0-1)^2+(0-7)^2+(z+12)^2],$$

解得 $z=\pm 12$. 故所求的点为 $(0,0,\pm 12)$.

6.1.6　在 yoz 平面上，求与三已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,2)$ 及 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解　设所求点为 $(0,y,z)$，于是有

$$\begin{cases}\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z-2)^2},\\ \sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2}.\end{cases}$$

两边平方并化简，得

$$\begin{cases}-6y-8z=10,\\ 8y-2z=12.\end{cases}$$

解方程组得，$y=1, z=-2$. 故所求的点为 $(0,1,-2)$.

6.1.7　把线段 AB 五等分，已知第一个分点 $C(3,-5,7)$ 和最后一个分点 $F(-2,4,-8)$. 求线段的端点和其它分点的坐标.

解　设两端点为 $A(x_0,y_0,z_0)$ 和 $B(x_5,y_5,z_5)$，另外两个分点为 $D(x_2,y_2,z_2)$ 及 $E(x_3,y_3,z_3)$. 因为 $\dfrac{AC}{CF}=\dfrac{1}{3}$，所以 $AC=\dfrac{1}{3}CF$，故

$$\begin{cases}x_0-3=\frac{1}{3}(3+2),\\ y_0+5=\frac{1}{3}(-5-4),\\ z_0-7=\frac{1}{3}(7+8).\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x_0=\frac{14}{3},\\ y_0=-8,\\ z_0=12.\end{cases}$$

所以 A 点的坐标为 $A(\frac{14}{3},-8,12)$.

同理，由 $\dfrac{DC}{CF}=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{EC}{CF}=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{BC}{CF}=-\dfrac{4}{3}$ 可求得其他分点为 $D(\frac{4}{3},-2,2)$，$E(-\frac{1}{3},1,-3)$ 和 $B(-\frac{11}{3},7,-13)$.

6.1.8 求每个坐标平面把点 $A(2,-1,7)$ 和点 $B(4,5,-2)$ 间的线段 AB 分成的两条线段之比，并求分点的坐标.

解 设 xoy 面与 AB 的交点为 $C(x_0,y_0,z_0)$. 由于 $z_0=0$，所以

$$\frac{AC}{CB}=\frac{0-7}{-2-0}=\frac{7}{2}=\lambda,\quad \frac{x_0-2}{4-x_0}=\frac{7}{2},\quad \frac{y_0-1}{5-y_0}=\frac{7}{2}.$$

由此可得 $x_0=\frac{32}{9}$，$y_0=\frac{11}{3}$，故所求的交点为 $C(\frac{32}{9},\frac{11}{3},0)$.

同理，设 yoz 面与 AB 的交点为 $D(0,y_1,z_1)$，xoz 面与 AB 的交点为 $E(x_2,0,z_2)$，由 $\frac{AD}{DB}=-\frac{1}{2}=\lambda$，$\frac{AE}{EB}=\frac{1}{5}=\lambda$ 可求得 $D(0,-7,16)$，$E(\frac{7}{3},0,\frac{11}{2})$.

6.1.9 四面体的顶点为 $A(-2,3,-1)$，$B(3,0,4)$，$C(4,-6,2)$，$D(0,2,-5)$，如果将坐标轴平行移动，使原点移到点 $M(4,6,-3)$ 处，试求四面体顶点的新坐标.

解 因为点的新坐标 (x',y',z') 与旧坐标 (x,y,z) 之间的关系是：$x'=x-4$，$y'=y-6$，$z'=z+3$. 故顶点的新坐标是

$$A'(-6,-3,2),\quad B'(-1,-6,7),\quad C'(0,-12,5),$$
$$D'(-4,-4,-2).$$

6.1.10 在三维欧氏空间中，任意给定九个格点（坐标均为整数的点）. 求证：其中至少有两点所连线段上也存在格点.

证 将空间格点的坐标按奇偶分类，只可能分成下列八种：

(奇，奇，奇)，(奇，奇，偶)，(奇，偶，奇)，(奇，偶，偶)，
(偶，奇，奇)，(偶，奇，偶)，(偶，偶，奇)，(偶，偶，偶)

因此，在九个已知点中至少有两点 P 与 Q 的同名坐标具有相同的奇偶性，于是线段 PQ 的中点显然是一个格点.

§2　矢量代数

内容提要

1. 矢量

(1) 定义(自由矢量)　具有大小和方向的量称为矢量(或叫向量). 记为

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = \{a_1, a_2, a_3\}$$

(2) 矢量的模　$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(3) 单位矢量　模为 1 的矢量称为单位矢量. 称

$$i = \{1,0,0\}, j = \{0,1,0\}, k = \{0,0,1\}$$

为基本单位矢量.

2. 用坐标作矢量的运算

(1) 矢量加减法　若 $a = \{a_1, a_1, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则 $a \pm b = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}$, 矢量的加、减法符合三角形、平行四边形、多角形法则.

(2) 矢量与数相乘　若 $a = \{x, y, z\}$, m 为实数, 则

$$ma = \{mx, my, mz\}.$$

(3) 矢量的数量积　若 $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则 a 与 b 的数量积为

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\widehat{a,b}) = |a|b_a = |b|a_b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

两矢量的数量积满足:

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

$$m(a \cdot b) = (ma) \cdot b = a \cdot (mb);$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

特别地, $a \perp b$ 的充要条件是 $a \cdot b = 0$.

(4) 矢量的矢量积(向量积)　若 $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

称为a与b的矢量积，其模$|a\times b|=|a||b|\sin(\widehat{a,b})$，其方向与$a$、$b$都垂直，并且按右手螺旋规则，指向从$a$转向$b$时的进动方向.

两矢量的矢量积满足

$a\times b=-b\times a$;

$\lambda(a\times b)=(\lambda a)\times b=a\times(\lambda b)$,　$\lambda\in R$;

$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$;

$a\,/\!/\,b\Longleftrightarrow a\times b=0$,(设$a\neq 0,b\neq 0$).

(5) 混合积　若$a=\{a_1,a_2,a_3\},b=\{b_1,b_2,b_3\},c=\{c_1,c_2,c_3\}$，则

$$a\cdot(b\times c)=[abc]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

称为a,b,c三矢量的混合积，其绝对值等于以a,b,c为棱的平行六面体的体积.当$[abc]=0$时，三矢量共面.

三矢量混合积满足轮换性

$$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b).$$

问 题 与 解 答

1. 矢量的加减法

6.2.1　以从一点出发的三个不共面矢量a,b,c为棱作一平行六面体，求这平行六面体的对角线矢量.

解　由矢量加法可知，四条对角线矢量分别为$a+b+c$，$a-b+c$，$a+b-c$和$a-b-c$.

6.2.2　若$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$是正六边形，如果(1) $a=A_1A_2$，$b=A_1A_6$，(2) $a=A_1A_3$，$b=A_4A_6$，能不能以a、b表示A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_6，A_6A_1，(3) 若正六边形的中心是O，求$\sum_{i=1}^{6}OA_i$.

解　(1) 如图，$A_1A_2=a$，$A_1A_6=b$，因为$A_2O=A_1A_6=b$，$OA_3=A_1A_2=a$. 所以$A_2A_3=A_2O+OA_3=a+b$. 而$A_1A_6=A_3A_4$，因而有

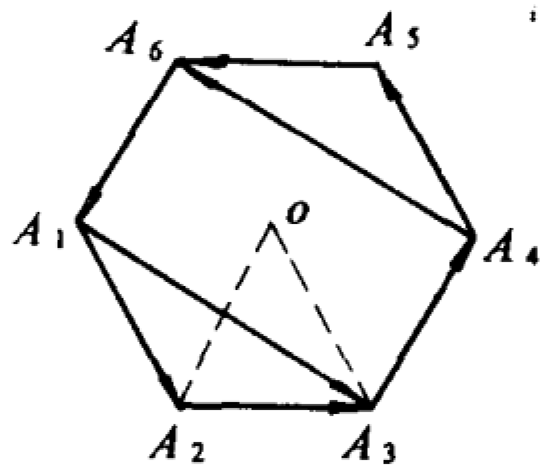
$A_3A_4 = b$.

同理 $A_4A_5 = -a, A_5A_6 = -A_2A_3 = -(a+b), A_6A_1 = -b$.

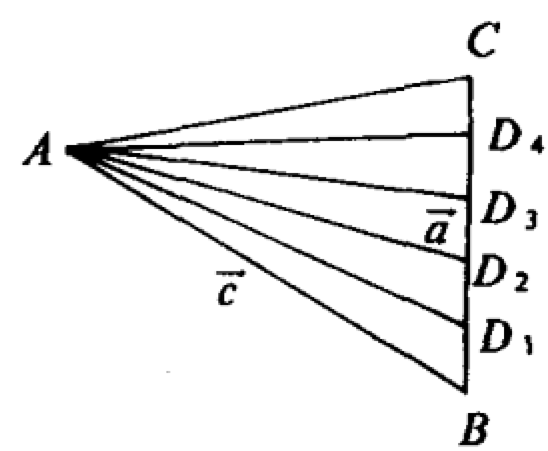
(2) 不能.

(3) 因为 $OA_1 = -OA_4,\ OA_2 = -OA_5, OA_3 = -OA_6$,所以

$$\sum_{i=1}^{6} OA_i = 0.$$



6.2.2 题图



6.2.3 题图

6.2.3 把三角形 ABC 的 BC 边五等分,并把分点 D_1、D_2、D_3、D_4 各与顶点 A 连接. 试以 $AB = c$, $BC = a$ 表示矢量 D_1A、D_2A、D_3A、D_4A 及 CA.

解 如图,$AD_1 = AB + BD_1 = AB + \frac{1}{5}BC = c + \frac{1}{5}a$,所以

$$D_1A = -(c + \frac{1}{5}a).$$

同理, $D_2A = -(c + \frac{2}{5}a)$, $D_3A = -(c + \frac{3}{5}a)$,

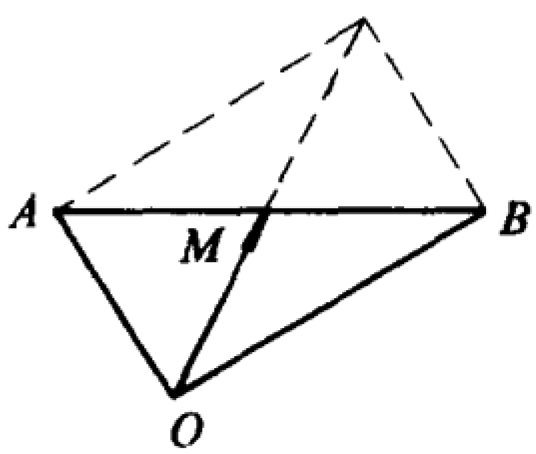
$$D_4A = -(c + \frac{4}{5}a),\ CA = -(a + c).$$

6.2.4 设 M 为线段 AB 的中点,证明对任一点 O,有 $OM = \frac{1}{2}(OA + OB)$ 和 $AB = OB - OA$.

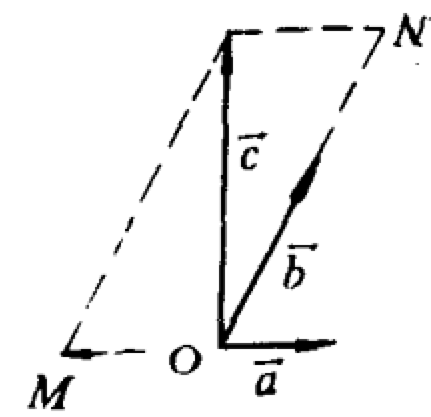
证 作平行四边形(如图),由图可知,AB,$2OM$ 是平行四边形的两个对角线矢量,且有

$$2OM = OA + OB,\ AB + OA = OB.$$

即 $$OM = \frac{1}{2}(OA + OB),\quad AB = OB - OA.$$



6.2.4 题图



6.2.5 题图

6.2.5　已知 $|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 2, \widehat{\boldsymbol{ab}} = 60°$，作 $\boldsymbol{c} = \sqrt{3}\boldsymbol{b} - \sqrt{2}\boldsymbol{a}$.

解　如图所示，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{ON} = -\sqrt{2}\boldsymbol{a} + \sqrt{3}\boldsymbol{b}$.

6.2.6　试证空间一点到平行四边形四个顶点所作的四个矢量之和等于由该点到对角线交点所作矢量之四倍.

证法1　已知平行四边形 $ABCD$ 和点 P，如图，$2\boldsymbol{PO}$ 为由 $\boldsymbol{PA},\boldsymbol{PC}$ 所作平行四边形的一条对角线，且有 $2\boldsymbol{PO} = \boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PC}$，

同理，$2\boldsymbol{PO} = \boldsymbol{PB} + \boldsymbol{PD}$.

所以　$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PB} + \boldsymbol{PC} + \boldsymbol{PD} = 4\boldsymbol{PO}$.

证法2　如图，$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{AO} = \boldsymbol{PO}$，　(1)

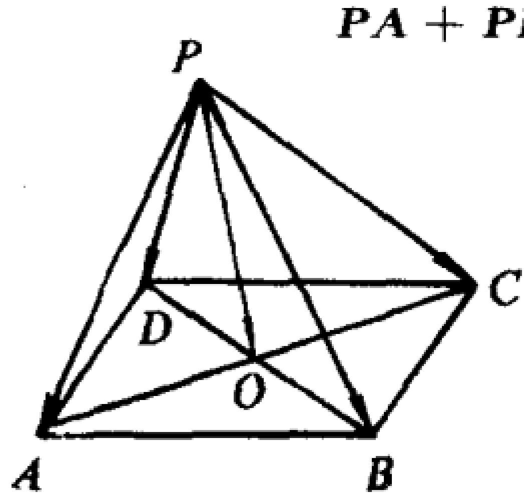
$$\boldsymbol{PD} + \boldsymbol{DO} = \boldsymbol{PO}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{PC} + \boldsymbol{CO} = \boldsymbol{PO}, \quad (3)$$

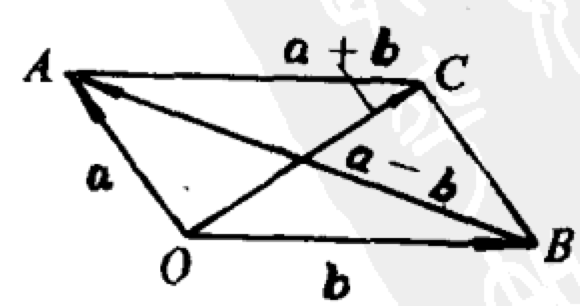
$$\boldsymbol{PB} + \boldsymbol{BO} = \boldsymbol{PO}, \quad (4)$$

且 $\boldsymbol{AO} + \boldsymbol{CO} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{DO} + \boldsymbol{BO} = \boldsymbol{0}$. 由(1)＋(2)＋(3)＋(4)可得

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{PB} + \boldsymbol{PC} + \boldsymbol{PD} = 4\boldsymbol{PO}.$$



6.2.6 题图



6.2.7 题图

6.2.7　已知 $|\boldsymbol{a}| = 11, |\boldsymbol{b}| = 23, |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = 20$，求 $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.

解　由 $|OC|^2+|BA|^2=2(|a|^2+|b|^2)$，(平行四边形的两条对角线的平方和等其两边的平方和的 2 倍).

即　$|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$，

故　$|a-b|=\sqrt{2(|a|^2+|b|^2)-|a+b|^2}$

$=\sqrt{2(11^2+23^2)-20^2}=\sqrt{900}=30.$

6.2.8　矢量 a 与 b 满足什么条件时，才使下列事实成立.(a、b 为非零矢量)

(1) $a+b$ 与 $a-b$ 共线；　(2) $a+b$ 平分 a 与 b 间的角；

(3) $|a+b|=|a-b|$；　(4) $|a+b|=|a|+|b|$；

(5) $|a+b|=|a|-|b|$；　(6) $|a-b|=|a|+|b|$.

解　(1) a 与 b 共线时，结论成立；当 a 与 b 不共线时，$a+b$ 与 $a-b$ 为以矢量 a、b 为边的平行四边形的两条对角线，不会共线，所以，$a+b$ 与 $a-b$ 共线的条件是 a 与 b 共线.

(2) $a+b$ 是以 a、b 为边的平行四边形的对角线，要 $a+b$ 平分 a 与 b 间的角，必须 $|a|=|b|$.

(3) $|a+b|=|a-b|$，即平行四边形的两对角线相等，此平行四边形必为长方形或正方形. 即 $a\perp b$ 时，$|a+b|=|a-b|$.

(4) 当 $a\parallel b$ 且同向时，$|a+b|=|a|+|b|$.

若 $a\parallel b$ 且反向时，$|a+b|<|a|+|b|$.

若 a 与 b 不平行，则 $a\cdot b$ 与 $a+b$ 组成一个三角形. 因为三角形两边之和大于第三边，故 $|a|+|b|>|a+b|$.

所以，只有当 $a\parallel b$ 且 a、b 同向时，$|a+b|=|a|+|b|$.

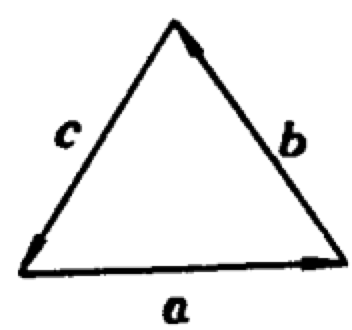
(5) 与(4) 同理，$|a+b|=|a|-|b|$ 的条件为 $|a|\geqslant|b|$，$a\parallel b$ 且 a、b 反向.

(6) 在(4) 中令 b 为 $-b$，即知 $|a-b|=|a|+|b|$ 的条件为 $a\parallel b$ 且反向.

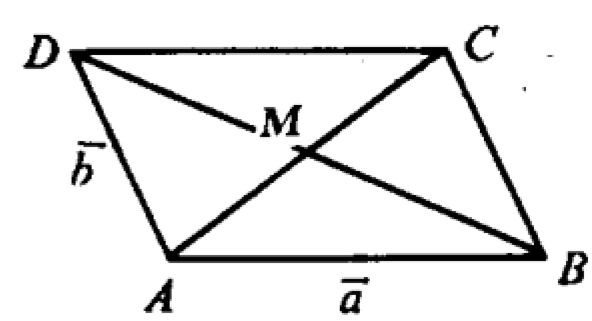
6.2.9　已知长度相等的三个矢量满足 $a+b+c=0$，求它们两两间的夹角.

解　由已知条件 $|a|=|b|=|c|$ 和 $a+b+c=0$ 可知，a、b、c 互不平行，且组成一个等边三角形，每个内角为 $\frac{\pi}{3}$，每个外角均为 $\frac{2\pi}{3}$，由 $a+b+c=0$ 可知，a、b、c 两两的夹角，都是三角形的外角. 故它们

之间的夹角均为 $\frac{2}{3}\pi$.



6.2.9 题图



6.2.10 题图

6.2.10　若四边形的对角线互相平分，证明它们是平行四边形.

证　由图知，

$$\mathbf{AB} = \mathbf{MB} - \mathbf{MA} = -\mathbf{MD} + \mathbf{MC} = -(\mathbf{MD} - \mathbf{MC})$$
$$= -(\mathbf{CM} + \mathbf{MD}) = -\mathbf{CD},$$

所以　$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{CD}|. \tag{1}$$

同理，$\mathbf{AD} = -\mathbf{BC}$，且 $|\mathbf{AD}| = |\mathbf{BC}|$.　(2)

由(1)、(2) 可知，$ABCD$ 为平行四边形.

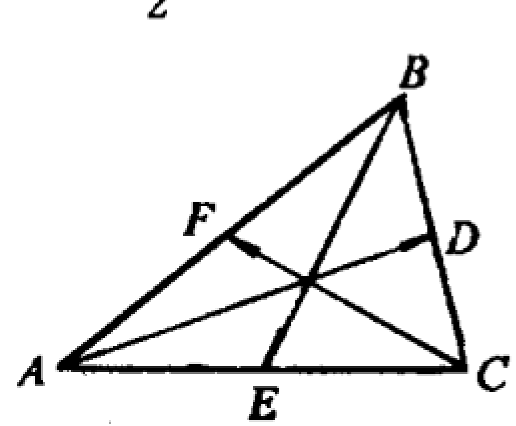
6.2.11　已知三角形 ABC 中，点 D、E、F 分别是边 BC、CA、AB 的中点，求证：$\mathbf{AD} + \mathbf{BE} + \mathbf{CF} = \mathbf{0}$.

证　由 6.2.4 题可知，$\mathbf{AD} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC})$，

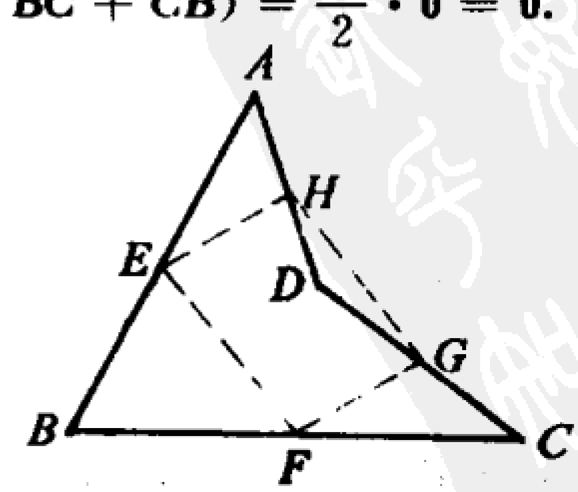
$$\mathbf{BE} = \frac{1}{2}(\mathbf{BA} + \mathbf{BC}),\quad \mathbf{CF} = \frac{1}{2}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB}),$$

故　$\mathbf{AD} + \mathbf{BE} + \mathbf{CF}$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) + \frac{1}{2}(\mathbf{BA} + \mathbf{BC}) + \frac{1}{2}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB})$$
$$= \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{AC} + \mathbf{CA} + \mathbf{BC} + \mathbf{CB}) = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$



6.2.11 题图



6.2.12 题图

6.2.12　试证：空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形.

证　设空间四边形 $ABCD$ 各边的中点分别为 E、F、G、H，各顶点对应的矢量分别为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$. 显然

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{CD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{DA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},$$

$$\boldsymbol{EF}=\boldsymbol{EO}+\boldsymbol{OF}=\boldsymbol{OF}-\boldsymbol{OE}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}).$$

$$\boldsymbol{GH}=\boldsymbol{OH}+\boldsymbol{GO}=\boldsymbol{OH}-\boldsymbol{OG}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c})$$
$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}).$$

即 $\boldsymbol{EF}=-\boldsymbol{GH}$.

从而有 $\boldsymbol{EF}\parallel\boldsymbol{GH}$，且 $|\boldsymbol{EF}|=|\boldsymbol{GH}|$.

同理可证，$\boldsymbol{EH}=\boldsymbol{FG}$，故四边形 $EFHG$ 为平行四边形.

6.2.13　从点 $A(2,-1,7)$ 沿矢量 $\boldsymbol{a}=\{8,9,-12\}$ 的方向取线段 $|\boldsymbol{AB}|=34$，求 B 点的坐标.

解　设 B 点的坐标为 (x,y,z). 则 $\boldsymbol{AB}=\{x-2,y+1,z-7\}$，且 $\boldsymbol{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$. 即 $x-2=8\lambda,\ y+1=9\lambda,\ z-7=-12\lambda,\ (\lambda>0)$.

由
$$|\boldsymbol{AB}|=34=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(8\lambda)^2+(9\lambda)^2+(12\lambda)^2}$$

解得 $\lambda=2$，从而 B 点的坐标为 $(18,17,-17)$.

6.2.14　一矢量与 x 轴和 y 轴的夹角相等，而与 z 轴夹角是它们的两倍，求矢量的方向.

解　设矢量与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角分别为 α、β、γ，则 $\alpha=\beta,\gamma=2\alpha$，故有 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，或 $2\cos^2\alpha-1+(2\cos^2\alpha-1)^2=0$. 即 $2\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)=0$. 所以

$$\cos\alpha=0\quad 或\quad \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

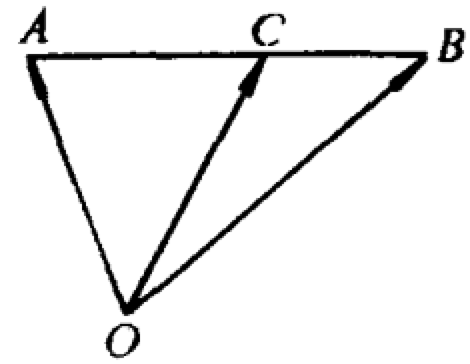
于是有 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2},\gamma=\pi$，或 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

6.2.15　设 O 是点 A 和 B 连线外的一点，证明：任一点 C 与 AB 共线的充要条件是存在数 λ_1 和 λ_2，使 $\boldsymbol{OC}=\lambda_1\boldsymbol{OA}+\lambda_2\boldsymbol{OB}$，且 $\lambda_1+\lambda_2$

$= 1.$

证 必要性. 若 A、B、C 共线,则 $\boldsymbol{AC} = \lambda_1\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AC}$

或
$$\begin{aligned}\boldsymbol{OC} &= \boldsymbol{OA} + \lambda_1\boldsymbol{AB}\\ &= \boldsymbol{OA} + \lambda_1(\boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA})\\ &= \lambda_1\boldsymbol{OB} + (1-\lambda_1)\boldsymbol{OA}\\ &= \lambda_1\boldsymbol{OB} + \lambda_2\boldsymbol{OA},\end{aligned}$$



6.2.15 题图

且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

充分性. 若 $\boldsymbol{OC} = \lambda_1\boldsymbol{OA} + \lambda_2\boldsymbol{OB}$,

且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,则

$$\begin{aligned}\lambda_1\boldsymbol{OA} + \lambda_2\boldsymbol{OB} &= \lambda_1\boldsymbol{OA} + (1-\lambda_1)\boldsymbol{OB}\\ &= \boldsymbol{OB} + (\boldsymbol{OA} - \boldsymbol{OB})\lambda_1 = \boldsymbol{OB} + \lambda_1\boldsymbol{AB}.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OB} + \lambda_1\boldsymbol{AB}$, 或 $\boldsymbol{OC} - \boldsymbol{OB} = \lambda_1\boldsymbol{AB}$,

即 $\boldsymbol{CB} = \lambda_1\boldsymbol{AB}$. 所以 A、B、C 共线.

6.2.16 分别写出矢量

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{b} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \sqrt{3}\boldsymbol{k})$$

的(1) 分量;(2) 模;(3) 方向余弦.

解 (1) $\boldsymbol{a} = \{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$, $\boldsymbol{b} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$.

(2) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = 1$.

同理可得, $|\boldsymbol{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\cos\alpha_1 = \frac{\text{Prj}_x\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$.

同理可得, $\cos\beta_1 = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma_1 = \frac{1}{3}$.

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{4},\ \cos\beta_2 = \frac{1}{2},\ \cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

6.2.17 设 $\boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$. 求矢量 $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{l} + 3\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分矢量.

解
$$\begin{aligned}\text{Prj}_x\boldsymbol{a} &= 4\text{Prj}_x\boldsymbol{l} + 3\text{Prj}_x\boldsymbol{m} - \text{Prj}_x\boldsymbol{n}\\ &= 4\cdot 3 + 3\cdot 2 - 5 = 13.\end{aligned}$$

$a_y = a_y j = \{4l_y + 3m_y - n_y\} j = 7j.$

6.2.18　解答下列问题：

(1) 求平行于矢量 $a = \{6,7,-6\}$ 的单位矢量；

(2) 一矢量的模为 6，它与投影轴的夹角为 30°，求此矢量在该轴上的投影，并用单位矢量表示 a.

解　(1) 设所求的矢量为 a_0，由 $a_0 // a$，有 $a_0 = \{6k,7k,-6k\}$，又 $|a_0| = 1$，故 $\sqrt{(6k)^2 + (7k)^2 + (-6k)^2} = 11|k| = 1$. 所以 $k = \pm\frac{1}{11}$，于是 $a_0 = \{\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\}$ 或 $a_0 = \{-\frac{6}{11},-\frac{7}{11},\frac{6}{11}\}$. 也可以直接用公式 $a_0 = \frac{\pm a}{|a|}$ 求得 $a_0 = \{\pm\frac{6}{11},\pm\frac{7}{11},\mp\frac{6}{11}\}$.

(2) $\mathrm{Prj}a = 6\cdot\cos 30° = 3\sqrt{3}$，$a = |a|a_0 = 6a_0$，这里 $a_0 = \frac{a}{|a|}$，$|a_0| = 1$.

6.2.19　解答下列问题：

(1) 设 $a = \{6,5,-4\}$，$b = \{3,-2,3\}$，$c = \{4,-1,-3\}$，求 $2a$，$3a - 2b + 4c$，$ma + nb$；

(2) 已知矢量 $a = \{2,-3,4\}$，求一矢量 b，使 $b // a$，且 $|b| = 3|a|$；

(3) 已知点 $A(1,-2,0)$ 和矢量 $a = \{-3,4,12\}$. 求点 B 的坐标，使 $AB // a$，且 $|AB| = 2|a|$.

解　(1) $2a = 2\{6,5,-4\} = \{12,10,-8\}$，

$$3a - 2b + 4c = \{28,15,-30\},$$

$$ma - nb = \{6m - 3n, 5m + 2n, -4m - 3n\}.$$

(2) 因 $a // b$，且 $|b| = 3|a|$，所以 $b = \pm 3a = \pm\{6,-9,12\}$.

(3) 设 B 点的坐标为 (x,y,z)，因 $AB // a$，且 $|AB| = 2|a|$，即

$$\{x - 1, y + 2, z - 0\} = ka = \{-3k, 4k, 12k\},$$

$$\sqrt{(-3k)^2 + (4k)^2 + (12k)^2} = 2\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 12^2},$$

由此解得 $k = \pm 2$，故点 B 的坐标是 $(-5,6,24)$ 和 $(7,-10,-24)$.

6.2.20　解答下列问题：

(1) 已知一矢量的模为 2，且与 x 轴和 y 轴夹角相等，与 z 轴夹角是它们的二倍，求此矢量；

(2) 已知两点 $M_1(2,5,-3)$，$M_2(3,-2,5)$. 设在线段 M_1M_2 上有

一点 M，使 $M_1M = 3MM_2$，求矢量 OM 的坐标.

解　(1) 由 6.2.14 题可知，$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$，$\gamma = \pi$. 所以 $\mathrm{Prj}_x a = 2\cos\alpha = \sqrt{2}, \mathrm{Prj}_y a = \sqrt{2}, \mathrm{Prj}_z a = 0$.

故所求的点为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ 或 $(0, 0, -2)$.

(2) 设 $\boldsymbol{OM} = \{x, y, z\}$，则 $\boldsymbol{M_1M} = \{x-2, y-5, z+3\}$，$\boldsymbol{MM_2} = \{3-x, -2-y, 5-z\}$ 由题意可得，

$x - 2 = 3(3 - x)$，$y - 5 = 3(-2 - y)$，$z + 3 = 3(5 - z)$.

故 M 点的坐标为 $(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 3)$，或 $\boldsymbol{OM} = \{\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 3\}$.

6.2.21　试证：

(1) 两个非零矢量 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$ 不共线，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{BC} = 2\boldsymbol{l}_1 + 8\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{CD} = 3(\boldsymbol{l}_1 - \boldsymbol{l}_2)$，则 A、B、D 共线.

(2) 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{BC} = -4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{CD} = -5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$，则四边形 $ABCD$ 是梯形.

证　(1) 由 6.2.4 题可知，$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CD} = 5(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2)$. 即 $\boldsymbol{BD} = 5\boldsymbol{AB}$，故 A、B、D 共线；

(2) 因 $\boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{OD} - \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{CD} = -5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{OC} - \boldsymbol{OB} = -4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$,

三式相加，得 $\boldsymbol{OD} - \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{AD} = -8\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{BC}$.

即 $AD \parallel BC$，故 $ABCD$ 是梯形.

6.2.22　设空间四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 的中点分别为 L、M. 求证：$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CB} + \boldsymbol{AD} + \boldsymbol{CD} = 4\boldsymbol{LM}$.

证　设 O 为四边形外任一点，由 6.2.4 题可知，

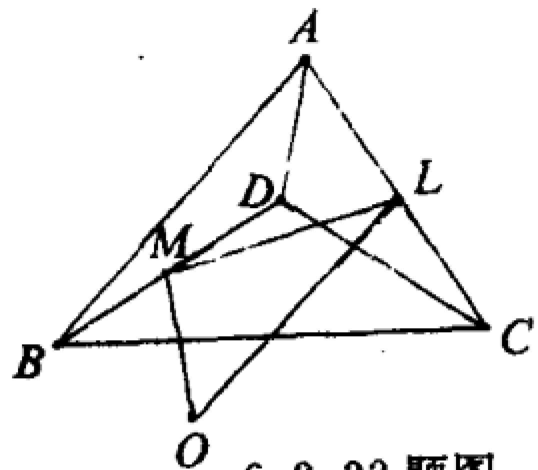
$$\boldsymbol{LM} = \boldsymbol{OM} - \boldsymbol{OL} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OC})$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{AO} + \boldsymbol{CO} + \boldsymbol{OD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CD}).$$

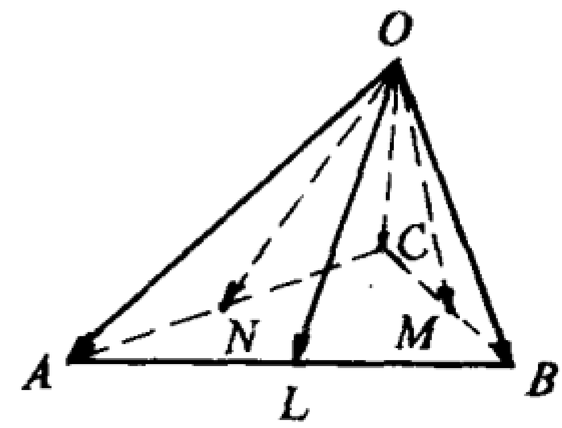
同理　$\boldsymbol{LM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{CO} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{AO} + \boldsymbol{OD}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{CB} + \boldsymbol{AD})$.

即　$2\boldsymbol{LM} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CD}$，$2\boldsymbol{LM} = \boldsymbol{CB} + \boldsymbol{AD}$,

故　$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{CB} + \boldsymbol{AD} + \boldsymbol{CD} = 4\boldsymbol{LM}$.



6.2.22 题图



6.2.23 题图

6.2.23 设四面体 $OABC$ 的三条棱 AB、BC、CA 的中点分别为 L、M、N，求证：$\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OL}+\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{ON}$.

证 由 6.2.4 题可知，

$$\boldsymbol{OL}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}),\quad \boldsymbol{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}),$$

$$\boldsymbol{ON}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OA}),$$

各式两端相加，得

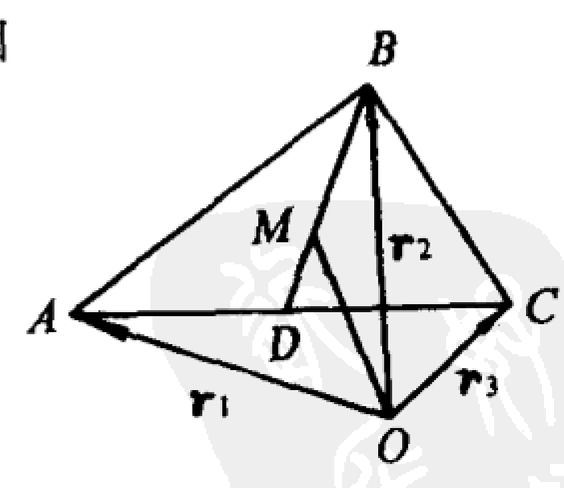
$$\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OL}+\boldsymbol{OM}+\boldsymbol{ON}.$$

6.2.24 设 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，证明：对任一点 O，有

$$\boldsymbol{OM}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}).$$

证 设 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{r}_3$. 因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM}&=\boldsymbol{r}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{BD}\\&=\boldsymbol{r}_2+\frac{2}{3}(\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AD})\\&=\boldsymbol{r}_2+\frac{2}{3}(\boldsymbol{OA}-\boldsymbol{OB}\\&\qquad+\frac{1}{2}\boldsymbol{AC})\\&=\boldsymbol{r}_2+\frac{2}{3}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OA}))\\&=\boldsymbol{r}_2+\frac{2}{3}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_1)\\&=\boldsymbol{r}_2+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3).\end{aligned}$$



6.2.24 题图

故结论成立.

6.2.25 给定空间三角形 ABC 与 $A'B'C'$，M 与 M' 分别是它们的重心.试用矢量 $\boldsymbol{AA'}$，$\boldsymbol{BB'}$，$\boldsymbol{CC'}$ 来表示 $\boldsymbol{MM'}$.

解 在空间中任取一点 O，由 6.2.23 题可知，

$$\boldsymbol{OM}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}),$$

$$\boldsymbol{OM'}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA'}+\boldsymbol{OB'}+\boldsymbol{OC'}).$$

所以 $$\begin{aligned}\boldsymbol{MM'}&=\boldsymbol{OM'}-\boldsymbol{OM}\\&=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA'}-\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB'}-\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC'}-\boldsymbol{OC})\\&=\frac{1}{3}(\boldsymbol{AA'}+\boldsymbol{BB'}+\boldsymbol{CC'}).\end{aligned}$$

6.2.26 三点 A,B,C 共线的充要条件是存在三个均不为零的数 λ_1、λ_2、λ_3，使 $\lambda_1\boldsymbol{OA}+\lambda_2\boldsymbol{OB}+\lambda_3\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{0}$，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

证 必要性. 若 A、B、C 共线，则 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AC}$ 共线. 故 $\boldsymbol{AB}=\lambda\boldsymbol{AC}$ $(\lambda\neq 0,\lambda\neq 1)$. 又 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OA}$，所以 $\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA}=\lambda(\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OA})$，或 $(1-\lambda)\boldsymbol{OA}+\lambda\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{0}$. 令 $\lambda_1=1-\lambda$，$\lambda_2=\lambda$，$\lambda_3=-1$. 即得欲证的结论.

充分性. 若 $\lambda_1\boldsymbol{OA}+\lambda_2\boldsymbol{OB}+\lambda_3\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{0}$，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. 则将 $\lambda_1=-\lambda_2-\lambda_3$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}&(-\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{OA}+\lambda_2\boldsymbol{OB}+\lambda_3\boldsymbol{OC}\\&=\lambda_2(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA})+\lambda_3(\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OA})=\lambda_2\boldsymbol{AB}+\lambda_3\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{AB}=-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}\boldsymbol{AC}$. 故 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AC}$ 共线，即 A、B、C 共线.

6.2.27 已知四面体四个顶点的半径矢量，求证：每个顶点与对面垂心所作的四条直线必共点（称为四面体的重心）. 并求重心的半径矢量.

证 设四面体的四个顶点为 A_i $(i=1,2,3,4)$，各面 $A_2A_3A_4$，$A_1A_3A_4$，$A_1A_2A_4$，$A_1A_2A_3$ 的重心分别为 G_1,G_2,G_3,G_4，由 6.2.23 题可知，

$$\boldsymbol{OG_1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA_2}+\boldsymbol{OA_3}+\boldsymbol{OA_4}),\ \boldsymbol{OG_2}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA_1}+\boldsymbol{OA_3}+\boldsymbol{OA_4}),$$

$$\boldsymbol{OG_3}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA_1}+\boldsymbol{OA_2}+\boldsymbol{OA_4}),\ \boldsymbol{OG_4}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA_1}+\boldsymbol{OA_2}+\boldsymbol{OA_3}).$$

在 A_1G_1 及 A_2G_2 上分别取一点 G 及 G'，使

$$OG = \lambda_1 OA_1 + \lambda_2 OG_1 = \lambda_1 OA_1 + \frac{\lambda_2}{3}(\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_4) \quad (\lambda_1 + \lambda_2 = 1),$$

$$OG' = \mu_1 OA_2 + \mu_2 OG_2 = \mu_1 OA_2 + \frac{\mu_2}{3}(\mathbf{OA}_1 + \mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_4) \quad (\mu_1 + \mu_2 = 1),$$

若 $OG = OG'$，则有 $\lambda_1 \mathbf{OA}_1 + \frac{\lambda_2}{3}(\mathbf{OA}_2 + \mathbf{OA}_3 + \mathbf{OA}_4)$

$$= \mu_1 OA_2 + \frac{\mu_2}{3}(OA_1 + OA_3 + OA_4).$$

比较等式两边的系数，得 $\mu_1 = \frac{\lambda_2}{3}$，$\mu_2 = 3\lambda_1$，由此解得

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = \frac{3}{4}, \mu_1 = \frac{1}{4}, \mu_2 = \frac{3}{4}.$$

于是 A_1G_1 及 A_2G_2 交于点 G. 其矢径

$$OG = \frac{1}{4}(OA_1 + OA_2 + OA_3 + OA_4).$$

同理，A_3G_3 及 A_4G_4 也过点 G，即它们共点于 G，结论得证.

6.2.28　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\mathbf{AB}$ 及 $\mathbf{AC}$，试求：(1) 内角平分线 AL 上的一个矢量；(2) 高线 AD 上的一个矢量.

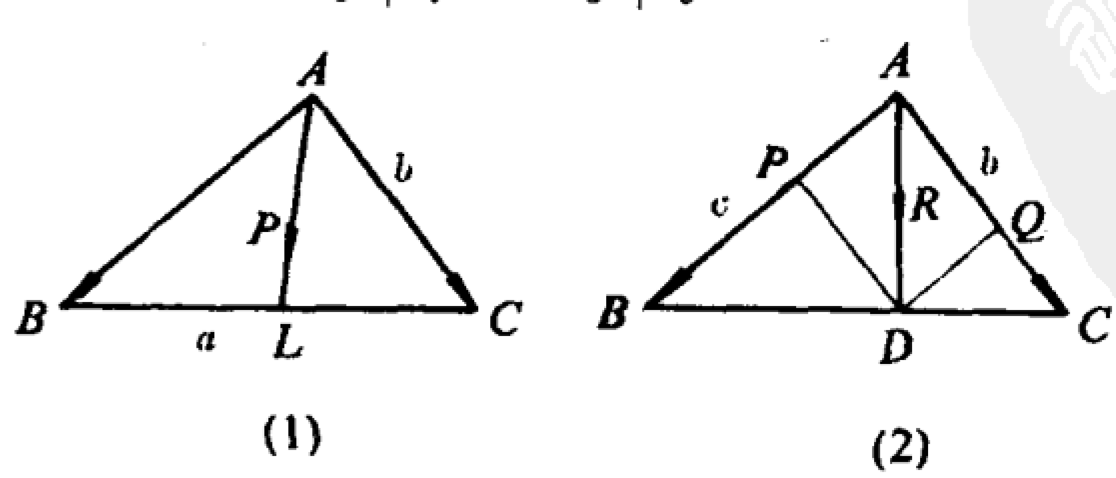
解　(1) 设 a、b、c 顺次表示 $\triangle ABC$ 的三边长，由角平分线定理

$$BL : LC = c : b,$$

和比例性质，$\frac{BL}{BL + LC} = \frac{c}{b + c}$，即 $\frac{BL}{BC} = \frac{c}{b + c}$，$BL = \frac{BC \cdot c}{b + c}$，

即 $|\mathbf{BL}| = \frac{|\mathbf{BC}| \cdot c}{b + c}$，所以

$$\mathbf{BL} = \frac{c}{b + c}\mathbf{BC} = \frac{c}{b + c}(\mathbf{AC} - \mathbf{AB}).$$



6.2.26 题图

又　$\boldsymbol{AL} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BL} = \boldsymbol{AB} + \dfrac{c}{b+c}(\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{AB})$

$= \dfrac{1}{b+c}(c\boldsymbol{AC} + b\boldsymbol{AB}).$

故 AL 上任一矢量 $\boldsymbol{AP} = k(c\boldsymbol{AC} + b\boldsymbol{AB}),\ k \neq 0.$

(2) 这里 $\boldsymbol{AD}$ 与 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{AC}$ 没有直接关系，为此，作一平行四边形 $APDQ$，在 $\triangle APD$ 中，$\dfrac{AP}{\sin\angle ADP} = \dfrac{AD}{\sin\angle APD}$，所以 $AP = \dfrac{\cos C}{\sin A}AD.$

同理 $AQ = \dfrac{\cos B}{\sin A}AD$，所以

$$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{AQ} = \frac{\cos C}{\sin A}AD\left(\frac{\boldsymbol{AB}}{c}\right) + \frac{\cos B}{\sin A}AD\left(\frac{\boldsymbol{AC}}{b}\right)$$

$$= \frac{AD}{\sin A}\left(\frac{\cos C}{c}\boldsymbol{AB} + \frac{\cos B}{b}\boldsymbol{AC}\right).$$

即 AD 上任一矢量 $\boldsymbol{AR}$ 为

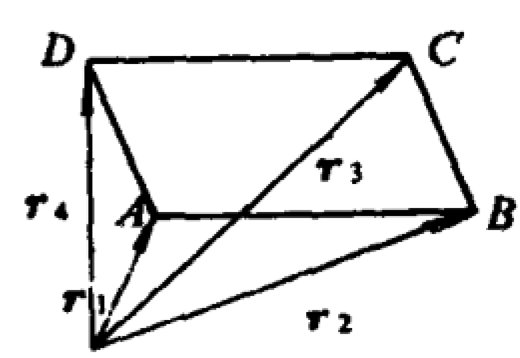
$$\boldsymbol{AR} = k\left(\frac{\cos C}{c}\boldsymbol{AB} + \frac{\cos B}{b}\boldsymbol{AC}\right),\quad k \neq 0.$$

6.2.29　已知平行四边形的三个顶点为 A、B、C，其矢量半径分别为 $\boldsymbol{r}_1$、$_2$、$\boldsymbol{r}_3$. 求与顶点 B 相对的第四个顶点 D 的矢径 $\boldsymbol{r}_4$.

解　$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$，由于 $AB \parallel CD$，且 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{CD}|$，故 $\boldsymbol{CD} = -\boldsymbol{AB}$.

所以，D 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{AB}$$
$$= \boldsymbol{r}_3 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$
$$= \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3.$$



6.2.29 题图

2. 数量积

6.2.30　设给定矢量 $\boldsymbol{a} = \{1, 2, -4\}$，$\boldsymbol{b} = \{3, -2, 1\}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$；　(2) 求 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 和 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；　(3) 求 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

解　(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = -5.$

(2) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21},$

$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$

因 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{-5}{7\sqrt{6}}$，所以

$$(\stackrel{\wedge}{a,b}) = \arccos\frac{-5}{7\sqrt{6}}.$$

(3) $\mathrm{Prj}_a b = |b|\cos(\stackrel{\wedge}{a,b}) = \frac{-5}{\sqrt{21}}$ 或 $\mathrm{Prj}_a b = \frac{a\cdot b}{|a|} = \frac{-5}{\sqrt{21}}$.

6.2.31　设一平面平行于两矢量 $3i + j$ 和 $i + j - 4k$，证明：矢量 $2i - 6j - k$ 垂直于这个平面.

证　因 $(3i + j)\cdot(2i - 6j - k)$

$$= 3\cdot 2 + 1\cdot(-6) + 0\cdot(-1) = 0;$$

$$(i + j - 4k)\cdot(2i - 6j - k) = 0.$$

所以 $2i - 6j - k$ 垂直于 $3i + j$ 及 $i + j - 4k$，故 $2i - 6j - k$ 垂直于与两矢量平行的平面.

6.2.32　已知矢量 $a = \{a_1, a_2, a_3\}$，$b = \{b_1, b_2, b_3\}$，$c = \{c_1, c_2, c_3\}$. 求 (1) $\mathrm{Prj}_b a$；(2) $\mathrm{Prj}_a b$；(3) $\mathrm{Prj}_c(a + b)$；(4) $\mathrm{Prj}_{a+b}c$.

解　(1) $\mathrm{Prj}_b a = \frac{a\cdot b}{|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

(2) $\mathrm{Prj}_a b = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$.

(3) $$\mathrm{Prj}_c(a + b) = \frac{(a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$
$$= \frac{a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 + a_3c_3 + b_3c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}.$$

(4) $$\mathrm{Prj}_{a+b}c = \frac{(a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3}{\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2}}.$$

6.2.33　设三个非零矢量 a、b、c 等长，且两两垂直. 求证：$a + b + c$ 与 a、b、c 所夹的角相等.

证　设 a、b、c 与 $(a + b + c)$ 的夹角分别为 α、β、γ，则

$$\cos\alpha = \frac{a\cdot(a + b + c)}{|a||a + b + c|} = \frac{a^2}{|a||a + b + c|} = \frac{|a|}{|a + b + c|},$$

同理　$\cos\beta = \frac{|b|}{|a + b + c|}$，　$\cos\gamma = \frac{|c|}{|a + b + c|}$.

因 $|a| = |b| = |c|$，所以 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0$.

又因 $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha = \beta = \gamma$.

6.2.34　证明下列结论：

(1) 若 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD}=0$,则 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AD}$;

(2) 若 $\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{BC}=0,\boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{CA}=0$,则 $\boldsymbol{HC}\cdot\boldsymbol{AB}=0$.

证 (1) 由 6.2.4 题可知,

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{AB}\cdot(\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{AC})=\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC},$$

又由条件 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD}=0$,即有 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC}$.

(2) 因 $\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{CA}=0$,

由(1)的结论得 $\begin{cases}\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{HB}=\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{HC},\\ \boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{HC}=\boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{HA}.\end{cases}$

$\boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{HC}=\boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{HA}=\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{HB}=\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{HC}$,

即 $\boldsymbol{HB}\cdot\boldsymbol{HC}=\boldsymbol{HA}\cdot\boldsymbol{HC},\ \boldsymbol{HC}\cdot(\boldsymbol{HB}-\boldsymbol{HA})=0$,

亦即 $\boldsymbol{HC}\cdot\boldsymbol{AB}=0$.

6.2.35 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,求证:

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$,

并说明各个等式的几何意义.

证 (1)
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2.$$

其几何意义表示平行四边形的两条对角线及其夹角余弦的乘积等于两邻边的平方差.

(2)
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2).$$

其几何意义表示平行四边形两条对角线的平方和等于两邻边平方和的二倍.

注 一个向量的平方即为该向量与自身的内积.

6.2.36 证明下列各题:

(1) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 $\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2}$ 和 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 垂直,这里 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 均为非零向量;

(2) 三角形三边上的高共点.

证 (1) 因 $\boldsymbol{a}\cdot\left[\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2}\right]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

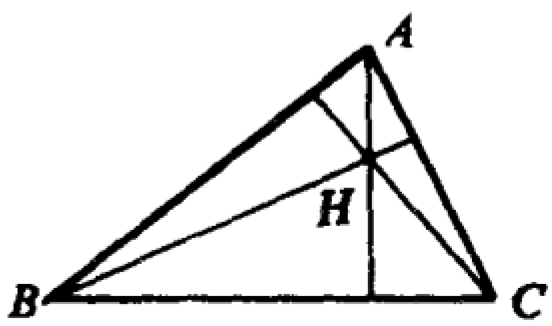
所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2}$.

同理可证,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

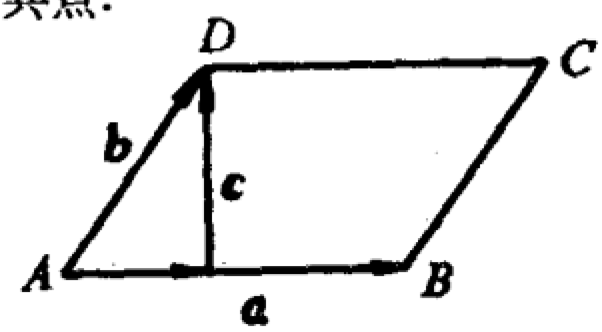
(2) 设 H 为 $\triangle ABC$ 两边 BC、CA 上的高的交点，则

$$\mathbf{HA}\cdot\mathbf{BC}=0,\quad \mathbf{HB}\cdot\mathbf{CA}=0.$$

由 6.2.34 题的结论(2) 可得，$\mathbf{HC}\cdot\mathbf{AB}=0$，这说明 AB 与 HC 垂直，即 AB 的高线也交于点 H，故三条高共点.



6.2.36 题图



6.2.37 题图

6.2.37　在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $\mathbf{AB}=\mathbf{a}$，$\mathbf{AD}=\mathbf{b}$，试求此平行四边形底边 AB 上的高线矢量.

解　设高线矢量为 c，因 $\mathbf{c}=\pm(\mathbf{b}-\mathbf{AE})$，又

$$|\mathbf{a}||\mathbf{AE}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos A=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

所以 $|\mathbf{AE}|=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$，$\mathbf{AE}=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\cdot\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$，

故 $\mathbf{c}=\pm\left(\mathbf{b}-\dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}\right)$.

6.2.38　已知两个矢量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，求 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ 的充要条件.

解　$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\Longleftrightarrow|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$

$\Longleftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

$\Longleftrightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 之一为零.

本题的几何意义是：当 $\mathbf{a}\neq0$，$\mathbf{b}\neq0$ 时，以 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 为邻边所作的平行四边形的两条对角线矢量长度相等的充要条件是 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，即此平行四边形为矩形.

6.2.39　如果一个四面体有两对对棱互相垂直，则第三对对棱也必垂直，而且三对对棱的平方和相等.

证　设 $AB\perp CD$，$BC\perp AD$，则 $\mathbf{AB}\cdot\mathbf{CD}=0$，$\mathbf{AD}\cdot\mathbf{BC}=0$，由 6.2.34 题可得

$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}=\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AD},\quad \mathbf{AD}\cdot\mathbf{AB}=\mathbf{AD}\cdot\mathbf{AC},$$

由这两式得

$$\mathbf{AB}\cdot\mathbf{AC}=\mathbf{AD}\cdot\mathbf{AC},\quad \mathbf{AC}\cdot(\mathbf{AB}-\mathbf{AD})=0,$$

即 $\mathbf{AC}\cdot\mathbf{BD}=0$. 故 $AC\perp BD$.

又因 $AB^2 + CD^2 = AB^2 + (AD - AC)^2$

$$= AB^2 + AD^2 + AC^2 + 2AD \cdot AC, \quad (1)$$

$$BC^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 - 2AB \cdot AC, \quad (2)$$

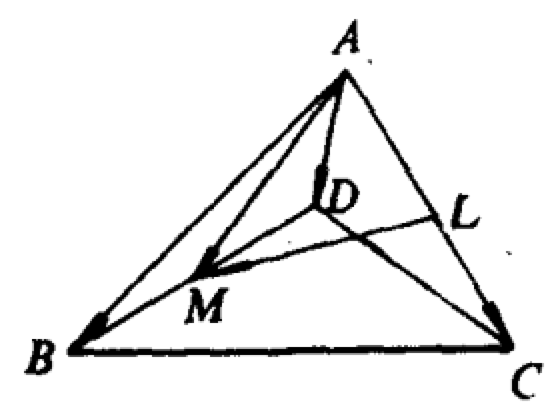
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD. \quad (3)$$

因(1)、(2)、(3) 式右端相同,故

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2.$$

注 见 6.2.35 题的注.

6.2.40 求证:空间四边形四条边的平方和等于对角线平方和加上对角线中点连线平方的四倍.



6.2.40 题图

证 设 L、M 分别为空间四边形 $ABCD$ 对角线 AC、BD 的中点,则

$$\boldsymbol{AM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AD}).$$

又 $\boldsymbol{AM} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{LM}$,

所以 $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{AC} + 2\boldsymbol{LM}, \quad (1)$

同理可得 $\boldsymbol{CB} + \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{CA} + 2\boldsymbol{LM}, \quad (2)$

$$\boldsymbol{BD} = \boldsymbol{CD} - \boldsymbol{CB}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{BD} = \boldsymbol{AD} - \boldsymbol{AB} \quad (4)$$

把(1)、(2)、(3)、(4) 式两边平方相加,得

$$\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{AD}^2 + \boldsymbol{CB}^2 + \boldsymbol{CD}^2 = \boldsymbol{AC}^2 + \boldsymbol{BD}^2 + 4\boldsymbol{LM}^2.$$

注 见 6.2.35 题的注.

6.2.41 已知矢量 $\boldsymbol{a} = \{3, -1, 5\}$, $\boldsymbol{b} = \{2, 3, -7\}$. 试求一矢量 $\boldsymbol{x}$,使它与 z 轴垂直,且满足 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = 5$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = -4$.

解 设 $\boldsymbol{x} = \{x, y, z\}$,由题设可得

$$\begin{cases} 3x - y + 5z = 5, \\ 2x + 3y - 7z = -4, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + k \cdot z = 0. \ (k \neq 0), \end{cases} \quad 即 \begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 3y = -4, \\ z = 0. \end{cases}$$

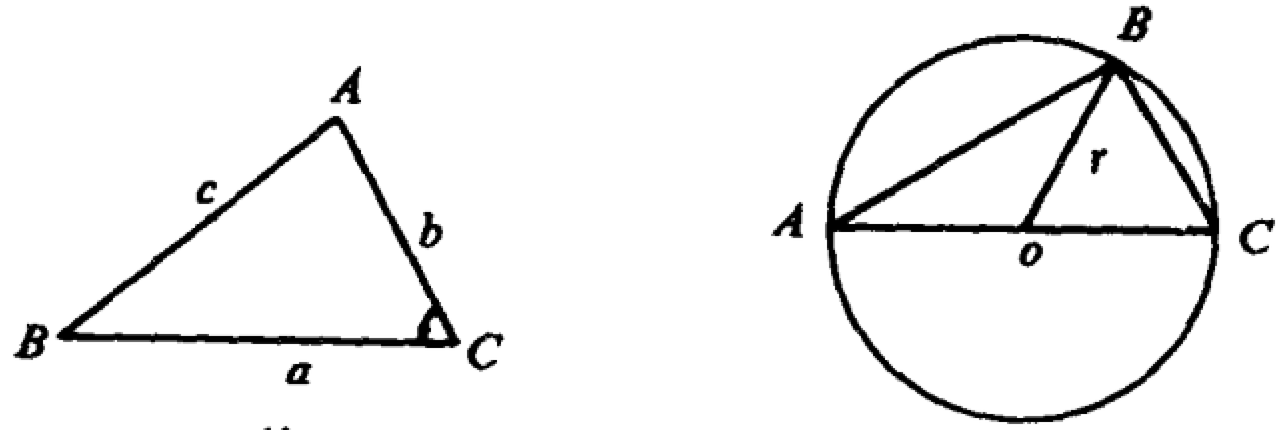
由此可得 $\boldsymbol{x} = \{1, -2, 0\}$.

6.2.42 设有一质点位于点 $A(3, -1, 2)$,它在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线运动到点 $B(4, 1, 2 + 3\sqrt{2})$,已知力的方向角为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$,大小为 100,求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

解　力 $\boldsymbol{F}=\{x,y,z\}=\{|\boldsymbol{F}|\cos\alpha,|\boldsymbol{F}|\cos\beta,|\boldsymbol{F}|\cos\gamma\}=\{50,50,50\sqrt{2}\}$. 又方向 $\boldsymbol{s}=\{4-3,1-(-1),2+3\sqrt{2}-2\}=\{1,2,3\sqrt{2}\}$，所以，$\boldsymbol{F}$ 所作的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=450$.

6.2.43　利用数量积证明：

(1) 三角形的余弦定理；(2) 直径所对的圆周角是直角.



(1)　　6.2.43 题图　　(2)

证　(1) 设 $\triangle ABC$ 各边为 a,b,c，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}-\boldsymbol{CA}$，

或　$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}^2+\boldsymbol{CA}^2-2\boldsymbol{CA}\cdot\boldsymbol{CB}$，

即
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

其它两个等式同理可证.

(2) 如图(2) 所示，

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OB}$，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{BO}+\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{AO}-\boldsymbol{OB}$，

因 $\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{BC}=(\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OB})\cdot(\boldsymbol{AO}-\boldsymbol{OB})=\boldsymbol{AO}^2-\boldsymbol{OB}^2$
$$=r^2-r^2=0.$$

所以 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BC}$ 垂直，即 $\angle B$ 为 90°. 结论得证.

6.2.44　设矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,-1,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{3,-4,5\}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda$ 为实数，试证其模最小的矢量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{b}$.

证　设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，于是 $|\boldsymbol{x}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+\lambda^2|\boldsymbol{b}|^2+2\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标代入得，
$$|\boldsymbol{x}|^2=3+24\lambda+50\lambda^2=50(\lambda+\frac{6}{25})^2+\frac{3}{25}.$$

当 $\lambda=-\dfrac{6}{25}$ 时，模 $|\boldsymbol{x}|$ 最小. 这时
$$\boldsymbol{x}=\{1,-1,1\}+(\frac{-6}{25})\{3,-4,5\}=\{\frac{7}{25},\frac{-1}{25},\frac{-5}{25}\}.$$

且有 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 故结论正确.

6.2.45 设四边形 $ABCD$ 各边长为 a,b,c,d，且对角线相互垂直，求证：各边之长也是 a、b、c、d 的任意一个四边形的两条对角线也必互相垂直.

证 设四边形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 各边矢量分别是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{DA}=\boldsymbol{d}$；$\boldsymbol{A'B'}=\boldsymbol{a'},\boldsymbol{B'C'}=\boldsymbol{b'},\boldsymbol{C'D'}=\boldsymbol{c'},\boldsymbol{D'A'}=\boldsymbol{d'}$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a'}|=a,|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b'}|=b,|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c'}|=c,|\boldsymbol{d}|=|\boldsymbol{d'}|=d$.

由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0$ 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}^2&=[-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]^2\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{d}^2-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{c}^2=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BD}$,

同理 $\boldsymbol{d'}^2-\boldsymbol{a'}^2+\boldsymbol{b'}^2-\boldsymbol{c'}^2=2\boldsymbol{A'C'}\cdot\boldsymbol{B'D'}$,

由条件 $|\boldsymbol{a'}|=|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b'}|=|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c'}|=|\boldsymbol{c}|,|\boldsymbol{d'}|=|\boldsymbol{d}|$ 知

$$\boldsymbol{AC}\cdot\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{A'C'}\cdot\boldsymbol{B'D'}.$$

故由 $AC\perp BD$ 可推出 $A'C'\perp B'D'$.

6.2.46 一动点与点 $M_0(1,2,3)$ 所成的矢量与矢量 $\boldsymbol{n}=\{3,-2,1\}$ 垂直，求动点的轨迹.

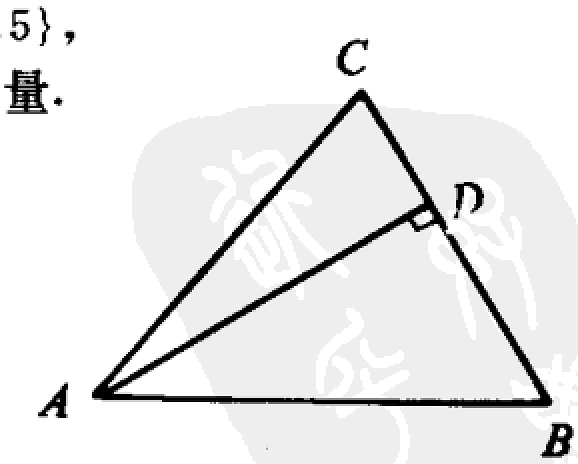
解 设动点为 $M(x,y,z)$，则

$$\boldsymbol{M_0M}=\{x-1,y-2,z-3\}.$$

由条件 $0=\boldsymbol{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=3(x-1)-2(y-2)+1\cdot(z-3)$ 可得

$$3x-2y+z-2=0.$$

6.2.47 已知 $\triangle ABC$ 中，$\boldsymbol{AB}=\{5,2,5\}$，$\boldsymbol{BC}=\{2,-4,1\}$，求 BC 边上高矢量的分量.



6.2.47 题图

解 因 $\cos\angle B=\dfrac{\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{BA}}{|\boldsymbol{BC}||\boldsymbol{BA}|}$

$$=\frac{-10+8-5}{\sqrt{54}\sqrt{21}}=\frac{-7}{9\sqrt{14}},$$

而 $|\boldsymbol{BD}|=\mathrm{Prj}_{BC}\boldsymbol{BA}$

$$=\sqrt{54}\cdot\frac{-7}{9\sqrt{14}}=\frac{-\sqrt{21}}{3},$$

所以 $\boldsymbol{BD}=-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\cdot\dfrac{\boldsymbol{BC}}{|\boldsymbol{BC}|}=\dfrac{-\sqrt{21}}{3}\cdot\dfrac{\{2,-4,1\}}{\sqrt{21}}$

$$=\{-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\}.$$

故 $AD = AB + BD = AB + BD = \{\frac{13}{3},\frac{10}{3},\frac{14}{3}\}$.

3. 矢量积

6.2.48　已知矢量 $\boldsymbol{a}=\{3,2,-1\}$，　$\boldsymbol{b}=\{4,-1,3\}$.

(1) 求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积及其在坐标轴上的投影和分矢量；

(2) 求 $3\boldsymbol{b}$ 与 $-2\boldsymbol{a}$ 的矢量积；

(3) 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{a}$；

(4) 求以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积与对角线的长.

解　(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在坐标轴的投影为 $5,-13,-11$；

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在坐标轴上的分矢量为 $5\boldsymbol{i},-13\boldsymbol{j},-11\boldsymbol{k}$.

(2) $3\boldsymbol{b}\times(-2\boldsymbol{a})=-6(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=6(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$$=\{30,-78,-66\}.$$

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{a}=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\times(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$

$$=(-2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})-(-3\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

(4) $S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+(-13)^2+(-11)^2}=\sqrt{315}$.

对角线的长 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7^2+1^2+2^2}=3\sqrt{6}$；

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{26}.$$

6.2.49　解答下列问题.

(1) 求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=\{3,+4,-2\}$ 和 z 轴的单位矢量；

(2) 求同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的单位矢量.

解　(1) 所求矢量 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$$=\lambda\{4,-3,0\}.$$

由题意，$1=|\boldsymbol{n}|=\sqrt{16\lambda^2+9\lambda^2}=5|\lambda|$，由此可得 $\lambda=\pm\frac{1}{5}$.

所以 $n = \pm \frac{1}{5}\{4, -3, 0\}$.

(2) 因为 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \{1, -2, 2\}$ 是垂直于 a · b 的矢量,则与其共线的单位矢量是

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}\{1, -2, 2\} = \pm \{\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\}.$$

6.2.50 解答下列问题:

(1) 已知矢量 a 与 b 的夹角为$\frac{\pi}{6}$,且 $|a| = 5, |b| = 6$. 求 $|a \times b|$;

(2) 证明:$(a - b) \times (a + b) = 2a \times b$,并说明其几何意义.

解 (1) 因 $|a \times b|$ 表示以 $|a|$、$|b|$ 为邻边的平行四边形的面积,

故
$$|a \times b| = |a||b|\sin(\widehat{a,b}) = 5 \times 6 \times \sin\frac{\pi}{6} = 15.$$

(2) 因
$$\begin{aligned}(a - b) \times (a + b) &= (a - b) \times a + (a - b) \times b \\ &= 0 - b \times a + a \times b - 0 = 2a \times b.\end{aligned}$$

故结论正确. 其几何意义是:一个平行四边形的面积等于以该平行四边形的对角线为边所构成的平行四边形的面积之半.

6.2.51 已知 xoy 平面上的三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$,用矢量方法证明:$\triangle ABC$ 的面积为

$$s = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

证 设 xoy 平面上的三点为 $A(x_1, y_1, 0)$, $B(x_2, y_2, 0)$, $C(x_3, y_3, 0)$,则

$$\boldsymbol{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0\}, \ \boldsymbol{CB} = \{x_2 - x_3, y_2 - y_3, 0\}.$$

故
$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{CB}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & 0 \end{matrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2}|0i + 0j + [(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_3)]k| \\ &= \pm \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_3)] \\ &= \pm [-x_2y_3 + x_3y_2 + x_1y_3 - x_3y_1 - x_1y_2 + x_2y_1] \end{aligned}$$

$$=\pm\left[(-1)\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_3&y_3\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right]$$

$$=\pm\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}.$$ 故结论成立.

6.2.52　利用矢量积推导三角形的正弦定理.

证　设 $\triangle ABC$ 三边分别为 a,b,c,则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}||\boldsymbol{AC}|\sin A,$$

同理　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{BA}\times\boldsymbol{BC}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{CA}\times\boldsymbol{CB}|$,

即$\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}||\boldsymbol{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\boldsymbol{BA}||\boldsymbol{BC}|\sin B$

$$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{CA}||\boldsymbol{CB}|\cdot\sin C,$$

所以　$|\boldsymbol{AC}|\sin A=|\boldsymbol{BC}|\sin B, |\boldsymbol{BA}|\sin B=|\boldsymbol{CA}|\sin C.$

$$\frac{|\boldsymbol{AC}|}{\sin B}=\frac{|\boldsymbol{BC}|}{\sin A},\ \frac{|\boldsymbol{BA}|}{\sin C}=\frac{|\boldsymbol{CA}|}{\sin B}$$

即　$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$,　$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$.

综合两式有:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,故结论成立.

6.2.53　设 $\boldsymbol{a}_1'=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2'=\mu_1\boldsymbol{a}_1+\mu_2\boldsymbol{a}_2$,其中 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_1'$、$\boldsymbol{a}_2'$ 均为非零的不共线矢量.求证:分别以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2'$ 为邻边的两个平行四边形面积相等的充要条件是 $|\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1|=1$.

证　因 $|\boldsymbol{a}_2'\times\boldsymbol{a}_2'|=|[\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2)\times(\mu_1\boldsymbol{a}_1+\mu_2\boldsymbol{a}_2]|$

$$=|\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1||\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|.$$

所以 $|\boldsymbol{a}_1'\times\boldsymbol{a}_2'|=|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|$ 的充要条件为 $|\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1|=1$.
故结论成立.

6.2.54　试用三角形顶点的矢量表示三角形的面积.证明:如果 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=0$,则点 $A(\boldsymbol{r}_1)$,$B(\boldsymbol{r}_2)$ 和 $C(\boldsymbol{r}_3)$ 必共线.

解　(1) 设三角形的三个顶点为 $A(\boldsymbol{r}_1)$, $B(\boldsymbol{r}_2)$ 和 $C(\boldsymbol{r}_3)$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$,$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$,故

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\frac{1}{2}|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_1|$$

$$= \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1|.$$

(2) 由(1)可知，若 $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0}$，则 $S = 0$，这时 A,B,C 三点共线.

6.2.55　证明下列结论：

(1) 若 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ 共线；

(2) 试证空间中的点 $A(2,4,1), B(3,7,5), C(4,10,9)$ 共线.

证　(1) 因

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{c}$$
$$= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

由条件 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$ 可得，$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ 共线.

(2) 设 $A(\boldsymbol{r}_1) = \{2,4,1\}, B(\boldsymbol{r}_2) = \{3,7,5\}, C(\boldsymbol{r}_3) = \{4,10,9\}$.

则 $\boldsymbol{AB} = \{1,3,4\}, \boldsymbol{AC} = \{2,6,8\}$，因为 $\boldsymbol{AC} = 2\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC} \parallel \boldsymbol{AB}$，且均过 A 点，故 A、B、C 三点共线.

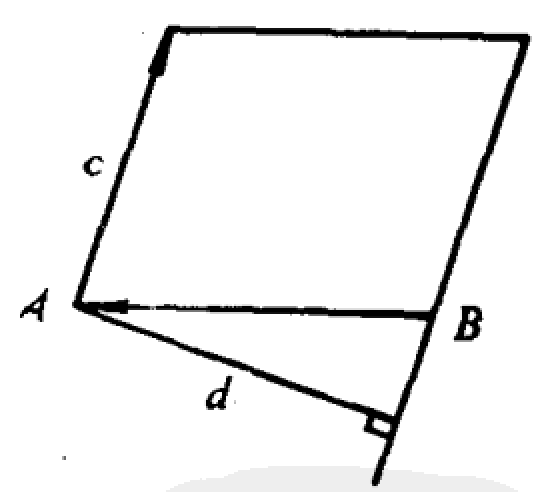
6.2.56　一直线通过点 $B(1,2,3)$ 且与矢量 $\boldsymbol{c} = \{6,6,7\}$ 平行. 求点 $A(3,4,2)$ 到此直线的距离 d.

解　以 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 为边作平行四边形，其高为 d，则

$$|\boldsymbol{BA} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{c}|d,$$

即 $d = \dfrac{|\{2,2,-1\} \times \{6,6,7\}|}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2}}$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{11}.$$



6.2.56 题图

6.2.57　已知两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件.

解　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 共线 $\Longleftrightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ 共线} (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}).$$

6.2.58　证明下列结论：

(1) 以矢量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{m} - 4\boldsymbol{n}$ 为边的平行四边形的面

积为 11,这里 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 是互相垂直的单位矢量.

(2) 以矢量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 为边的平行四边形是菱形,并求对角线的长.

证　(1) $S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|(2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n})\times(\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n})|$

$$=|2\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}-8\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}-12\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}|$$

$$=|11\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}|=11.$$

(2) 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$,

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\{3,-1,0\}\cdot\{1,3,-2\}=0.$

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,故平行四边形是菱形.

对角线的长为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{10}$,

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$$

6.2.59　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 均不为零.证明:$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不垂直时,$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 共线.并举例说明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

证　利用分解公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}.$$

所以 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的充要条件是 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$.

又 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不垂直时,$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\neq 0$,于是 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}\boldsymbol{c}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 共线.

一般地,$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.例如,

$\boldsymbol{a}=\{1,0,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-2,0\}$, $\boldsymbol{c}=\{-1,2,1\}$.

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\{5,0,5\}$, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\{1,-2,-1\}$.

4. 混合积

6.2.60　已知矢量 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-1,3\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,-2,0\}$.计算下列各式:

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$;　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;　(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

解　(1) 原式 $=[2\cdot 1+(-3)(-1)+1\cdot 3]\cdot\{1,-2,0\}$

$$-[2\cdot1+(-3)(-2)+1\cdot0]\cdot\{1,-1,3\}$$
$$=\{8,-16,0\}-\{8,-8,24\}$$
$$=\{0,-8,-24\}.$$

(2) 原式 $=(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=\{0,-1,-1\}.$$

(3) 原式 $=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})$

$$=(-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})=2.$$

(4) 原式 $=(-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})$

$$=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}=\{2,1,21\}.$$

6.2.61 已知矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,0,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-2,0\}$，$\boldsymbol{c}=\{-1,2,1\}$. 求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 及在坐标轴上的分矢量.

解法 1 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&1\\1&-2&0\end{vmatrix}\times(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

$$=(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\times(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-2\\-1&2&1\end{vmatrix}=\{5,0,5\}.$$

其在坐标轴上的分矢量为，$5\boldsymbol{i}$，$0\boldsymbol{j}$ 和 $5\boldsymbol{k}$，

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=\{1,-2,-1\}.$$

其在坐标轴上的分矢量为 $\boldsymbol{i}$，$-2\boldsymbol{j}$，$-\boldsymbol{k}$.

解法 2 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

$$=\{1,-2,0\}[1\cdot(-1)+0\cdot2+1\cdot1]$$
$$-\{1,0,1\}[1\cdot(-1)+(-2)\cdot2+0\cdot1]$$
$$=\{5,0,5\}.$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$
$$=\{1,-2,0\}[-1+0+1]-\{-1,2,1\}[1+0+0]$$
$$=\{1,-2,-1\}.$$

6.2.62　求由矢量$\boldsymbol{OA}=\{1,1,1\}$,$\boldsymbol{OB}=\{0,1,1\}$和$\boldsymbol{OC}=\{-1,0,1\}$所决定的平行六面体的体积和三角锥的体积.

解　$$V=|(\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{OB})\cdot\boldsymbol{OC}|=\left|\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}\right|=1,$$

$$V_{\triangle}=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}.$$

6.2.63　证明矢量$\boldsymbol{A}=\{3,4,5\}$,$\boldsymbol{B}=\{1,2,2\}$和$\boldsymbol{C}=\{9,14,16\}$共面.

证　三矢量共面的条件是$[ABC]=(A\times B)\cdot C=0$,由于

$$(A\times B)\cdot C=\begin{vmatrix}9&14&16\\3&4&5\\1&2&2\end{vmatrix}=0.$$

故三个矢量A、B、C共面.

6.2.64　求四点$A(a_1,a_2,a_3)$,$B(b_1,b_2,b_3)$,$C(c_1,c_2,c_3)$,$D(d_1,d_2,d_3)$共面的充要条件.

解　A、B、C、D四点共面$\Longleftrightarrow\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AC}$、$\boldsymbol{AD}$共面

$$\Longleftrightarrow[\boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{AC}\ \boldsymbol{AD}]=0.$$

$$\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}b_1-a_1&b_2-a_2&b_3-a_3\\c_1-a_1&c_2-a_2&c_3-a_3\\d_1-a_1&d_2-a_2&d_3-a_3\end{vmatrix}=0.$$

6.2.65　若三矢量$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$不共面,求证:$2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q},3\boldsymbol{q}-5\boldsymbol{r},2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{r}$必共面.

证　因$[(2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q})(3\boldsymbol{q}-5\boldsymbol{r})(2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{r})]$

$$\begin{aligned}&=[(2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q})\times(3\boldsymbol{q}-5\boldsymbol{r})]\cdot(2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{r})\\&=[6(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})-10(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})-15(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})]\cdot(2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{r})\\&=12(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{p}-20(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}-30(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}\\&\quad+30(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-50(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}-75(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}\\&=30(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-30(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

且$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$不共面,故有$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}=0$,
所以,$[(2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q})(3\boldsymbol{q}-5\boldsymbol{r})(2\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{r})]=0$.即三矢量共面.

6.2.66　若三矢量$\boldsymbol{OA},\boldsymbol{OB},\boldsymbol{OC}$满足

$$\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}\times\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{0}.$$

求证：(1) 三个已知矢量共面； (2) 三点 A、B、C 共线.

证 (1) 作 $\boldsymbol{OA}$ 与等式两边的数量积，则有

$$\boldsymbol{OA}\cdot(\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}\times\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{OB})=\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{OA}\cdot(\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC})=0$, $[\boldsymbol{OA}\ \boldsymbol{OB}\ \boldsymbol{OC}]=0$.

故结论正确.

(2) 由(1)的结论可知，$\boldsymbol{OA}=\lambda\boldsymbol{OB}+\mu\boldsymbol{OC}$. 代入上式，得

$$\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OC}\times(\lambda\boldsymbol{OB}+\mu\boldsymbol{OC})+(\lambda\boldsymbol{OB}+\mu\boldsymbol{OC})\times\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{0}.$$

即 $(1-\lambda-\mu)(\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC})=\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda+\mu=1$. 又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{OB}-(\lambda\boldsymbol{OB}+\mu\boldsymbol{OB})\\&=\mu(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OC})=\mu\boldsymbol{CB},\end{aligned}$$

所以 A、B、C 共线.

注意，这里也可将已知条件写为：

$$(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OC})\times(\boldsymbol{OC}-\boldsymbol{OA})=\boldsymbol{0}.\ \text{即}\ \boldsymbol{CB}\times\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{0}.$$

故 A、B、C 三点共线.

6.2.67 证明下列结论：

(1) $|[\boldsymbol{abc}]|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$，并说明何时等式成立；

(2) 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

证 (1) 由于 $|[\boldsymbol{abc}]|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积，其数值等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 乘以矢量 $\boldsymbol{c}$ 在垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在平面轴上的投影. 故结论显然正确. 仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 互相垂直或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中至少有一个是零矢量时，等号成立.

(2) 因 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

又由 $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ 可得，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

6.2.68 解下列各题：

(1) 求四面体的体积，已知四个顶点为

$A(-1,0,4)$, $B(3,-2,7)$, $C(0,2,-5)$, $D(2,8,3)$；

(2) 若四面体四个顶点为 $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$, D 在 y 轴上，其体积为 5，求点 D 的坐标.

解　(1)$V=\frac{1}{6}|[\boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{AC}\ \boldsymbol{AD}]|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}4&-2&3\\1&2&-9\\3&8&-1\end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{6}\times 338=\frac{169}{3}.$

(2) 因 $V=5=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-2&y-1&1\\-3&y&-1\\-2&y+1&-3\end{vmatrix}\right|.$

即　$|-20y+10+16y-8|=30,$

由此解得 $y=-7$ 或 $y=8$. 故 D 点的坐标为$(0,-7,0)$或$(0,8,0)$.

6.2.69　求证$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$. 再由三角形的三边推导它的面积.

证　把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

和　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{n}^0$

两边分别平方并相加,得

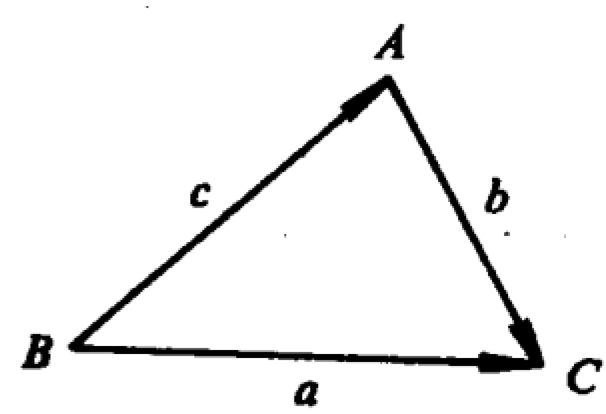
$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$

$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

$\quad+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$.　故结论得证.



6.2.69 题图

在图中,设 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{a},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{c}$,于是

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

由上面结论,得

$$S^2_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\frac{1}{4}[|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]$$

$$=\frac{1}{4}[a^2b^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]=\frac{1}{4}[ab+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})][ab-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]$$

$$=\frac{1}{16}[a^2+2ab+b^2-(a^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+b^2)]$$

$$\cdot[a^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+b^2-(a^2-2ab+b^2)]$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2][(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2-(a-b)^2]$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2],$$

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}$.

6.2.70 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$. 试确定 λ 的值,使

(1) $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 为锐角; (2) $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 为钝角;

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; (4) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向;

(5) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 反向; (6) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行.

解 因 $\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{18-6\lambda+32}{\sqrt{27}\ \sqrt{100+\lambda^2}}$,故

(1) 当 $50-6\lambda>0$, 即 $\lambda<\frac{25}{3}$ 时,$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 为锐角.

(2) 当 $\lambda>\frac{25}{3}$ 时,$(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 为钝角.

(3) 当 $\lambda=\frac{25}{3}$ 时,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(4) 当 $\lambda=-12$ 时,$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向.

(5) 不可能.

(6) 当 $\lambda=-12$ 时,$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

6.2.71 已知两个非零的不共线矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,

(1) 求证:$\text{tg}(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$;

(2) 矢量 $\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}^0/\sin(\boldsymbol{a}^0,\hat{\ }\boldsymbol{b}^0)$ 表示什么矢量($\boldsymbol{a}^0$、$\boldsymbol{b}^0$ 分别表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 上的单位矢量);

(3) 求证:$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$. 等号成立的条件是什么?

证 (1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 两式相除,得 $\text{tg}(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$.

(2) $\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}^0/\sin(\boldsymbol{a}^0,\hat{\ }\boldsymbol{b}^0)$ 表示与 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 都垂直的单位矢量.

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=a^2b^2\sin(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})\leqslant a^2b^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$, 所以结论正确.

当 $\sin^2(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=1$ 时,等号成立. 即当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,等号成立.

§3　平　面

内容提要

1. 平面方程

(1) 矢量式　$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$，其中 $\boldsymbol{r}_0$ 为平面上已知点的位置矢量，$\boldsymbol{r}$ 为平面上任意点的位置矢量，$\boldsymbol{n}$ 为平面的法矢量.

(2) 点法式　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+c(z-z_0)=0$，其中非零矢量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为该平面的法线向量，(x_0,y_0,z_0) 是平面上的已知点.

(3) 一般式　$Ax+By+Cz+D=0$，其中 A,B,C 不全为零.

(4) 截距式　不经过原点且与 ox,oy,oz 轴的截距分别为 a,b,c 的平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

(5) 三点式　若平面通过不在同一直线上的三点 $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$ $(i=1,2,3)$，则其方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

2. 两平面的夹角

设两平面方程为 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$，$(i=1,2)$，其夹角为 φ，则

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

3. 点到平面的距离

设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面外一点，则 M_0 到平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. 两平面的位置关系

设 $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

相交于一条直线 $\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}, \dfrac{B_1}{B_2}, \dfrac{C_1}{C_2}$ 不成比例,

平行而不重合 $\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$,

重合 $\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$,

垂直 $\Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

5. 一般式和法式的互化.

用法式化因子 $k = \pm \dfrac{1}{|\boldsymbol{n}|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 乘一般式方程即可化为法式方程. k 与 D 反号.

问 题 与 解 答

6.3.1 指出点 $A(1,2,5)$, $B(-1,0,2)$, $C(3,-1,4)$, $D(2,0,-2)$ 与平面 $4x - 5y + 2z - 4 = 0$ 的位置关系.

解 点 A、D 的坐标满足方程,它们在平面上;而点 B、C 的坐标不满足方程,故它们不在平面上,各在平面的一侧.

6.3.2 两点 $(1,1,1)$ 和 $(-1,-1,-1)$ 是否在平面 $x + 2y + 3z + 4 = 0$ 的同侧?

解 已知一个平面 $ax + by + cz + d = 0$ 和这个平面外的两个点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$,则此平面到这两点的有向距离分别为

$$\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ 和 } \frac{ax_2 + by_2 + cz_2 + d}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

于是 P_1 和 P_2 在平面同侧的充要条件是

$$(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)(ax_2 + by_2 + cz_2 + d) > 0.$$

根据此充要条件,因为

$$[1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4][1(-1) + 2(-1) + 3(-1) + 4] = 10 \times (-2) < 0,$$

故这两点在平面两侧.

6.3.3　求与点 $A(2,1,-6)$ 和 $B(1,-3,4)$ 等距离的点的轨迹方程.

解　设动点为 $M(x,y,z)$，则由题意，有

$$|MA| = |MB|,$$

即
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+6)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+(z-4)^2},$$

亦即　$2x+8y-20z-15=0$.

6.3.4　指出下列各平面位置的特殊性质.

(1) $2y+3z-10=0$;　　(2) $2x-3z=0$;

(3) $4z+5=0$;　　(4) $3x=0$.

解　(1) 平行于 x 轴的平面；

(2) 通过 y 轴的平面；

(3) 平行于 xoy 面的平面；

(4) yoz 平面.

6.3.5　求通过定点 (a,b,c) 且

(1) 与 xoz 面平行的平面方程；

(2) 过 y 轴的平面方程；

(3) 平行于平面 $2x-y+3z+4=0$ 的平面方程.

解　(1) $y-b=0$;

(2) $cx-az=0$; $(ac\neq 0)$

(3) $2x-y+3z+(-2a+b-3c)=0$.

6.3.6　试求通过点 $(2,3,0)$，$(-2,-3,4)$，$(0,6,0)$ 的平面方程.

解法 1　设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则有

$$\begin{cases} 2A+3B+D=0, \\ -2A-3B+4C+D=0, \\ 6B+D=0. \end{cases}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -48,$$

$$\triangle_A = \begin{vmatrix} -D & 3 & 0 \\ -D & -3 & 4 \\ -D & 6 & 0 \end{vmatrix} = 12D,\ \triangle_B = 8D,\ \triangle_C = 24D.$$

故　　$A=\dfrac{-12D}{48}=-\dfrac{1}{4}D$；$B=-\dfrac{1}{6}D$，$C=-\dfrac{1}{2}D$.

于是所求方程为：$-\dfrac{1}{4}Dx+(-\dfrac{1}{6}D)y+(-\dfrac{1}{2}D)z+D=0$.

即　$3x+2y+6z-12=0$.

解法 2

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \{-2-(+2),-3-3,4-0\}\times\{0-2,6-3,0-0\} \\
&= \{-4,-6,4\}\times\{-2,3,0\} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{k} \\ -4 & -6 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -12\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k} \\
&= \{-12,-8,-24\}.
\end{aligned}
$$

由点法式，得

$$-12(x-2)-8(y-3)-24(z-0)=0,$$

即　$3x+2y+6z-12=0$.

6.3.7　判别下列各组中的四个点是否共面，若共面，写出其平面方程.

(1) $(0,2,-4),(5,1,2),(3,8,3),(2,-2,1)$；

(2) $(3,1,6),(4,0,8),(1,5,7),(0,8,10)$；

(3) $(2,-4,5),(3,-1,4),(0,-10,7),(4,8,2)$；

(4) $(0,2,10),(-2,-1,14),(10,17,-10),(4,8,2)$.

解　(1) 由 6.2.63 题给出的四点共面的充要条件可以验证所给四点不共面. 现给出另一种解法：

设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，以前三个点代入，得

$$
\begin{cases}
2B-4C+D=0, \\
5A+B+2C+D=0, \\
3A+8B+3C+D=0.
\end{cases}
$$

$\triangle=-166$；$\triangle_A=43D$；$\triangle_B=17D$，$\triangle_C=-33D$.

由此解得　$A=\dfrac{-43}{166}D$；$B=\dfrac{-17}{166}D$；$C=\dfrac{33}{166}D$.

故过前三个点的平面方程为 $43x+17y-33z-166=0$.

又因为第四个点 $(2,-2,1)$ 不满足该方程，故四点不共面.

(2) 由 6.2.63 题给出的四点共面的充要条件可验证该四点共面. 也可以用下面的方法验证. 先求出过前三个点的平面方程为：

$$9x + 5y - 2z - 20 = 0,$$

又第四个点(0,8,10)满足该方程,故四点共面.

(3) 同理,此四点共面.平面方程为 $8x + y + 11z - 67 = 0$.

(4) 所给的四个点共面且共线.

6.3.8 由原点向平面引垂线,垂足的坐标是(a,b,c),求此平面的方程.

解 因 $\boldsymbol{n} = \{a,b,c\}$,又平面过点$(a,b,c)$.故所求的平面方程为

$$a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0.$$

6.3.9 求过两点(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)且(1)垂直于 yoz 面;(2)平行于 z 轴的平面方程.

解 (1) 设所求平面的法矢量为 $\boldsymbol{n}$, yoz 面的方程为 $x = 0$,法矢量为 $\boldsymbol{n}_1 = \{1,0,0\}$, $\boldsymbol{r} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

由 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$ 可得

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \{0, z_2 - z_1, -(y_2 - y_1)\}.$$

故所求的平面方程为

$$0(x - x_1) + (z_2 - z_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(z - z_1) = 0,$$

即 $\quad (z_2 - z_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(z - z_1) = 0.$

(2) 设所求平面的法矢量为 $\boldsymbol{n}$, z 轴的单位矢量为 $\boldsymbol{n}_1 = \{0,0,1\}$, $\boldsymbol{r} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

由 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{r}$ 可得

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \{y_2 - y_1, -(x_2 - x_1), 0\}$$

故所求的平面方程为

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.$$

6.3.10 已知点 $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$,分别过 A 及 B 作平面与 AB 垂直,试求其方程;当已知点为 $A(2,-1,2)$, $B(8,-7,5)$ 时,其平面方程是什么?

解 (1) 过 A 且与 AB 垂直的平面方程是

$(a_1 - b_1)(x - a_1) + (a_2 - b_2)(y - a_2) + (a_3 - b_3)(z - a_3) = 0,$

过 B 且与 AB 垂直的平面方程是

$(a_1 - b_1)(x - b_1) + (a_2 - b_2)(y - b_2) + (a_3 - b_3)(z - b_3) = 0,$

(2) 过 $A(2, -1, 2)$ 且垂直于 AB 的平面方程是

$(2 - 8)(x - 2) + (-1 + 7)(y + 1) + (2 - 5)(z - 2) = 0,$

即 $$2x - 2y + z - 8 = 0.$$

同理，过 $B(8, -7, 5)$ 且垂直于 AB 的平面方程是

$$2x - 2y + z - 35 = 0.$$

6.3.11 求过两定点且与已知向量平行的平面方程.

解 设定点为 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$，定向量为 $\boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$，所求平面的法矢量为 $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$.

由 $$\begin{cases} A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0, \\ A(a_1 - b_1) + B(a_2 - b_2) + C(a_3 - b_3) = 0, \\ Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0 \end{cases}$$

可知，A, B, C 有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

这即为所求的平面方程.

6.3.12 求下列平面与坐标轴的截距.

(1) $2x - 3y + z - 12 = 0$;

(2) $-5x + y + 3z + 7 = 0$;

(3) $\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y + 5z + 1 = 0$.

解 (1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{12} = 1$，故 $a = 6, b = -4, c = 12$.

(2) $\frac{x}{\frac{7}{5}} + \frac{y}{-7} + \frac{z}{-\frac{3}{7}} = 1$，故 $a = \frac{7}{5}, b = -7, c = -\frac{3}{7}$.

(3) $\frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-\frac{1}{5}} = 1$，故 $a = -\frac{2}{3}, b = 4, c = -\frac{1}{5}$.

6.3.13 设平面通过点 $(4, 2, -3)$ 且在 x、y、z 轴上的截距相等，求此平面的方程.

解　设平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,由题意得

$$\frac{4}{a}+\frac{2}{a}+\frac{-3}{a}=1,$$

解之得,$a=3$.故所求的平面方程为

$$x+y+z-3=0.$$

6.3.14　求下列各平面方程

(1) 过点$(2,1,-1)$且与x轴、z轴的截距分别是4和3;

(2) 过$A(1,2,-1)$和$B(-3,2,1)$且与z轴的截距为2;

(3) 过$A(2,-3,1)$和$B(4,1,-2)$且垂直于平面$3x-4y+5z-8=0$.

解　(1) 由题意得$\frac{2}{4}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3}=1$,解之得,$b=\frac{6}{5}$,故所求的平面方程为

$$3x+10y+4z-12=0.$$

(2) 由题意

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{-1}{2}=1,\\ \frac{-3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{2}=1.\end{cases}\text{解之得}\begin{cases}a=4,\\ b=\frac{8}{5}.\end{cases}$$

故所求的平面方程是　$\frac{x}{4}+\frac{y}{\frac{8}{5}}+\frac{z}{2}=1.$

(3) 由题意,所求的平面平行于矢量$(3,-4,5)$,再由6.3.10题有

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+3 & z-1\\ 4-2 & 1+3 & -2-1\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=0,$$

即　$32x-19y-20z-101=0.$

6.3.15　求证平面$Ax+By+cz+D=0$把两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$和$P_2(x_2,y_2,z_2)$所连线段分成定比

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

证　设平面与P_1P_2的交点为$P_0(x_0,y_0,z_0)$,令$\lambda=\frac{P_1P_0}{P_0P_2}$,由

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$,故有

$$A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2) + D(1 + \lambda) = 0,$$

或 $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) = 0$.

即 $$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

6.3.16　化下列平面方程的一般式为法式,并说明单位法线矢量在哪个卦限.

(1) $x - y + 2z - 3 = 0$;　　(2) $2x - y - 2z = 0$;

(3) $x - z = 0$;　　(4) $y - 3 = 0$.

解　(1) $\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}}z - \frac{3}{\sqrt{6}} = 0$,单位法线矢量在第Ⅳ卦限;

(2) $\frac{-2x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{2z}{3} = 0$,在第Ⅱ卦限;

(3) $\frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0$,在 xoz 平面上;

(4) $y - 3 = 0$,在 y 轴上.

6.3.17　由已知条件求平面方程的法式和一般式.

(1) $\alpha = 45°, \beta = 120°, \gamma = 120°, p = 1$;

(2) $\cos\alpha = \cos\beta = -\cos\gamma, p = 0$.

解　由公式 $\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z - p = 0$ 得

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0$.

(2) 由 $\cos\alpha = \cos\beta = -\cos\gamma$ 可得, $\cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma$.

又　$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,所以

$$3\cos^2\alpha = 1, \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

故　$$\cos\alpha = \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

即有　$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0.$$

即　　　$x+y-z=0.$

6.3.18　(1) 将平面的截距式方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$化为法式方程；(2) 将平面的法式方程$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$化为截距式方程.

解　(1) 欲把$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$化为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

的形式，令$\frac{p}{\cos\alpha}=a$，$\frac{p}{\cos\beta}=b$，$\frac{p}{\cos\gamma}=c$. 则

$$\cos\alpha=\frac{p}{a},\ \cos\beta=\frac{p}{b},\ \cos\gamma=\frac{p}{c}.$$

由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 可得，$\frac{p^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=1$.

故 $p=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$，取 $p>0$，则 $p=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$.

由此得法式方程为

$$\frac{x}{a\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}+\frac{y}{b\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}+\frac{z}{c\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=0.$$

(2) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 的截距式为

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\cos\beta}}+\frac{z}{\frac{p}{\cos\gamma}}=1.$$

注　这里 $p\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq0$. 否则无截距式.

6.3.19　设原点到平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$的距离为$p$，证明

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

证　由 6.3.18 题的结果，有

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

两边平方，得 $p^2=\dfrac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$，

即有 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{p^2}$.

6.3.20 求点$(3,-2,1)$到平面 $x-2y+2z+4=0$ 的距离.

解法1 $p=4>0$，取 $M=-\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=-3$，

故法式方程为 $-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z-\dfrac{4}{3}=0$.

于是 $d=\left|-\dfrac{1}{3}\times 3+\dfrac{2}{3}(-2)-\dfrac{2}{3}\times 1-\dfrac{4}{3}\right|=\dfrac{13}{3}=4\dfrac{1}{3}$.

解法2 $d=\dfrac{|3\cdot 1-2(-2)+2\cdot 1+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{13}{3}=4\dfrac{1}{3}$.

6.3.21 在 z 轴上求与两平面 $12x+9y+20z-19=0$ 和$16x-12y+15z-9=0$ 等距离的点.

解 设所求点为$(0,0,z)$，两已知平面的法式为

$$\frac{12}{25}x+\frac{9}{25}y+\frac{20}{25}z-\frac{19}{25}=0,$$

$$\frac{16}{25}x-\frac{12}{25}y+\frac{15}{25}z-\frac{9}{25}=0.$$

由题意知 $\left|\dfrac{12}{25}\cdot 0+\dfrac{9}{25}\cdot 0+\dfrac{20}{25}\cdot z-\dfrac{19}{25}\right|$

$$=\left|\frac{16}{25}\cdot 0-\frac{12}{25}\cdot 0+\frac{15}{25}z-\frac{9}{25}\right|.$$

即 $\dfrac{20}{25}z-\dfrac{19}{25}=\pm\left(\dfrac{15}{25}z-\dfrac{9}{25}\right)$.

于是得 $z=2$ 或 $z=\dfrac{4}{5}$.

故所求点是$(0,0,2)$和$\left(0,0,\dfrac{4}{5}\right)$.

6.3.22 求下面两个平行平面间的距离.

(1) $Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $Ax+By+Cz+D_2=0$；

(2) $19x-4y+8z+21=0$ 和 $19x-4y+8z+42=0$；

(3) $3x+6y-2z-7=0$ 和 $3x+6y-2z+14=0$；

(4) $2x-3y+z+5=0$ 和 $2x-3y+z=0$.

解　(1) 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 上的一点，则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D_2=0,$$

即

$$Ax_0+By_0+Cz_0=-D_2.$$

P_0 点到平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

因为两平面平行，故 d 就是两平面间的距离.

(2) $d=\dfrac{|42-21|}{\sqrt{19^2+(-4)^2+8^2}}=\dfrac{21}{21}=1.$

(3) $d=\dfrac{|14-(-7)|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\dfrac{21}{7}=3.$

(4) $d=\dfrac{|0-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{14}}.$

6.3.23　求与平面 $x+y-2z-1=0$ 和平面 $x+y-2z+3=0$ 等距离的平面.

解　设所求的平面方程为

$$x+y-2z+p=0,$$

由 6.3.22 题可得

$$\frac{|p-(-1)|}{\sqrt{6}}=\frac{|3-p|}{\sqrt{6}},\ p+1=\pm(3-p).$$

由此可得 $p=1$.

故所求的平面方程为 $x+y-2z+1=0$.

一般地，与 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 两平面等距离的平面方程为

$$Ax+By+Cz+\frac{D_1+D_2}{2}=0,\quad (\text{这里 } D_1\neq D_2).$$

6.3.24　设平面 $x+y+z+12=0$ 与一动点的距离等于动点与原点间的距离，求动点的轨迹.

解　已知平面的法式方程为

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}y-\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{12}{\sqrt{3}}=0,$$

设动点为(X,Y,Z). 由题意得

$$\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}X-\frac{1}{3}Y-\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{12}{\sqrt{3}}\right|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

即动点的轨迹为

$$3(X^2+Y^2+Z^2)=(X+Y+Z+12)^2.$$

6.3.25 求下列各平面间的夹角.

(1) $2x-y+z=6, x+y+2z-3=0$;

(2) $3x+4y-5z-9=0, 2x+6y+6z-7=0$;

(3) $2x+y-2z-4=0, 3x+6y-2z-8=0$;

(4) $2x-2y+z+5=0, z=0$.

解 设 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 为已知平面的法向量.

(1) $\boldsymbol{n}_1=\{2,-1,1\}, \boldsymbol{n}_2=\{1,1,2\}$.

由$\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)=\dfrac{2\times 1+(-1)\times 1+1\times 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$ 可得

$(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)=\dfrac{\pi}{6}$. 同理

(2) $(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)=\dfrac{\pi}{2}$,

(3) $\theta=\arccos\dfrac{16}{21}$.

(4) $\theta=\arccos\dfrac{1}{3}$.

6.3.26 过点$(3,-1,5)$作平面,使

(1) 平行于平面 $\pi: 2x-3y+4z-5=0$;

(2) 平行于平面 $\pi: -4x+5y=0$;

(3) 平行于 yoz 平面 $: x=0$;

(4) 通过 ox 轴.

解 (1) $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}_\pi, \boldsymbol{n}_\pi=\{2,-3,4\}$,故所求平面为

$$2(x-3)-3(y+1)+4(z-5)=0,$$

即 $2x-3y+4z-29=0$.

(2) $\boldsymbol{n}_\pi=\{-4,5,0\}$,所求的平面方程为

$-4(x-3)+5(y+1)=0$,即 $4x-5y+7=0$.

(3) $n_\pi = \{1,0,0\}$,所求的平面方程为 $x - 3 = 0$.

(4) 过 x 轴的平面方程为 $By + cz = 0$,又平面过点$(3, -1,5)$,所以 $-B + 5C = 0, B = 5c$. 故所求平面为 $5cy + cz = 0$,即 $5y + z = 0$.

另解　设所求的平面为 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$.

由于平面 π 过 x 轴,所以经过点$(0,0,0)$,$(1,0,0)$,又平面过点$(3, -1,5)$,所以

$$\begin{cases} D = 0, \\ A \cdot 1 = 0, \\ 3A - B + 5C + D = 0. \end{cases}$$

由此得 $A = 0, D = 0, B = 5C$. 故所求平面的方程为:

$$5cy + cz = 0, \quad c \neq 0.$$

即　　$5y + z = 0$.

6.3.27　过已知点作垂直于两已知平面的平面.

(1)$(1, -2,1)$,$\pi_1: x - y + z - 1 = 0$, $\pi_2: 2x + y + z + 1 = 0$;

(2)$(3,0, -2)$,$\pi_1: 2x + y - 3 = 0$, $\pi_2: 4y + 3z = 0$;

(3)$(0,0,0)$,$\pi_1: x - y + z - 7 = 0$, $\pi_2: 3x + 2y - 12z + 5 = 0$.

解　(1) $n_{\pi_1} = \{1, -1,1\}$, $n_{\pi_2} = \{2,1,1\}$.

由 $n \perp n_{\pi_1}$ 且 $n \perp n_{\pi_2}$,有

$$n = n_{\pi_1} \times n_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j + 3k.$$

故所求平面的方程为

$$\pi: -2(x - 1) + (y + 2) + 3(z - 1) = 0,$$

即　　$2x - y - 3z - 1 = 0$.

(2) $$n = n_{\pi_1} \times n_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \{3, -6,8\}.$$

故所求的平面的方程为　$3(x - 3) - 6y + 8(z + 2) = 0$.

即　　$3x + 8z - 6y + 7 = 0$.

(3) $n = \{2,3,1\}$,所求平面的方程为 $2x + 3y + z = 0$.

6.3.28　过已知点$(1,2, -1)$和$(-5,2,7)$作一平面,使

(1) 与平面 $\pi: 2x + y - z = 0$ 垂直;

(2) 与 x 轴平行;

(3) 与 xoy 面成 60° 角.

解 (1)$\boldsymbol{n}_{\pi}=\{2,1,-1\}$,故所求平面上有一矢量

$$\boldsymbol{r}=\{-5-1,2-2,7+1\}=\{-6,0,8\}.$$

又 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_{\pi},\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}$,

$$\text{所以},\ \boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{\pi}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\-6&0&8\end{vmatrix}=\{8,-22,6\}.$$

故得 $8(x-1)-22(y-2)+6(z+1)=0$,

即 $4x-11y+3z+21=0$.

(2) 由 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{i}$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{r}$,有

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\-6&0&8\end{vmatrix}=\{0,-8,0\}.$$

故所求平面的方程为 $-8(y-2)=0$. 即 $y-2=0$.

(3) $\boldsymbol{r}=\{-6,0,8\}$,设 $\boldsymbol{n}^0=\{n_x^0,n_y^0,n_z^0\}$ 为所求平面的单位法向量,则 $\boldsymbol{n}^0\perp\boldsymbol{r}$. 故有 $n_x^0(-6)+n_z^0\cdot 8=0$,即 $3n_x^0-4n_z^0=0$.

由题设$(\widehat{\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{k}})=60°$,所以$\frac{1}{2}=\cos 60^0=\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{k}=n_z^0$,

故 $n_x^0=\frac{4}{3}n_z^0=\frac{2}{3},n_y^0=\pm\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2-(\frac{1}{2})^2}=\pm\frac{\sqrt{11}}{6}$,

即 $\boldsymbol{n}^0=\{\frac{2}{3},\pm\frac{\sqrt{11}}{6},\frac{1}{2}\}$.

于是所求平面的方程为

$$\frac{2}{3}(x-1)\pm\frac{\sqrt{11}}{6}(y-2)+\frac{1}{2}(z+1)=0,$$

即 $4x\pm\sqrt{11}y+3z+(\pm 2\sqrt{11}-1)=0$.

6.3.29 试决定参数 k 的值,使平面 $\pi:x+ky-2z-7=0$ 满足下列条件之一.

(1) 经过点$(3,-2,5)$;

(2) 与 $2x+3y+7z-5=0$ 垂直;

(3) 与平面 $\pi:2x-3y+z=0$ 成 45° 角;

(4) 与原点相距 $\sqrt{7}$ 个单位;

(5) 与 $3x-7y-6z-1=0$.

解　(1) 因平面 π 过点(3, −2,5),所以

$$3+k(-2)-2\times 5-7=0,\quad k=-7.$$

于是,平面 π 的方程为 $x-7y-2z-7=0$.

(2) 因 $\boldsymbol{n}_\pi \perp \boldsymbol{n}_{\pi_1}$,所以 $\boldsymbol{n}_\pi \cdot \boldsymbol{n}_{\pi_1}=1\cdot 2+k\cdot 3+(-2)\cdot 7=0$.

由此得 $k=4$. 故所求平面的方程为 $x+4y-2z-7=0$.

(3) $\boldsymbol{n}_\pi=\{1,k,-2\}$,$\boldsymbol{n}_{\pi_1}=\{2,-3,1\}$,由题意

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_\pi\cdot\boldsymbol{n}_{\pi_1}}{|\boldsymbol{n}_\pi||\boldsymbol{n}_{\pi_1}|}$$

$$=\frac{1\times 2-3\times k-2\times 1}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\ \sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即 $36k^2=28(k^2+5)$. 由此解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{70}}{2}$.

故所求平面的方程为　$x\pm\dfrac{\sqrt{70}}{2}y-2z-7=0$.

(4) 原点到平面 $x+ky-2z-7=0$ 的距离为

$$\frac{|1\cdot 0+k\cdot 0-2\cdot 0-7|}{\sqrt{1^2+k^2+2^2}}=\sqrt{7},$$

即 $\dfrac{7}{\sqrt{5+k^2}}=\sqrt{7}$, $k^2+5=7$, $k=\pm\sqrt{2}$.

故所求平面方程为　$x\pm\sqrt{2}y-2z-7=0$.

(5) 由平面 π 与 $3x-7y-6z-1=0$ 平行,即有

$$\frac{1}{3}=\frac{k}{-7}=\frac{-2}{-6},\ k=-\frac{7}{3}.$$

故所求面的方程为　$3x-7y-6z-21=0$.

6.3.30　求与平面 $6x+3y+2z+12=0$ 平行,且使点(0,2, −1)与这两平面的距离相等的平面.

解　设所求平面为 $6x+3y+2z+D=0$,两平面的法式方程为

$$\begin{cases}-\dfrac{6}{7}x-\dfrac{3}{7}y-\dfrac{2}{7}z-\dfrac{12}{7}=0,\\[2mm] \pm\dfrac{6}{7}x\pm\dfrac{3}{7}y\pm\dfrac{2}{7}z\pm\dfrac{D}{7}=0.\end{cases}$$

由题意,有

$$\left|-\frac{6}{7}\cdot 0-\frac{3}{7}\cdot 2-\frac{2}{7}(-1)-\frac{12}{7}\right|$$
$$=\left|\pm\frac{6}{7}\cdot 0\pm\frac{3}{7}\cdot 2\pm\frac{2}{7}(-1)\pm\frac{D}{7}\right|,$$

即 $|D+4|=16$,由此解得 $D=12$,或 $D=-20$,把 $D=12$ 舍去.故所求的平面方程为

$$6x+3y+2z-20=0.$$

6.3.31 作出平行于平面 $5x-14y+2z+36=0$,且与此平面的距离为3的平面方程.

解 由 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1=\{5,-14,2\}$.故所求的平面方程为

$$5x-14y+2z+D=0.$$

由6.3.22题得,$\dfrac{|36-D|}{\sqrt{5^2+(-14)^2+2^2}}=3.$

化简得 $36-D=\pm 45$.由此解得 $D=-9$ 或 $D=81$.

故所求的平面方程为 $5x-14y+2z-9=0$,

或 $$5x-14y+2z+81=0.$$

6.3.32 平行六面体三个面的方程为

$$x-4y=3,\ 2x-y+z=3,\ 3x+y-2z=0,$$

其一顶点为$(3,7,-2)$,求其它三个面的方程.

解 $\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{n}_1=\{1,-4,0\}$, $\boldsymbol{n}_5=\boldsymbol{n}_2=\{2,-1,0\}$.

$\boldsymbol{n}_6=\boldsymbol{n}_3=\{3,1,-2\}$.

又$(3,7,-2)$不在平面 $x-4y=3$ 上.故$(3,7,-2)$在 π_4 上.于是,π_4 的方程为$(x-3)-4(y-7)=0$.

即 $x-4y+25=0$.

同理,π_5 的方程为:$2(x-3)-(y-7)+(z+2)=0$,

即 $2x-y+z+3=0$.

π_6 的方程为: $3x+y-2z-20=0$.

6.3.33 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 的对称点的坐标.

解 $\boldsymbol{n}=\{6,2,-9\}$,过原点作垂直于 π 的直线

$$l:\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-9},\text{或 } x=6t,y=2t,z=-9t.$$

现求 l 与 π 的交点.将参数方程代入平面方程,得

$$36t+4t+81t+121=0,\ t=-1.$$

即交点为$(-6,-2,9)$.

设对称点为$M(x,y,z)$,则

$$-6=\frac{x+0}{2},-2=\frac{y+0}{2},9=\frac{0+z}{2},$$

由此可得对称点为$M(-12,-4,18)$.

一般地,求点(a,b,c)关于平面$Ax+By+Cz+D=0$的对称点时,先设l为由点(a,b,c)到平面所作的垂线,l:$\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}$,或$x=At+a,y=Bt+b,z=Ct+c$.代入平面方程求得交点$(x_0,y_0,z_0)$.再设对称点的坐标为$(x,y,z)$.由$x_0=\frac{x+a}{2},y_0=\frac{y+b}{2},z_0=\frac{z+c}{2}$解得的$x,y,z$即为对称点的坐标.

6.3.34　在平面$x-2y+z-2=0$和平面$x-2y+z-6=0$之间求一平面,使它将此二平面间的距离分成1∶3.

解　因三个平面平行,故设所求平面为$x-2y+z+D=0$.

又$(0,0,2)$在第一个平面上,$(0,0,6)$在第二个平面上.故第一个平面到第三个平面的距离为

$$\frac{|1\times0-2\times0+2+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|2+D|}{\sqrt6},$$

第三个平面到第二个平面的距离为

$$\frac{|1\times0-2\times0+6+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|6+D|}{\sqrt6}.$$

由题意得$\frac{3|2+D|}{\sqrt6}=\frac{|6+D|}{\sqrt6}$,解之得$D_1=0,D_2=-3$.

由此可得两个平面$x-2y+z=0$和$x-2y+z-3=0$.平面$x-2y+z=0$不在已知平面之间,应舍去.故所求平面的方程为

$$x-2y+z-3=0.$$

6.3.35　通过平面$2x+y-z-2=0,x-3y+z+1=0$和$x+y+z-3=0$的交点,作平面平行于平面$x+y+2z=0$.

解　过三平面的平面族为

$$\lambda(2x+y-z-2)+\mu(x-3y+z+1)+\delta(x+y+z-3)=0,$$

或　$(2\lambda+\mu+\delta)x+(\lambda-3\mu+\delta)y$

$$+(-\lambda+\mu+\delta)z+(-2\lambda+\mu-3\delta)=0.$$

由题意得 $\begin{cases}2\lambda+\mu+\delta=1,\\ \lambda-3\mu+\delta=1,\\ -\lambda+\mu+\delta=2.\end{cases}$

由此求得 $\lambda=-\dfrac{1}{3},\mu=\dfrac{1}{12},\delta=\dfrac{19}{12}$.

代入平面族方程,得所求平面的方程为 $x+y+2z-4=0$.

6.3.36 在直线 $x+y+z-2=0, x+2y-z-1=0$ 上,求与平面 $x+2y+z+1=0$ 和平面 $x+2y+z-3=0$ 等距离的点.

解 设与后两平面等距离的点为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,则有

$$\frac{|\bar{x}+2\bar{y}+\bar{z}+1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{|\bar{x}+2\bar{y}+\bar{z}-3|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}},$$

故平面 π 的方程为 $\bar{x}+2\bar{y}+\bar{z}-1=0$. (1)

又点$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 在直线上,故有

$$\begin{cases}\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}-2=0, & (2)\\ \bar{x}+2\bar{y}-\bar{z}-1=0. & (3)\end{cases}$$

由(1)、(2)、(3) 解得,$\bar{x}=3,\bar{y}=-1,\bar{z}=0$.

故所求的点为$(3,-1,0)$.

6.3.37 求与原点的距离为 6,且在三个坐标轴上的截距之比为 $a:b:c=1:3:2$ 的平面方程.

解 设所求的平面方程为

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{3k}+\frac{z}{2k}=1,$$

或 $6x+2y+3z-6k=0$.

由题意有 $\dfrac{|6\times0+2\times0+3\times0-6k|}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=6$,

即$\dfrac{|6k|}{7}=6$, $k=\pm7$.故所求的平面方程为 $6x+2y+3z\pm42=0$.

6.3.38 求满足下列条件的平面方程 π.

(1) 通过 x 轴且垂直于平面 $\pi_1:5x+4y-2z+3=0$;

(2) 过 z 轴与点$(2,-1,3)$;

(3) 过 z 轴且与平面 $\pi_1:2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$.

解 (1) $\boldsymbol{n}_{\pi_1}=\{5,4,-2\}$,由题意,$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_{\pi_1},\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{i}$,故 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{\pi_1}\times\boldsymbol{i}$,

即
$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\{0,-2,-4\}.$$

又 π 过原点，故 π 的方程为 $0\cdot x-2y-4z=0$，即
$$y+2z=0.$$

(2) 因 π 过 z 轴，所以 $n\perp k$. 又 π 过点 $(0,0,0)$ 与点 $(2,-1,3)$，故 $n\perp\{2,-1,3\}$. 所以
$$n=k\times\{2,-1,3\}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\{1,2,0\}.$$

于是，所求平面 π 的方程为 $x+2y=0$.

(3) 设平面 π 的单位法矢量为 $n_0=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$. 由 $n_0\perp k$，有 $\lambda_3=n_0\cdot k=0$，且 $\lambda_1^2+\lambda_2^2=1$. 而 $n_{\pi_1}=\{2,1,-\sqrt{5}\}$，则 $n_{\pi_1}^0=\{\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\}$，
$$\cos60^\circ=\frac{1}{2}=n_{\pi_1}^0\cdot n^\circ=\frac{2}{\sqrt{10}}\lambda_1+\frac{\lambda_2}{\sqrt{10}},$$

即 $4\lambda_1+2\lambda_2-\sqrt{10}=0$ 与 $\lambda_1^2+\lambda_2^2=1$ 联立求解，得
$$\begin{cases}\lambda_1'=\dfrac{1}{\sqrt{10}};\\[2mm] \lambda_2'=\dfrac{3}{\sqrt{10}};\end{cases}\text{或}\begin{cases}\lambda_1''=\dfrac{3}{\sqrt{10}},\\[2mm] \lambda_2''=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}.\end{cases}$$

所以，$n^\circ=\{\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}},0\}$，或 $n_o=\{\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},0\}$.

故所求平面 π 的方程为
$$\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y=0,\ \text{或}\ \frac{3}{\sqrt{10}}x-\frac{1}{\sqrt{10}}y=0.$$

即　　$x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

6.3.39　过两平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线作平面 π，使(1) 过原点；(2) 过点 $(1,1,1)$；(3) 与 y 轴平行；(4) 与 $\pi_1:2x-y+5z-3=0$ 垂直.

解 在$\begin{cases}4x-y=1-3z\\x+5y=-2+z\end{cases}$中，分别令$z=0$和$y=0$，可得已知直线上两点$(\frac{1}{7},-\frac{3}{7},0)$和$(-\frac{5}{7},0,\frac{9}{7})$.

(1) 作矢量$\boldsymbol{n}_1=\{\frac{1}{7},-\frac{3}{7},0\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{-\frac{5}{7},0,\frac{9}{7}\}$，

因$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{\frac{27}{49},\frac{9}{49},\frac{15}{49}\}$. 所以$\pi$的方程为

$$\frac{27}{49}x+\frac{9}{49}y+\frac{15}{49}z=0\text{，或 }9x+3y+5z=0.$$

(2) 作矢量$\boldsymbol{n}_1=\{\frac{1}{7}-1,-\frac{3}{7}-1,0-1\}$

$$=\{-\frac{6}{7},-\frac{10}{7},-1\},$$

$\boldsymbol{n}_2=\{-\frac{5}{7}-1,0-1,\frac{9}{7}-1\}=\{-\frac{12}{7},-1,\frac{2}{7}\}$，

故 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{-\frac{69}{49},\frac{96}{49},-\frac{78}{49}\}$.

所以π的方程为$-\frac{69}{49}(x-1)+\frac{96}{49}(y-1)-\frac{78}{49}(z-1)=0$，

即 $$23x-32y+26z-17=0.$$

(3) 作矢量$\boldsymbol{r}=\{\frac{1}{7}-(-\frac{5}{7}),-\frac{3}{7}-0,0-\frac{9}{7}\}$

$$=\{\frac{6}{7},-\frac{3}{7},-\frac{9}{7}\}\text{，所以}$$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}=\{\frac{9}{7},0,\frac{6}{7}\}$$

故所求平面方程为$\frac{9}{7}(x-\frac{1}{7})+0\cdot(y+\frac{3}{7})+\frac{6}{7}(z-0)=0$，

即

$$21x+14z-3=0.$$

(4) 因$\boldsymbol{n}_{\pi_1}=\{2,-1,5\}$，且$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_{\pi_1}$，与(3)一样作$\boldsymbol{r}$，可求出$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{\pi_1}\times\boldsymbol{r}$，由此可得平面$\pi$的方程为

$$7x+14y+5=0.$$

§4　空间直线

内 容 提 要

1. 空间直线的方程

(1) 矢量式　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{s}t$，$P_0$ 为直线上任一点，矢量 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{OP}_0$，$\boldsymbol{s}$ 为直线的方向矢量，t 为参数.

(2) 标准式(对称式)　$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上已知点，$\{l,m,n\}$ 为直线的方向矢量.

(3) 一般式(交面式)

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

其中 A_1,B_1,C_1，和 A_2,B_2,C_2 各不全为零.

(4) 两点式　$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$，其中 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2) 为直线上两个不同的已知点.

(5) 参数式　$x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$，$t$ 为参数.

2. 两直线的夹角

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}},$$

其中 $\boldsymbol{s}_1=\{l_1,m_1,n_1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$ 分别为二直线的方向矢量.

3. 直线与平面的夹角 φ

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

其中 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$ 分别为平面的法矢量和直线的方向矢量.

4. 直线与平面间的关系

设两平面的法矢量 $\boldsymbol{n}_i=\{A_i,B_i,C_i\}$；两直线的方向矢量 $\boldsymbol{s}_i=\{l_i,m_i,n_i\}$ $(i=1,2)$，则

	平行条件	垂直条件
两平面	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 或 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ 或 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$
两直线	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ 或 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0}$	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ 或 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$
直线与平面	$Al+Bm+Cn=0$ 或 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ 或 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$

问 题 与 解 答

1. 空间直线的基本概念

6.4.1 分别检查点 $A(5,-2,-3)$,$B(8,3,1)$ 是否在直线 $5x-3y-31=0$, $3x+4y+7z+14=0$ 上.

解 因为 $5\times5-3\times(-2)-31=0$,
所以 A 点在第一个平面上.

又因为 $3\times5+4\times(-2)+7\times(-3)+14=0$,
所以 A 点也在第二个平面上,即 A 点在直线上.

同理可知,B 点在第一个平面上,但不在第二个平面上,故 B 点不在直线上.

6.4.2 说明下列诸直线的位置.

(1) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0,\\A_2x+B_2y+C_2z=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}A_1x+B_1y+D_1=0,\\A_2x+B_2y+D_2=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}B_1y+C_1z=0,\\B_2y+C_2z=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\B_2y+D_2=0;\end{cases}$

(5) $\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ B_2y + D_2 = 0; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} B_1y + C_1z = 0. \\ A_2x + D_2 = 0; \end{cases}$

解　(1) 过原点；　(2) 平行于 z 轴；

(3) 与 x 轴重合；　(4) 垂直于 y 轴；

(5) 平行于 z 轴；　(6) 垂直于 x 轴.

6.4.3　设直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

(1) 过原点；(2) 与 x 轴平行；(3) 与 y 轴相交；(4) 与 z 轴重合. 求系数应满足的充要条件.

解　(1) $D_1 = D_2 = 0$；

(2) $A_1 = A_2 = 0, D_1, D_2$ 不全为零；

(3) $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ 且 $B_1, B_2 \neq 0$；

(4) $C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0$.

6.4.4　已知点 $P(1,1,1)$，(1) 求过原点和点 P 的直线方程，(2) 求过 P 且与各坐标轴平行的直线方程.

解　(1) $\mathbf{s} = \{1-0, 1-0, 1-0\} = \{1,1,1\}$，且过点 $P(1,1,1)$ 及 $(0,0,0)$，故所求的直线方程为 $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1}$.，即为 $x = y = z$，

(2) $\mathbf{s} = \{1,0,0\}$，故过 P 点且平行于 x 轴的直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{0} \text{ 或 } y - 1 = 0, z - 1 = 0;$$

同理，过 P 点且平行于 y 轴的直线方程为 $x - 1 = 0, z - 1 = 0$；过 P 点且平行于 z 轴的直线方程为 $x - 1 = 0,\ y - 1 = 0$.

6.4.5　将下列直线的一般方程化为标准方程.

(1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0; \end{cases}$

解　(1) 先在直线上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，该直线的方向矢量为

$$\mathbf{s} = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\},$$

故直线的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

(2) 令 $x=0$，代入直线方程 $\begin{cases}-y+z=-5,\\-8y+4z=-36,\end{cases}$ 可求得 $P_0(0,4,-1)$，

$$s=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\-8 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\4 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\5 & -8\end{vmatrix}\right\}=\{4,1,-3\},$$

故直线的标准方程为 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$.

6.4.6　化下列直线方程为参数式.

(1) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x-5y+2z-1=0,\\\quad 5y=z-2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-y+2z-3=0,\\2x+3y-2z+2=0;\end{cases}$

解　(1) 在直线上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 求得直线的方向矢量为

$$s=\left\{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\},$$

故参数式为

$$x=x_0+\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}t,\ y=y_0+\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}t,\ z=z_0+\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}t.$$

(2) 在已知直线上取一点 $M_0(2,-1,-3)$，因

$$s=\left\{\begin{vmatrix}-5 & 2\\5 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -5\\0 & 5\end{vmatrix}\right\}=\{-5,1,5\}.$$

故参数式为 $x=2-5t,\ y=-1+t,\ z=-3+5t$.

(3) $M_0(-1,2,3)$，$s=\{-4,6,5\}$，参数式为

$$x=-1-4t,\quad y=2+6t,\quad z=3+5t.$$

6.4.7　判断下列各组直线是否平行？是否垂直？

(1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ 和 $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y-5z-8=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x+2y=1,\\2y-z=1,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x-y=1,\\x-2z=3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=2t+5,\\y=-t+2,\\z=t-7,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\x-y-3z-2=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}3x+y=z,\\2x=2+z;\end{cases}$ 和 $\begin{cases}2x-y+2z=4,\\x-y+2z=3.\end{cases}$

解　(1) $\boldsymbol{s}_1=\{3,-2,1\}$,

$$\boldsymbol{s}_2=\{1,1,-1\}\times\{1,-1,-5\}=\{-6,4,-2\}=-2\boldsymbol{s}_1,$$

所以两直线平行.

(2) $\boldsymbol{s}_1=\{-2,1,2\},\boldsymbol{s}_2=\{2,2,1\}$,且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$,

所以两直线垂直.

(3) $\boldsymbol{s}_1=\{2,-1,1\},\boldsymbol{s}_2=\{-8,4,-4\}=-4\boldsymbol{s}_1$,

所以两直线平行.

(4) $\boldsymbol{s}_1=\{-1,1,-2\},\boldsymbol{s}_2=\{0,-2,-1\}$,且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$.

所以两直线垂直.

6.4.8　设两直线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+t\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2+t\boldsymbol{A}_2$ 相交,求它们所在的平面方程,并化为坐标形式.

解　设交点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,所求平面方程为 $[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2]=0$,其中 $\boldsymbol{p}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$. 设 $\boldsymbol{A}_1=\{a_1,b_1,c_1\}$, $\boldsymbol{A}_2=\{a_2,b_2,c_2\}$,则所求平面方程的坐标式为

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=0.$$

6.4.9　设两直线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1+t\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2+t\boldsymbol{A}_2$ 平行,试求它们所在的平面方程,并化为坐标形式.

解　因 $\boldsymbol{A}_1\parallel\boldsymbol{A}_2$,故所求的平面方程为

$$[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{A}_1]=0,$$

其坐标式为 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0.$

6.4.10 试确定下列各组直线 L 和平面 π 的关系.

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 和 $2x-y-z+1=0$;

(2) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$;

解 (1) $s=\{-2,-7,3\}$, $n=\{4,-2,-2\}$,

$$s\cdot n=(-2)\times 4+(-7)(-2)+3(-2)=0.$$

所以 $s\perp n$,即 $L\,/\!/\,\pi$.

(2) $s=\{3,1,-4\}$, $n=\{1,1,1\}$, $s\cdot n=0$,

所以 $s\perp n$,即 $l\,/\!/\,\pi$.

6.4.11 求下列各直线方程.

(1) 经过点 $(2,-3,5)$,方向角为 $45°,90°,135°$;

(2) 过两点 $(3,-1,5)$,和$(-2,4,3)$;

(3) 过两点 $(2,3,-4)$,和$(2,7,-4)$;

(4) 过点 $(3,1,-2)$ 且与$(3,-2,5)$ 和$(7,2,4)$ 连线平行.

解 (1) $s=\{\cos45°,\cos90°,\cos135°\}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

所求直线的方程为 $\frac{x-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-5}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

即 $\begin{cases} y+3=0, \\ x+z-7=0. \end{cases}$

(2) $s=\{-2-3,4-(-1),3-5\}=\{-5,5,-2\}$,

所求直线的方程为 $\frac{x-3}{-5}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-5}{-2}$.

(3) $s=\{0,4,0\}$,所求直线的方程为 $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{0}$. 即

$$\begin{cases} x-2=0, \\ z+4=0. \end{cases}$$

(4) $s=\{4,4,-1\}$,所求直线的方程为$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+2}{-1}$.

6.4.12　回答下列问题：

(1) D 为何值时，才能使直线 $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ 与 z 轴相交？

(2) B、D 为何值时，才能使直线 $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ 在 xoy 面内？

解　(1) 已知直线与 z 轴相交，设相交点为 $(0,0,z_0)$，代入直线方程，必有

$$\begin{cases} 2z_0 - 6 = 0, \\ -z_0 + D = 0, \end{cases}$$

由此得 $D = 3$.

(2) xoy 面的方程为 $z = 0$，法矢量 $\boldsymbol{n} = \{0,0,1\}$，而直线的方向矢量 $\boldsymbol{s} = \{1,-2,1\} \times \{3,B,1\} = \{-2-B,2,B+6\}$，由题意，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n} = 0$. 即 $0 \times (-2-B) + 0 \times 2 + 1\cdot(B+6) = 0$，由此得 $B = -6$，故当 $z = 0$ 时，直线方程一定有解 $(x_0,y_0,0)$，代入方程得

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 - 9 = 0, \\ 3x_0 - 6y_0 + D = 0, \end{cases}$$

解之得 $D = 27$.

6.4.13　求下列各直线方程：

(1) 过点 $(-2,2,1)$ 且与矢量 $\boldsymbol{a} = \{-1,1,1\}$，$\boldsymbol{b} = \{1,0,-1\}$ 都垂直；

(2) 过点 $(0,-5,2)$ 且垂直于 xoz 平面；

(3) 过点 $(4,-1,2)$ 且与坐标轴正向夹角相等；

(4) 过原点与平面 $2x + y - 3z + 7 = 0$ 垂直.

解　(1) 因为直线垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的平面，所以

$$\boldsymbol{s} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \{-1,0,-1\},$$

故所求的直线方程为 $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$.

(2) xoz 平面的方程为 $y = 0$，法矢量 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$，又 $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{n}$. 所以，取 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{j} = \{0,1,0\}$. 故所求的直线方程为 $\dfrac{x-0}{0} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-2}{0}$. 即

$$x = 0, z + 2 = 0.$$

(3) 由$\frac{x-4}{\cos\alpha}=\frac{y+1}{\cos\beta}=\frac{z-2}{\cos\gamma}$和$\alpha=\beta=\gamma$知,所求直线方程为

$$x-4=y+1=z-2.$$

(4) 所求直线的方向矢量$\boldsymbol{s}=\{2,1,-3\}$,故所求的直线方程为

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{-3}.$$

2. 直线、平面及两直线间的关系

6.4.14 求直线

$$\begin{cases}x+2y+z-1=0,\\x-2y+z+1=0\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}x-y-z+1=0,\\x-y+2z+1=0\end{cases}$$

间的夹角.

解 $\boldsymbol{s}_1=\left\{\begin{vmatrix}2&1\\-2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&-2\end{vmatrix}\right\}=\{4,0,-4\}$,

$\boldsymbol{s}_2=\{-3,-3,0\}$.

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}$$

$$=\frac{4\cdot(-3)+0\cdot(-3)+(-4)\cdot 0}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}}$$

$$=\frac{-12}{4\times 3\times 2}=-\frac{1}{2}.$$

故 $\varphi=(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)=\frac{2}{3}\pi$.

6.4.15 求过直线$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-y+4=0\end{cases}$且与平面$\pi_1:x-4y-8z+12=0$夹角为$\frac{\pi}{4}$的平面方程.

解 设所求平面为 $\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0$,

$$(\lambda+\mu)x+5\lambda y+(\lambda-\mu)z+4\mu=0.$$

两平面的法矢量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,-4,-8\}$,

$\boldsymbol{n}_2=\{\lambda+\mu,5\lambda,\lambda-\mu\}$.

故 $\cos\frac{\lambda}{4}=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$

$$=\frac{|\lambda+\mu-20\lambda-8\lambda+8\mu|}{\sqrt{1+16+64}\sqrt{(\lambda+\mu)^2+25\lambda^2+(\lambda-\mu)^2}}$$

$$= \frac{|-9(3\lambda-\mu)|}{9\sqrt{27\lambda^2+2\mu^2}} = \frac{|3\lambda-\mu|}{\sqrt{27\lambda^2+2\mu^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即　$3\lambda(3\lambda+4\mu)=0$,

由此解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda:\mu=-4:3$,代入方程得

$$x-z+4=0 \text{ 或 } x+20y+7z-4=0.$$

6.4.16　求下列各平面 π 的方程.

(1) 过点$(2,4,-1)$且与 $x+2y-3z+4=0$, $x+3y-z=0$ 垂直;

(2) 过点$(4,-3,5)$且与直线$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases}$和$\begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$平行;

(3) 过点$(-1,3,2)$和直线 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$;

(4) 过直线$\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4}$且垂直于平面 $\pi_1: x+4y-3z+7=0$;

(5) 过相交直线$\begin{cases}x=2z+1,\\y=3z+2\end{cases}$和$\begin{cases}2x=2-z,\\3y=z+6;\end{cases}$

(6) 通过两平行线

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1},\ \frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+1}{1};$$

(7) 通过直线$\begin{cases}2x+2z-2=0\\y-3z+5=0\end{cases}$而与$\begin{cases}x=2y+6,\\z=3y-2\end{cases}$平行;

(8) 过直线 $L_1: x+y+z=0,\ 2x-y+3z=0$ 且平行于直线 $L_2: x=2y=3z$;

(9) 过直线 $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $L_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$;

解　(1) $L\perp\pi$,所以,

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\left\{\begin{vmatrix}2&-3\\3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\right\}=\{7,-2,1\}.$$

故所求平面 π 的方程为 $7(x-2)-2(y-4)+(z+1)=0$,

即　$7x-2y+z-5=0.$

(2) $\pi \parallel L_1, \pi \parallel L_2$,所以 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_2$,

而 $\boldsymbol{s}_1 = \{1, -2, 3\}, \boldsymbol{s}_2 = \{0, -1, -1\}$.

取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, 1, -1\}$.

故所求平面 π 的方程为 $-(x-4)+(y+3)-(z-5)=0$,

即 $\qquad x - y + z - 12 = 0$.

(3) $\boldsymbol{s} = \{4,3,1\}$,在直线上任取一点(3,5,1),作矢量 $\boldsymbol{r} = \{3+1, 5-3, 1-2\} = \{4, 2, -1\}$.

取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} = \{4, 2, -1\} \times \{4, 3, 1\} = \{5, 8, 4\}$,

故所求平面 π 的方程为 $5(x+1) - 8(y-3) + 4(z-2) = 0$,

即 $\qquad 5x - 8y + 4z + 21 = 0$.

(4) 因 $\pi \perp \pi_1$,所以,$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$,又 $L \in \pi$,故 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}$.

取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \{22, -19, -18\}$,

显然,点(7,1,6)在直线上,也在所求平面上,故所求平面 π 的方程为 $\qquad 22(x-7) - 19(y-1) - 18(z-6) = 0$,

即 $\quad 22x - 19y - 18z - 27 = 0$.

(5) $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_2$,可求得 $\boldsymbol{s}_1 = \{2,3,1\}, \boldsymbol{s}_2 = \{-3,2,6\}$. 故取

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \{2,3,1\} \times \{-3,2,6\} = \{16, -15, 13\}$,

显然,点(1,2,0)在直线上,也在所求平面上,故所求平面 π 的方程为

$$16(x-1) - 15(y-2) + 13z = 0,$$

即 $\quad 16x - 15y + 13z + 14 = 0$.

(6) 显然,$A(0, -4, 1) \in L_1, B(0, -6, 0) \in L_2$,$AB$ 所在的直线 $L_3 \in \pi$,因而 $\boldsymbol{s}_3 = \{0, 2, 1\}$,所以,$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_3$,又 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1$,取

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_3 = \{3, -2, 1\} \times \{0, 2, 1\} = \{-4, -3, 6\}$,

故所求平面 π 的方程为 $-4x - 3(y+4) + 6(z-1) = 0$,

即 $\qquad 4x + 3y - 6z + 18 = 0$.

另解　显然 $(-3, -2, 0) \in \pi, (-3, -4, -1) \in \pi$,

由 6.4.9 题可得 $\begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

或 $4x + 3y - 6z + 18 = 0.$

(7) 因为 $L_1 \in \pi$，所以，$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_1$，由题意有 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{s}_2$，取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\times \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{-2,6,2\} \times \{-2,-1,3\} = \{20,2,10\},$$

显然 $(1,-5,0) \in L_1 \in \pi$，故平面方程为

$$20(x-1) + 2(y+5) + 10z = 0,$$

即 $\qquad 10x + y + 5z - 5 = 0.$

(8) 设所求平面的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$，

$$\boldsymbol{s}_1 = \{4,-1,-3\}, \boldsymbol{s}_2 = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}, \text{且}(0,0,0) \in \pi,$$

所以 $D = 0$. 再由

$$\begin{cases} A + \dfrac{1}{2}B + \dfrac{1}{3}C = 0, \\ 4A - B - 3C = 0. \end{cases}$$

得 $\quad A = \dfrac{7}{18}C,\ B = -\dfrac{13}{9}C.$

故所求平面 π 的方程为 $\dfrac{7}{18}cx - \dfrac{13}{9}cy + cz = 0,$

即 $\quad 7x - 26y + 18z = 0.$

另解 $\quad \boldsymbol{s}_1 = \{4,-1,-3\},\ \boldsymbol{s}_2 = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\},$

取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \{\dfrac{7}{6}, -\dfrac{26}{6}, \dfrac{18}{6}\},$

因为 $(0,0,0) \in L_1 \in \pi$，故所求平面 π 的方程为

$$\frac{7}{6}x - \frac{26}{6}y + \frac{18}{6}z = 0,$$

即 $\qquad 7x - 26y + 18z = 0.$

(9) 显然$(1,-2,-3)\in\pi$,故设π的方程为:

$$A(x-1)+B(y+2)+C(z+3)=0.$$

由题设 $\begin{cases}2A+3B+4C=0,\\A+B+2C=0,\end{cases}$ A、B、C 有非零解的充要条件为

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z+3\\2 & 3 & 4\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0,$$

即 $\qquad 2x-z-5=0.$

6.4.17 试证:三条直线$\frac{x-x_0}{l_i}=\frac{y-y_0}{m_i}=\frac{z-z_0}{n_i}$ $(i=1,2,3)$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\l_2 & m_2 & n_2\\l_3 & m_3 & n_3\end{vmatrix}=0.$$

证 设三条直线的方向矢量分别为s_1、s_2、s_3,则三直线共面的充要条件是$[s_1s_2s_3]=0$,

即
$$\begin{vmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\l_2 & m_2 & n_2\\l_3 & m_3 & n_3\end{vmatrix}=0.$$

6.4.18 试证:三个平面$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ $(i=1,2,3)$共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

证 设三个平面的法矢量分别为$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$,则三面共线的充要条件是$[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3]=0$,

即
$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\A_2 & B_2 & C_2\\A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=0.$$

6.4.19 求下列各直线的方程:

(1) 过点$(3,-1,2)$且与$3x+2y-z-5=0$垂直;

(2) 过点$(-3,5,9)$且与直线L_1:$\begin{cases}y=3x+5,\\z=2x-3;\end{cases}$和$L_2$:$\begin{cases}y=4x-7,\\z=5x+10\end{cases}$均相交;

(3) 过点$(-5,0,0)$且与平面$x=1-3z$和$y+2z=4$平行；

(4) 过点$(-1,2,1)$且平行于平面$x+y-2z-1=0$和$x+2y-z+1=0$.

解　(1) 已知$\boldsymbol{n}=\{3,2,-1\}$，而$\boldsymbol{s}\perp\pi$，即$\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}$，故

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=\{3,2,-1\}.$$

所求直线的方程为$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(2) 将直线化为标准式

$$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+3}{2},\ L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+7}{4}=\frac{z-10}{5}.$$

过点$(-3,5,-9)$与L_1和过点$(-3,5,-9)$与L_2的平面方程分别为

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z+9 \\ 0-(-3) & 5-5 & -3-(-9) \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z+9 \\ 0+3 & -7-5 & 10+9 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

即$\begin{cases}2x-z-3=0,\\34x-y-6z+53=0\end{cases}$为所求的直线方程.

(3) 由题意，直线L平行于两平面的交线L'，而

$$\boldsymbol{s}'=\left\{\begin{vmatrix}0 & 3\\1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{-3,-2,2\},$$

故所求直线的方程为　$\dfrac{x+5}{-3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$.

(4) 同理可求得　$\boldsymbol{s}=\{3,-1,1\}$，故所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

6.4.20　一平面通过直线$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，且平行于直线$\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$，求此平面.

解　通过第一条直线的平面为：

π：　$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

即$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0$.

因为平面平行行第二条直线，所以，

$$l(A_1+\lambda A_2)+m(B_1+\lambda B_2)+n(C_1+\lambda C_2)=0,$$

$$\lambda=-\frac{lA_1+mB_1+nC_1}{lA_2+mB_2+nC_2}.$$

故所求平面 π 的方程为

$$(lA_2+mB_2+nC_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$
$$-(lA_1+mB_1+nC_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

$(lA_2+mB_2+nC_2\neq 0)$；

当 $lA_2+mB_2+nC_2=0$ 时，所求平面 π 的方程为

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

6.4.21 过平面 $x+y+z=1$ 和直线 $y=1,z=-1$ 的交点，求在已知平面上垂直于已知直线的直线方程.

解 显然，已知平面与直线的交点是 $P(1,1,-1)$，过 P 点垂直于已知直线的平面为 π，则 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{s}$，故取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\left\{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\right\}=\{1,0,0\},$$

平面 π 的方程为 $x-1=0$，故所求的直线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\x+y+z=1.\end{cases}$$

6.4.22 在平面 $x+y+z+1=0$ 内求垂直于直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x+2z=0\end{cases}$ 的直线方程.

解 已知直线的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{2,-1,-1\}$，它与平面的交点为 $(0,-1,0)$. 因此垂面方程为

$$2(x-0)-(y+1)-(z-0)=0,$$

故所求直线方程为

$$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x-y-z-1=0.\end{cases}$$

6.4.23 求直线方程，使

(1) 通过点$(3,4,5)$与直线 $y=-2x+9,\ z=9x-43$ 和平面 $3x-4y+7z-33=0$ 的交点.

(2) 与两直线 $\begin{cases}x=3z-1,\\y=2z-3,\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x-5,\\z=7x+2\end{cases}$ 相交并垂直.

解 (1) 先求直线和平面的交点，将直线方程代入平面方程，得

$$3x - 4(-2x + 9) + 7(9x - 43) - 33 = 0,$$

即 $74x = 370$, $x = 5$，于是 $y = -1$，$z = 2$. 所以

$$\mathbf{s} = \{5 - 3, -1 - 4, 2 - 5\} = \{2, -5, -3\},$$

故所求直线的方程为 $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z-5}{-3}$.

(2) 两直线的标准式为

L_1: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$, L_2: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-2}{7}$,

因为 $\mathbf{s} \perp \mathbf{s}_1$ 且 $\mathbf{s} \perp \mathbf{s}_2$，所以

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \{3,2,1\} \times \{1,2,7\} = \{12, -20, 4\}.$$

设公垂线交两直线于 M_1, M_2 两点，$M_1M_2 \parallel \mathbf{s}$，又设 π 为过 L_1 和公垂线的平面，所以 $\mathbf{n} \perp \mathbf{s}_1$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{s}$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s} = \{3,2,1\} \times \{12, -20, 4\} = \{28, 0, -84\}.$$

取 $\mathbf{n} = \{1, 0, -3\}$，因为点 $(-1, -3, 0)$ 在 L_1 上，所以公垂面方程为

$$(x + 1) - 3z = 0.$$

为求 M_2，将 L_2 化为参数式 $\begin{cases} x = t, \\ y = -5 + 2t, \\ z = 2 + 7t. \end{cases}$ 代入公垂面方程，有

$$t + 1 - 3(2 + 7t) = 0,\ t = -\frac{1}{4},$$

M_2 点的坐标为 $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{11}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$，故公垂线方程为

$$\frac{x + \frac{1}{4}}{3} = \frac{y + \frac{11}{2}}{-5} = \frac{z - \frac{1}{4}}{1}.$$

另解　$\mathbf{s}_1 = \{3, 2, 1\}$, $\mathbf{s}_2 = \{1, 2, 7\}$, $\mathbf{s} = \{3, -5, 1\}$, $M_1(-1, -3, 0) \in L_1$，在 π_1 上任取点 $M(x, y, z)$，则 $[\overrightarrow{M_1M}\ \mathbf{s}_1\, \mathbf{s}] = 0$,

即 $\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$，或 $x - 3z + 1 = 0$.

同理有 $\begin{vmatrix} x & y+5 & z-2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$，或 $37x + 20y - 11z + 122 = 0$,

故所求直线的方程为

$$\begin{cases} x - 3z + 1 = 0, \\ 37x + 20y - 11z + 122 = 0. \end{cases}$$

或 $$\frac{x+\frac{1}{4}}{3} = \frac{y+\frac{11}{2}}{-5} = \frac{z-\frac{1}{4}}{1}.$$

注 π_1 为过 L_1 与公垂线的平面，在同理中也有 π_2，π_2 为过 L_2 与公垂线的平面.

6.4.24 求直线

$$L_1:\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + z - 1 = 0, \end{cases} 与 L_2:\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

之间的距离.

解 将已知直线 L_1, L_2 标准化.

$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$，　$L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{-3}$，

$\mathbf{s}_1 = \{1, 0, -1\}$，　$\mathbf{s}_2 = \{1, -4, -3\}$，

两直线 l_1 与 l_2 间的距离是它们的公垂线夹在两线之间的部分 $d = |\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2|$，因此可以看作 l_1, l_2 上两点 P_1, P_2 在公垂线上的投影长 $|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2|$. 因为 $P_1(0, -1, 1) \in L_1$，$P_2(-2, 1, 1) \in L_2$，$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \{-4, 2, -4\}$，而 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \{-2-0, 1+1, 1-1\} = \{-2, 2, 0\}$. 所以，

$$\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = 8 + 4 = 12,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Prj}_{\mathbf{s}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 &= |\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2| \cdot \cos(\boldsymbol{P}_1\widehat{\boldsymbol{P}_2}, \mathbf{s}) = |\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2| \frac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 \cdot \mathbf{s}}{|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2||\mathbf{s}|} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{12}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{6} = 2. \end{aligned}$$

即　$d = |\mathrm{Prj}_{\mathbf{s}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2| = 2$.

6.4.25 求两直线共面的条件.

解 设 L_1: $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$,

L_2: $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$.

当 L_1, L_2 共面于 $Ax + By + Cz + D = 0$ 时，应有

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0, \\ Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0. \end{cases}$$

而 A,B,C 有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

6.4.26　求通过点 $A(-1,0,4)$ 且平行于平面 $\pi: 3x-4y+z+10=0$，又与直线 $L_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ 相交的直线方程.

解　设过点 A 的直线方程为

$$L: \frac{x+1}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z-4}{n},$$

$B(-1,3,0)\in l_1-l$，由 $\mathbf{s}=\{l,m,n\}$，$\mathbf{s}_1=\{1,1,2\}$，$\boldsymbol{AB}=\{0,3,-4\}$ 共面，有

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-10l+4m+3n=0 \tag{1}$$

又 $L /\!/ \pi$，所以 $3l-4m+n=0.$ (2)

令 $l=1$，由(1)、(2)得 $m=\frac{19}{16}$，$n=\frac{7}{4}$.

故所求的直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{\frac{19}{16}}=\frac{z-4}{\frac{7}{4}}，即 \frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

6.4.27　在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上求与直线

$$L_1: \begin{cases} x+y-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases} 和 L_2: \begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0; \end{cases}$$

相交的直线方程.

解　由 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+y-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

可以求得 L_1 与 π 的交点 $M_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ 和 L_2 与 π 的交点 $M_2(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 取 $\mathbf{s}=\boldsymbol{M_1M_2}=\{-\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\}$. 故所求的直线方程为

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{3}.$$

6.4.28 由两相交平面外一点到这两个平面作垂线，试证它们的垂足的连线必与两平面的交线垂直.

解法1 取已知两平面的交线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则两平面方程分别为 $y=mx$ 及 $y=nx$，设定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，由 P_0 作第一个平面的垂线

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{-1}=\frac{z-z_0}{0},\text{或}\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0-t,\\z=z_0,\end{cases}$$

代入 $y=mx$ 中，得

$$y_0-t=mx_0+m^2t,t=\frac{y_0-mx_0}{1+m^2},$$

故垂足为 $M(\frac{x_0+my_0}{1+m^2},\frac{mx_0+m^2y_0}{1+m^2},z_0)$，$N(\frac{x_0+ny_0}{1+n^2},\frac{nx_0+n^2y_0}{1+n^2},z_0)$，

$$\boldsymbol{MN}=\{\frac{x_0+ny_0}{1+n^2}-\frac{x_0+my_0}{1+m^2},\frac{nx_0+n^2y_0}{1+n^2}-\frac{mx_0+m^2y_0}{1+m^2},0\}.$$

显然 $\boldsymbol{MN}\cdot\boldsymbol{k}=0$，即 $\boldsymbol{MN}\perp oz$. 结论正确.

解法2 设二平面的法线矢量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$，其交线方向矢量为 $\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

两平面外一点 P_0 到两平面的垂足分别为 M_1,M_2，则 $\boldsymbol{P_0M_1}=\lambda_1\boldsymbol{n}_1$，$P_0M_2=\lambda_2\boldsymbol{n}_2$，$(\lambda_1,\lambda_2\neq 0)$. 而

$$\boldsymbol{M_1M_2}=\boldsymbol{P_0M_2}-\boldsymbol{P_0M_1}=\lambda_2\boldsymbol{n}_2-\lambda_1\boldsymbol{n}_1.$$

$$\boldsymbol{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{s}=(\lambda_2\boldsymbol{n}_2-\lambda_1\boldsymbol{n}_1)\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=0.$$

所以，$\boldsymbol{M_1M_2}$ 垂直于两平面的交线.

6.4.29 解下列各题：

(1) 求直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{-1}$ 上一点 $(-1,-4,0)$ 到此直线与平面 $3x-2y+z-7=0$ 交点的距离；

(2) 从平面 $x-2y-2z+1=0$ 上的点 $(7,-1,5)$ 作长等于 12 的垂线，求垂线端点的坐标.

解 (1) 以直线的参数方程 $x=2t-1,y=3t-4,z=-t$ 代入平面方程，得 $3(2t-1)-2(3t-4)-t-7=0$，由此得，$t=-2$，于是

交点为$(-5,-10,2)$. 故所求距离为

$$d=\sqrt{(-5-(-1)^2)+(-10+4)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{14}.$$

(2) 设端点$(x_0,y_0,z_0)\in l$, $s=n=\{1,-2,-2\}$,故垂线的参数式为 $x=t+7, y=-2t+1, z=-2t+5$. 由题意得

$$(x_0-7)^2+(y_0+1)^2+(z_0-5)^2=12^2.$$

即 $t^2+(-2t)^2+(-2t)^2=12^2$, 　　$t=\pm 4$.

故端点坐标为$(3,7,13)$或$(11,-9,-3)$.

6.4.30 　由原点向定直线 $\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$ 引垂线,求此直线的方程,并求原点到定直线的距离.

解 　过原点与已知直线作平面 $\pi_1: Ax+By+Cz=0$,

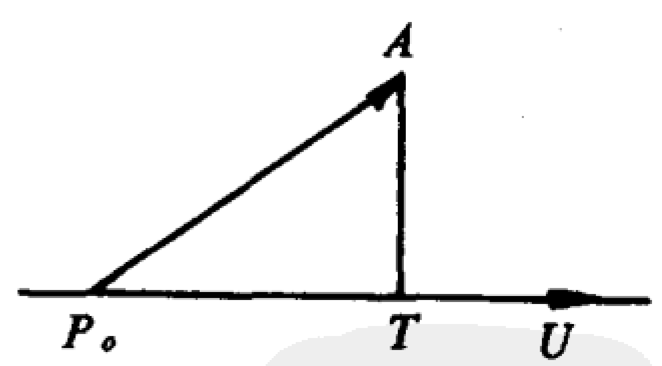
$$\boldsymbol{n}_1=\{A,B,C\}=\{a,b,c\}\times\{l,m,n\}=\{bn-cm,cl-an,am-bl\}.$$

过原点垂直于已知直线作平面 $\pi_2: lx+my+nz=0$,
故所求直线的方程为

$$\begin{cases}(bn-cm)x+(cl-an)y+(am-bl)z=0,\\ lx+my+nz=0.\end{cases}$$

此直线的方向矢量 $\mathbf{s}=\{bn-cm,cl-an,am-bl\}\times\{l,m,n\}$,
为求原点到定直线的距离,先推导点到直线的距离公式.

已知直线 $l: \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0+t\mathbf{s}$ 及 l 外一点 $A(a,b,c)$, P_0点的坐标为(x_0,y_0,z_0), 现在求A到l的距离AT. 以$\mathbf{P_0A}$和$\mathbf{P_0U}=\mathbf{s}$为邻边的平行四边形的面积为$|\mathbf{P_0A}\times\mathbf{P_0U}|$,另一方面,这个平行四边形的面积也可写作 $|\mathbf{s}|\times|AT|$,所以 $|\mathbf{P_0A}\times\mathbf{P_0U}|=|\mathbf{s}||AT|$.



6.4.30 题图

$$|AT|=\frac{|\mathbf{P_0A}\times\mathbf{P_0U}|}{|\mathbf{s}|}=\frac{|\mathbf{P_0A}\times\mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}|,$$

这里 $\mathbf{s}=\{l,m,n\}$.

A到L的距离为

$$d=\frac{|\mathbf{P_0A}\times\mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}|=\frac{|\{a-x_0,b-y_0,c-z_0\}\times\{l,m,n\}|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$= \frac{\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a - x_0 & b - y_0 & c - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

由此可得,原点到定直线的距离为

$$d = \frac{\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 - a & 0 - b & 0 - c \\ l & m & n \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{|\{cm - bn, na - cl, bl - am\}|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(cm - bn)^2 + (na - cl)^2 + (bl - am)^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

6.4.31 求过原点及点 $P(1, -1, 0)$ 到直线 $l_1: x = z + 3,\ y = 2x - 3$ 的垂线的平面方程.

解 先求从 P 点到直线 L_1 的垂线,为此过 P 点作 L_1 的垂面 π_1.

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{s}_1 = \left\{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \{-1, -2, -1\}.$$

故 π_1 的方程为 $-(x - 1) - 2(y + 1) - z = 0$,即

$$x + 2y + z + 1 = 0.$$

又 $(3,3,0) \in L_1$,故 L_1 的参数式为

$$x = 3 + t, y = 3 + 2t, z = t.$$

代入 π_1 的方程,得 $(3 + t) + 2(3 + 2t) + t + 1 = 0$.

即 $6t + 10 = 0,\ t = -\frac{5}{3}$. 由此得交点 $Q(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$,于是垂线 PQ 已作出,$\boldsymbol{PQ} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\}$.

而所求的平面 $\pi \parallel \boldsymbol{PQ}$ 及 $\boldsymbol{OP}$,所以 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{PQ}, \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{OP}$,取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{PQ} \times \boldsymbol{OP} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\} \times \{1, -1, 0\}$$

$$= \{-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$$

故所求的平面方程为 $-\frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y - z = 0$,

即 $$5x + 5y + 3z = 0.$$

6.4.32　求过定点(a,b,c)且与两异面直线

$$L_1:\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1},\ L_2:\frac{x-a_2}{L_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2},$$

(1) 均相交;(2) 均垂直的直线方程.

解　(1) 即求过(a,b,c)且过L_1的平面π_1和过(a,b,c),且过L_2的平面π_2的交线.

因为$A(a,b,c)\in\pi_1,L_1\in\pi_1,B(a_1,b_1,c_1)\in\pi_1$

设π_1的方程为

$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$,

则$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$. 所以$Al_1+Bm_1+Cn_1=0$,

$$A(a_1-a)+B(b_1-b)+C(c_1-c)=0$$

的充要条件是$\boldsymbol{AB}\perp\boldsymbol{n}$,而$A,B,C$有非零解的充要条件是

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a_1-a & b_1-b & c_1-c \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0, \tag{1}$$

同理可求得

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ a_2-a & b_2-b & c_2-c \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0, \tag{2}$$

故(1)、(2) 的交线即为所求的直线.

(2) 因为$(a,b,c)\in L$,且$\mathbf{s}\perp\mathbf{s}_1,\mathbf{s}\perp\mathbf{s}_2$,所以,

$$\begin{aligned}\mathbf{s}=\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2&=\{l_1,m_1,n_1\}\times\{l_2,m_2,n_2\}\\&=\{m_1n_2-m_2n_1,n_1l_2-n_2l_1,l_1m_2-l_2m_1\}.\end{aligned}$$

故所求直线L的方程为

$$\frac{x-a}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{y-b}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{z-c}{l_1m_2-l_2m_1}.$$

6.4.33　求直线$x=mz+a$, $y=nz+b$和平面$Ax+By+Cz+D=0$相交、平行、重合的充要条件.

解　将直线方程代入平面方程,得

$$(Am+Bn+C)z+Aa+Bb+D=0,$$

故　相交$\Longleftrightarrow Am+Bn+C\neq0$;

平行$\Longleftrightarrow Am+Bn+C=0,Aa+Bb+D\neq0$;

重合$\Longleftrightarrow Am+Bn+C=Aa+Bb+D=0$.

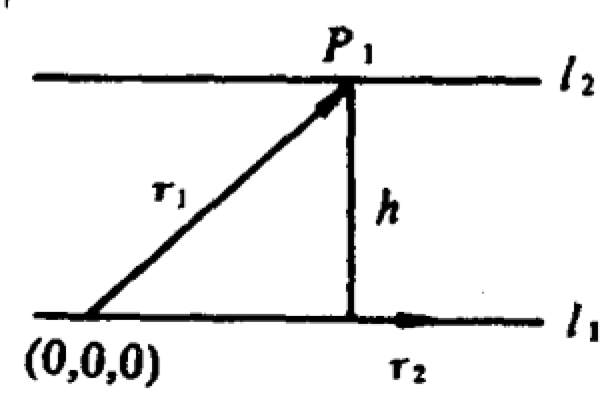
6.4.34　已知两直线$L_1\parallel L_2$其中L_1通过原点,L_2通过P_1,证明该

二直线间的距离 h 可以用公式 $h=\frac{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_2|}$ 来表示，其中 $\boldsymbol{r}_1$ 是 P_1 点的矢径，$\boldsymbol{r}_2$ 是平行于给定直线的方向矢量.

证 以 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 为邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|$，另一方面，此平行四边形的面积又等于 $h|\boldsymbol{r}_2|$，故有

$$|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|=h|\boldsymbol{r}_2|.$$

即 $$h=\frac{|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_2|}.$$



6.4.34 题图

6.4.35 若 $a(1-m)+b(l-1)\neq 0$，试证两直线 $x=y=z$ 和 $x=lz+a,y=mz+b$ 为异面直线，并求它们的公垂线方程与距离.

证 直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 通过点 $P_1(0,0,0)$，其方向矢量 $\boldsymbol{s}_1=\{1,1,1\}$；直线 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z}{1}$ 通过点 $P_2(a,b,0)$，其方向矢量 $\boldsymbol{s}_2=\{l,m,1\}$. 因为

$$\begin{vmatrix} a & b & 0\\ 1 & 1 & 1\\ l & m & 1\end{vmatrix}=a+bl-b-am=a(1-m)+b(l-1)\neq 0,$$

所以已知两直线异面. 取公垂线的方向矢量

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ l & m & 1\end{vmatrix}=\{1-m,l-1,m-l\}.$$

则公垂线方程为：

$$[(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_1)\ \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}]=0,\ [(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_2)\ \boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}]=0,$$

即 $$\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 1-m & l-1 & m-l\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c\\ l & m & 1\\ 1-m & l-1 & m-l\end{vmatrix}=0,$$

所求距离应为 $\boldsymbol{P_1P_2}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 上的投影长，由 6.4.24 题可知，$d=\frac{|\boldsymbol{P_1P_2}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$. 即 $d=\frac{|a(1-m)+b(l-1)|}{\sqrt{(1-m)^2+(l-1)^2+(m-l)^2}}$.

6.4.36 判别下列各对直线是否共面，如果共面，求其所在的平面方程，如果不共面，求其公垂线方程.

(1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-4}$，　$\frac{x-9}{6}=\frac{y-2}{3}=z+1$；

(2) $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$，　$\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\5x+4y-z-7=0;\end{cases}$

(3) $x-7=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$，　$\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

解　(1) $s_1=\{2,1,-4\}$，$s_2=\{6,3,1\}$，且$(1,-2,2)\in L_1$，$(9,2,-1)\in L_2$，而

$$\begin{vmatrix}9-2 & 2-(-2) & -1-2\\ 2 & 1 & -4\\ 6 & 3 & 1\end{vmatrix}=0,$$

所以 L_1,L_2 共面.

L_1,L_2 所在平面的方程为 $\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-2\\ 2 & 1 & -4\\ 6 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$,

即　$x-2y-5=0$.

(2) 同理可求得 L_1,L_2 共面，其方程为

$$125x+4y+43z-139=0.$$

(3) $s_1=\{1,2,-1\}$，$s_2=\{-7,2,3\}$，$(3,1,1)\in L_2$，$(7,3,9)\in L_1$，

$$\begin{vmatrix}3-7 & 1-3 & 1-9\\ 1 & 2 & -1\\ -7 & 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 L_1,L_2 不共面.

又$(7,3,9)\in L_1$，通过 L_1 且与 $s=s_1\times s_2$ 平行的平面方程为：

$$\begin{vmatrix}x-7 & y-3 & z-9\\ 1 & 2 & -1\\ 8 & 4 & 16\end{vmatrix}=0, \tag{1}$$

又$(3,1,1)\in L_2$，通过 L_1 且与 $s=s_1\times s_2=\{8,4,16\}$ 平行的平面方程为

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-1 & z-1\\ -7 & 2 & 3\\ 8 & 4 & 6\end{vmatrix}=0, \tag{2}$$

(1)、(2) 的交线即为公垂线，它与两直线相交.

如果任求一条公垂线，则因 $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \{8,4,6\}$，取 L 通过(7,3,9)，得 L 的方程为

$$\frac{x-7}{8} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-9}{16}.$$

即　$\dfrac{x-7}{2} = y-3 = \dfrac{z-9}{4}.$

6.4.37　已知四条直线 L_1, L_2, L_3, L_4 的方程分别是：

$$L_1:\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 3a; \end{cases}\quad L_2:\begin{cases} y = 0, \\ z + x = 3b; \end{cases}\quad L_3:\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 3c; \end{cases}$$

$$L_4:\begin{cases} x + y + z = 3k \\ \dfrac{ax}{k-a} + \dfrac{by}{k-b} + \dfrac{cz}{k-c} = 0. \end{cases}$$

求证：(1) L_1 与其它三条直线的距离分别是 $\sqrt{3}\,|a-b|$，$\sqrt{3}\,|a-c|$，$\sqrt{3}\,|a-k|$；

(2) 当 $a+b+c=0$ 时，这四条直线与直线 $x+a=y+b=z+c$ 的交角都是直角.

证　(1) $\mathbf{s}_1 = \{0,-1,1\}$ 且 $P_1(0,0,3a) \in L_1$，

$\mathbf{s}_2 = \{1,0,-1\}$ 且 $P_2(3b,0,0) \in L_2$，

$\mathbf{s}_3 = \{-1,1,0\}$ 且 $P_3(3c,0,0) \in L_3$，

$$\mathbf{s}_4 = \left\{\frac{k(c-b)}{(k-b)(k-c)},\quad \frac{k(a-c)}{(k-a)(k-c)},\quad \frac{k(b-a)}{(k-b)(k-a)}\right\}$$

且 $P_4(-a,-b,-c) \in L_4$.

$\mathbf{s}_{12} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \{1,1,1\}$，由 6.4.36 题可知，$L_1$ 与 L_2 的公垂线为

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3a \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} x-3b & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$d_{12} = \frac{|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{s}_{12}|}{|\mathbf{s}_{12}|} = \frac{|3b+0-3a|}{\sqrt{3}} = \frac{3|b-a|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,|a-b|,$$

同理，$d_{13} = \dfrac{|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{s}_{13}|}{|\mathbf{s}_{13}|} = \dfrac{|\{3c,0,-3a\} \cdot \{1,-1,1\}|}{\sqrt{3}}$

$$= \sqrt{3}\,|a-c|,$$

$$d_{14} = \frac{|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{s}_{14}|}{|\mathbf{s}_{14}|} = \sqrt{3}\,|a-k|.$$

(2) 直线 $x+a=y+b=z+c$ 的方向矢量 $\mathbf{s}=\{1,1,1\}$. 容易验证，$\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}=\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{s}=\mathbf{s}_3\cdot\mathbf{s}=0$，又 $a+b+c=0$，还可以验证 $\mathbf{s}_4\cdot\mathbf{s}=0$，故结论成立.

6.4.38　已知 L_1,L_2,L_3 的方程分别为

$$L_1:\begin{cases}x=0,\\ y+z=b-c,\end{cases}\quad L_2:\begin{cases}y=0,\\ z+x=c-a,\end{cases}$$

$$L_3:\begin{cases}z=0,\\ x+y=a-b.\end{cases}$$

(1) 求 L_1 与 L_2 的公垂线 L 的方程，并验证 $L\perp L_3$；

(2) 证明这三条直线的三段公垂线之比为

$$(b+c-2a):(c+a-2b):(a+b-2c).$$

证　(1) $\mathbf{s}_1=\{0,-1,1\}$，且 $P_1(0,0,b-c)\in L_1$，

$\mathbf{s}_2=\{1,0,-1\}$，且 $P_2(c-a,0,0)\in L_2$，

$\mathbf{s}_3=\{-1,1,0\}$，且 $P_3(0,a-b,0)\in L_3$，

$\mathbf{s}_{12}=\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2=\{1,1,1\}$，　$\mathbf{s}_{13}=\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_3=\{-1,-1,-1\}$，

$\mathbf{s}_{23}=\mathbf{s}_2\times\mathbf{s}_3=\{1,1,1\}$.

由 6.4.36 题可知，L_1 与 L_2 的公垂线 L 为

$$\begin{vmatrix}x & y & z-(b-c)\\ c-a & 0 & -(b-c)\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad\begin{vmatrix}x-(c-a) & y & z\\ c-a & 0 & -(b-c)\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

显然　$\mathbf{s}_3\cdot\mathbf{s}_{12}=-1\times1+1\times1+0\times1=0$，

所以 $L\perp L_3$.

(2) 由 6.4.37 题可知，

$$d_{12}=\frac{|c-a-(b-c)|}{\sqrt{3}}=\frac{|2c-a-b|}{\sqrt{3}};$$

$$d_{13}=\frac{|a-b-(b-c)|}{\sqrt{3}}=\frac{|a+c-2b|}{\sqrt{3}};$$

$$d_{23}=\frac{|2a-b-c|}{\sqrt{3}}.$$ 故结论正确.

6.4.39　试确定 λ 值，使直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 和直线 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 相交，并求它们所在平面的方程.

解　因为 L_1,L_2 共面，由 6.4.25 题可得

$$\begin{vmatrix} 1-(-1) & -1-1 & 1-0 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

解之得，$\lambda = \dfrac{5}{4}$.

设 L_1, L_2 所在的平面为 π，则 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, -1\}$，且 $(1,-1,1) \in \pi$. 故 π 的方程为

$$\frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y+1) - (z-1) = 0,$$

即　$$3x + y - 4z + 2 = 0.$$

3. 综合问题

6.4.40　求点(2,3,1)在直线 $x = t-7, y = 2t-2, z = 3t-2$ 上的投影.

解　过点(2,3,1)作垂直于直线 L 的平面 π，因 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} = \{1,2,3\}$，故 π 的方程为　$(x-2) + 2(y-3) + 3(z-1) = 0$，

即　$$x + 2y + 3z - 11 = 0.$$

将直线的参数式代入 π，得

$$(t-7) + 2(2t-2) + 3(3t-2) - 11 = 0，即\ t = 2,$$

于是，L 与 π 的交点为 $(-5,2,4)$，故点(2,3,1)在 L 上的投影为 $(-5,2,4)$.

6.4.41　求直线 $6x - 6y - z + 16 = 0, 2x + 5y + 2z + 3 = 0$ 在三坐标面上的投影方程.

解　由二方程中消去 z，得平行于 z 轴的的投影柱面方程

$$14x - 7y + 35 = 0.$$

因此，直线在坐标面 xoy 上的投影为

$$\begin{cases} z = 0, \\ 2x - y + 5 = 0. \end{cases}$$

同理可得，直线在 xoz, yoz 坐标面上的投影为

$$\begin{cases} y = 0, \\ 6x + z + 14 = 0 \end{cases} 和 \begin{cases} x = 0, \\ 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

6.4.42　求直线 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 在平面 $Ax + By +$

$Cz + D = 0$ 上投影直线的方程.

解　过已知直线的平面束为

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

即 $(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0$

若此平面垂直于平面 $Ax + By + Cz + D = 0$,必有

$$A(A_1 + \lambda A_2) + B(B_1 + \lambda B_2) + C(C_1 + \lambda C_2) = 0.$$

由此得 $\lambda = -\dfrac{(AA_1 + BB_1 + CC_1)}{(AA_2 + BB_2 + CC_2)}$.

故所求平面为

$$(AA_2 + BB_2 + CC_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - (AA_1 + BB_1 + CC_1)\cdot(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

(其中 $AA_2 + BB_2 + CC_2 \neq 0$).

于是,投影直线方程为

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ (AA_2 + BB_2 + CC_2)[A_1x + B_1y + C_1z + D_1] \\ \qquad - (AA_1 + BB_1 + CC_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \end{cases}$$

6.4.43　求直线 $2x + y - z - 4 = 0, 5x - 3y + z + 1 = 0$ 在平面 $2x + 3y + z = 0$ 上的投影.

解法 1　设直线为 L. 过 L 作平面 π 垂直已知平面 π_1,则 $L \in \pi$. $s \perp n$,而 $s = \{2,1,-1\} \times \{5,-3,1\} = \{-2,-7,-11\}$.

$n = s \times n_1 = \{-2,-7,-11\} \times \{2,3,1\} = \{26,-20,8\}$,

再取点 $(1,2,0) \in L$,故所求平面 π 的方程为

$$26(x-1) - 20(y-2) + 8(z-0) = 0,$$

即　$13x - 10y + 4z + 7 = 0$.

所以,投影直线为 $\begin{cases} 13x - 10y + 4z + 7 = 0, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$

解法 2　过 L 的平面束为

$$(2x + y - z - 4) + \lambda(5x - 3y + z + 1) = 0,$$

即　$(2 + 5\lambda)x + (1 - 3\lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-4 + \lambda) = 0$.

因为投影面与所求平面垂直,而 $n_1 = \{2,3,1\}$. 所以,

$$2(2 + 5\lambda) + 3(1 - 3\lambda) + 1\cdot(-1 + \lambda) = 0.$$

由此得 $\lambda = -3$,故平面 π 的方程为

$$-13x + 10y - 4z - 7 = 0.$$

所以，所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}13x-10y+4z+7=0,\\2x+3y+z=0.\end{cases}$$

解法 3　利用 6.4.44 题的结果，所求平面为

$$[2\cdot2+3\cdot1+1\cdot(-1)][5x-3y+z+1]$$
$$-[2\cdot5+3(-1)+1\cdot1](2x+y-z-4)=0,$$

即　$26x-20y+8z+14=0.$

由此可得，投影直线为$\begin{cases}13x-10y+4z+7=0,\\2x+3y+z=0.\end{cases}$

6.4.44　在平面 $2x+y-3z+z=0$ 和平面 $5x+5y-4z+3=0$ 所确定的平面束内，求两个相互垂直的平面，其中一个平面经过点 $(4,-3,1)$.

解　先求过 $(4,-3,1)$ 点的平面. 设平面束为：

$$2x+y-3z+2+\lambda(5x+5y-4z+3)=0,$$

则

$$2\times4+(-3)-3\times1+2$$
$$+\lambda(5\times4+5(-3)-4\cdot1+3)=0.$$

即　$4\lambda+4=0,\lambda=-1.$

所求平面为　$3x+4y-z+1=0.$

另一个平面也在平面束内，故

$$(2+5\lambda)x+(1+5\lambda)y-(3+4\lambda)z+(2+3\lambda)=0,$$

$$\boldsymbol{n}_1=\{3,4-1\},\quad 且\ \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2,$$

$$0=\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=3(2+5\lambda)+4(1+5\lambda)+(3+4\lambda),$$

由此可得，　$\lambda=-\dfrac{1}{3}.$

故所求的另一个平面为：

$$2x+y-3z+2-\frac{1}{3}(5x+5y-4z+3)=0,$$

即　　$x-2y-5z+3=0.$

6.4.45　三个坐标平面将平面 $3x-y+4z-12=0$ 割出一个三角形，分别从三个顶点作高线，求高线方程和长度.

解　$\triangle ABC$ 的顶点坐标和三条高线 CD、AE、BF 如图所示.

(1) 求 CD 的方程 L_1. 过 C 点作平面 π_1 垂直于 AB，

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_{AB}=\{-4,-12,0\},$$

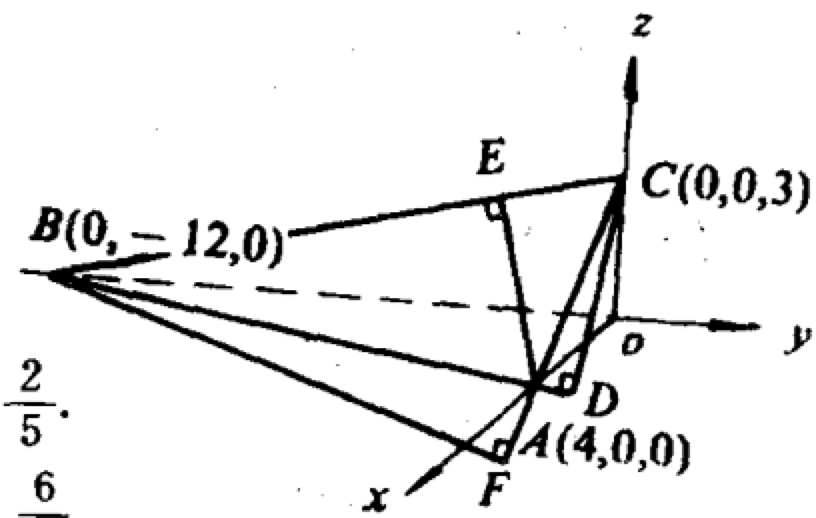
所以 π_1 的方程为 $-4x-12y=0$，即 $x+3y=0$.

故 L_1 的方程为：

$$\begin{cases} x + 3y = 0, \\ 3x - y + 4z - 12 = 0. \end{cases}$$

L_{AB} 的方程为：$x = 4 - t$，$y = -3t$，$z = 0$. 代入 π_1 得

$$(4 - t) + 3(-3t) = 0,\ t = \frac{2}{5}.$$



6.4.45 题图

由此得 D 点的坐标为$(\frac{18}{5}, -\frac{6}{5}, 0)$. 所以

$$|CD| = \sqrt{(\frac{18}{5})^2 + (\frac{-6}{5})^2 + 3^2} = \frac{3}{5}\sqrt{65}.$$

(2) 同理可得，$n_2 = s_{BC} = \{0, 12, 3\}$，

π_2：　$12y + 3z = 0$，即 $4y + z = 0$.

故 L_2 的方程为：$\begin{cases} 4y + z = 0, \\ 3x - 4y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$

又 L_{BC} 的参数式为：$x = 0, y = 4t, z = 3 + t$，代入 π_2 得

$$4(4t) + (3 + t) = 0,\ t = -\frac{3}{17}.$$

由此得 E 点的坐标为$(0, -\frac{12}{17}, \frac{48}{17})$.

故　$|AE| = \sqrt{4^2 + (\frac{12}{-17})^2 + (\frac{48}{17})^2} = \frac{4}{17}\sqrt{442}.$

(3) $n_3 = \{-4, 0, 3\}$，π_3 的方程为：$-4x + 3z = 0$.

L_3 的方程为：$\begin{cases} 4x - 3z = 0, \\ 3x - y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$

L_{AC}：$x = 4 - 4t, y = 0, z = 0$，代入 π_3 得 $F(\frac{36}{25}, 0, \frac{48}{25})$，

所以 $|BF| = \sqrt{(\frac{36}{25})^2 + 12^2 + (\frac{48}{25})^2} = \frac{12}{5}\sqrt{26}.$

§ 5　曲面与空间曲线

内 容 提 要

1. 曲面方程

一般说来，三个变量的方程 $F(x,y,z)=0$ 表示曲面；双参数 u,v 的方程组 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 也表示空间曲面.

2. 空间曲线方程

一般说来，方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 表示空间曲线，单参数方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ 也表示空间曲线. 空间曲线也可以看作两个曲面的交线.

3. 旋转曲面

设在 yoz 坐标面上有一已知曲线 c，它的方程为 $\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$ 则曲线 c 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

4. 常见的曲面方程

(1) 球面　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，$(a,b,c)$ 为球心，R 为球的半径.

(2) 椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$a,b,c$ 分别为椭球在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

(3) 椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z,\ pq>0$.

(4) 二次锥面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$，当 $a=b$ 时为圆锥面.

(5) 单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

(6) 双叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

(7) 双曲抛物面　$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z,\ pq>0.$

(8) 圆柱面　$x^2+y^2=R^2,$

(9) 椭圆柱面　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

(10) 双曲柱面　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

(11) 抛物柱面　$x^2=2py.$

问 题 与 解 答

1. 曲面

(1) 球面

6.5.1　求球面方程,已知:

(1) 中心在点$(3,-2,4)$,半径$r=3$;

(2) 直径的两个端点为$(-1,3,3)$和$(-3,-3,4)$;

(3) 中心在点$(0,-3,5)$并通过点$(1,-2,3)$.

解　(1) 中心在点$(3,-2,4)$,半径为3的球面方程为

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3^2.$$

(2) $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-1+3)^2+(3+3)^2+(3-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{41},$

中心在$O(\frac{-3-1}{2},\frac{3-3}{2},\frac{3+4}{2})$,即$O(-2,0,\frac{7}{2})$.

故所求球面方程为

$$(x+2)^2+(y-0)^2+(z-\frac{7}{2})^2=\frac{41}{4}.$$

(3) $r=\sqrt{(0-1)^2+(-3+2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{6},$

故所求球面方程为

$$(x-0)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=6.$$

6.5.2　求下列球面的方程

(1) 以两定点$A(a_1,a_2,a_3)$,$B(b_1,b_2,b_3)$连线为直径的球面;

(2) 球心在$O(a,b,c)$且分别与坐标面相切;

(3) 球心为$O(a,b,c)$且过定点(x_0,y_0,z_0).

解　(1) 球心为$O(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2})$.

$$\text{半径 } r=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

故所求的球面方程为

$$(x-\frac{a_1+b_1}{2})^2+(y-\frac{a_2+b_2}{2})^2+(z-\frac{a_3+b_3}{2})^2$$
$$=\frac{1}{4}[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2].$$

(2) 与 xoy 面相切的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2;$$

与 yoz 面相切的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2;$$

与 xoz 面相切的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2;$$

(3) 所求的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$
$$=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2.$$

6.5.3 一动点与点$(2,0,-3)$的距离和与点$(4,-6,6)$的距离之比等于3,求动点的轨迹.

解 设动点为 $M(x,y,z)$,由题设有

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z+3)^2}}{\sqrt{(x-4)^2+(y+6)^2+(z-6)^2}}=3.$$

两边平方,并化简得

$$8x^2+8y^2+8z^2-68x+108y-114z+779=0.$$

6.5.4 求下列各球面的中心与半径:

(1) $x^2+y^2+z^2+2x-6z+8=0$;

(2) $x^2+y^2+z^2+2z-3=0$;

(3) $x^2+y^2+z^2=ax+by+cz$.

解 (1) 原方程可化为:

$$(x+1)^2+(y-0)^2+(z-3)^2=2,$$

所以,中心为 $O(-1,0,3)$,半径为 $r=\sqrt{2}$.

(2) 原方程可化为:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=4.$$

所以,中心为 $O(0,0,-1)$,半径为 $r=2$.

(3) 原方程可化为

$$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b}{2})^2+(z-\frac{c}{2})^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

所以，中心为 $O(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$，半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

6.5.5　求过球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 所作的球面切平面的方程及过原点垂直于切平面的直线方程.

解　过点 (x_0,y_0,z_0) 切已知球面的切平面方程是

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0,$$

即　$x_0x+y_0y+z_0z-r^2=0$.

又 $\mathbf{s}=\{x_0,y_0,z_0\}$，所以过原点垂直于切平面的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0}.$$

6.5.6　求空间圆 $x^2+y^2+z^2-a^2=0, Ax+By+Cz+D=0$，$(a>0, A^2+B^2+C^2\neq 0)$ 的圆心和半径.

解　过球心 $O(0,0,0)$ 垂直于已知平面的直线方程是 $\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}$，设圆心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则 $\bar{x}=At, \bar{y}=Bt, \bar{z}=Ct$. 因为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\in\pi$，所以 $A^2t+B^2t+C^2t+D=0$，$t=\frac{-D}{A^2+B^2+C^2}$.

故圆心为

$$O(-\frac{AD}{A^2+B^2+C^2},-\frac{BD}{A^2+B^2+C^2},-\frac{CD}{A^2+B^2+C^2}).$$

又 $R^2=a^2-(\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2)=a^2-\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2}$，

所以，半径 $R=\sqrt{a^2-\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2}}$.

6.5.7　讨论点 $P_0(a,b,c)$ 和球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ 的相关位置.

解　当 $(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2>r^2$ 时，P_0 在球面外部；

当 $(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2<r^2$ 时，P_0 在球面内部；

当 $(a-x_0)^2+(b-y_0)^2+(c-z_0)^2=r^2$ 时，P_0 在球面上.

6.5.8　求球面族的方程与球心的轨迹.

(1) 以 r 为半径与三坐标面均相切；

(2) 与三坐标轴均相切.

解 球面族方程是

$$(x+\varepsilon_1 r)^2+(y+\varepsilon_2 r)^2+(z+\varepsilon_3 r)^2=r^2.$$

$$(\varepsilon_i=\pm 1, i=1,2,3).$$

这里符号的选择方式共有八种，对每一个 r 值共有八个球面，分别位于八个卦限内，其球心轨迹是过原点的四条直线：

$$x=y=z; \qquad -x=y=z;$$

$$x=-y=z; \qquad x=y=-z.$$

(2) 设球心(a,a,a)，球面族是

$$(x+\varepsilon_1 a)^2+(y+\varepsilon_2 a)^2+(z+\varepsilon_3 a)^2=(\sqrt{2}a)^2,$$

$$(\varepsilon_i=\pm 1 \quad i=1,2,3).$$

同(1)一样，对于每一个 a，共有八个球面分别位于八个卦限内，球心轨迹也是过原点的四条直线.

6.5.9 求球面方程.已知：

(1) 球心在原点且与平面 $16x-19y-12z+75=0$ 相切；

(2) 球心在 $O(1,4,-7)$，且与平面 $6x+6y-7z+42=0$ 相切；

(3) 球心在直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+8}{-4}=z-2$ 上，且过点$(2,-3,6)$和$(6,3,-2)$.

解 设原点到平面的距离为半径 r，则

$$r=\frac{|0+0+75|}{\sqrt{16^2+(-19)^2+(-12)^2}}=\frac{75}{\sqrt{761}}.$$

所以球面方程为 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{5625}{761}$.

(2) 同理，$r=\dfrac{|6\times 1+4\times 6+(-7)(-7)+42|}{\sqrt{6^2+6^2+(-7)^2}}$

$$=\frac{121}{\sqrt{121}}=\sqrt{121}.$$

故所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121.$$

(3) 设球心在 $O(X,Y,Z)$，则

$$(X-2)^2+(Y+3)^2+(Z-6)^2$$
$$=(X-6)^2+(Y-3)^2+(Z+2)^2,$$

即　$8X+12Y-16Z=0.$

另一方面，以 $X=2t_0+4, Y=-4t_0-8, Z=2+t_0$ 代入上式，得

$$16t_0+32-48t_0-96-32-16t_0=0,$$

所以，$t_0=-2$，由此求得球心为 $O(0,0,0)$.

又 $r^2=2^2+(-3)^2+6^2=49$. 故所求球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=49.$$

6.5.10　已知点 $A(2,-1,-4)$ 和 $B(5,5,5)$，AB 的连线与球面 $x^2+y^2+z^2-2x+6y+14z+3=0$ 交于点 P、Q，求证：

$$\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}=\frac{1}{2}.$$

证　$\boldsymbol{AB}=\{5-2,5+1,5+4\}=\{3,6,9\}$，取 $\boldsymbol{s}=\{1,2,3\}$，

直线 AB 的方程为　$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+4}{3}$,

其参数式为　$x=t+2, y=2t-1, z=3t-4$,

代入球面方程，得　$t^2+2t-3=0,\ t_1=1, t_2=-3$.

由此得交点 $P(3,1,-1)$ 与 $Q(-1,-7,-13)$.

$\boldsymbol{AP}=\{3-2,1+1,-1+4\}=\{1,2,3\}$.

$\boldsymbol{PB}=\{5-3,5-1,5+1\}=\{2,4,6\}=2\boldsymbol{AP}$,

$\boldsymbol{AQ}=\{-1-2,-7+1,-13+4\}=\{-3,-6,-9\}$,

$\boldsymbol{QB}=\{5+1,5+7,5+13\}=\{6,12,18\}=-2\boldsymbol{AQ}$,

所以，　$\dfrac{AP}{PB}=-\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{1}{2}.$

6.5.11　若平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的切平面，问系数应满足什么条件？

解　因为原点是球心，故原点到切平面的距离是半径. 即

$$\frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R,$$

或　　$D^2=R^2(A^2+B^2+C^2)$.

6.5.12　过 x 轴作球面 $(x+5)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=16$ 的切平面.

解　球心为 $O(-5,8,-1)$，半径 $r=4$，设过 x 轴的平面为

$$By + Cz = 0,$$

则 $\dfrac{|8B - C|}{\sqrt{B^2 + C^2}} = 4$，即 $48B^2 - 15C^2 - 16BC = 0$，

或 $(4B - 3C)(12B + 5C) = 0$，

由此得 $B = \dfrac{3}{4}C$，或 $B = -\dfrac{5}{12}$，所以，切平面为

$$\frac{3}{4}Cy + Cz = 0 \text{ 或 } -\frac{5}{12}Cy + Cz = 0,$$

即 $3y + 4z = 0$ 或 $5y - 12z = 0$.

6.5.13 求与直线 $y = 0, z = a$ 和直线 $x = 0, z = -a$ 均相切的球面中心的轨迹.

解 已知两直线的参数式为 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{s}_1^0$ 及 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 + t\boldsymbol{s}_2^0$，其中 $\boldsymbol{s}_1^0 = \{1,0,0\}, \boldsymbol{p}_1 = \{0,0,a\}; \boldsymbol{s}_2^0 = \{0,1,0\}, \boldsymbol{p}_2 = \{0,0,-a\}$.

设所求的与两直线均相切的球的球心为 $P(x,y,z)$. 则由点到直线的距离公式得

$$\frac{|\boldsymbol{PP}_1 \times \boldsymbol{s}_1^0|}{|\boldsymbol{s}_1^0|} = \frac{|\boldsymbol{PP}_2 \times \boldsymbol{s}_2^0|}{|\boldsymbol{s}_2^0|},$$

即有 $|\boldsymbol{PP}_1 \times \boldsymbol{s}_1^0| = |\boldsymbol{pp}_2 \times \boldsymbol{s}_2^0|$，

$$(z - a)^2 + y^2 = (z + a)^2 + x^2.$$

化简得 $x^2 - y^2 + 4az = 0$.

(2) 柱面

6.5.14 说明下列曲面是柱面，并画出草图.

(1) $y^2 = x^3$； (2) $y = x^3$； (3) $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$；

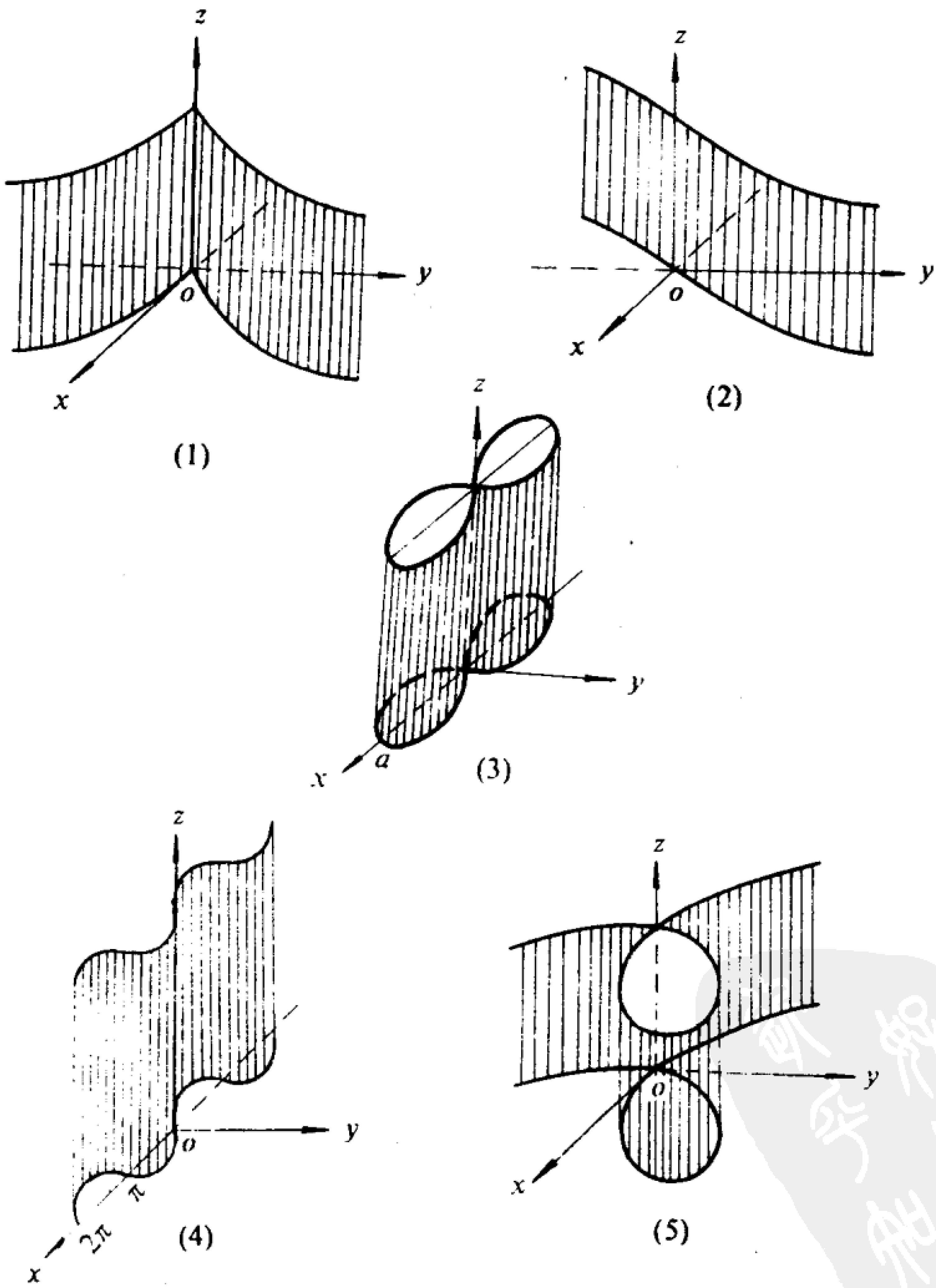
(4) $y = \sin x$； (5) $x^3 + y^3 = 3axy$.

解 (1) $y^2 = x^3$ 是以与 z 轴平行的直线为母线，平面曲线 $y^2 = x^3$，$z = 0$ 为准线的柱面(如图(1)).

(2) 同理，$y = x^3$ 是以平行于 z 轴的直线为母线，平面曲线 $y = x^3, z = 0$ 为准线的柱面(如图(2)).

(3) 曲面 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 是以 z 轴为母线，平面曲线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta, z = 0$ 为准线的柱面(如图(3)).

(4)、(5) 与(1)、(2) 类似. 草图如图(4),(5).



6.5.14 题图

6.5.15 设柱面的母线平行于直线 $x=y=z$，准线为 $x+y-z-1=0, x-y+z=0$，求柱面方程.

解 过准线上一点 (x,y,z) 且与直线 $x=y=z$ 平行的母线的标准方程为 $\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}$，或 $X=x+t, Y=y+t, Z=z+t$. 将此参数式代入准线方程，得 $2Y-2Z-1=0$.

6.5.16 柱面的母线平行于直线 $x=y=z$，且准线是曲线 $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$，求柱面的方程.

解 设柱面的母线方程为：

$$X-x=Y-y=Z+z,$$

由此可得 $y=x-X+Y, z=x-X+Z$，代入 $x+y+z=0$，得

$$x=\frac{(2X-Y-Z)}{3},\ y=\frac{(2Y-Z-X)}{3},\ z=\frac{(2Z-X-Y)}{3}.$$

再将所得的 x,y,z 代入 $x^2+y^2+z^2=1$，化简后得

$$X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX-\frac{3}{2}=0.$$

6.5.17 求曲线 $6xy-9y^2-2xz+24x-9y+3z-36=0, 2x-3y+z=9$ 平行于 z 轴的投影柱面.

解 消去 z，得平行于 z 轴的投影柱面为

$$-9y^2+6xy-2(9-2x+3y)x+24x-9y+3(9-2x+3y)-36=0,$$

即 $$4x^2-9y^2=36.$$

6.5.18 求曲线 $\begin{cases}2x^2+z^2+5yz-3x+z-7=0,\\ x-z+1=0\end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影.

解 消去 z，得平行于 z 轴的投影柱面方程为

$$2x^2+(x+1)^2+5y(x+1)-3x-(x+1)-7=0,$$

即 $$3x^2-2x+5xy+5y-7=0.$$

故所求的投影为

$$\begin{cases}3x^2-2x+5xy+5y-7=0,\\ z=0.\end{cases}$$

6.5.19 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在 xoy 平面上的投影方程.

解 消去 z，得平行于 z 轴的投影柱面为

$$x^2+(y-1)^2+(\pm\sqrt{1-x^2-y^2}-1)^2=1,$$

即
$$-2y+2\mp2\sqrt{1-x^2-y^2}=0.$$

$$y-1=\pm\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$x^2+2y^2-2y=0.$$

故交线在 xoy 平面上的投影是

$$\begin{cases}x^2+2y^2-2y=0,\\z=0.\end{cases}$$

6.5.20　求曲线 $3x^2+y^2-2z=0, z-y=1$ 在 xoy 平面上的投影柱面和在 xoy 面上的投影方程.

解　消去 z，得 $3x^2+y^2-2(y+1)^2=0$，即

$$3x^2-(y-1)^2=3.$$

此柱面是母线平行于 z 轴的椭圆柱面. 它在 xoy 面上的投影方程是

$$\begin{cases}3x^2+(y-1)^2=3,\\z=0.\end{cases}$$

这是 xoy 面上的椭圆.

6.5.21　把曲线方程

$$\begin{cases}2y^2+z^2+4x=4z,\\y^2+3z^2-8x=12z.\end{cases}$$

化成母线平行于 x 轴与 z 轴的柱面的交线方程. 并由此作出曲线的草图.

解　消去 x，得

$$5y^2+5z^2=20z,$$

即　$y^2+z^2=4z$，

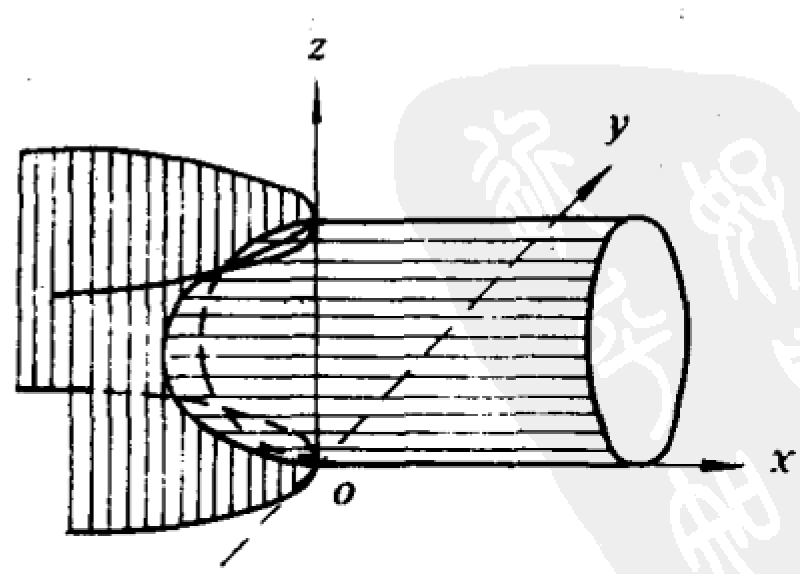
或 $y^2+(z-2)^2=2^2$.

消去 z 得，$y^2+4x=0$，

所以柱面的交线方程是

$$\begin{cases}y^2+z^2=4z,\\y^2+4x=0.\end{cases}$$

草图如右.



6.5.21 题图

6.5.22　试求通过直线

$$L_1:\begin{cases}x=0;\\ y-z=2;\end{cases}\quad L_2:\begin{cases}x=0;\\ x+y-z+2=0;\end{cases}\quad L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2};\\ y-z=0\end{cases}$$

的圆柱面方程.

解　将已知直线方程化为标准式，得

$$\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1};\ \frac{x}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{1};$$

$$\frac{x-\sqrt{2}}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

因为 $\mathbf{s}_1=\{0,1,1\}=\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_3$，故它们平行.

在 L_1 上取一点 $P_1(0,+1,-1)$，作与三直线都垂直的平面 π，其方程为 $y+z=0$. 由方程组

$$\begin{cases}x=0,\\ x+y-z=-2,\\ y+z=0;\end{cases}\ \text{和}\ \begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0,\\ y+z=0\end{cases}$$

求得 π 与直线 L_2,L_3 的交点为 $P_2(0,-1,1)$，$P_3(\sqrt{2},0,0)$. P_1,P_2,P_3 确定了平面 $\pi:y+z=0$ 上的一个圆. 设圆心为 $C(x,y,z)$. 则

$$|\boldsymbol{CP}_1|=|\boldsymbol{CP}_2|=|\boldsymbol{CP}_3|,$$

即

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2+(z-1)^2},$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-0)^2+(z-0)^2},$$

上面两式平方后得 $z-y=0$ 和 $\sqrt{2}x-y+z=0$.

故由

$$\begin{cases}z-y=0,\\ \sqrt{2}x-y+z=0,\\ y+z=0\end{cases}$$

可以求得圆心为 $C(0,0,0)$

所以，圆柱面的轴线方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$. 半径

$$r=|CP_1|=\sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}.$$

因为圆柱面上任一点 $P(x,y,z)$ 到轴线的距离都等于半径. 故由 6.4.30 题可知，点到直线距离为

$$\frac{\left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\sqrt{2},$$

或
$$\frac{|\{y-z,-x,x\}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

即
$$\sqrt{(y-x)^2+x^2+x^2}=2.$$
$$2x^2+y^2+z^2-2yz=4.$$

6.5.23　试求一柱面方程，使之以曲线 $l: y=\varphi(x)$ 为准线，其母线平行于直线 $L: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ $(a,b,c$ 中至少有一个不为 $0)$.

解　设 $M(X,Y,Z)$ 为所求柱面上任一点，过 M 作直线 $L_1 \,/\!/\, L$，则 L_1 的方程为：$\dfrac{x-X}{a}=\dfrac{y-Y}{b}=\dfrac{z-Z}{c}$. 又柱面以 $y=\varphi(x)$ 为准线，所以 L_1 与 l 必在同一平面 $z=0$ 上相交. 因此，令 $z=0$，由

$$\begin{cases} x=X-\dfrac{aZ}{c}, \\ y=Y-\dfrac{bZ}{c}. \end{cases}$$

解得 L_1 与 l 的交点为 $p(X-\dfrac{aZ}{c},Y-\dfrac{bZ}{c},0)$.

因为 $p\in l$，所以 $y=\varphi(x) \Longleftrightarrow Y-bZ/c=\varphi(X-\dfrac{aZ}{c})$

即为所求的柱面方程.

6.5.24　求下列曲线在三坐标面上的投影柱面，并选用两个投影柱面来作该曲线.

(1) $x^2+y^2+z^2=25, x^2+4y^2-z^2=0$;

(2) $x^2+y^2-z-1=0, x^2-y^2-z+1=0$.

解　(1) 两式相加消去 z，得 $2x^2+5y^2=25$，它表示曲线在 xoy 面上的投影.

同理，$3y^2-2z^2+25=0$ 表示曲线在 zoy 面上的投影.

$3x^2+5z^2=100$ 表示曲线在 xoz 面上的投影.

曲线可用 $\begin{cases} 2x^2+5y^2=25 \\ 3x^2+5z^2=100 \end{cases}$ 表示.

(2) 与(1) 同样，

$y^2-1=0$　表示曲线在 xoy 面上的投影柱面；

$x^2-z=0$　表示曲线在 xoz 面上的投影柱面；

$y^2-1=0$　表示曲线在 yoz 面上的投影柱面.

曲线可用 $\begin{cases} y^2-1=0, \\ x^2-z=0 \end{cases}$ 表示

(3) 锥面

6.5.25　说明下列曲面是锥面，并指出其次数及顶点.

(1) $(y+z-x)^2+(z+x-y)^2+(x+y-z)^2=0$；

(2) $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=0$；

(3) $(y+z-2)^3+(z+x-2)^3+(x+y-2)^3$

$$=3(y+z-2)(z+x-2)(x+y-2).$$

解　(1)、(2) 都是以原点为顶点的二次代数锥面；

(3) 将原式改写为：

$$[(y-1)+(z-1)]^3+[(z-1)+(x-1)]^3+[(x-1)+(y-1)]^3$$
$$=3[(y-1)+(z-1)]\cdot[(z-1)+(x-1)][(x-1)+(y-1)].$$

此曲面是以(1,1,1) 为顶点的三次代数锥面.

6.5.26　求锥面

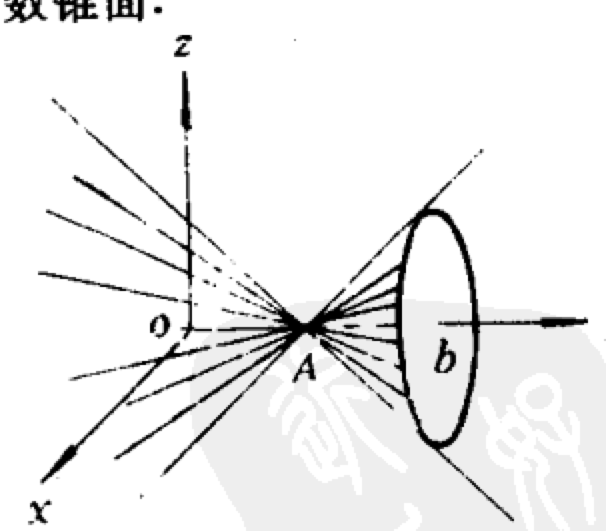
$$x^2+z^2-(y-a)^2=0$$

的顶点，并求它在 $y=b$ 上的准曲线，画此锥面的草图.

解　锥面 $x^2-(y-a)^2+z^2=0$ 的顶点坐标是 $A(0,a,0)$；其准线为

$$\begin{cases} x^2+z^2=(b-a)^2, \\ y=b. \end{cases}$$

草图如右.



6.5.26 题图

6.5.27　一锥面的顶点在原点，准线为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=c$. 建立此锥面方程.

解　过顶点和准线上的点 (x,y,z) 的母线为 $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$，

将 $z=c$ 代入上式，得 $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{c}$，

$$x=c\frac{X}{Z},\ y=c\frac{Y}{Z}.$$

将 x,y 代入第一个方程，得

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0,$$

这即为所求锥面的方程.

6.5.28　求适合下列条件的锥面方程，并画出草图.

(1) 顶点 $(0,0,0)$，准线 $x^2+y^2=a^2, z=c$；

(2) 顶点 $(0,-a,0)$，准线 $x^2+y^2+z^2=a^2, y+z=a$.

解　(1) 在准线上任取一点 $Q(x_1,y_1,z_1)$，则母线方程为

$$\frac{x-0}{x_1}=\frac{y-0}{y_1}=\frac{z-0}{z_1}$$

$$x_1=\frac{x}{z}z_1,\ y_1=\frac{y}{z}z_1.$$

又因 Q 点在准线上，所以 $x_1^2+y_1^2=a^2, z_1=c$.

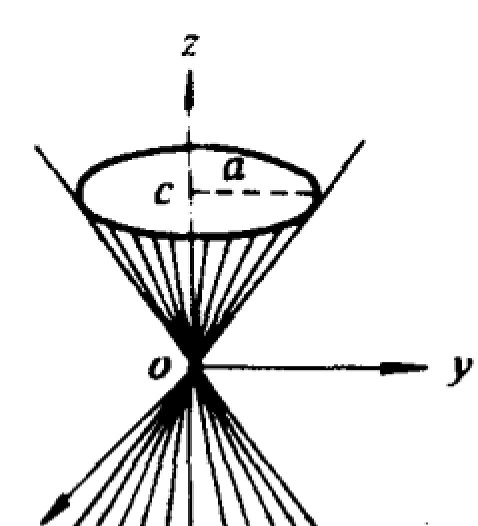
消去系数 x_1,y_1,z_1，得 $c^2x^2+c^2y^2=a^2z^2$.

即　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$，这即为所求锥面的方程.

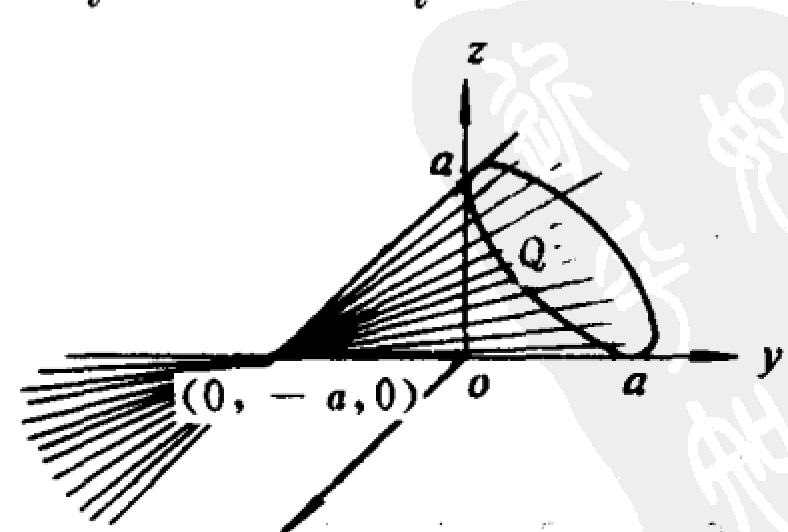
(2) 在准线上任取一点 $Q(x_1,y_1,z_1)$，则过 Q 的母线方程为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y+a}{y_1+a}=\frac{z}{z_1}=t,$$

$$x_1=\frac{x}{t},\ y_1=\frac{y+a}{t}-a,\ z_1=\frac{z}{t}.$$



(1)



(2)

6.5.28 题图

又因 Q 点满足准线方程. 所以可得 $t=\frac{y+z+a}{2a}$,于是,

$$x_1=\frac{2ax}{y+z+a},y_1=\frac{2a(y+a)}{y+z+a}-a,z_1=\frac{2az}{y+z+a},$$

所以 $(\frac{2ax}{y+z+a})^2+[\frac{2a(y+a)}{y+z+a}-a]^2+(\frac{2az}{y+z+a})^2=a^2,$

即 $x^2+z^2-z(y+a)=0.$

草图如上.

6.5.29 已知准线为立方抛物线 $y=x^3,z=0.$

(1) 求以 l,m,n 为母线方向数的柱面方程.

(2) 求以 $(a,b,c),c\neq 0$,为顶点的锥面方程.

解 在准线上任取一点 $Q(x_1,y_1,z_1)$,则过 Q 点的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

即 $x_1=x-lt,\ y_1=y-mt,\ z_1=z-nt.$

又因 Q 点在准线上,所以 $y_1=x_1^3,z_1=z-nt=0,\ t=\frac{z}{n}$

而 $y-mt=(x-lt)^3$,故有 $y-\frac{mz}{n}=(x-\frac{l}{n}z)^3$

这即为所求的柱面方程.

(2) 取 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为准线上任一点,则 $y_0=x_0^3$,又母线方程

$$\frac{x-a}{x_0-a}=\frac{y-b}{y_0-b}=\frac{z-c}{-c},$$

于是 $x_0=\frac{1}{z-c}[a(z-c)-c(x-a)],$

$$y_0=\frac{1}{z-c}[b(z-c)-c(y-b)].$$

代入 $y_0=x^3$ 得

$$(z-c)^2[b(z-c)-c(y-b)]=[a(z-c)-c(x-a)]^3.$$

这即为所求的锥面方程.

6.5.30 已知准线为定直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.\end{cases}$$

(1) 求以 l,m,n 为方向数且不与定直线平行的直线为母线的柱面方程;

(2) 求以不在定直线上的一点(x_0,y_0,z_0)为顶点的锥面方程.

解　(1) 在准线上任取一点$Q(x_1,y_1,z_1)$，则过Q点的母线方程为：

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

其参数方程为 $x=x_1+lt,\ y=y_1+mt,\ z=z_1+nt.$

所以，$x_1=x-lt, y_1=y-mt, z_1=z-nt.$

因为$Q(x_1,y_1,z_1)$在准线上，故有

$$\begin{cases}a_1(x-lt)+b_1(y-mt)+c_1(z-nt)+d_1=0,\\ a_2(x-lt)+b_2(y-mt)+c_2(z-nt)+d_2=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1-(a_1l+b_1m+c_1n)t=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2-(a_2l+b_2m+c_2n)t=0.\end{cases}$$

又因为母线与准线不平行，所以，$a_1l+b_1m+c_1n\neq 0$，$a_2l+b_2m+c_2n\neq 0$，消去参数t得

$$\frac{a_1x_1+b_1y+c_1z+d_1}{a_1l+b_1m+c_1n}=\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{a_2l+b_2m+c_2n},$$

这表示一个平面.

(2) 设锥面顶点为(x_0,y_0,z_0)，准线为直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.\end{cases}$$

在准线上任取一点$Q(x_1,y_1,z_1)$，则过Q点的直母线方程为：

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}=t,$$

$$x_1=\frac{x-x_0+x_0t}{t},\ y_1=\frac{y-y_0+y_0t}{t},\ z_1=\frac{z-z_0+z_0t}{t}.$$

又$Q(x_1,y_1,z_1)$在准线上，所以

$$\begin{cases}a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)\\ \qquad\qquad +t(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1)=0,\\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0)\\ \qquad\qquad +t(a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2)=0.\end{cases}$$

又因为点(x_0,y_0,z_0)不在已知直线上，所以

$$a_ix+b_iy+c_iz+d_i\neq 0.\ (i=1,2),$$

消去t，得
$$\frac{a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)}{a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+d_1}$$

$$= \frac{a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0)}{a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+d_2}.$$

6.5.31 求通过点$(-2,0,0)$和$(0,-2,0)$且与锥面$x^2+y^2=z^2$的交线为抛物线的平面方程.

解 设所求的平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,则

$$-2A+D=0, \tag{1}$$

$$-2B+D=0. \tag{2}$$

另一方面,由圆锥截线的性质知,和锥面交成抛物线的平面与锥面的一条母线是平行的,而已知锥面是圆锥面,所以锥面上任一条母线与xoy坐标面都成定角$\frac{\pi}{4}$,故所求平面与xoy面也成定角$\frac{\pi}{4}$,于是由两平面的夹角公式得

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即
$$A^2+B^2-C^2=0. \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)解得,$A=\frac{1}{2}D,\ B=\frac{1}{2}D,\ C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}D.$

于是所求的平面方程为

$$x+y+\sqrt{2}z+2=0 \text{ 与 } x+y-\sqrt{2}z+2=0.$$

(4) 旋转曲面

6.5.32 指出下列方程所表示的曲面,特别指出哪些是旋转曲面,它们是怎样产生的.

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$; (2) $x^2+y^2+z^2=1$;

(3) $x^2+2y^2+3z^2=9$; (4) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(5) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=3z$; (6) $x^2+y^2=4z$;

(7) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=-1$; (8) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1$;

(9) $x^2-y^2-z^2=1$; (10) $x^2-y^2=4z$.

解 (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{9}=1$,它是旋转椭球面,可由椭圆

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成.

(2) $x^2+(y^2+z^2)=1$，或 $(x^2+y^2)+z^2=1$，它是球面，可由圆 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成，亦可由 $\begin{cases}x^2+z^2=0\\ z=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成.

(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{2}}+\dfrac{z^2}{3}=1$ 是椭球面.

(4) $(x^2+z^2)-\dfrac{y^2}{4}=1$ 是单叶旋转双曲面，可由双曲线 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成.

(5) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=3z$ 是椭圆抛物面.

(6) $x^2+y^2=4z$ 是旋转抛物面，可由抛物线 $\begin{cases}x^2=4z\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成.

(7) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=-1$ 是双叶双曲面.

(8) $\dfrac{x^2+y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=-1$，它是双叶旋转双曲面，可由双曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=-1\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成.

(9) $x^2-(y^2+z^2)=1$，它是双叶旋转双曲面，可由双曲线 $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成.

(10) $x^2-y^2=4z$ 是双曲抛物面.

6.5.33　求以 x 轴或 y 轴为旋转轴，下列曲线为母线所生成的旋转曲面的方程.

(1) $y=x^3, z=0$；　(2) $y=\sin x, z=0$；

(3) $y=e^x, z=0$；　(4) $\rho^2=a^2\cos 2\theta, z=0$.

解　以 x 轴为旋转轴：

(1) $y^2 + z^2 = x^6$;

(2) $y^2 + z^2 = \sin^2 x$;

(3) $y^2 + z^2 = e^{2x}$,

(4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2)$.

以 y 轴为旋转轴：

(1) $y^2 = (x^2 + z^2)^3$;

(2) $(\arcsin y)^2 = x^2 + z^2$;

(3) $(\ln y)^2 = x^2 + z^2$;

(4) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$.

6.5.34　指出下列方程表示怎样的曲面，并画出其草图.

(1) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$;　　(2) $36x^2 + 9y^2 - 4z = 36$;

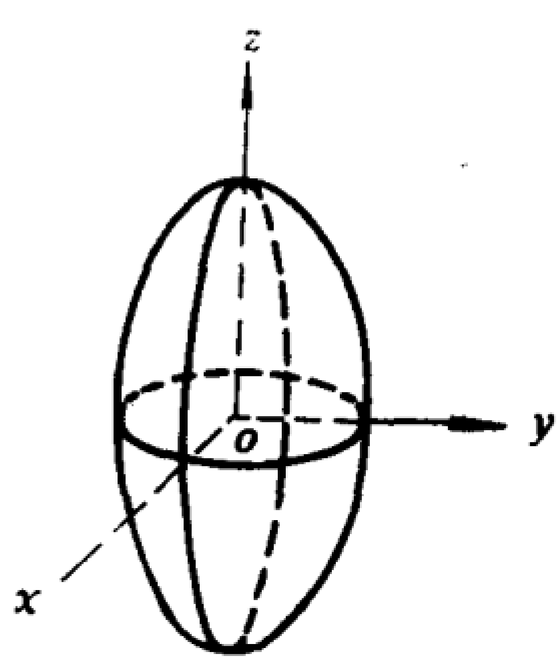
(3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z$;　　(4) $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$;

(5) $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$;　　(6) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 0$;

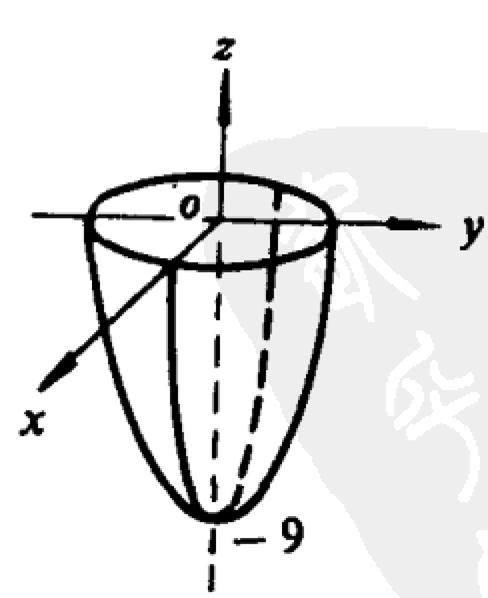
(7) $y^2 + z^2 - x = 0$;　　(8) $x^2 - y^2 + 2z = 0$.

解　(1) 以原点为中心的椭球面. 在 x、y、z 轴上的半轴长分别为 1，2，3(见图(1)).

(2) 原式可写为 $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = \frac{1}{9}(z + 9)$，这是以 z 轴为对称轴的椭圆抛物面，顶点在 $(0,0,-9)$(见图(2)).



(1)

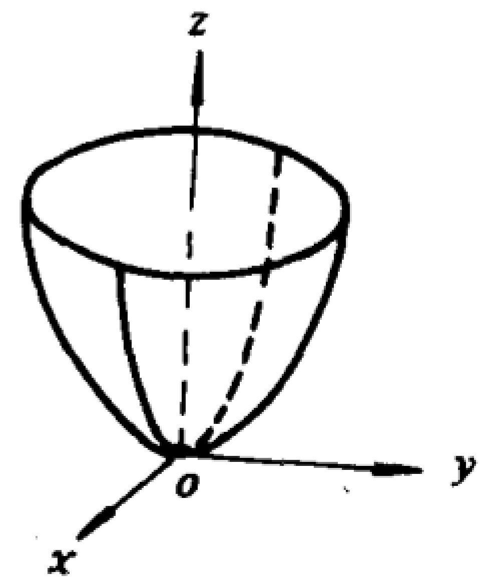


(2)

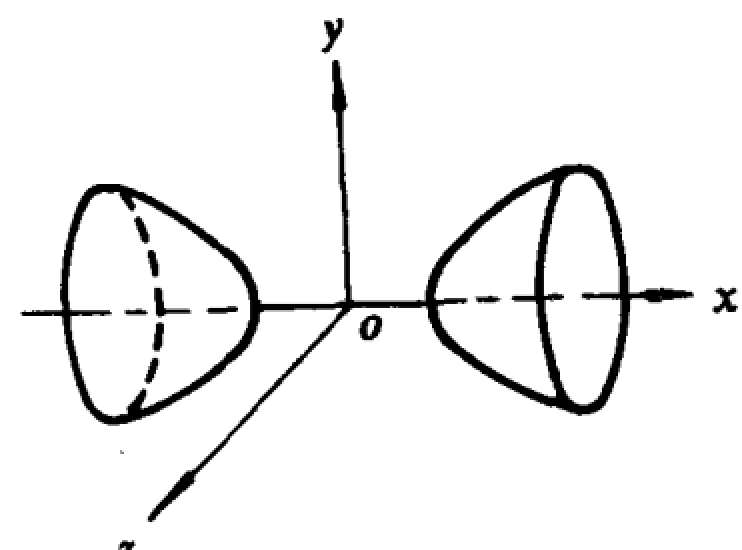
6.5.34 题图

(3) 以 z 轴为对称轴，顶点在(0,0,0)的椭圆抛物面(见图(3))

(4) 以 x 轴为旋转轴的双叶旋转双曲面(见图(4)).



(3)



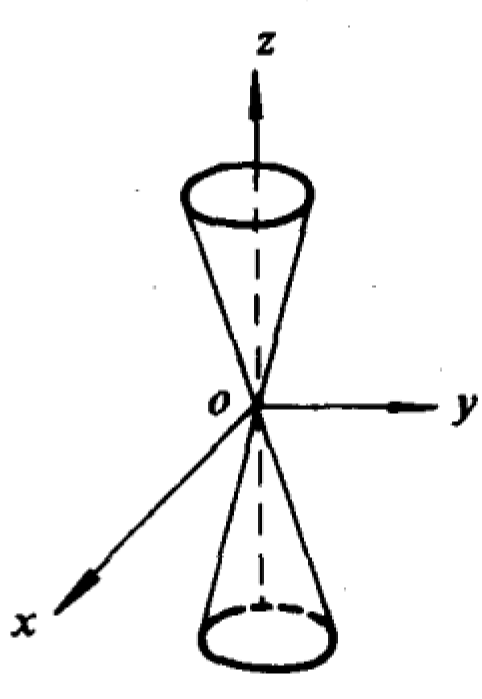
(4)

(5) 锥面，顶点在(0,0,0)(见图(5)).

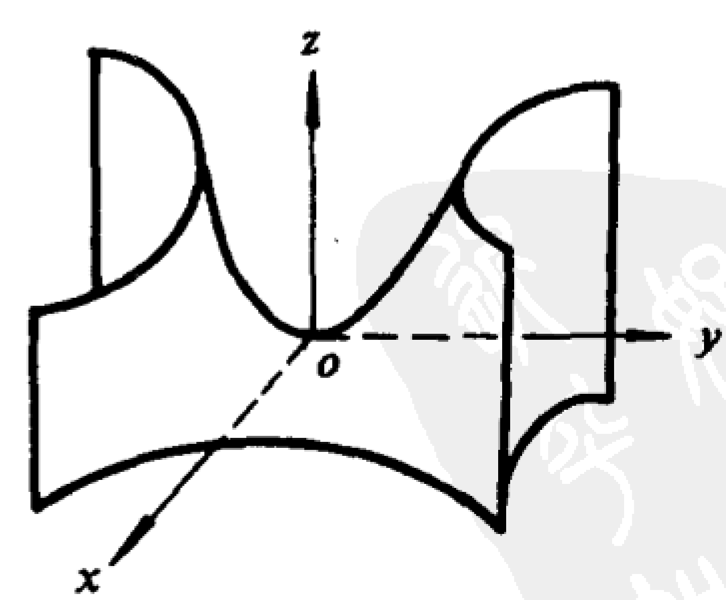
(6) 以 z 轴为旋转轴的旋转锥面，顶点在(0,0,0)，草图与(5)相似. 略有差别.

(7) 是以 x 轴为旋转轴的旋转抛物面，顶点(0,0,0)，草图与(3)相似.

(8) 是双曲抛物面(见图(6)).



(5)



(6)

6.5.35 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心引三条互相垂直的射

线，分别交曲面于 P_1、P_2、P_3. 设 $|\boldsymbol{OP}_1| = r_1$，$|\boldsymbol{OP}_2| = r_2$，$|\boldsymbol{OP}_3| = r_3$. 证明：

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

证　设 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2,3)$ 分别为射线与三坐标轴的夹角，则

$$\boldsymbol{OP}_1=\{r_1\cos\alpha_1,r_1\cos\beta_1,r_1\cos\gamma_1\},$$
$$\boldsymbol{OP}_2=\{r_2\cos\alpha_2,r_2\cos\beta_2,r_2\cos\gamma_2\},$$
$$\boldsymbol{OP}_3=\{r_3\cos\alpha_3,r_3\cos\beta_3,r_3\cos\gamma_3\}.$$

因为 P_1,P_2,P_3 在椭球面上，所以，

$$\frac{r_1^2\cos^2\alpha_1}{a^2}+\frac{r_1^2\cos^2\beta_1}{b^2}+\frac{r_1^2\cos^2\gamma_1}{c^2}=1,$$
$$\frac{r_2^2\cos^2\alpha_2}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\beta_2}{b^2}+\frac{r_2^2\cos^2\gamma_2}{c^2}=1,$$
$$\frac{r_3^2\cos\alpha_3^2}{a^2}+\frac{r_3^2\cos^2\beta_3}{b^2}+\frac{r_3^2\cos^2 r_3}{c^2}=1.$$

或

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{\cos^2\alpha_1}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_2}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_1}{c^2},$$
$$\frac{1}{r_2^2}=\frac{\cos^2\alpha_2}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_2}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_2}{c^2},$$
$$\frac{1}{r_3^2}=\frac{\cos^2\alpha_3}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_3}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_3}{c^2}.$$

等式两边分别相加得

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)+\frac{1}{b^2}(\cos^2\beta_1$$
$$+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3)+\frac{1}{c^2}(\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3).$$

因为三条直线互相垂直，所以，它们可以看作新坐标系的三个轴，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 x 轴与三个新坐标轴的夹角. 它们可以看作 x 轴在新坐标系下的方向角. 故 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$. 同理，$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1$，$\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1$. 代入上式得

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

6.5.36　一动直线沿三条直线 l_1：$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}$，$l_2$：$\frac{x-2}{0}=$

$\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$，l_3：$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$ 滑动，求动直线的轨迹方程.

解　设点 $M(x,y,z)$ 为动直线上的点，l、m、n 为其方向矢量，则它的方程为

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n}.$$

由于动直线在三条已知直线上滑动，因而满足共面条件，即有

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ z & 0 & -1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ z & 0 & 1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

将这三个行列式展开，并整理得

$$\begin{cases}(1-y)l+(x+2z)m+(2-2y)n=0,\\(y-2)l+(2-x)m+(x-2)n=0,\\(y+1)l+(2z-x)m+(-2-2y)n=0.\end{cases}$$

因为 l,m,n 是动直线的方向矢量，所以上面齐次方程组关于 l,m,n 有非零解的必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1-y & x+2z & 2-2y \\ y-2 & 2-x & x-2 \\ y+1 & 2z-x & -2-2y \end{vmatrix}=0.$$

展开把并整理，得

$$2x^2+8y^2-8z^2-8=0.$$

即动直线的轨迹为 $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$.

6.5.37　xoy 面上有圆心在 x 轴上且过原点的一圆，动直线与该圆交于点 A，与 z 轴交于点 B，且使 $OA=OB$，求此动直线所形成的曲面.

解　设圆的方程为 $(x-a)^2+y^2=a^2,z=0$；取 $A(a(1+\cos\theta),a\sin\theta,0)$，$B(0,0,k)$. 这里 θ,k 是参数，由假设 $OA=OB$，得

$$a^2[(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta]=k^2 \tag{1}$$

又 L_{AB} 的方程为 $\frac{x}{a(1+\cos\theta)}=\frac{y}{a\sin\theta}=\frac{z-k}{-k}=t$.

即　$x=at(1+\cos\theta),y=at\sin\theta,z=k(1-t)$，　(2)

把(2)式代入(1)式，得

$$x^2+y^2=\frac{z^2t^2}{(1-t)^2}. \tag{3}$$

再由 $x = at(1+\cos\theta)$，$y = at\sin\theta$ 得

$$(x-at)^2+y^2=a^2t^2,\ t^2-2axt+a^2t^2+y^2=a^2t^2.$$

即 $x^2-2axt+y^2=0$，$t=\dfrac{x^2+y^2}{2ax}$，代入(3)式得

$$(x^2+y^2-2ax)^2=z^2(x^2+y^2).$$

6.5.38 已知一圆，自圆心作圆面的垂线，在圆上取动点，过此点及垂线作一平面，在此平面上，以该动点为心，定长（小于定圆半径）为半径作圆，求此圆所生成的曲面.

解 取定圆圆心为原点，定圆所在的平面为 xoy 面，建立坐标系，则定圆方程为 $x^2+y^2=a^2, z=0$，动点为 $P(a\cos\theta,a\sin\theta,0)$. 过 z 轴及 P 点作动平面

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a\cos\theta & a\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

即 $$x\sin\theta-y\cos\theta=0 \tag{1}$$

故动圆方程是 $$\begin{cases} x\sin\theta-y\cos\theta=0, \\ (x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2+z^2=b^2.\ (b<a) \end{cases} \tag{2}$$

由(1)式有 $$\frac{\cos\theta}{x}=\frac{\sin\theta}{y}=\frac{1}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3}$$

（最后一个等号是由 $y=a\sin\theta$，即 $\sin\theta=\dfrac{y}{a}$ 而得）由方程组即动圆方程的第二个方程得

$$x^2+y^2+z^2+a^2-b^2=2a(x\cos\theta+y\sin\theta). \tag{4}$$

将(3)式代入(4)得

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

2. 空间曲线

6.5.39 当螺旋旋转时，螺旋上的一点 M，一方面绕螺旋的轴作圆周运动，另一方面又沿轴线的方向前进，点 M 运动的轨迹称为螺旋线. 求螺旋线的方程.

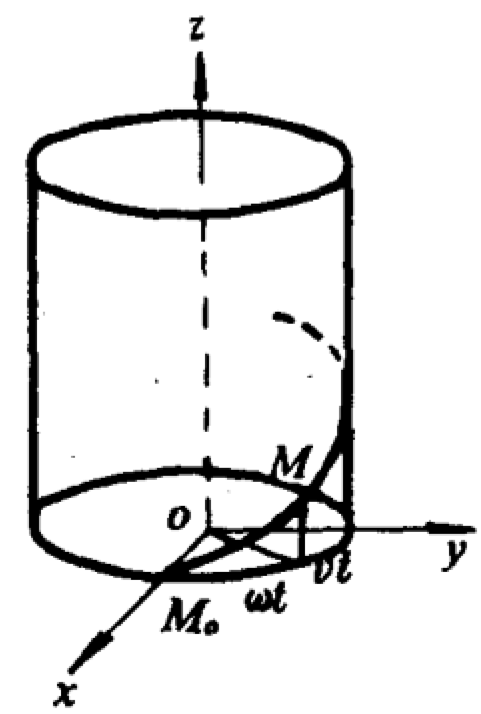
解 建立坐标系如图. 动点由 $M_0(a,0,0)$ 开始运动，一方面以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以速度 v 沿 z 轴方向运动（ω, v 都是常数）. 于是，对曲线上任意一点 $M(x,y,z)$，就有

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt. \end{cases}$$

这就是螺旋线的参数方程.

消去 t,即可得到螺旋线的一般形式的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = a\sin(\frac{\omega}{v}z). \end{cases}$$



6.5.39 题图

6.5.40　求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 与(1) 柱面:$x^2 + y^2 = a^2$;
(2) 锥面 $x^2 + y^2 = z^2\text{tg}^2\theta$ 的交线的参数方程.

解　(1) 令 $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$,代入球面方程得 $z = \pm\sqrt{r^2 - a^2}$. $(r > a)$,则球面与柱面交线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta; \\ y = a\sin\theta; \\ z = \pm\sqrt{r^2 - a^2}. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi, r > a)$$

(2) 将 $x^2 + y^2 = z^2\text{tg}^2\theta$ 代入球面方程得

$$z^2(1 + \text{tg}^2\theta) = r^2, z^2\sec^2\theta = r^2.$$

即　$z = \pm r\cos\theta.$

故所求球面与锥面交线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \pm r\cos\theta. \end{cases}$$

第七章　多元函数微分学

§1　多元函数的基本概念

内 容 提 要

1. 二元函数的定义

设有变量 x、y 和 z，如果当相互独立的变量 x、y 在某一范围内任取一组值时，变量 z 依某一确定法则有一个值与 x、y 的这一组值相对应，则变量 z 称为变量 x 和 y 的函数，记作

$$z = f(x,y) \quad \text{或} \quad z = z(x,y),$$

其中 x 和 y 为自变量，z 为因变量（或函数），自变量变化范围称为函数的定义域.

2. 二元函数的极限

1）二重极限

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义（P_0 点可除外），A 为一常数. 若对于任意给定的正数 ε，都存在正数 δ，对函数的定义域内适合不等式

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x,y)$，不等式

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y) \to (x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \quad \text{或} \lim_{P\to P_0} f(x,y) = A.$$

2）累次极限

若函数 $z = f(x,y)$ 中的 x 和 y，先后相继地各自趋于 x_0 和 y_0，这时

$f(x,y)$ 的极限称为它的累次极限. 具体地说,若对 y_0 的某一邻域中的任意固定的 $y(y\neq y_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 都存在: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$; 对于 $\varphi(y)$, 又如果 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A_1$, 则称 A_1 为 $z=f(x,y)$ 的先对 x, 后对 y 的累次极限, 记为

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=A_1.$$

同样地,可以定义先对 y, 后对 x 的累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A_2$.

3. 二元函数的连续性

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

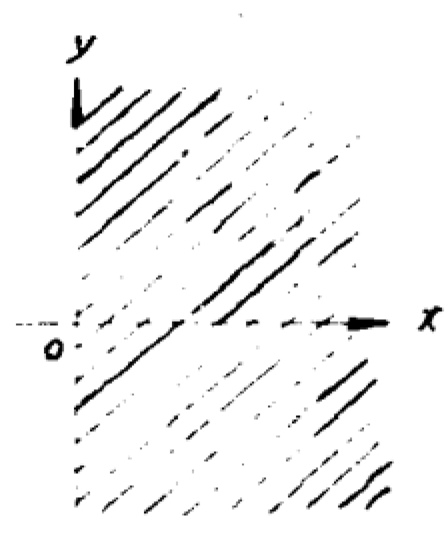
则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处连续. 若函数在区域 D 内的每一点处都连续,则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内连续.

问 题 与 解 答

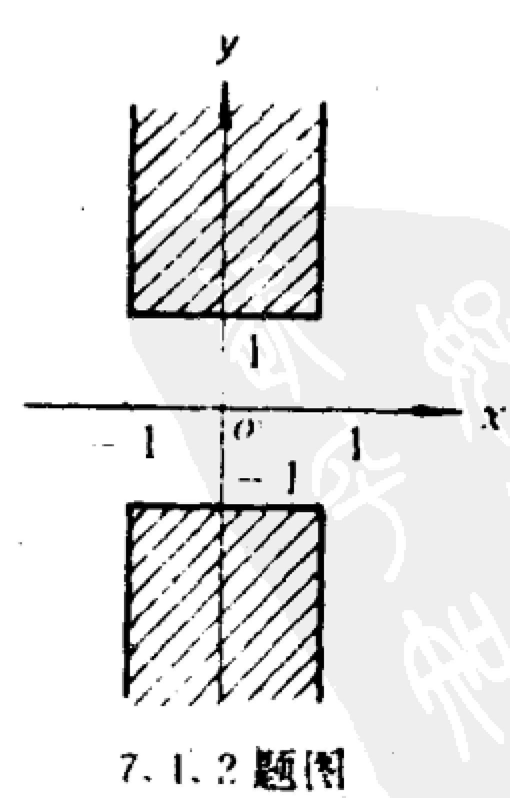
1. 多元函数的定义域

7.1.1　确定并绘出函数 $z=\sqrt{x}+y$ 的定义域.

解　定义域为 $x\geqslant 0$, 即包括 y 轴的整个右半平面,如图中阴影部分所示.



7.1.1 题图



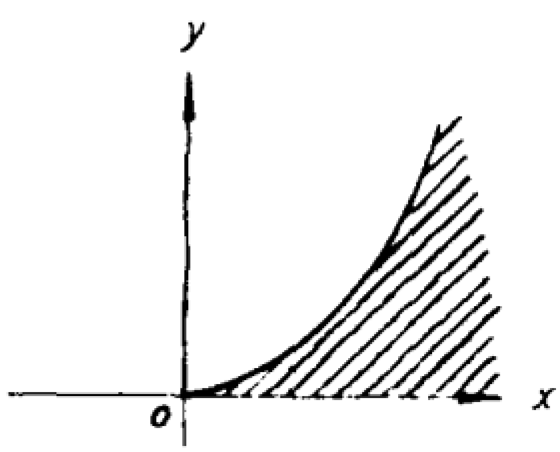
7.1.2 题图

7.1.2 确定并绘出函数 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 的定义域.

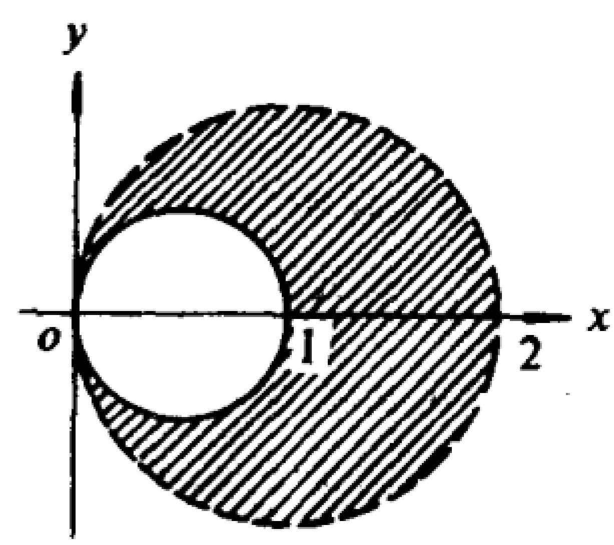
解 定义域为 $|x|\leqslant 1,|y|\geqslant 1$. 如图中阴影部分所示,包括边界(粗实线).

7.1.3 确定并绘出函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域.

解 定义域为满足不等式组 $\begin{cases}x-\sqrt{y}\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 的点集,即 $\begin{cases}x^2\geqslant y\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 如图中阴影部分所示,包括 x 轴和抛物线 $y=x^2$.



7.1.3 题图



7.1.4 题图

7.1.4 确定并绘出函数 $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$ 的定义域.

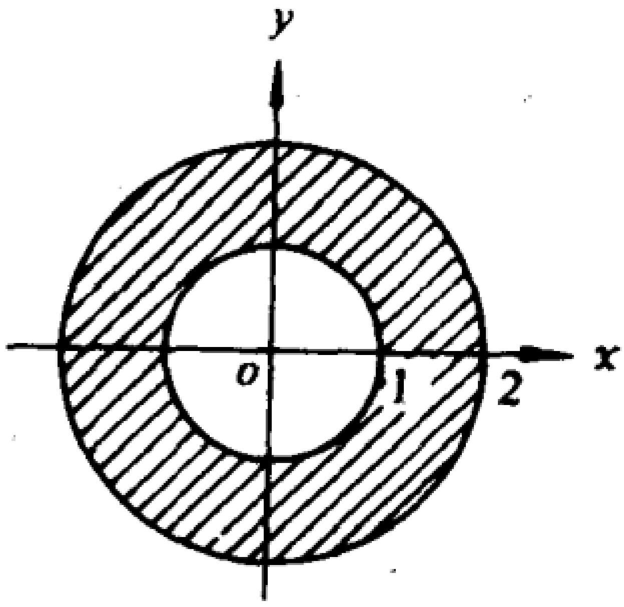
解 定义域为满足不等式 $x\leqslant x^2+y^2<2x$ 的点集. 由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2\geqslant(\frac{1}{2})^2$, 由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$. 如图中阴影部分所示,包括小圆圆周,不包括大圆圆周.

7.1.5 确定并绘出函数 $z=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ 的定义域.

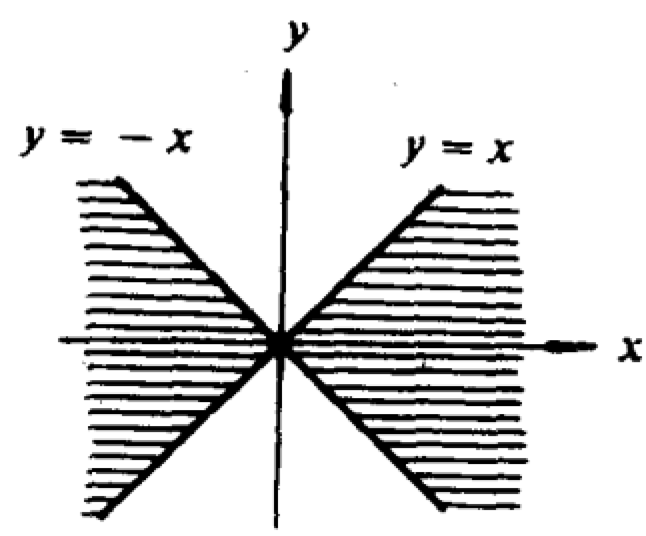
解 定义域为满足不等式 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 的点集,如图中阴影部分所示,包括边界在内.

7.1.6 确定并绘出函数 $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$ 的定义域.

解　定义域为 $x \neq 0$ 及 $\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1$，即 $|y| \leqslant |x|$，而点 $(0,0)$ 除外. 如图中阴影部分所示.



7.1.5 题图



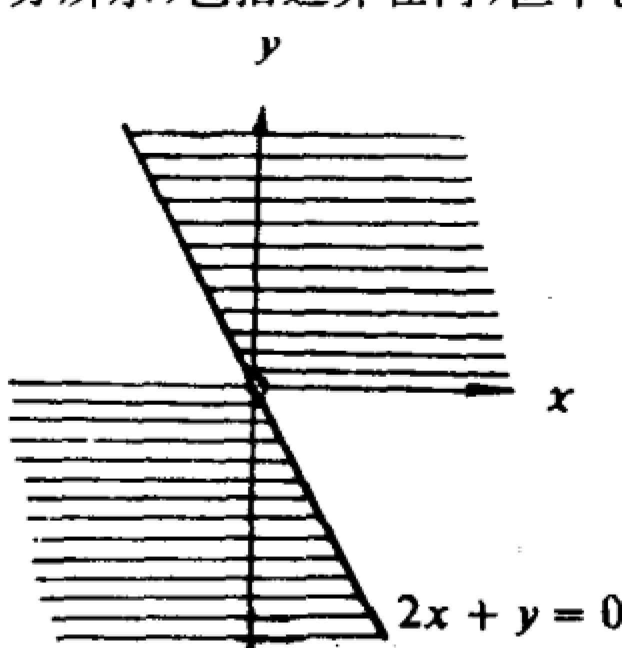
7.1.6 题图

7.1.7　确定并绘出函数 $z = \arccos \frac{x}{x+y}$ 的定义域.

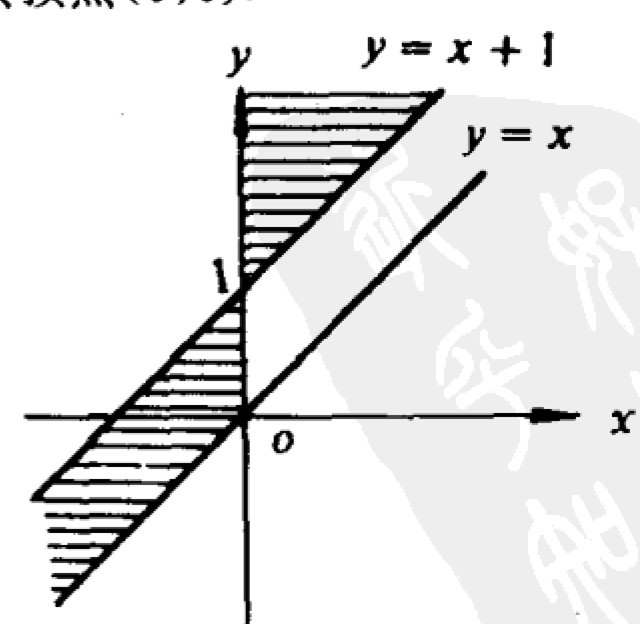
解　定义域为 $x + y \neq 0$ 以及 $\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$. 由 $\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$，得 $|x| \leqslant |x+y|$，即 $x^2 \leqslant x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geqslant 0$，亦即

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant -2x \end{cases} \text{或} \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -2x. \end{cases} \text{但 } x + y \neq 0.$$

这是由直线 $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角，如图中阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $(0,0)$.



7.1.7 题图



7.1.8 题图

7.1.8　确定并绘出函数 $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域.

解　定义域为满足不等式

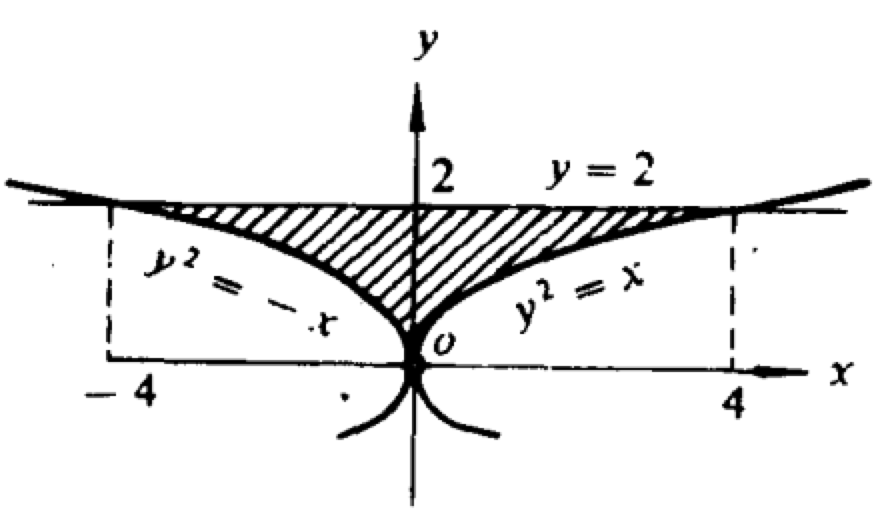
$$\begin{cases}x>0,\\ y-x>1\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x<0,\\ 0<y-x<1\end{cases}$$

的点集.如图中阴影部分所示.

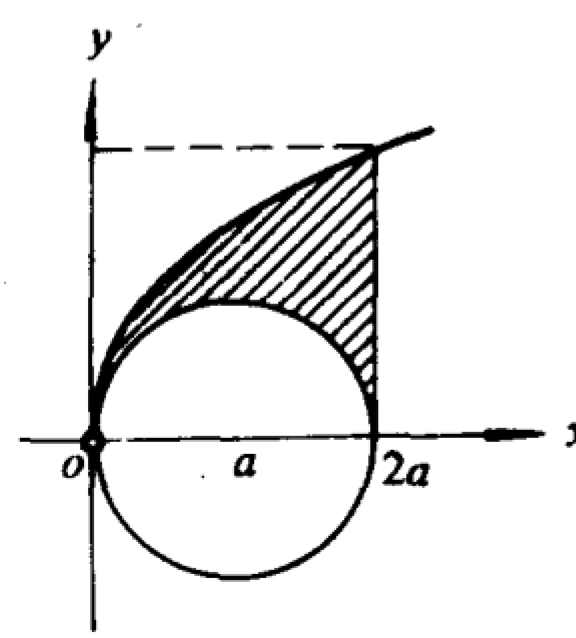
7.1.9　确定并绘出函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$ 的定义域.

解　定义域为满足不等式 $\left|\dfrac{x}{y^2}\right|\leqslant 1$ 及 $|1-y|\leqslant 1,(y\neq 0)$ 的点集,即 $\begin{cases}y^2\geqslant x,\\ 0<y\leqslant 2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y^2\geqslant -x,\\ 0<y\leqslant 2.\end{cases}$

这是由抛物线 $y^2=x,y^2=-x$ 和直线 $y=2$ 所围成的曲边三角形,如图中阴影部分所示,不包括(0,0)点在内.



7.1.9 题图



7.1.10 题图

7.1.10　确定并绘出函数

$$z=\sqrt{y}\arcsin\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{y}+\sqrt{x}\arccos\frac{y^2}{2ax},\ (a>0)$$

的定义域.

解　函数的定义域应由 $z=\sqrt{y}\arcsin\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{y}$ 与 $z=\sqrt{x}\arccos\dfrac{y^2}{2ax}$ 两函数定义域的公共部分组成.

对于 $\sqrt{y}\arcsin\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{y}$ 及 $\sqrt{x}\arccos\dfrac{y^2}{2ax}$,应分别满足

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{y} \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2a, \\ y > 0 \end{cases} \quad 及 \begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{y^2}{2ax} \leqslant 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

即 $0 < \sqrt{2ax - x^2} < y$ 及 $0 \leqslant y^2 \leqslant 2ax$. 故函数定义域为

$$\begin{cases} 0 < x < 2ax, \\ \sqrt{2ax - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax}. \end{cases}$$

如图中阴影部分所示，不包括(0,0) 点在内.

7.1.11　确定并绘出函数

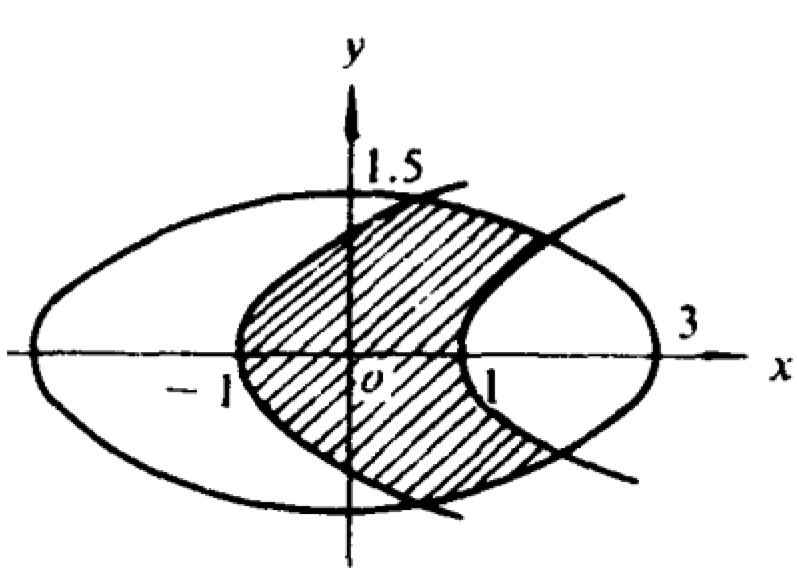
$$z = \arcsin(x - y^2) + \ln[\ln(10 - x^2 - 4y^2)]$$

的定义域.

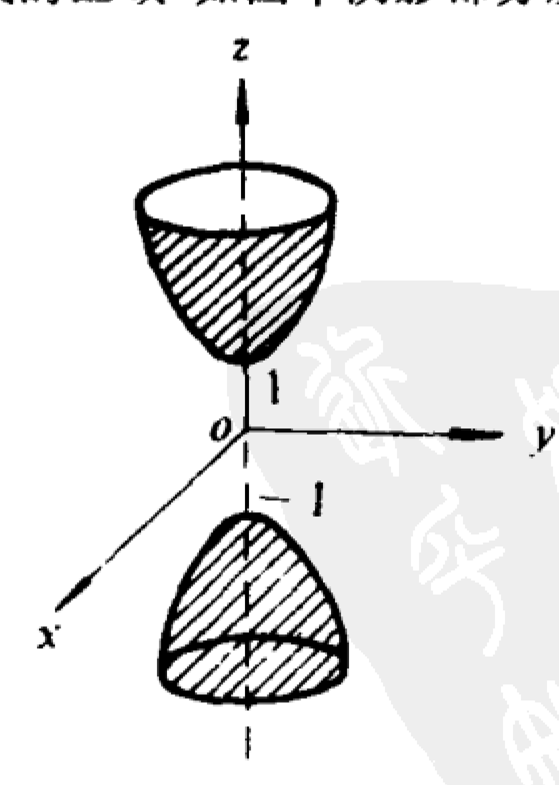
解　函数的定义域应由 $z = \arcsin(x - y^2)$ 与 $z = \ln[\ln(10 - x^2 - 4y^2)]$ 两函数定义域的公共部分组成. 对于 $\arcsin(x - y^2)$ 及 $\ln[\ln(10 - x^2 - 4y^2)]$ 应分别满足 $|x - y^2| \leqslant 1$ 及 $10 - x^2 - 4y^2 > 1$，即

$$y^2 - 1 \leqslant x \leqslant y^2 + 1 \quad 及 \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(3/2)^2} < 1.$$

综合上面结果可知，所求函数的定义域为椭圆 $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{(3/2)^2} = 1$ 与抛物线 $x = y^2 + 1$ 及 $x = y^2 - 1$ 所围成的区域. 如图中阴影部分所示.



7.1.11 题图



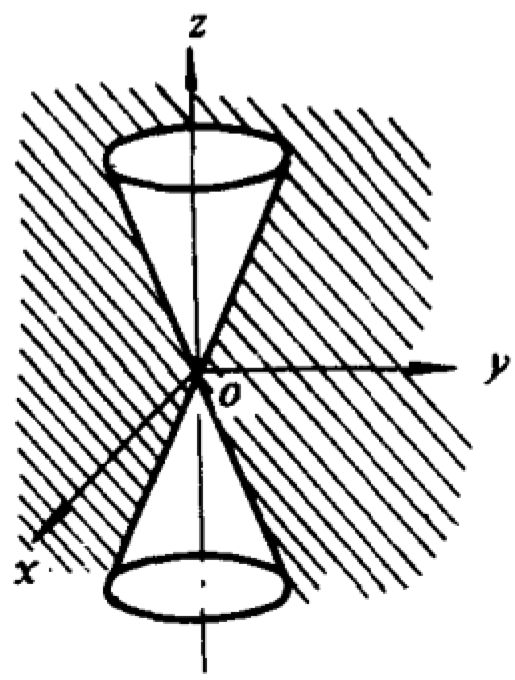
7.1.12 题图

7.1.12　确定并绘出函数 $u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$ 的定义域.

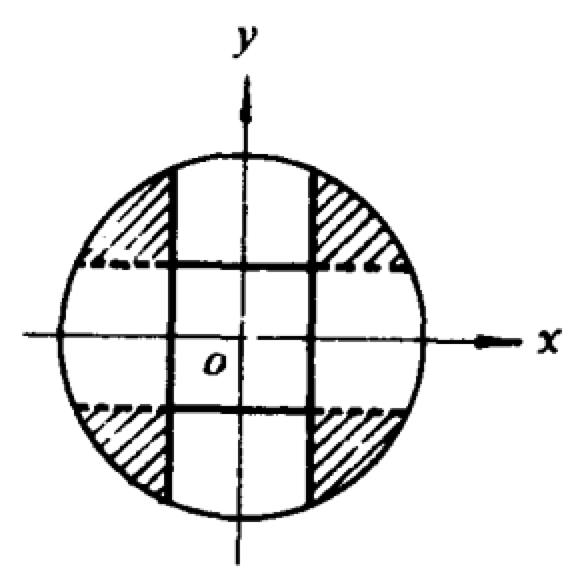
解 定义域为满足不等式 $-x^2-y^2+z^2>1$ 的点集.这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部.如图中阴影部分所示,不包括边界面在内.

7.1.13 确定并绘出函数 $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的定义域.

解 定义域为满足不等式 $\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$,($x,y$ 不同时为零)或 $x^2+y^2-z^2\geqslant 0$,(x,y 不同时为零)的点集.这是圆锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外部.如图中阴影部分所示,包括边界面在内,但要除去圆锥的顶点.



7.1.13 题图



7.1.14 题图

7.1.14 确定并绘出函数

$$z=\ln(2\sqrt{2}-x^2-y^2)+\sqrt{x^2-1}+\ln(|y|-1)$$

的定义域.

解 函数的定义域应由 $z=\ln(2\sqrt{2}-x^2-y^2)$, $z=\sqrt{x^2-1}$ 及 $z=\ln(|y|-1)$ 三函数定义域的公共部分组成.故定义域为满足不等式组 $\begin{cases}x^2+y^2<2\sqrt{2},\\|x|\geqslant 1,\\|y|>1\end{cases}$ 的点集.如图中阴影部分所示.

2. 求函数的值

7.1.15　若 $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$，$(x>0)$，求 $f(x)$.

解　由 $x>0$ 得 $\sqrt{x^2+y^2}=x\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$，故得

$$f(\frac{y}{x})=\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2},\ 即\ f(x)=\sqrt{1+x^2}.$$

7.1.16　若 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解　设 $u=x+y,v=\frac{y}{x}$，则 $y=xv,u=x(1+v)$，因而

$$x=\frac{u}{1+v},\ y=\frac{uv}{1+v},$$

故得 $f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$，即

$$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

7.1.17　设函数 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$，试求

(1) $f(\frac{1}{x},\frac{2}{y})$，　(2) $f(\frac{x}{y},\sqrt{xy})$.

解　(1) 由 $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$ 有

$$f(u,v)=u^3-2uv+3v^2.$$

设 $u=\frac{1}{x},v=\frac{2}{y}$，则 $f(\frac{1}{x},\frac{2}{y})=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2}$，

(2)　$f(u,v)=u^3-2uv+3v^2$，设 $u=\frac{x}{y},v=\sqrt{xy}$，则

$$f(\frac{x}{y},\sqrt{xy})=(\frac{x}{y})^3-2(\frac{x}{y})\sqrt{xy}+3(\sqrt{xy})^2$$

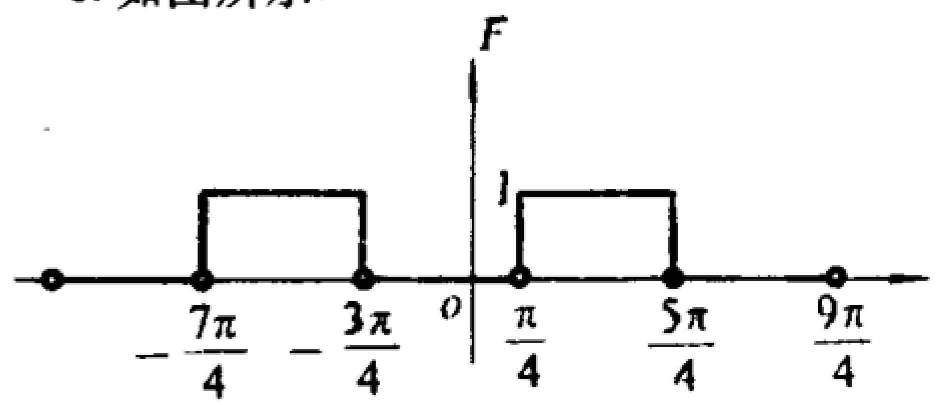
$$=\frac{x^3}{y^3}-\frac{2x\sqrt{xy}}{y}+3xy.$$

7.1.18　作出函数 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$ 的图形，式中

$$f(x,y)=\begin{cases}1,若\ y\geqslant x;\\0,若\ y<x.\end{cases}$$

解　按题设，当 $\sin t\geqslant\cos t$，即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 时，$F(t)=1$，而当 $\sin t<\cos t$，即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi<t<\frac{\pi}{4}$

$+2k\pi$ 时，$F(t)=0$. 如图所示.



7.1.18 题图

3. 多元函数的极限

7.1.19 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(x+y)(\sqrt{x+y+1}+1)}{(\sqrt{x+y+1})^2-1^2}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{x+y+1}+1)=2.$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{4-xy-4}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$$

(3) 由不等式

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=0$，即得 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$.

7.1.20 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to1}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解　(1) 由不等式 $0\leqslant(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}\leqslant(\frac{1}{2})^{x^2}$，(当 $x>0,y>0$ 时)及 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^{x^2}=0$，即得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}=0.$$

(2) 由不等式

$$0\leqslant|\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}|\leqslant|\frac{x^2y}{x^2+y^2}|=|x||\frac{xy}{x^2+y^2}|\leqslant\frac{1}{2}|x|,$$

及 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}|x|=0$. 即得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

(3) 注意到

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,\ \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to1}}\frac{x}{x+y}=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to1}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=1,$$

则

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to1}}(1+x)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to1}}[(1+\frac{1}{x})^x]^{\frac{x}{x+y}}=e^1=e.$$

(4) 因为 $(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}\times\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}$，令 $u=x+y$，则

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{(x+y)^2}{e^{(x+y)}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2u}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2}{e^u}=0,$$

又当 $x>0,y>0$ 时，$0<\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}<1$，由无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小的性质，则有

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{e^{(x+y)}}=0.$$

7.1.21　求下列各极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(xy)}{y}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\frac{\sin(xy)}{\mathrm{tg}(x+y)}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 令 $u=xy$,则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$,故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x=1\times 0=0.$$

(2) 因为 $\dfrac{\sin(xy)}{\operatorname{tg}(x+y)}=\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\dfrac{x+y}{\operatorname{tg}(x+y)}\cdot\dfrac{xy}{x+y}$,而

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{\sin(xy)}{xy}=1,\ \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{x+y}{\operatorname{tg}(x+y)}=1,\ \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{xy}{x+y}=0,$$

所以
$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{\sin(xy)}{\operatorname{tg}(x+y)}=1\cdot 1\cdot 0=0.$$

(3) 因为函数$\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$是初等函数,在它的定义区域内是连续的,所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2.$$

(4) 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,则$(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $\rho\to 0$,由于

$$0\leqslant\frac{|(y-x)x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\rho^2|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta|}{\rho}$$
$$=\rho|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta|\leqslant 2\rho\to 0\ (\text{当 }\rho\to 0\text{ 时}),$$

所以,$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

7.1.22 设 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0;\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

讨论下面三种极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$; (3) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$.

解 (1) 因 $\left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\left|x\sin\dfrac{1}{y}\right|+\left|y\sin\dfrac{1}{x}\right|$
$\leqslant|x|+|y|$,而当 $x\to 0,y\to 0$ 时,$|x|+|y|\to 0$,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

(2) 因 $\lim\limits_{y\to 0}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在,故 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在.

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$ 也不存在.

7.1.23　判断(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 存在否？

解　(1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y\to kx\\ x\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-k^2)x^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

k 取不同的数值，上面极限就有不同的结果，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

(2) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y\to kx\\ x\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

此时极限值与 k 无关，但 (x,y) 沿抛物线 $y=x^2$ 趋向 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y\to x^2\\ x\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

7.1.24　下列极限是否存在，若存在，求它的值.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

解　(1) 因为 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$，所以

$$x^2-xy+y^2\geqslant 2|xy|-xy\geqslant |xy|,$$

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}=\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\to 0\ (\text{当 } x\to\infty, y\to\infty).$$

故极限存在，极限值为 0.

(2) 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{(k+1)(\sqrt{kx^2+1}+1)}=0$，

$(k\neq -1)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y-x^2=x}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(x^2-x)+1}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-1)}{x^2(\sqrt{x(x^2-x)+1}+1)} = -\frac{1}{2}.$$

这说明当点(x,y)沿不同的路径趋向于$(0,0)$时，所得极限不同，故原极限不存在.

7.1.25 验证当$(x,y)\to(0,0)$时，$f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$的极限不存在，(x,y)以怎样的方式趋于$(0,0)$能使：

(1) $\lim f(x,y)=1$； (2) $\lim f(x,y)=2$.

证 不妨取$x=ky$，代入极限式，得

$$\lim_{y\to 0}\frac{ky+y}{ky-y}=\lim_{y\to 0}\frac{k+1}{k-1},$$

k取不同数值，上面极限就有不同的结果，所以该极限不存在.

(1) 令$\dfrac{k+1}{k-1}=1$，得$k=\infty$，即取$y=0$，$(x,y)\to(0,0)$时，

$$\lim f(x,y)=1.$$

(2) 令$\dfrac{k+1}{k-1}=2$，得$k=3$，取$x=3y$，$(x,y)\to(0,0)$时，

$$\lim f(x,y)=2.$$

7.1.26 证明：对于函数$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，有

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=0,$$

然而极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0.$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{y\to 0}0=0.$

如果按$y=kx\to 0$的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取$k=0$及$k=1$，便得到不同的极限0及1，因此，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

4. 多元函数的连续性

7.1.27 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$;

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0.\end{cases}$

解　(1) 函数在 $x^2+y^2-1=0$ 时无定义，故间断点是以原点为圆心，半径为 1 的圆周曲线 $x^2+y^2-1=0$ 上的所有点.

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，xy 和 x^2+y^2 都是 x,y 的连续函数，从而 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 连续，故函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 时连续. 再考虑 $(0,0)$ 点，由于沿任一过该点的直线 $y=kx$ 的极限

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

随着 k 取不同的数值而有不同的极限值，故二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，所以点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的间断点.

(3) 显然，在 $x\neq 0$ 处 $f(x,y)$ 连续，再讨论直线 $x=0$ 上各点 $(0,y_0)$ 的情况. 由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} y\cdot\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} y\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{\sin xy}{xy}=y_0=f(0,y_0).$$

所以在 $x=0$ 上各点 $(0,y_0)$ 处也连续，即函数 $f(x,y)$ 处处连续.

7.1.28　求下列函数的间断点

(1) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$;　(2) $z=\ln(1-x^2-y^2)$.

解　(1) 显然，函数的间断点是由所有满足 $\sin x\sin y=0$ 的点 (x,y) 所组成. 三角方程 $\sin x=0$, $\sin y=0$ 的一般解分别为

$$x=n\pi,\ y=m\pi\ (n,m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

可见，函数的间断点是所有直线 $x=n\pi$ 及 $y=m\pi\,(n,m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 上的点.

(2) 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是函数 $z=\ln(1-x^2-y^2)$ 的间断点.

7.1.29　证明：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 是全平面上的连续函数.

证　$\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 是初等函数，它在 $x^2+y^2\neq 0$ 的点处连续，所以函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 时是连续的. 在点 $(0,0)$ 处，由于

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\leqslant |y|\leqslant \sqrt{x^2+y^2}.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，

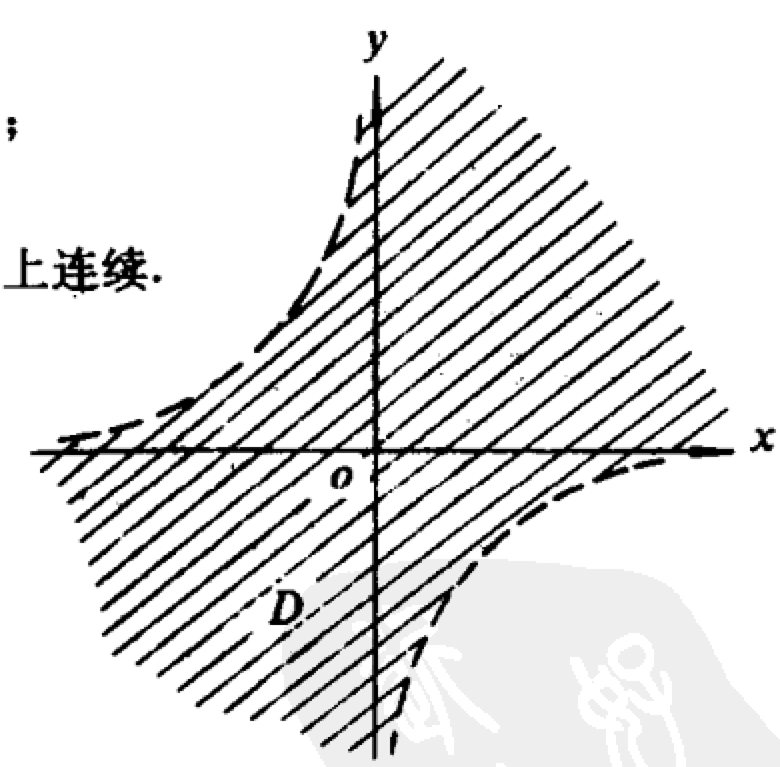
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 于是，$f(x,y)$ 在全平面连续.

7.1.30　确定函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0\end{cases}$$

的定义域，并证明此函数在其定义域上连续.



7.1.30 题图

解　$f(x,y)$ 的定义域为

$$\begin{cases}1+xy>0, & x\neq 0\\ y\text{ 轴} & x=0,\end{cases}$$

即 $xy>-1$. 如右图所示.

现证 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

显然，$f(x,y)$ 在 $x\neq 0$ 处连续，因此只须证明 $f(x,y)$ 在 $x=0$ 时，即在 y 轴上连续即可.

分不同情况讨论如下：

(1) 考虑原点 $(0,0)$

显然 $f(0,0)=0$，故 $f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)$，

$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|$

$$= \begin{cases} |y\dfrac{\ln(1+xy)}{xy}| < |y|, & x \neq 0, y \neq 0; \\ 0, & x \neq 0, y = 0; \\ |y|, & x = 0, \end{cases}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，当 $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$ 时，$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处连续.

(2) 考虑 y 轴上的点$(0,y_0)$，$y_0 \neq 0$，对于任意的 $\varepsilon > 0$，必定存在 $\delta > 0$(设 $\delta < \varepsilon$)，

i) 当 $0 < |x| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时，$y \neq 0$，且 $|\dfrac{\ln(1+xy)}{xy} - 1| < \varepsilon$，从而

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,y_0)| &= |y\frac{\ln(1+xy)}{xy} - y_0| \\ &= |y(\frac{\ln(1+xy)}{xy} - 1) + (y - y_0)| \\ &\leqslant |y||\frac{\ln(1+xy)}{xy} - 1| + |y - y_0| < (|y_0 + \varepsilon|)\varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) 而当 $x = 0, |y - y_0| < \delta$ 时，显然

$$|f(x,y) - f(0,y_0)| = |y - y_0| < \varepsilon,$$

故 $f(x,y)$ 在$(0,y_0)$ 处连续.

7.1.31　设 $f(x,y)$ 是定义在 D 上的函数，对固定的 y，$f(x,y)$ 是 x 的连续函数，并且满足李普希兹条件：

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leqslant L|y' - y''|, (x,y') \in D, (x,y'') \in D,$$

其中 L 是与 x 和 y 都无关的常数，证明 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证　设(x_0,y_0) 为 D 内任一点.

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < &|f(x,y) - f(x,y_0)| \\ &+ |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)|, \end{aligned}$$

因为 $|f(x,y') - f(x,y'')| \leqslant L|y' - y''|$，所以

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant L|y - y_0|.$$

又因 $f(x,y)$ 是 x 的连续函数，所以当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $\begin{cases} |x - x_0| < \delta, \\ |y - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2L} \end{cases}$ 时，取 $\delta' = \min(\delta, \dfrac{\varepsilon}{2L})$，则当 $|x - x_0| < \delta'$，

$|y - y_0| < \delta'$ 时,

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 由 (x_0,y_0) 的任意性,知 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

7.1.32 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上分别对 x 和 y 连续,且对固定的 y, $f(x,y)$ 是 x 的单调函数,则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证 任取 $(x_0,y_0) \in D$,对任意的 $\varepsilon > 0$,由 $f(x,y)$ 关于 x 的连续性知,存在 $\delta_1 > 0$,当 $|x - x_0| \leqslant \delta_1$ 时,

$$|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

特别地,

$$|f(x_0 + \delta_1,y_0) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon, |f(x_0 - \delta_1,y_0) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

又由 $f(x,y)$ 关于 y 的连续性,存在 $\delta_2 > 0$,当 $|y - y_0| \leqslant \delta_2$ 时,

$$|f(x_0 + \delta_1,y) - f(x_0 + \delta_1,y_0)| < \varepsilon,$$
$$|f(x_0 - \delta_1,y) - f(x_0 - \delta_1,y_0)| < \varepsilon,$$

从而当 $|x - x_0| \leqslant \delta_1, |y - y_0| \leqslant \delta_2$ 时,由于 $f(x,y)$ 对固定的 y 是 x 的单调函数,便得到

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant \max\{|f(x_0 - \delta_1,y) - f(x_0,y_0)|, |f(x_0 + \delta_1,y) - f(x_0,y_0)|\} < 2\varepsilon.$$

故 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

§2　多元函数的微分法

内 容 提 要

1. 一阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在含有点 (x_0,y_0) 的某一区域 D 内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数，记作 $f_x'(x_0,y_0)$、$z_x'(x_0,y_0)$、$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$.

同样，若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 y 的偏导数，记作 $f_y'(x_0,y_0)$、$z_y'(x_0,y_0)$、$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$ 或 $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$.

2. 高阶偏导数

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 仍然可导，那么它们的偏导数称为 $f(x,y)$ 的二阶偏导数．记为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}=f''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}=f''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{yy}.$$

仿此，可以引入 $z=f(x,y)$ 的 n 阶偏导数，即 z 的 $n-1$ 阶偏导数的偏导数.

若在点 (x_0,y_0) 的邻域内，函数 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导函数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 都连续，则必有

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

3. 全微分

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量可表示为

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A,B 是与 Δx, Δy 无关的常数，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处是可微的；式中线性部分 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x,y)$ 的全微分，记为

$$dz = Adx + Bdy.$$

显然，当 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处可微时，偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 必存在，且 $f_x'(x_0,y_0)=A$，$f_y'(x_0,y_0)=B$，所以有

$$dz = f_x'(x_0,y_0)dx + f_y'(x_0,y_0)dy,$$

或

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

4. 二元函数在一点的连续、可导、可微的关系

(1) 可导不一定连续；

(2) 可导不一定可微；

(3) 可导且偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 连续则可微.

5. 方向导数与梯度

如果极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

存在，称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 沿 l 方向的方向导数，记作$(\frac{\partial z}{\partial l})_{(x_0,y_0)}$，即

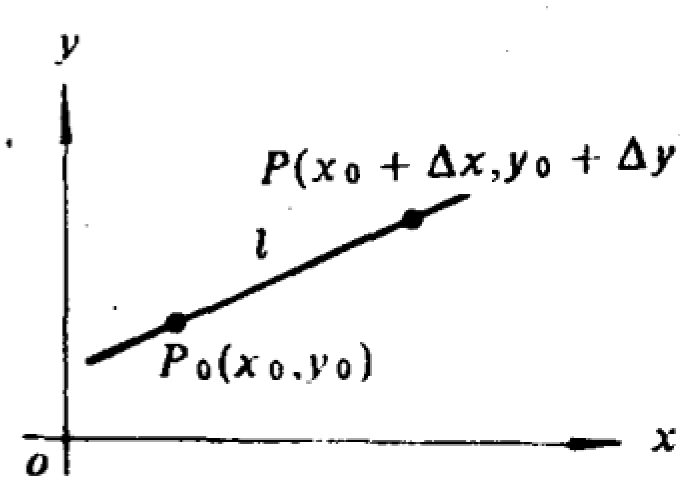


图 7.2.1

$$(\frac{\partial z}{\partial l})_{(x_0,y_0)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

其中 $\rho = |P_0P| = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

对于二元可微函数，有

$$(\frac{\partial z}{\partial l})_{(x_0,y_0)} = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 l 的方向余弦.

对于三元可微函数 $u=f(x,y,z)$，有

$$(\frac{\partial z}{\partial l})_{(x_0,y_0,z_0)} = f_x'(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + f_z'(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma,$$

其中α,β,γ分别是l与x、y、z轴正向的夹角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是l的方向余弦.

设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则矢量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad 或 \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

称为函数 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处的梯度，记为 $\operatorname{grad} f$.

6. 多元复合函数的微分法

设函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点(x,y) 的偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点(u,v) 有连续的偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y) 对 x 及 y 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

多元复合函数的求导法则也叫链琐法则.

[**推广**]

(1) 有两个以上中间变量

设 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=\omega(x,y)$；$z=f(u,v,w)$，则对 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),w(x,y)]$ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

(2) 只有一个中间变量

设 $u=\varphi(x,y)$，$z=f(u,x,y)$，则对 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(3) 只有一个自变量

设 $u=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=w(t)$，$z=f(u,v,w)$，则对 $z=f[\varphi(t),\psi(t),w(t)]$，有全导数

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

7. 隐函数存在定理及其微分法

(1) 隐函数存在定理

定理 1 设给定方程 $F(x,y)=0$. 如果函数 $F(x,y)$ 满足

1° 在点(x_0,y_0) 的某一(二维) 邻域内具有连续的偏导数 $F_x'(x,y)$ 与

$F_y'(x,y)$；

2° $F(x_0,y_0)=0$；

3° $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，

则方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定了一个定义在 x_0 的某(一维)邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的函数 $y=f(x)$，使得

1) $f(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$，即 $F(x,f(x))\equiv 0$，且 $y_0=f(x_0)$；

2) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续，有连续的导数，且

$$f'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

(2) 隐函数存在定理 1，可作两方面推广：

定理 2 设给定方程 $F(x,y,z)=0$. 如果函数 $F(x,y,z)$ 满足：

1° 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一(三维)邻域内具有对各个变量的连续偏导数；

2° $F(x_0,y_0,z_0)=0$；

3° $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则方程 $F(x,y,z)=0$ 能唯一地确定一个定义在 (x_0,y_0) 的某一(二维)邻域内的单值函数 $z=f(x,y)$，使得

1) $f(x,y)$ 满足方程 $F(x,y,z)=0$，即 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$；

2) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的上述邻域内连续，有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x'}{F_z'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y'}{F_z'}.$$

定理 3 设给定方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0.\end{cases}$ 如果函数 $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 满足

1° 在点 (x_0,y_0,u_0,z_0) 的某一(四维)邻域内具有对各个变量的连续偏导数；

2° $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，　$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$；

3° 偏导数组成的函数行列式(又称为函数 F,G 对 u,v 的雅可比(Jacobi)式)

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在(x_0,y_0,u_0,v_0)处不等于零，则方程组$F(x,y,u,v)=0,G(x,y,u,v)=0$能唯一地确定一个定义在$(x_0,y_0)$的某一（二维）邻域内的单值函数组$u=u(x,y),v=v(x,y)$，使得

(1) $u(x,y)$与$v(x,y)$满足方程组$F(x,y,u,v)=0$，且

$$u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$$

(2) $u(x,y)$与$v(x,y)$在(x_0,y_0)的上述邻域内连续，有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

8. 变量代换

(1) 自变量的代换　若在微分式$u=F(x,y,y_x',y''_{xx}\cdots)$中作变量代换$x=\varphi(t)$，则导数由下式确定：

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'},y''_{xx}=\frac{x_t'y''_{tt}-x''_{tt}y_t'}{x_t'^3},\cdots$$

于是，原微分式变为$u=F_1(t,y,y_t',y''_{tt}\cdots)$.

若在微分式$u=F(x,y,z,z_x',z_y',z''_{xx},z''_{xy}\cdots)$中作变量代换$x=x(s,t),y=y(s,t)$，则偏导数由下式确定：

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t};$$

$$\cdots\cdots$$

于是原微分式变为$u=F_1(s,t,z_s',z_t',z''_{ss},z''_{st},\cdots)$.

(2) 自变量和函数的代换，若在微分式$u=F(x,y,y_x',y''_{xx},\cdots)$中作变量代换$x=x(s,t),y=y(s,t)$，其中$s$是自变量，$t$是$s$的函数，则导数由下式确定：

$$y_x'=\frac{y_s'+y_t't_s'}{x_s'+x_t't_s'},\cdots$$

于是原微分式变为$u=F_1(s,t,t_s',t''_{ss},\cdots)$.

若在微分式$u=F(x,y,z,z_x',z_y',z''_{xx},\cdots)$中作变量代换$x=f(r,s,t),y=g(r,s,t),z=h(r,s,t)$（其中$r$、$s$是自变量，$t$是$r$、$s$的函数），则偏导数由下式确定：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial r}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial s}+\frac{\partial g}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s}\right)=\frac{\partial h}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s});$$

……

于是原微分式变为 $u = F_1(r,s,t,t_r',t_s',t''_{rr},t''_{rs},\cdots)$.

问 题 与 解 答

1. 一阶偏导数

7.2.1 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

(1) 求 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$;

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续?

解 (1) 由偏导数的定义

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0.$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot\Delta y}{0+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0.$$

(2) $f(0,0)=0$,当 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时的极限值为

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

此值随 k 的变化而变化,故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的极限不存在. 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

7.2.2 多元函数的偏导数记号 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$(或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$)能否理解为 ∂z 与 ∂x 之商(或 ∂z 与 ∂y 之商)?

解 一元函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 可以理解为 dy 与 dx 之商,可是在多元函

数中$\frac{\partial z}{\partial x}$就不能理解为$\partial z$与$\partial x$之商了，只能作为一个整体符号$\frac{\partial z}{\partial x}$来理解. 例如，设$z=xy$，那么$\frac{\partial z}{\partial x}=y$，$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{z}{y^2}$，$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{x}$，这样就有

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1.$$

如果$\frac{\partial z}{\partial x}$可以理解为$\partial z$与$\partial x$之商，$\frac{\partial x}{\partial y}$，$\frac{\partial y}{\partial z}$也类似，则上式右端应为1. 这就是说记号$\frac{\partial z}{\partial x}$不能理解为$\partial z$与$\partial x$之商.

7.2.3　如果在点$(x_0,\ y_0)$处两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$都存在，问函数$z=f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处是否连续？

解　在一元函数中，如果函数$y=f(x)$在x_0处可导，那么在x_0处一定连续. 在多元函数中就不能由偏导数的存在推导出函数连续的结论. 例如，设函数$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0;\\ 0, & xy\neq 0,\end{cases}$则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-1}{\Delta x}=0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}=\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1-1}{\Delta y}=0.$$

这说明函数$f(x,y)$在$(0,0)$处的两个偏导数是存在的，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在，因而函数$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

7.2.4　若在某一包含点$P(x,y)$在内的区域上$f(x,y)$的偏导数$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$存在而且有界，则它在这区域上连续.

证　
$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]\\&\qquad+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)].\end{aligned}$$

应用拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\\&\qquad=f_x'(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x,\quad(0<\theta_1<1)\end{aligned}$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y'(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\quad(0<\theta_2<1)$$

于是$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$$=f_x'(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y'(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

由于在所述区域上偏导数有界，所以存在$M>0$，使

$$|f_x'(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)|\leqslant M,\quad |f_y'(x,y+\theta_2\Delta y)|\leqslant M.$$

故 $\quad |f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)|\leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|).$

当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时,上面不等式右边趋向于 0,由此推知

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y).$$

所以函数 $f(x,y)$ 在所述区域上连续.

7.2.5 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0 & x^2+y^2=0,\end{cases}$

证明:$f(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内连续,且有一阶偏导数 $f_x'(x,y)$,$f_y'(x,y)$. 问 $f(x,y)$ 在点(0,0)处是否可微?说明理由.

证 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,显然 $f(x,y)$ 连续,而当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\to 0,$$

故 $f(x,y)$ 在点(0,0)也连续.

又当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,显然有一阶偏导数

$$f_x'(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad f_y'(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

而 $f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0$,但当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=x$ 趋于(0,0)时,

$$\frac{\Delta f-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{2(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

它不随 $\rho\to 0$ 而趋于 0,故函数在(0,0)处不可微.

7.2.6 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

试问:(1)$f(x,y)$ 在(0,0)点是否连续?为什么?

(2)$f(x,y)$ 在(0,0)点是否可微?为什么?

解 (1) 因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$. 故

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

(2) $$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y'(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

$$\Delta f = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2].$$

当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y = x$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$\frac{\Delta f - [f_x'(0,0)\Delta x + f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$= \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}\sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 2(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

7.2.7　设 $f(x,y) = |x - y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，问

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件，偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在；

(2) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

解　(1)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\varphi(x,0) - 0}{x} = \varphi(0,0),$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(0+x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} [-\varphi(x,0)] = -\varphi(0,0),$$

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{f(0,0+y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y\varphi(0,y)}{y} = \varphi(0,0),$$

$$\lim_{y \to 0^-} \frac{f(0,0+y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0^-} [-\varphi(0,y)] = -\varphi(0,0).$$

容易看出，若 $\varphi(0,0) = 0$，则偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在且 $f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$.

(2) $$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = |\Delta x - \Delta y|\varphi(\Delta x, \Delta y),$$

显然 $$\frac{|\Delta x - \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leqslant \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leqslant 2,$$

故若 $\varphi(0,0)=0$，当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho\to 0$ 时，有

$$\frac{\Delta f-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0.$$

所以当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

7.2.8 研究函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的可微性与偏导数的连续性.

解 (1) 先求函数 $f(x,y)$ 的偏导数：

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

同理，有

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(2) 再证明 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

当点 (x,y) 沿着 x 轴(即 $y=0$) 趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f_x'(x,y)=\lim_{x\to 0}f_x'(x,0)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right),$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$，而当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 的极限不存在，所以当 $x\to 0$ 时，$f_x'(x,0)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 的极限不存在，于是当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f_x'(x,y)$ 的极限不存在，从而可知 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

(3) 最后证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

事实上，$z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)\\&=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0=\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2},\end{aligned}$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则有

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

即 $\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}$ 是比 ρ 高阶的无穷小（当 $\rho\to 0$ 时），记为 $\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}=o(\rho)$.

所以
$$\Delta z=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho).$$

根据全微分的定义，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

本题说明，偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 存在且连续并非函数 $f(x,y)$ 可微的必要条件.

7.2.9　计算下列各题：

(1) 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求 $f_x'(3,4)$；

(2) 设 $z=\ln(x+\frac{y}{2x})$，求 $(\frac{\partial z}{\partial y})_{(1,0)}$；

(3) 设 $z=(1+xy)^y$，求 $(\frac{\partial z}{\partial x})_{(1,1)}$ 及 $(\frac{\partial z}{\partial y})_{(1,1)}$；

(4) 设 $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$，当 $x=y=z=1$ 时，求 $u_x'+u_y'+u_z'$.

解　(1) 因 $f_x'(x,y)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，所以

$$f_x'(3,4)=1-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5},$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\frac{y}{2x}}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x^2+y}$，所以

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_{(1,0)}=\frac{1}{2\cdot 1^2+0}=\frac{1}{2}.$$

(3) 因 $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y[\frac{xy}{1+xy}\ln(1+xy)],$$

所以
$$(\frac{\partial z}{\partial x})_{(1,1)}=1^2\times(1+1)^0=1,$$

$$(\frac{\partial z}{\partial y})_{(1,1)}=2\times[\frac{1}{2}+\ln 2]=1+2\ln 2.$$

(4) 因 $u_x'=\frac{1}{1+x+y^2+z^3}$，$u_y'=\frac{2y}{1+x+y^2+z^3}$，

$$u_z' = \frac{3z^2}{1 + x + y^2 + z^3},$$

$$u_x' + u_y' + u_z' = \frac{1 + 2y + 3z^2}{1 + x + y^2 + z^3},$$

所以
$$[u_x' + u_y' + u_z']_{(1,1,1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

7.2.10　解下列各题：

(1) 设 $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$，求在$(2,\pi)$点的一阶偏导数；

(2) 设 $f(x,y) = x + \sqrt{y-1}\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求在$(3,4)$点的一阶偏导数.

解　(1) 因 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y},$$

故
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2,\pi)} = \frac{\pi}{4}\sin\frac{2}{\pi},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2,\pi)} = -\frac{1}{2}\sin\frac{2}{\pi}.$$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \sqrt{y-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)_x'$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{y-1}}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}}{2\sqrt{y-1}} - \frac{\sqrt{x(y-1)}}{2y\sqrt{y-x}},$$

故 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(3,4)} = \frac{3}{2}$，　$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(3,4)} = \frac{\arcsin\sqrt{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{8}$.

7.2.11　设 $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$.

解法 1　因 $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$= \frac{(1 + \sin x + \sin y)\cdot(1\cdot\cos y + y\sin x) - (x\cos y - y\cos x)\cdot\cos x}{(1 + \sin x + \sin y)^2},$$

所以$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1.$

解法 2 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{d}{dx}z(x,0)\right|_{x=0}=\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\sin x}\right)\right|_{x=0}$

$$=\left.\frac{(1+\sin x)\cdot 1-x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}\right|_{x=0}=1.$$

7.2.12　设 $u=\sqrt{\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z}$，求$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(0,0,\frac{\pi}{4})}$.

解　$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(0,0,\frac{\pi}{4})}=\frac{d}{dz}u(0,0,z)|_{z=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{d}{dz}(\sqrt{\sin^2z})\right|_{z=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

7.2.13　求下列函数的一阶偏导数.

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;　　(2) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $z=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$;　　(4) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

(5) $z=x^y$;　　(6) $u=(\frac{x}{y})^z$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=x^{y^z}$.

解　(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x\cdot x}{2(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

(5) 由 $z=x^y=e^{y\ln x}$ 得，$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\ln x$.

(6) $u=x^zy^{-z}$，$\frac{\partial u}{\partial x}=zx^{z-1}y^{-z}=\frac{z}{x}(\frac{x}{y})^z$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-zx^z y^{-z-1}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}.$$

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{y}{xz}u;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x=\frac{u\ln x}{z};$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x=-\frac{yu\ln x}{z^2}.$$

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}zy^{z-1}(\ln x);\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln x\ln y.$

7.2.14 证明：$f_x'(x,b)=\frac{d}{dx}[f(x,b)]$.

证 由定义得 $f_x'(x,b)=\left[\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b}$，而

$$\frac{d}{dx}[f(x,b)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta y},$$

因 y 与 Δx 无关，所以

$$\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x},$$

故 $f_x'(x,b)=\frac{d}{dx}[f(x,b)]$.

7.2.15 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x'(x,1)$.

解 先求 $f_x'(x,y)$，再将 $(x,1)$ 代入求 $f_x'(x,1)$ 较繁，如根据上一题的结论，则有

$$f_x'(x,1)=\frac{d}{dx}[f(x,1)]=\frac{dx}{dx}=1.$$

7.2.16 曲线 $\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线与 x 轴的正向所成的角度是多少？

解 设所求的角为 α，由偏导数的几何意义知，

$$\mathrm{tg}\alpha=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1,$$

所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

7.2.17 曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线

与 y 轴的正向所成的角度是多少？

解　设所求的角为 φ，由偏导数的几何意义知

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,\sqrt{3})} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big|_{(1,1,\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

7.2.18　已知函数 $F(x,y) = y^x - \frac{1}{2}x^y$，如果 x 和 y 以同样的速度变化，则当 $x = 3, y = 2$ 时，哪一个函数增长得比较快，是固定 y（只变动 x）时由 F 所得的函数增长得快呢？还是固定 x（只变动 y）时由 F 得到的函数快？

解　引进参变量 t，则由题意有 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$；且 $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

固定 y（只变动 x）时，由 F 所得的函数在(3,2)点的变化率为：

$$\frac{dF}{dt}\Big|_{x=2,y=3} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=3,y=2}\cdot\frac{dx}{dt} = \left[y^x\ln x - \frac{1}{2}yx^{y-1}\right]_{x=3,y=2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= (2^3\ln 3 - 3)\frac{dx}{dt};$$

固定 x（只变动 y）时，由 F 所得到的函数在(3,2)点的变化率为：

$$\frac{dF}{dt}\Big|_{x=3,y=2} = \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x=3,y=2}\cdot\frac{dy}{dt} = \left[xy^{x-1} - \frac{1}{2}x^y\ln x\right]_{x=3,y=2}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= (12 - \frac{9}{2}\ln 3)\frac{dy}{dt}.$$

因为，$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$，所以 $12 - \frac{9}{2}\ln 3 > 2^3\ln 3 - 3$，故当 $x = 3, y = 2$ 时，固定 x（只变动 y）由 F 所得到的函数增长的比较快.

7.2.19　设 $R = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$，其中 $R_1 > R_2 > R_3 > 0$. 问改变 R_1, R_2, R_3 中哪一个对 R 的变化影响最大？何以见得？

解　$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)\cdot R_2R_3 - R_1R_2R_3(R_2 + R_3)}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2}$$

$$= \frac{R_2^2R_3^2}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)^2}$$

$$= \frac{1}{R_1^2}\cdot\left(\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\right)^2,$$

由对称性，可得

$$\frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{1}{R_2^2}\cdot(\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1})^2,$$
$$\frac{\partial R}{\partial R_3}=\frac{1}{R_3^2}\cdot(\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1})^2.$$

由题设 $R_1>R_2>R_3>0$ 可得，$\frac{1}{R_1^2}<\frac{1}{R_2^2}<\frac{1}{R_3^2}$，从而$\frac{\partial R}{\partial R_1}<\frac{\partial R}{\partial R_2}<\frac{\partial R}{\partial R_3}$，即改变 R_3 对 R 的变化影响最大.

7.2.20 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，就下列各题验证关于齐次函数的欧拉定理：

(1) $u=(x-2y+3z)^2$； (2) $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；

(3) $u=(\frac{x}{y})^{\frac{y}{z}}$.

证 关于 n 次齐次函数的欧拉定理如下：

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$ 在域 A 中关于所有变量均有连续的偏导函数，则下述等式成立

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

(1) 由于$(tx-2ty+3tz)^2=t^2u$，故 u 为二次齐次函数，又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-2y+3z),\ \frac{\partial u}{\partial y}=-4(x-2y+3z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=6(x-2y+3z),$$

故得

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=(x-2y+3z)(2x-4y+6z)=2u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

(2) 由于对任何的 $t>0$，

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2+(ty)^2+(tz)^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=t^0\cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数，又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

故得　$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xy^2+xz^2-xy^2-xz^2)=0\cdot u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

(3) 由于 $(\frac{tx}{ty})^{\frac{ty}{tz}}=(\frac{x}{y})^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u,\ (t>0)$，故函数 u 为零次齐次函数，又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y(\frac{x}{y})^{\frac{y}{z}}\cdot[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}]$$

$$=\frac{u}{z}(\ln\frac{x}{y}-1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(\frac{x}{y})^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot(-\frac{y}{z^2})=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得　$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$

$$=x\cdot\frac{yu}{xz}+y\cdot\frac{u}{z}(\ln\frac{x}{y}-1)-z\cdot\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u.$$

即函数 u 满足欧拉定理.

7.2.21　证明：若 $f(x,y,z)$ 是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f_x'(x,y,z),f_y'(x,y,z),f_z'(x,y,z)$ 是 $(n-1)$ 次的齐次函数.

证　等式 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$ 两端分别对 x,y,z 求偏导数，则得

$$tf_1'(tx,ty,tz)=t^nf_1'(x,y,z),$$
$$tf_2'(tx,ty,tz)=t^nf_2'(x,y,z),$$
$$tf_3'(tx,ty,tz)=t^nf_3'(x,y,z),$$

其中 $f_1'(\cdot,\cdot,\cdot),f_2'(\cdot,\cdot,\cdot),f_2'(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 对第一个、第二个、第三个变量的偏导数. 于是，

$$f_1'(tx,ty,tz)=t^{n-1}f_1'(x,y,z),$$
$$f_2'(tx,ty,tz)=t^{n-1}f_2'(x,y,z),$$
$$f_3'(tx,ty,tz)=t^{n-1}f_3'(x,y,z),$$

即偏导函数 $f_x'(x,y,z),f_y'(x,y,z)$ 及 $f_z'(x,y,z)$ 均为 $(n-1)$ 次的齐次函数.

2. 高阶偏导数

7.2.22 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

证明：$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

证 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y$,

故 $f_x'(0,y)=-y$，从而 $f''_{xy}(0,0)=\dfrac{d}{dy}[f_x'(0,y)]|_{y=0}=-1$,

同法可求得 $f_y'(x,0)=x$，从而

$$f''_{yx}(0,0)=\frac{d}{dx}[f_y'(x,0)]|_{x=0}=1,$$

于是 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

7.2.23 求下列函数的高阶偏导数：

(1) $z=x\ln(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) $z=x^3\sin y+y^3\sin x$，求 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$;

(3) $z=x^2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+y^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\ln(x+y)+\dfrac{x}{x+y}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x+y}+\frac{x+y-x}{(x+y)^2}=\frac{x+2y}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x+y}+\frac{(-x)}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x+y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x}{(x+y)^2}.$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y+y^3\cos x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x\sin y-y^3\sin x$;

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=6x\cos y-3y^2\sin x.$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{y(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$,

若在函数中将 x 换为 y，同时把 y 换为 x 时，函数表达式不变，则称

函数对 x,y 有轮换对称性,对具有轮换对称性的函数,只要在$\frac{\partial z}{\partial x}$的表达式中将 x 换成 y,同时将 y 换成 x 就得到$\frac{\partial z}{\partial y}$,即

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\text{arctg}\,\frac{x}{y}+\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2};$$

从而
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2y\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}+\frac{(x^2+y^2)(3x^2-y^2)-x(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\text{arctg}\,\frac{y}{x}-2xy\frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

利用轮换对称性,可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\text{arctg}\,\frac{x}{y}-2xy\frac{y^2+3x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

7.2.24　(1) $f(x,y,z)=e^{xyz}$, 求$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$;

(2) $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$,求$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$;

(3) $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$,求$\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$

解　(1) $\frac{\partial f}{\partial x}=yze^{xyz}$,　$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=ze^{xyz}+xyz^2e^{xyz}=ze^{xyz}(1+xyz)$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2).$$

(2) 设 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$,则 $u=-\ln r$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x-\xi}{r^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial\xi}=-\frac{2(y-\eta)}{r^4}+\frac{8(x-\xi)^2(y-\eta)}{r^6},$$

于是$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=\frac{2}{r^4}-\frac{8(y-\eta)^2}{r^6}-\frac{8(x-\xi)^2}{r^6}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$$

$$=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}.$$

(3) $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}=p!\cdot(y-y_0)^q$,于是$\frac{\partial^{(p+q)}u}{\partial x^p\partial y^q}=p!q!$,　($p,q$ 均为自然数).

7.2.25　证明：若 $u=f(xyz)$，则 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=F(t)$，式中 $t=xyz$，并求函数 F.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(t)$，　$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=yzf''(t)\cdot xz+zf'(t)$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}&=x^2y^2z^2f'''(t)+2xyzf''(t)+f'(t)+xyzf''(t)\\&=x^2y^2z^2f'''(t)+3xyzf''(t)+f'(t)\\&=t^2f'''(t)+3tf''(t)+f'(t).\end{aligned}$$

故　$F(t)=f'(t)+3tf''(t)+t^2f'''(t)$.

7.2.26　已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 能满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=(\frac{\partial u}{\partial x}+au)e^{ax+by}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=(\frac{\partial u}{\partial y}+bu)e^{ax+by}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu)e^{ax+by}\\&=(b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu)e^{ax+by},\end{aligned}$$

代入方程，得

$$[(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(ab-a-b+1)u]e^{ax+by}=0,$$

故 $a=1,b=1$.

7.2.27　验证函数 $z=f(x)g(y)$ 满足方程 $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

证　因 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(x)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$，

所以　左端 $=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=[f'(x)g(y)][f(x)g'(y)]$

$$=[f(x)g(y)][f'(x)g'(y)]=z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\text{右端}.$$

7.2.28　验证函数 $z=x^2y^3$ 满足 $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}=\frac{\partial^5 z}{\partial y^3\partial x^2}$.

证　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^3$，　$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=6y^2$，

$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}=12y$，　$\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}=12$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^2y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6x^2$$
$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^3\partial x}=12x,\quad \frac{\partial^5 z}{\partial y^3\partial x^2}=12.$$

因此　$\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}=\dfrac{\partial^5 z}{\partial y^3\partial x^2}$.

7.2.29　设 $f(x,y)=\int_x^{x^2+y^2}e^t dt$，求 $f_x'(1,2),f_y'(1,2),f''_{xx}(1,2),f''_{xy}(1,2),f''_{yy}(1,2)$.

解　因 $f(x,y)=\int_x^{x^2+y^2}e^t dt=\int_x^a e^t dt+\int_a^{x^2+y^2}e^t dt$,

所以　$f_x'(x,y)=-e^x+e^{x^2+y^2}\cdot 2x,\quad f_y'(x,y)=e^{x^2+y^2}\cdot 2y$,

$$f''_{xx}(x,y)=-e^x+e^{x^2+y^2}(2+4x^2),$$
$$f''_{yy}(x,y)=e^{x^2+y^2}(2+4y^2),$$
$$f''_{xy}(x,y)=4xye^{x^2+y^2}.$$

将(1,2)代入，便得到

$$f_x'(1,2)=e(2e^4-1),\quad f_y'(1,2)=4e^5,$$
$$f''_{xx}(1,2)=e(6e^4-1),\quad f''_{yy}(1,2)=18e^5,$$
$$f''_{xy}(1,2)=8e^5.$$

3. 全微分

7.2.30　求下列函数的全微分：

(1) $z=x^2+y^3-2xy,\quad dz|_{(1,2)}$；　　(2) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$；

(3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1-xy}$；　　(4) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

(5) $z=(1+\ln xy)^3$；　　(6) $z=y^{\sin x}$；

(7) $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(8) $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$.

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=(2x-2y)|_{(1,2)}=-2$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=(3y^2-2x)|_{(1,2)}=10,$$

所以 $dz|_{(1,2)} = (\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy)|_{(1,2)} = -2dx + 10dy.$

(2) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$

(3) $$dz = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)^2}d\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x-y)^2}\cdot\frac{(1-xy)d(x-y)+(x-y)d(xy)}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{(1-y^2)dx+(x^2-1)dy}{(1-xy)^2+(x-y)^2}.$$

(4) $$du = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2)$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(xdx+ydy+zdz).$$

(5) $$dz = 3(1+\ln xy)^2 d\ln xy = 3(1+\ln xy)^2\frac{1}{xy}d(xy)$$

$$= 3(1+\ln xy)^2(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}).$$

(6) 因 $\frac{\partial z}{\partial x} = y^{\sin x}\cdot\cos x\ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x y^{\sin x-1},$

$dz = y^{\sin x}\cos x\ln ydx + y^{\sin x-1}\sin xdy.$

(7) $$du = \frac{\sqrt{x^2+y^2}dz - zd(\sqrt{x^2+y^2})}{(\sqrt{x^2+y})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}dz - z\cdot\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)dz - z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(8) $$dz = e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}2(xdx+ydy) + (x^2+y^2)de^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$$

$$= e^{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}[2xdx+2ydy] + (x^2+y^2)\cdot\frac{2xy(xdx+ydy)-(x^2+y^2)(ydx+xdy)}{x^2y^2}]$$

$$= e^{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}(xy)^{-2}[y(2x^3y+x^4-y^4)dx + x(2xy^3+y^4-x^4)dy].$$

7.2.31　求函数 $u = x^y y^z z^x$ 的全微分.

解法 1　先求偏导数，根据求导法则可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}y^z z^x + x^y y^z z^x \ln z = x^y y^z z^x(\frac{y}{x} + \ln z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y y^z z^x \ln x + x^y z y^{z-1} z^x = x^y y^z z^x(\frac{z}{y} + \ln x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^y y^z z^x \ln y + x^y y^z x z^{x-1} = x^y y^z z^x(\frac{x}{z} + \ln y).$$

故　$du = x^y y^z z^x[(\frac{y}{x} + \ln z)dx + (\frac{z}{y} + \ln x)dy + (\frac{x}{z} + \ln y)dz].$

解法 2　先对函数关系式 $u = x^y y^z z^x$ 两边取对数，得

$$\ln u = \ln(x^y y^z z^x) = y\ln x + z\ln y + x\ln z,$$

再对此式两端求微分，有

$$\frac{du}{u} = d(y\ln x + z\ln y + x\ln z)$$

$$= \ln x dy + \frac{y}{x}dx + \ln y dz + \frac{z}{y}dy + \ln z dx + \frac{x}{z}dz$$

$$= (\frac{y}{x} + \ln z)dx + (\frac{z}{y} + \ln x)dy + (\frac{x}{z} + \ln y)dz;$$

最后，两边再同乘以 u，就得到

$$du = u[(\frac{y}{x} + \ln z)dx + (\frac{z}{y} + \ln x)dy + (\frac{x}{z} + \ln y)dz]$$

$$= x^y y^z z^x[(\frac{y}{x} + \ln z)dx + (\frac{z}{y} + \ln x)dy + (\frac{x}{z} + \ln y)dz].$$

7.2.32　求函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 当 x 从 2 变到 2.1，y 从 1 变到 0.9 时的全增量与全微分.

解　$\Delta z = f(2.1, 0.9) - f(2, 1)$

$$= \ln(2.1^2 + 0.9^2) - \ln(2^2 + 1^2) = \ln 1.044 \approx 0.0431.$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{2x}{x^2 + y^2}\Delta x + \frac{2y}{x^2 + y^2}\Delta y,$$

令 $x = 2, \Delta x = 0.1; y = 1, \Delta y = -0.1$，则有

$$dz = \frac{2 \times 2}{2^2 + 1^2} \times 0.1 + \frac{2 \times 1}{2^2 + 1^2} \times (-0.1) = 0.04.$$

7.2.33　利用全微分计算下列各式的近似值：

(1) $\sqrt{\frac{0.93}{1.02}}$;　　(2) $1.02^{4.05}$;

(3) 4.02arctg0.97；　　(4) $\sqrt{1.04^{1.99}+\ln 1.02}$.

解　与一元函数一样，解题步骤是：先选函数，再选(x_0,y_0)，最后代入下述公式计算.

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0).$$

(1) 选函数 $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$，选 $x_0=0$，$y_0=0$，$x=-0.07$，$y=0.02$，则

$$f_x'(0,0)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}}\cdot\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{2},$$

$$f_y'(0,0)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}}\cdot\frac{-(1+x)}{(1+y)^2}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{2},$$

$$f(0,0)=1.$$

代入公式得

$$\sqrt{\frac{0.93}{1.02}}\approx 1+\frac{1}{2}(-0.07-0)-\frac{1}{2}(0.02-0),$$

即$\sqrt{\dfrac{0.93}{1.02}}\approx 0.955$.

(2) 选函数 $f(x,y)=x^y$，$x_0=1$，$y_0=4$，$x=1.02$，$y=4.05$，则

$f_x'(1,4)=yx^{y-1}|_{(1,4)}=4$，$f_y'(1,4)=x^y\ln x|_{(1,4)}=1\cdot\ln 1=0$，$f(1,4)=1$，代入公式得

$$1.02^{4.05}\approx 1+4\times 0.02+0\times 0.05,$$

即 $1.02^{4.05}\approx 1.08$.

(3) 选函数 $f(x,y)=x\operatorname{arctg}y$，$x_0=4$，$y_0=1$，$x=4.02$，$y=0.97$，则

$$f_x'(4,1)=\operatorname{arctg}y\Big|_{(4,1)}=\frac{\pi}{4},\ f_y'(4,1)=\frac{x}{1+y^2}\Big|_{(4,1)}=2,$$

$$f(4,1)=\pi,$$

代入公式得

$$4.02\operatorname{arctg}0.97\approx\pi+\frac{\pi}{4}(4.02-4)+2(0.97-1)\approx 3.142.$$

(4) 选函数 $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$，选 $x_0=1$，$y_0=2$，$z_0=1$；

$x = 1.04, y = 1.99, z = 1.02$,则

$$df = \frac{1}{2\sqrt{x^y + \ln z}}[yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y + \frac{\Delta z}{z}],$$

将 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 1, \Delta x = 0.04, \Delta y = -0.01, \Delta z = 0.02$ 代入得 $df = \frac{1}{2}[2 \times 0.04 + 0 + 0.02] = 0.05$，又 $f(1,2,1) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$,从而 $\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02} \approx 1 + 0.05 = 1.05$.

7.2.34　假定 $|x| << 1, |y| << 1$(即 x, y 的绝对值均很小),对下列各式推出其近似公式:

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$;　(2) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$.

解　(1) 选函数 $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n, x_0 = 0, y_0 = 0$,则

$$f_x'(0,0) = m(1+x)^{m-1}(1+y)^n|_{(0,0)} = m,$$
$$f_y'(0,0) = n(1+x)^m(1+y)^{n-1}|_{(0,0)} = n,$$
$$f(0,0) = 1$$

代入公式得 $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + m(x-0) + n(y-0)$,

即
$$(1+x)^m(1+y)^n \approx 1 + mx + ny.$$

(2) 选函数 $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}, x_0 = 0, y_0 = 0$,则

$$f_x'(0,0) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2 + (x+y)^2}\Big|_{(0,0)} = 1,$$

$f_y'(0,0) = 1$,(函数 $f(x,y)$ 有轮换对称性)

$$f(0,0) = 0.$$

代入公式,得
$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy} \approx x + y.$$

7.2.35　求证:(1) 两个近似数的乘积的相对误差等于两个近似数的相对误差之和.

(2) 两个近似数的商的相对误差等于这两个近似数的相对误差之和.

证　(1) 记 x_0 的准确值为 $x = x_0 + \Delta x$, y_0 的准确值为 $y = y_0 + \Delta y$,则 $u_0 = x_0 y_0$ 的准确值为 $u = xy$.

由 $\frac{u - u_0}{u_0} = \frac{\Delta u}{u_0} \approx \frac{1}{u_0}du\Big|_{P_0}$ 得

$$\frac{1}{u_0}du\Big|_{P_0} = \frac{1}{u_0}(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0}\Delta y)$$

$$= \frac{1}{x_0y_0}(y_0\Delta x + x_0\Delta y) = \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0},$$

其中 P_0 是点 (x_0,y_0)，从而可知 $\left|\frac{\Delta u}{u_0}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$，这就是说，$u_0$ 的相对误差等于 x_0 和 y_0 的相对误差之和.

(2) 同样记 x_0,y_0 的准确值分别为 $x = x_0 + \Delta x$，$y = y_0 + \Delta y$，则 $v_0 = \frac{x_0}{y_0}$ 的准确值为 $v = \frac{x}{y}$，由 $\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\Delta v}{v_0} \approx \frac{1}{v_0}du|_{P_0}$ 得

$$\frac{1}{v_0}dv|_{P_0} = \frac{1}{v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial x}|_{P_0}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}|_{P_0}\Delta y\right) = \frac{y_0}{x_0}\left(\frac{1}{y_0}\Delta x - \frac{x_0}{y_0^2}\Delta y\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{x_0} - \frac{\Delta y}{y_0},$$

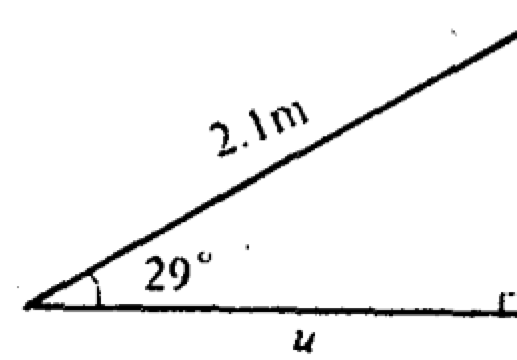
从而可知 $\left|\frac{\Delta v}{v_0}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|-\frac{\Delta y}{y_0}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$，这就是说，$v_0$ 的相对误差也等于 x_0 和 y_0 的相对误差之和.

7.2.36 一直角三角形的斜边长为 2.1m，一个锐角为 29°，求这个锐角的邻边长的近似值.

解 如图，现在要求邻边 u. 由于 $u = 2.1\cos 29°$，所以设 $f(x,y) = x\cos y$，

令 $x_0 = 2$，$y_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$，

$\Delta x = 0.1, \Delta y = -1° = -\frac{\pi}{180}$，



7.2.36 题图

利用近似公式得

$$f\left(2 + 0.1, \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx f\left(2,\frac{\pi}{6}\right) + f_x'\left(2,\frac{\pi}{6}\right)(0.1) + f_y'\left(2,\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right).$$

因为 $f_x'(x,y) = \cos y$，$f_y'(x,y) = -x\sin y$，故有

$$u = 2.1\cos 29° \approx 2\cos\frac{\pi}{6} + \cos y\Big|_{y=\frac{\pi}{6}}\cdot(0.1) + (-x\sin y)\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{\pi}{6}}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= \sqrt{3} + (0.1)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} = (1.05)\sqrt{3} + \frac{\pi}{180}$$

$$\approx 1.05 \times 1.73 + 0.02 \approx 1.82 + 0.02 \approx 1.8.$$

故所求边长 u 的近似值为 1.8m.

7.2.37　当圆柱体的半径 R 由 2cm 增到 2.05cm，高 H 由 10cm 减到 9.8cm，试用公式 $\Delta v \approx dv$ 求体积 V 的近似变化.

解　体积 $V = \pi R^2 H$，

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R}\bigg|_{\substack{R=2\\H=10}} dR + \frac{\partial v}{\partial H}\bigg|_{\substack{R=2\\H=10}} dH$$

$$= 2\pi RH\bigg|_{\substack{R=2\\H=10}} \times 0.05 + \pi R^2\bigg|_{\substack{R=2\\H=10}} \times (-0.2)$$

$$= 40\pi \times 0.05 - 4\pi \times 0.2 = 1.2\pi\text{cm}^3.$$

即体积 V 的近似变化为 $1.2\pi\text{cm}^3$.

7.2.38　扇形的中心角 $\alpha = 60°$ 增加 $\Delta\alpha = 1°$，为了使扇形的面积仍保持不变，则应当把扇形的半径从 20cm 减少若干？

解　扇形的面积 $S = \frac{1}{2}R^2\theta$. 要使 $\Delta S = dS = 0$，必须有：

$$\frac{\partial s}{\partial R}\bigg|_{\substack{R=20\\\theta=\frac{\pi}{3}}} \Delta R = -\frac{\partial s}{\partial \theta}\bigg|_{\substack{R=20\\\theta=\frac{\pi}{3}}} \Delta\theta,$$

即

$$R\theta\bigg|_{\substack{R=20\\\theta=\frac{\pi}{3}}} \Delta R = -\frac{1}{2}R^2\bigg|_{\substack{R=20\\\theta=\frac{\pi}{3}}} \times \frac{\pi}{180},$$

$$\Delta R = (-200)\frac{\pi}{180} \times \frac{3}{20\pi} = -\frac{1}{6}(\text{cm}).$$

即半径必须减少 $\frac{1}{6}$cm.

4. 复合函数微分法

7.2.39　求下列复合函数的偏导数：

(1) $u = \ln(e^x + e^y)$，$y = x^3$，求 $\frac{du}{dx}$.

(2) $u = z^2 + y^2 + yz$，$z = \sin t$，$y = e^t$，求 $\frac{du}{dt}$.

(3) $u = x^2y - xy^2$，$x = s \cdot \cos t$，$y = s \cdot \sin t$，求 $\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$.

(4) $u = \text{arctg}\,\frac{s}{t}$，$s = x + y$，$t = x - y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

(5) $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

(6) $w = f(x,y,z)$，$z = \varphi(y,t)$，$t = \psi(y,x)$，求 $\frac{\partial w}{\partial y}$，$\frac{\partial w}{\partial x}$.

解 (1) 设 $s=e^x, t=e^y=e^{x^3}$.

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial}{\partial s}[\ln(s+t)]\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}[\ln(s+t)]\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{s+t}\cdot e^x+\frac{1}{s+t}e^{x^3}\cdot 3x^2=\frac{1}{e^x+e^y}(e^x+3x^2e^y).$$

(2) $$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=(2z+y)\cos t+(2y+z)e^t$$

$$=(2\sin t+e^t)\cos t+(2e^t+\sin t)e^t.$$

(3) $$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=(2yx-y^2)\cos t+(x^2-2xy)\sin t$$

$$=3s^2\cos t\sin t(\cos t-\sin t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=(2xy-y^2)(-s\cdot\sin t)+(x^2-2xy)\cdot s\cdot\cos t$$

$$=s^3(\sin^3t-2\sin^2t\cos t+\cos^3t-2\sin t\cos^2t).$$

(4) $$du=\frac{1}{1+(\frac{s}{t})^2}d\frac{s}{t}=\frac{t^2}{s^2+t^2}\cdot\frac{tds-sdt}{t^2}$$

$$=\frac{1}{s^2+t^2}[t(dx+dy)-s(dx-dy)]$$

$$=\frac{1}{(x^2+y^2)}[-ydx+xdy],$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(5) 令 $s=x^2-y^2, t=e^{xy}$. 则 $u=f(s,t)$.

$$du=f_s'ds+f_t'dt=f_s'(2xdx-2ydy)+f_t'e^{xy}(ydx+xdy)$$

$$=(f_s'2x+f_t'e^{xy}\cdot y)dx+(-2yf_s'+xe^{xy}f_t')dy,$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_s'+ye^{xy}f_t',\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_s'+xe^{xy}f_t'.$$

(6) $$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

7.2.40 设 $z=f(x-y,x^2+y^2)$,求$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$.

解 令 $u=x-y, v=x^2+y^2$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x,$$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-2x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

7.2.41　设 $z=f(x+y,xy)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　令 $u=x+y,v=xy$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\right]+\frac{\partial z}{\partial v}+y\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\right]$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}x+\frac{\partial z}{\partial v}+y\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}x\right]$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

7.2.42　设 $z=f(xy,x^2+y^2)$，$y=\varphi(x)$，f 和 φ 均可微，求 $\frac{dz}{dx}$.

解　令 $u=xy,v=x^2+y^2$，则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}(y+xy')+\frac{\partial f}{\partial v}(2x+2yy').$$

7.2.43　设 $z=\varphi(x,y)$，其中 $y=f(x)$，试求 $\frac{d^2 z}{dx^2}$.

解　$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

7.2.44　设 $u=f(x,xy,xyz)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$.

解　将 x,xy,xyz，分别编号为 1,2,3，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+f''_{12}y+yf''_{21}+y^2f''_{22}+f''_{13}yz+yzf''_{31}$$

$$+y^2zf''_{23}+y^2zf''_{32}+y^2z^2f''_{33}$$

$$= f''_{11} + y^2f''_{22} + y^2z^2f''_{33} + 2yf''_{12} + 2yzf''_{13} + 2y^2zf''_{23},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = xyf''_{13} + xy^2f''_{23} + xy^2zf''_{33} + yf_3'.$$

7.2.45　设 $u = f(x^2 - y^2, e^{xy})$，其中 f 有二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial y} = -2yf_1' + xe^{xy}f_2'$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = -4xyf''_{11} - 2y^2e^{xy}f''_{12} + e^{xy}f_2' + xye^{xy}f_2'$$

$$+ 2x^2e^{xy}f''_{21} + xye^{2xy}f''_{22}.$$

7.2.46　设 $z = f[x\varphi(y), x - y]$，其中 f 具有连续的二阶编导数，φ 具有二阶导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1'x\varphi'(y) - f_2'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \varphi'[xf''_{11}\varphi + xf''_{12} + f_1'] - [f''_{21}\varphi + f''_{22}]$$

$$= f''_{11}x\varphi'\varphi + f''_{12}(x\varphi' - \varphi) - f''_{22} + f_1'\varphi'.$$

7.2.47　由 $u = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$，其中 ψ 与 φ 分别具有连续的一、二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解　$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{2}[\varphi'(x + at) - \varphi'(x - at)]$

$$+ \frac{1}{2}[\psi(x + at) - \psi(x - at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}[\varphi''(x + at) + \varphi''(x - at)]$$

$$+ \frac{a}{2}[\psi'(x + at) - \psi'(x - at)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}[\varphi'(x + at) + \varphi'(x - at)]$$

$$+ \frac{1}{2a}[\psi(x + at) - \psi(x - at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}[\varphi''(x + at) + \varphi''(x - at)]$$

$$+ \frac{1}{2a}[\psi(x + at) - \psi'(x - at)],$$

故有　　$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$

7.2.48　设 $w=f(x,2y,z)$，而 $z=\varphi(xy+y)$，其中 f 具有连续二阶偏导数，φ 二阶可微，求 $\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$.

解　$\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'+f_3'\cdot\varphi'\cdot y=f_1'+y\varphi' f_3'$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}&=f''_{12}\cdot 2+f''_{13}\cdot\varphi'(x+1)+\varphi'\cdot f_3'+y\varphi''\cdot(x+1)\cdot f_3'\\&\quad+y\varphi'[f''_{32}\cdot 2+f''_{33}\cdot\varphi'\cdot(x+1)]\\&=2f''_{13}+(x+1)(\varphi'\cdot f''_{13}+y\varphi''\cdot f_3'+y\varphi'^2 f''_{33})\\&\quad+\varphi'\cdot f_3'+2\varphi' f''_{32}y.\end{aligned}$$

7.2.49　设 $z=\varphi(x+y,x-y)\cdot\psi(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　先用乘法公式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\varphi\cdot\psi)_x'=\varphi\cdot\psi_x'+\psi\cdot\varphi_x',\tag{1}$$

对于 ψ_x' 及 φ_x' 再用复合函数偏导数公式.

令 $u=xy,v=\frac{y}{x}$，则有

$$\psi_x'=\frac{\partial\psi}{\partial u}y+\frac{\partial\psi}{\partial v}(-\frac{y}{x^2}),$$

再令 $\omega=x+y,t=x-y$，则有

$$\varphi_x'=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

代入(1)式并整理，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(w,t)(y\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial\psi}{\partial v})+\psi(u,v)(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}).$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(w,t)(x\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial v})+\psi(u,v)(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}).$$

7.2.50　设 $u=u(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解　令 $xy=s,\frac{y}{x}=t$，由链锁法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

上式中的$\frac{\partial u}{\partial s}$,$\frac{\partial u}{\partial t}$仍是中间变量 s、t 的函数,故得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial u}{\partial s})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t})$$

$$=y[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}]-[-\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{y}{x^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial x})]$$

$$=y[y\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}]-[-\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{y}{x^2}(y\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})]$$

$$=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{y}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

注　若$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}$均连续,则对应的两项可合并,原题没有给此条件,故不能合并项.

7.2.51　设 $u=yf(x+y,x^2y)$,其中 f 为二阶连续可导,求$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解　令 $x+y=s$,$x^2y=t$,用链锁求导法则,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y(\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x})=y\frac{\partial f}{\partial s}+2xy^2\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f+y(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y})=f+y\frac{\partial f}{\partial s}+x^2y\frac{\partial f}{\partial t}.$$

求二阶偏导数时应注意上式中的$\frac{\partial f}{\partial s}$及$\frac{\partial f}{\partial t}$都仍是 s、t 的函数,而 s、t 又是 x、y 的函数,故得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\frac{\partial t}{\partial s})$$

$$+2xy\frac{\partial f}{\partial t}+x^2y(\frac{\partial f^2}{\partial s\partial t}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial x})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial t}+y(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s})+2xy\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$+x^2y(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+4xy\frac{\partial f}{\partial t}+y\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+(2xy+x^2y)\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}+2x^3y^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

注　由题设 f 为二阶连续可导,所以$\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}$,故含两个二阶混

合偏导数$\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}$与$\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}$的项可以合并.

7.2.52　设$f(x,y)=(x-a)^{p+1}(y-b)^q+\varphi(x)+\psi(y)$,其中$\varphi(x)$与$\psi(y)$分别是$p$、$q$阶可导函数.求$\frac{\partial^{p+q}f(x,y)}{\partial x^p\partial y^q}$在$(a+1,b)$处的值.

解　求n阶偏导数,要寻找求各阶导数后的规律,然后写出n阶偏导数的一般形式.先求对y的q阶偏导数.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=q(x-a)^{p+1}(y-b)^{q-1}+\psi'(y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=q(q-1)(x-a)^{p+1}(y-b)^{q-2}+\psi''(y),$$

…………

$$\frac{\partial^q f}{\partial y^q}=q(q-1)(q-2)\cdots 1\cdot(x-a)^{p+1}+\psi^{(q)}(y)$$

$$=q!(x-a)^{p+1}+\psi^{(q)}(y),$$

再求对x的p阶偏导数,和上面类似地可得

$$\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}=(p+1)!q!(x-a),$$

将$(a+1,b)$代入上式,得在$(a+1,b)$处的偏导数值为

$$\frac{\partial^{p+q}f(x,y)}{\partial x^p\partial y^q}=(p+1)!q!.$$

7.2.53　设$u=xf(x-y,xy^2)$,其中f具有连续的二阶偏导数,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解　设$x-y=s,xy^2=t$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f+x\frac{\partial f}{\partial s}+xy^2\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$+2xy\frac{\partial f}{\partial t}+xy^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{\partial f}{\partial s}+4xy\frac{\partial f}{\partial t}-x\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+xy(2x-y)\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+2x^2y^3\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

7.2.54　设$u=f(x-y,y-z,t-z)$,求$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}$及$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z\partial t}$.

解 (1) 令 $R=x-y,V=y-z,W=t-z$,则 $u=f(R,V,W)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial R}+\frac{\partial f}{\partial V},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial V}-\frac{\partial f}{\partial W},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial W},$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial R},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial R\partial V},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial R^2\partial V}+\frac{\partial^3 f}{\partial R^2\partial W}-\frac{\partial^3 f}{\partial R\partial V^2}-\frac{\partial^3 f}{\partial R\partial V\partial W},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z\partial t}=\frac{\partial^4 f}{\partial R^2\partial V\partial W}+\frac{\partial^4 f}{\partial R^2\partial W^2}-\frac{\partial^4 f}{\partial R\partial V^2\partial W}-\frac{\partial^4 f}{\partial R\partial V\partial W^2}.$$

7.2.55 若 $z=\frac{1}{x}f(x\cdot y)+yf(x+y)$,其中 f 为二次可微连续函数,试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}f'(x\cdot y)y+f(xy)\frac{-1}{x^2}+yf'(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}[f'(xy)+yf''(xy)x]-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+yf''(x+y)+f'(xy)$$

$$=y[f''(x\cdot y)+f''(x+y)]+f'(x+y).$$

7.2.56 设 $z=f(x+\varphi(y))$,其中 φ 是可微函数,f 是二阶可微函数,求证

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

证 设 $z=f(u),u=x+\varphi(y)$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\varphi'(y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot 1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'(y)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

从而有 $$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\varphi'(y)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial u}\varphi'(u)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

即有 $$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

7.2.57 设函数 $z=F(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arcctg}x,xy)$，其中 F 为二阶可微函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $u=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arcctg}x, v=xy$，则 $z=F(u,v)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=F_u'(u,v)\frac{1}{1+x^2}+F_v'(u,v)y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=(F''_{uu}v_x'+F''_{uv}v_x')\frac{1}{1+x^2}+F_u'\cdot(\frac{1}{1+x^2})'\\&\quad+(F''_{vu}v_x'+F''_{vv}v_x')y\\&=(F''_{uu}\frac{1}{1+x^2}+F''_{uv}y)\frac{1}{1+x^2}+F_u'\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\\&\quad+(F''_{vu}\frac{1}{1+x^2}+F''_{vv}y)y\\&=\frac{1}{(1+x^2)^2}F''_{uu}+\frac{y}{1+x^2}F''_{uv}\\&\quad-\frac{2x}{(1+x^2)^2}F_u'+\frac{y}{1+x^2}F''_{vu}+y^2F''_{vv}\\&=\frac{1}{(1+x^2)^2}F''_{uu}+\frac{y}{1+x^2}F''_{uv}+\frac{y}{1+x^2}F''_{vu}\\&\quad+y^2F''_{vv}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}F_u'.\end{aligned}$$

注 其中 $\frac{y}{1+x^2}F''_{uv}$ 与 $\frac{y}{1+x^2}F''_{vu}$ 一般不能合并为 $\frac{2y}{1+x^2}F''_{uv}$，只有当 F''_{uv} 与 F''_{vu} 连续时，才能合并，本题不具备这个条件.

7.2.58 设 $z=(x^2+y^2)F(\ln\sqrt{x^2+y^2},\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{y}{x})$，其中 F 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad v=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$，则

$$z=(x^2+y^2)F(u,v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xF+(x^2+y^2)[F_u'\cdot u_x'+F_v'\cdot v_x']$$

$$= 2xF + (x^2+y^2)[F_u' \frac{x}{x^2+y^2} + F_v' \frac{-y}{x^2+y^2}],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x[F_u' \frac{y}{x^2+y^2} + F_v' \frac{x}{x^2+y^2}] + 2y[F_u' \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$- F_v' \frac{y}{x^2+y^2}] + (x^2+y^2)[F''_{uu} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+ F''_{uv} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + F_u' \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$- F''_{vu} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} - F''_{vv} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} - F_v' \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}]$$

$$= F_u' \frac{2xy}{x^2+y^2} + F_v' \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + F''_{uu} \frac{xy}{x^2+y^2} + F''_{uv} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$- F''_{vu} \frac{y^2}{x^2+y^2} - F''_{vv} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$= F_u' \frac{2xy}{x^2+y^2} + F_v' \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + F''_{uu} \frac{xy}{x^2+y^2} + F''_{uv} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$- F''_{vv} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

7.2.59 若在偏微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$中，$u$可以表为$r = \sqrt{x^2+y^2}$的函数：$u = f(r)$. 求证：此时偏微分方程可化为常微分方程$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0$，并求出$u = f(r)$的表达式.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{du}{dr}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2}\frac{du}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}\frac{du}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2},$$

同理可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}\frac{du}{dr} + \frac{y^2}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2}$,

故$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$可化为$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0$，再化为$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) = 0$. 解之得$u = c_1 \ln r + c_2$，其中$c_1, c_2$为任意常数.

7.2.60 设$u(x,y)$的二阶偏导数存在，证明：$u(x,y) = f(x) \cdot g(x)$的充要条件是$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$.

解 必要性. 若$u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x)g(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=f(x)g'(y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y),$$

故　$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(x)g(y)f'(x)g'(y)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

充分性. 若 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$，令 $\frac{\partial u}{\partial y}=v$，代入得 $u\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}$，或 $\dfrac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=0\ (u\neq 0)$，亦即 $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{v}{u})=0$，于是有 $\frac{v}{u}=\varphi(y)$，即 $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u}=\varphi(y)$，或 $\frac{\partial}{\partial y}(\ln u)=\varphi(y)$. 故 $\ln u=\int\varphi(y)dy+\psi(x)$，所以

$$u=e^{\int\varphi(y)dy}\cdot e^{\psi(x)}=f(x)g(y).$$

7.2.61　设函数 $u=f(r)$，其中 $r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. 求 $f(r)$ 的表达式.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)(\frac{\partial r}{\partial x})^2+f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$=f''(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

由 x、y、z 的对称性可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

从而有　$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{f''(r)+f'(r)}{x^2+y^2+z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

即　$$f''(r)+f'(r)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=e^{-r},\tag{1}$$

解 $f''(r)+f'(r)=0$，得 $v=c_1+c_2e^{-r}$. 再求(1)的特解，设 $v^*=Are^{-r}$. 代入(1)中求得 $A=-1$，故 $v^*=-re^{-r}$，则(1)的通解为

$$u=c_1+c_2e^{-r}-re^{-r}.$$

所以 $f(r)$ 的表达式为 $f(r)=c_1+c_2e^{-r}-re^{-r}$.

7.2.62　已知 $z = xf(\frac{y}{x}) + 2y\varphi(\frac{x}{y})$，其中 f、φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

(2) 当 $f = \varphi$，且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{x=a} = -by^2$ 时，求 $f(y)$.

(其中 a、b 都是大于零的常数)

解　(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}) + 2\varphi'(\frac{x}{y})$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x}) - \frac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y}).$$

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{x=a} = -\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a}) - \frac{2a}{y^2}\varphi''(\frac{a}{y}) = -by^2$，

因为 $f = \varphi$，则 $f'' = \varphi''$，故

$$-\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{x}) - \frac{2a}{y^2}f''(\frac{a}{y}) = -by^2,$$

令 $y = au$，则 $\frac{u}{a}f''(u) + \frac{a}{au^2}f''(\frac{1}{u}) = a^2bu^2$，即

$$u^3f''(u) + 2f''(\frac{1}{u}) = a^3bu^4. \tag{1}$$

在(1)式中以 $\frac{1}{u}$ 换 u，得

$$\frac{1}{u^3}f''(\frac{1}{u}) + 2f''(u) = a^3b\,\frac{1}{u^4},$$

即　$$2f''(\frac{1}{u}) + 4u^3f''(u) = 2a^3b\,\frac{1}{u}. \tag{2}$$

(1)式减(2)式，得

$$-3u^3f''(u) = a^3b(u^4 - 2u^{-1}),$$

所以　$f''(u) = \frac{a^3b}{3}(\frac{2}{u^4} - u)$.

两边积分，得 $f'(u) = \int \frac{a^3b}{3}(\frac{2}{u^4} - u)du = \frac{a^3b}{3}(-\frac{2}{3}u^{-3} - \frac{u^2}{2}) + c_1'$，

再积分，得 $f(u) = \frac{a^3b}{3}(\frac{1}{3u^2} - \frac{u^3}{6}) + c_1''u + c_2$，

故得　$f(y) = \frac{a^3b}{3}(\frac{a^2}{3y^2} - \frac{y^3}{6a^3}) + c_1'\,\frac{y}{a} + c_2$

$$= \frac{a^5 b}{9} \frac{1}{y^2} - \frac{b}{18} y^3 + c_1 y + c_2.$$

7.2.63 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，且 $f(x,x^2)=1, f_x'(x,x^2)=x$. 求 $f_y'(x,x^2)$.

解 由链锁规则有

$$f_x'(x,x^2) + 2xf_y'(x,x^2) = 0,$$

于是有 $\quad x[1+2f_y'(x,x^2)] = 0.$

因此，当 $x \neq 0$ 时，$f_y'(x,x^2) = -\frac{1}{2}$，再由 f_y' 的连续性，便知恒有

$$f_y'(x,x^2) = -\frac{1}{2}.$$

7.2.64 设 $F(x,y,z) = P(x,y) + Q(x,y)z$，且 $y=y(x), z=z(x)$ 所出现的函数皆为连续可微的，求 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z})$.

解 $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + z(x)\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Q(x,y)$. 所以

$$\frac{d}{dx}[Q(x,y)] = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} y'.$$

于是
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z}) = \frac{\partial P}{\partial y} + z(x)\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} y'$$
$$= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}[z(x) - y'(x)].$$

7.2.65 设 $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$，其中 $\varphi(x+y)$ 及 $\psi(x+y)$ 均有二阶连续偏导数，试证：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

证 令 $x+y=s$，则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + x\varphi_s' + y\psi_s'$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi_s' + \varphi_s' + x\varphi''_{ss} + y\psi''_{ss} = 2\varphi_s' + x\varphi''_{ss} + y\psi''_{ss},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi_s' + x\varphi''_{ss} + \psi_s' + y\psi''_{ss},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi_s' + \psi + y\psi_s',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi''_{ss} + \psi_s' + \psi_s' + y\psi''_{ss} = x\varphi''_{ss} + 2\psi_s' + y\psi''_{ss},$$

所以 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

7.2.66 已知 $u=\varphi(\frac{y}{x})+x\psi(\frac{y}{x})$,求证

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证 先求各阶偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+\psi(\frac{y}{x})+x\varphi'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})$$

$$=-\frac{y}{x^2}\varphi(\frac{y}{x})+\psi(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\psi'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}+x\psi'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\varphi''(\frac{y}{x})+\psi(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{2y}{x^3}\varphi'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}\varphi''(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+\psi'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})$$

$$+\frac{y}{x^2}\psi'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\psi''(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})$$

$$=\frac{2y}{x^3}\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^4}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^3}\psi''(\frac{y}{x}),$$

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x}\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^2}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x}\psi''(\frac{y}{x}).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$=-\frac{1}{x^2}\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}\varphi''(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+\psi''(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})$$

$$=-\frac{1}{x^2}\varphi'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}\varphi''(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}\psi''(\frac{y}{x}),$$

$$2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x}\varphi'(\frac{y}{x})-\frac{2y^2}{x^2}\varphi''(\frac{y}{x})-\frac{2y^2}{x}\psi''(\frac{y}{x}).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})=\frac{1}{x}\varphi''(\frac{y}{x})\frac{1}{x}+\psi''(\frac{y}{x})\frac{1}{x},$$

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x^2}\varphi''(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x}\psi''(\frac{y}{x}).$$

所以 $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

7.2.67 设函数 $u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证明:函数 $v=u(x^2-y^2,2xy)$ 也满足拉普拉斯方程.

证　设 $t=x^2-y^2, s=2xy$，则由已知条件知函数 $u(t,s)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$. 由于 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=2x\frac{\partial u}{\partial t}+2y\frac{\partial u}{\partial s}$.

注意，$\frac{\partial v}{\partial x}$ 的结果中含有变量 x、y、t、s，而 t、s 为中间变量，它们是 x、y 的函数，故

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2\frac{\partial u}{\partial t}+2x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$
$$=2\frac{\partial u}{\partial t}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial u}{\partial t}+2x\frac{\partial v}{\partial s},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2\frac{\partial u}{\partial t}-2y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)+2x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$
$$=-2\frac{\partial u}{\partial t}+4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4xy\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}-4xy\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

所以
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)=0.$$

7.2.68　设函数 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 以及下列条件：$u(x,2x)=x$，$u_x'(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$ 及 $u''_{yy}(x,2x)$.

解　令 $\xi=x-y,\eta=x+y$，则 $x=\frac{\eta+\xi}{2}$，$y=\frac{\eta-\xi}{2}$. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$. 由此可得

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x-y)+\psi(x+y),$$

其中 φ 和 ψ 有二阶连续导数.

由于 $u(x,2x)=x$ 及 $u_x'(x,2x)=x^2$，故

$$\varphi(-x)+\psi(3x)=x, \tag{1}$$
$$u_x'(x,2x)=\varphi'(-x)+\psi(3x)=x^2. \tag{2}$$

对(1)求导，得到

$$-\varphi'(-x)+3\psi'(3x)=1. \tag{3}$$

联立(2)、(3)，解之得

$$\varphi'(-x)=\frac{3x^2-1}{4}.$$

以 x 代替 $-x$ 得

$$\varphi'(x)=\frac{3x^2-1}{4},\quad \varphi(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{1}{4}x+c,$$

$$\psi(3x)=x-\left(-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{4}x+c\right)=\frac{x^3+3x}{4}-c.$$

以 x 代替 $3x$ 得 $\psi(x)=\dfrac{\frac{1}{27}x^3+x}{4}-c$. 故

$$u(x,y)=\varphi(x-y)+\psi(x+y)=\frac{(x-y)^3}{4}-\frac{1}{4}(x-y)+c$$

$$+\frac{\frac{1}{27}(x+y)^3+(x+y)}{4}-c$$

$$=\frac{1}{4}\left[(x-y)^3-(x-y)+\left(\frac{x+y}{3}\right)^3+(x+y)\right].$$

从而可知　$u''_{xx}(x,2x)=u''_{yy}(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x,\ u''_{xy}(x,2x)=\dfrac{5}{3}x.$

7.2.69　若 $f(x,y,z)$ 恒满足关系式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，则 f 称为 k 次齐次函数，证明：k 次齐次函数 $f(x,y,z)$ 满足关系式：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf.$$

证　由 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 可得

$$f(u,v,w)=t^kf(x,y,z), \tag{1}$$

其中 $u=tx,v=ty,w=tz$. 将(1)式两边对 t 求偏导，得

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}=kt^{k-1}f(x,y,z),$$

$$x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}+z\frac{\partial f}{\partial w}=kt^{k-1}f(x,y,z),$$

$$tx\frac{\partial f}{\partial u}+ty\frac{\partial f}{\partial v}+tz\frac{\partial f}{\partial w}=kt^kf(x,y,z),$$

亦即 $tx\dfrac{\partial f}{\partial u}+ty\dfrac{\partial f}{\partial v}+tz\dfrac{\partial f}{\partial w}=kf(tx,ty,tz)$.

令 $tx=X,ty=Y,tz=Z$，则有

$$X\frac{\partial f}{\partial X}+Y\frac{\partial f}{\partial Y}+Z\frac{\partial f}{\partial Z}=kf(X,Y,Z).$$

7.2.70　设函数 $u=f(x,y,z)$，$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$，证明：

(1) 若 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$，则 u 是与 r 无关的函数；

(2) 若 $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x}=\dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y}=\dfrac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z}$，则 u 仅是 r 的函数.

证　(1) $$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0,$$
这表明函数 u 与 r 无关，所以 u 仅是 θ 和 φ 的函数.

(2) $$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$
$$=r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=\frac{r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial u}{\partial x}}{x}+\frac{r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial u}{\partial y}}{y}-\frac{r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}}{z}$$
$$=r^2\left[\frac{\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\frac{\partial u}{\partial z}}{z}-\frac{\sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}}{z}\right]=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$=\frac{-r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}}{x}+\frac{r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}}{y}=0.$$
这表明函数 u 与 θ、φ 无关，所以 u 仅是 r 的函数.

7.2.71　若 x、y 是 s、t 的连续可微函数，s、t 是 u、v 的连续可微函数，证明
$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\cdot\frac{D(s,t)}{D(u,v)}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

证　由雅可比行列式的定义及行列式的乘法规则，有

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\cdot\frac{D(s,t)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v}\\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix};$$

根据假设和链锁法则可知，x、y 对 u、v 的偏导数均存在，且

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

由此可得

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\cdot\frac{D(s,t)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

5. 隐函数及其微分法

(1) 一个方程的情形

7.2.72 设方程 $z^3-3xyz=a^2$ 确定 z 为 x、y 的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^2$，求得

$$F_x'=-3yz,\quad F_y'=-3xz,\quad F_z'=3z^2-3xy.$$

当 $F_z'\neq 0$ 时，由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

解法 2 在方程 $z^3-3xyz=a^2$ 中，把 x、y 看作独立变量，z 是 x、y 的函数，两边对 x 求导，得 $3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3xy\frac{\partial z}{\partial x}-3yz=0$. 由此求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},$$

同理可求得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.$

解法 3　令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^2=0$，两边求微分，得

$$3z^2dz-3yzdx-3xzdy-3xydz=0,$$

即得　$$dz=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy,$$

由全微分公式可得　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$.

7.2.73　设 $z(z^2+3x)+3y=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解法 1　整理得 $z^3+3xz+3y=0$，z 是 x、y 的函数，两边分别对 x、y 求偏导数，得

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3z+3x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-z}{z^2+x},$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+3x\frac{\partial z}{\partial y}+3=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{z^2+x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{-z}{z^2+x}\right)'=\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}(z^2+x)+z(2z\frac{\partial z}{\partial x}+1)}{(z^2+x)^2}$$

$$=\frac{(2z^2-z^2-x)\frac{\partial z}{\partial x}+z}{(z^2+x)^2}=\frac{(z^2-x)\cdot\frac{-z}{(z^2+x)}+z}{(z^2+x)^2}$$

$$=\frac{2xz}{(z^2+x)^3}.$$

同理有　$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2z}{(z^2+x)^3}.$$

所以　$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2z(x-1)}{(z^2+x)^3}.$$

解法 2　在 $z^3+3xz+3y=0$ 两边对 x 求两次偏导数，得

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3z+3x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\tag{1}$$

$$6z(\frac{\partial z}{\partial x})^2+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial x}+3x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

所以有，$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2z(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2+x}.\tag{2}$$

由(1)得　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-z}{z^2+x}$ 代入(2)中，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2z\frac{z^2}{(z^2+x)^2}+2\frac{-z}{z^2+x}=\frac{2xz}{(z^2+x)^3},$$

同理，在原方程中对 y 求两次偏导数，即可求得$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

7.2.74　设 $z=\sqrt{x^2-y^2}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解　令 $F(x,y,z)=\sqrt{x^2-y^2}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}-z$，则

$$F_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{xz}{x^2-y^2}\sec^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$F_y'=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{yz}{x^2-y^2}\sec^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$F_z'=\sec^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}-1,$$

由条件 $\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$，将上式化简为

$$F_x'=-\frac{xz^3}{(x^2-y^2)^2},\quad F_y'=\frac{yz^3}{(x^2-y^2)^2},\quad F_z'=\frac{z^2}{x^2-y^2}.$$

所以　$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{xz}{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-yz}{x^2-y^2}.$$

再对 y 求偏导，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}(x^2-y^2)+2xyz}{(x^2-y^2)^2}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2},$$

同法可求得　$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2 z}{(x^2-y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2 z}{(x^2-y^2)^2}.$$

7.2.75　求由方程 $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ 所确定的隐函数 y 的导数$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解法1　由$\frac{y}{x}=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，显然有$\frac{y}{x}\neq 1$，两端微分得

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

于是有 $d\left(\frac{y}{x}\right)=0$，即 $d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$，故有$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

将上式对 x 求导数，即得 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=0.$

解法 2　令 $F(x,y)=2x\text{arctg}\,\frac{y}{x}-y=0$，则

$$F_x'=2\text{arctg}\,\frac{y}{x}+2x\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=\frac{y}{x}-\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

$$F_y'=2x\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}-1=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

由隐函数求导公式，得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{y}{x}.$$

解法 3　将 y 看成是 x 的函数，由复合函数的求导法有

$$\frac{dy}{dx}=2\text{arctg}\,\frac{y}{x}+2x\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2},$$

整理可得　$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$

7.2.76　设 $x^2+y^2+z^2=a^2$，求 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2},\frac{\partial^2z}{\partial y^2},\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}.$

解　等式两端微分得

$$2xdx+2ydy+2zdz=0, \tag{1}$$

再微分，得 $dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0,$　　(2)

由(1)得　$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy,$

故有　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$

由(2)得　$d^2z=-\frac{1}{z}(dx^2+dy^2+dz^2)$

$$=-\frac{1}{z}dx^2-\frac{1}{z}dy^2-\frac{1}{z}(\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy)^2$$

$$=-\frac{1}{z}(1+\frac{x^2}{z^2})dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{1}{z}(1+\frac{y^2}{z^2})dy^2,$$

故有　$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=-\frac{1}{z}(1+\frac{x^2}{z^2})=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2xy}{z^3}.$$

7.2.77 解下列各题：

(1) 设 $(\cos x)^y=(\sin y)^x$，求$\frac{dy}{dx}$；

(2) 已知 $\int_0^{y^2}e^t dt=\int_0^x \ln\cos t dt$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 (1) 两边取对数，得 $y\ln\cos x=x\ln\sin y$，求导得

$$y'\ln\cos x-y\frac{\sin x}{\cos x}=\ln\sin y+x\frac{\cos y}{\sin y}y',$$

解之，得 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\ln\sin y+y\mathrm{tg}x}{\ln\cos x-x\mathrm{ctg}y}$.

(2) 两边对 x 求导，得 $e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'=\ln\cos x$，由此解得

$$y'=\frac{\ln\cos x}{2ye^{y^2}}.$$

注意：不要遗漏 $2y$ 或 y'.

7.2.78 设方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 应用公式$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F_z'}$.

设 $u=\frac{x}{z}$，$v=\frac{y}{z}$. 注意在求 F_x' 时要把 y、z 看成常数，在求 F_y'、F_z' 时分别把 x、z 及 x、y 看成常数，则 $F_x'=F_u'\cdot u_x'+F_v'v_x'$，而 $u_x'=\frac{1}{z}$，$v_x'=0$，所以有 $F_x'=\frac{1}{z}F_u'$.

同样有 $F_y'=F_u'\cdot u_y'+F_v'\cdot v_y'=\frac{1}{z}F_v'$，

$$F_z'=F_u'u_z'+F_v'v_z'=\frac{-x}{z^2}F_u'-\frac{y}{z^2}F_v',$$

代入公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{zF_u'}{xF_u'+yF_v'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{zF_v'}{xF_u'+yF_v'}.$$

解法 2 两边求导，注意 z 是 x、y 的函数，也就是在求函数 F 对 x 或 y 的偏导数时，z 不能看成常数，而应看成是 x、y 的函数.

方程 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ 两边对 x 求偏导数，得

$$F_u'(\frac{x}{z})_x'+F_v'(\frac{y}{z})_x'=0,$$

即
$$F_u'\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}+F_v'\frac{-y\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=0,$$

由此解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_u'}{xF_u'+yF_v'}.$$

同样可求得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF_v'}{xF_u'+yF_v'}.$$

7.2.79　设 $z(x,y)$ 是由方程 $f(y-x,yz)=0$ 所确定的隐函数，其中函数 f 对各自变量有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $u=y-x, v=yz$，由复合函数的求导法则，将方程 $f(y-x,yz)=0$ 两边对 x 求导，得

$$f_u'u_x'+f_v'v_x'=0,\quad 即\quad -f_u'+f_v'yz_x'=0. \tag{1}$$

(1) 式两端再对 x 求导，得

$$-(f''_{uu}u_x'+f''_{uv}v_x')+(f''_{vu}u_x'+f''_{uv}v_x')yz_x'+f_v'yz''_{xx}=0,$$

$$f''_{uu}-2f''_{uv}yz_x'+f''_{vv}y^2(z_x')^2+f_v'yz''_{xx}=0. \tag{2}$$

从(1) 中解得　$z_x'=\frac{f_u'}{yf_v'}$，代入(2) 得

$$f''_{uu}-2f''_{uv}y\frac{f_u'}{yf_v'}+f''_{vv}y^2\frac{(f_u')^2}{y^2(f_v')^2}+f_v'yz''_{xx}=0,$$

整理可得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{f''_{uu}(f_v')^2-2f''_{uv}f_u'f_v'+f''_{vv}(f_u')^2}{y(f_v')^3}.$$

或直接对 $z_x'=\frac{f_u'}{yf_v'}$ 求导，亦可得出 z''_{xx}.

7.2.80　设 $F(x,y,x-z,y^2-w)=0$，其中 F 具有二阶连续偏导数，且 $F_4\neq 0$，求 $\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.（其中 F_2 表示 F_y'，F_{42} 表示 $F''_{(y^2-w)y}$，其余类似）.

解　所给方程对 y 求导，得

$$F_2+F_4(2y-\frac{\partial w}{\partial y})=0.$$

由此解得 $\frac{\partial w}{\partial y}=2y+\frac{F_2}{F_4}$. 再对 y 求导，得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(F_4)^2}(F_4\frac{\partial F_2}{\partial y} - F_2\frac{\partial F_4}{\partial y}). \tag{1}$$

这里 F_2、F_4 仍然应看作是 x、y 与 z 的复合函数，因而

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = F_{22} + F_{24}(2y - \frac{\partial w}{\partial y}) = F_{22} - F_{24}\frac{F_2}{F_4},$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y} = F_{42} + F_{44}(2y - \frac{\partial w}{\partial y}) = F_{42} - F_{44}\cdot\frac{F_2}{F_4}.$$

代入(1)，整理可得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(F_4)^3}[(F_4)^2F_{22} - 2F_{24}F_2F_4 + (F_2)^2F_{44}].$$

本题所给方程的左端是用一般形式的函数关系表示的. 一般说来，由它所确定的函数，既是隐函数又是复合函数. 因此在求解这些问题时，重要的是要分辨清楚自变量、中间变量、隐函数以及它是通过怎样的复合关系隐含在方程之中的，搞清了这些，问题就迎刃而解了.

7.2.81 设 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$，且 F 二阶可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导数(分别用 F_1'，F_2'，表示 F'_{x+y+z}，$F'_{x^2+y^2+z^2}$，其余类似)，得

$$F_1'(1+\frac{\partial z}{\partial x}) + F_2'(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}) = 0,$$

于是 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1' + 2xF_2'}{F_1' + 2zF_2'}. \tag{1}$$

(1) 式两端对 y 求偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= -\frac{1}{(F_1'+2zF_2')^2}\{(F_1'+2zF_2')[(F_1')_y' + 2x(F_2')_y'] \\ &\quad - (F'+2xF_2')[(F_1')_y' + 2z(F_2')_y' + 2z_y'F_2']\} \\ &= -\frac{1}{(F_1'+2zF_2')^2}\{2(x-z)F_1'(F_2')_y' \\ &\quad + 2(z-x)F_2'(F_1)_y' - 2[F_1'F_2' + x(F_2')^2]z_y'\} \\ &= -\frac{2(x-z)}{(F_1'+2zF_2')^2}\{F_1'\cdot(F_2')_y' - F_2'\cdot(F_1')_y'\} \\ &\quad - \frac{2F_2'(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')}{(F_1'+2zF_2')^3}.\end{aligned}$$

现在分别求 $(F_1')_y'$ 及 $(F_2')_y'$：

$$(F_1')_y' = F''_{11}(1+z_y') + F''_{12}(2y + 2zz_y'),$$

$$(F_2')'_y = F''_{21}(1 + z_y') + F''_{22}(2y + 2zz_y').$$

注意到 $1 + z_y' = \dfrac{2(z-y)F_2'}{F_1' + 2zF_2'}$，$2y + 2zz_y' = \dfrac{2(y-z)F_1'}{F_1' + 2zF_2'}$，

即得　$F_1'(F_2')_y' - F_2' \cdot (F_1')'_y$

$$= F_1'F''_{21}\frac{2(z-y)F_2'}{F'_1 + 2zF_2'} + F_1'F''_{22}\frac{2(y-z)F_1'}{F_1' + 2zF_2'}$$

$$- F_2'F''_{11}\frac{2(z-y)F_2'}{F'_1 + 2zF_2'} - F_2'F''_{12}\frac{2(y-z)F_1'}{F_1' + 2zF_2'}$$

$$= \frac{2(y-z)}{F_1' + 2zF_2'}\{(F_1')^2F''_{22} - 2F_1'F_2'F''_{12} + (F_2')^2F''_{11}\}$$

于是　$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1' + 2zF_2')^3}\{(F_1')^2F''_{22} - 2F_1'F_2'F''_{12} + (F_2')^2F''_{11}\}. - \frac{2F_2'(F_1' + 2xF_2')(F_1' + 2yF_2')}{(F_1' + 2zF_2')^3}.$$

7.2.82　设 $F(x, x+y, x+y+z) = 0$，且 F 二阶可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　等式两端分别对 x 及 y 求偏导数，得

$$F_1' + F_2' + F'_3 \cdot (1 + \frac{\partial z}{\partial x}) = 0, \quad F_2' + F'_3(1 + \frac{\partial z}{\partial y}) = 0.$$

于是　$$\frac{\partial z}{\partial x} = -(1 + \frac{F_1' + F'_2}{F_3'}), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -(1 + \frac{F_2'}{F'_3}).$$

再将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(F_3')^2}\{F_3'[F''_{11} + F''_{12} + F''_{13}(1 + \frac{\partial z}{\partial x}) + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23}(1 + \frac{\partial z}{\partial x})] - (F_1' + F_2')[F''_{31} + F''_{32} + F''_{33}(1 + \frac{\partial z}{\partial x})]\}.$$

将 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 代入并化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(F_3')^2}\{(F_3')^2(F''_{11} + 2F''_{12} + F''_{22}) - 2(F_1' + F_2')F_3'(F''_{13} + F''_{23}) + (F_1' + F_2')^2F''_{33}\}.$$

7.2.83 设 $F(xz,yz)=0$，且 F 二阶可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端对 x 求偏导数，得

$$F_1'(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'y\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$，将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 再对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF_1'+yF_2')^2}\{(xF_1'+yF_2')[F_1'\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$+z(F''_{11}(z+\frac{\partial z}{\partial x}x)+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x})]-[F_1'+x(F''_{11}\cdot(z+x\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$+F''_{12}y\frac{\partial z}{\partial x})+y(F''_{21}(z+x\frac{\partial z}{\partial x})+F''_{22}y\frac{\partial z}{\partial x})]zF_1'\}.$$

把 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入并化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(xF_1'+yF_2')^3}\{y^2z^2[(F_1')^2F''_{22}-2F_1'F_2'F''_{12}$$
$$+(F_2')^2F''_{11}]-2z(F_1')^2(xF_1'+yF_2')\}.$$

7.2.84 证明：由方程 $\Phi(x-az,y-bz)=0$ (1)
(其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u,v 的任意可微分函数，a 和 b 是常数) 所定义的函数 $z=z(x,y)$ 是方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解，并说明曲面(1)的几何性质.

解 由于 $\Phi_1'\cdot(1-a\frac{\partial z}{\partial x})-b\Phi_2'\frac{\partial z}{\partial x}=0$,

$$-\Phi_1'a\frac{\partial z}{\partial y}+\Phi_2'(1-b\frac{\partial z}{\partial y})=0,$$

故有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\Phi_1'}{a\Phi'_1+b\Phi_2'}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}$.

将上面两个等式依次乘以 a、b，然后相加，即得

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

这就说明 $z=z(x,y)$ 是方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解.

等式 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-1=0$ 表示曲面(1)上任一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_1},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_1},-1\right\}$ 皆与向量 $\boldsymbol{r}_1=\{a,b,1\}$ 垂直，过点 P_1 作

平行于 r_1 的直线 l_1：

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1},$$

易知 l_1 上的点皆在柱面(1) 上，于是曲面(1) 是母线平行于 r_1 的柱面.

7.2.85　证明：由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \qquad (1)$$

（其中 $\Phi(u)$ 是变量 u 的任意可微函数，a、b 和 c 为常数）所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$. 并说明曲面(1) 的几何性质.

解　由于　$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})$,

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'-(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}).$$

故有　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}$,

将上面两个等式依次乘以 $(cy-bz)$ 及 $(az-cx)$，然后相加，即得

$$\begin{aligned}&(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}\\&=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}\\&=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay,\end{aligned}$$

本题获证.

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 是曲面(1) 上任意一点，并记 $r_3=\{a,b,c\}$. 由于曲面(1) 在 P_3 点的法向量为 $n_3=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_3},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_3},-1\right\}$，故由方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0$$

知，$n_3\perp(p_3\times r_3)$，其中 $P_3=\{x_3,y_3,z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d，即 $x_3^2+y_3^2+z_3^2=d^2$，考虑平面

$$\text{I}:\quad ax+by+cz=d$$

和过点 P_3 的球面 S：$x^2+y^2+z^2=d^2$，并设平面 I 与球面 S 的交线为 c，则

1) 由点 P_3 在曲面(1) 上可知

$$ax_3+by_3+cz_3=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2),$$

即 $d=\Phi(d^2)$. 这表明曲线c上的点的坐标皆满足方程(1),即曲线c位于曲面(1) 上.

2) 由 Ⅰ 为平面,S 为球面可知,交线 c 为一圆周曲线.

3) 圆c的圆心Q即为由原点到平面 Ⅰ 的垂足,故Q点位于过原点且与平面 Ⅰ 垂直的直线l上.

综上所述,可见曲面(1) 是以直线

$$l:\qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

为旋转轴的旋转曲面.

7.2.86　函数$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$所给出,证明:

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

证　由于 $2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\frac{z}{y})\frac{\partial z}{\partial x}$,故有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}.$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2+z^2-zf'(\frac{z}{y})}{2yz-yf'(\frac{z}{y})}$, 于是

$$\begin{aligned}&(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}\\&=\frac{2xy(y^2+z^2-x^2)+2xy(x^2-y^2+z^2-zf')}{y(2z-f')}\\&\quad=\frac{2xyz(2z-f')}{y(2z-f')}=2xz.\end{aligned}$$

7.2.87　设$u=e^{x+y}$,其中y是由方程$y-\frac{1}{2}\sin y=x$所确定的x的函数,求u对x的全导数$\frac{du}{dx}$及$\frac{d^2u}{dx^2}$.

解　这是复合函数的隐函数求导问题,设$\varphi(x,y)=y-\frac{1}{2}\sin y-x=0$,由隐函数求导公式有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}=\frac{2}{2-\cos y},\qquad \frac{du}{dx}=e^{x+y}+e^{x+y}\frac{2}{2-\cos y},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=e^{x+y}+e^{x+y}\frac{2}{2-\cos y}+(e^{x+y}+e^{x+y}\frac{2}{2-\cos y})\frac{2}{2-\cos y}$$

$$+e^{x+y}\frac{-2\sin y\frac{2}{2-\cos y}}{(2-\cos y)^2}$$

$$=\frac{e^{x+y}[(4-\cos y)^2(2-\cos y)-4\sin y]}{(2-\cos y)^2}.$$

7.2.88　设$u=f(x,y,z)$，$z=\varphi(x,y)$，其中f、φ具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

解　设$\xi=x,\eta=y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f_\eta'+f_z'\varphi_y',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=(\frac{\partial f_\eta'}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f_\eta'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial f_\eta'}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x})$$

$$+(\frac{\partial f_z'}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f_z'}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial f_z'}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x})\varphi_y'+f_z'\frac{\partial \varphi_y'}{\partial x},$$

$$=f''_{\eta\xi}+f''_{\eta z}\varphi_x'+(f''_{z\xi}+f''_{zz}\varphi_x')\varphi_y'+f_z'\varphi''_{yx}.$$

又因$\xi=x,\eta=y$，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=f''_{yx}+f''_{yz}\varphi_x'+(f''_{zx}+f''_{zz}\varphi_x')\varphi_y'+f_z'\varphi''_{yx}$$

$$=f''_{xy}(1+\varphi_x')+(f''_{zx}+f''_{zz}\varphi'_x)\varphi_y'+f'_z\varphi''_{yx}.$$

7.2.89　设函数$u=f(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，又$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，　求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x})+(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y})\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\tag{2}$$

而$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

代入(1)、(2)式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}+(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{y}{x^2+y^2})\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.$$

7.2.90　设 $z=z(x,y)$ 由 $F(x+z,y+z)=0$ 确定，且 $F(u,v)$ 二阶可微，试求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $u=x+z,v=y+z$，由于 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x+z,y+z)=0$ 确定的隐函数. 所以这个方程的左端是由 $F(u,v)$ 与 $u=x+z,v=y+z$ 以及 $z=z(x、y)$ 复合而成的 x、y 的复合函数. 于是对方程 $F(u,v)=0$ 及 $u=x+z,v=y+z$ 关于 x 求导，得

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

由此可得　$\frac{\partial F}{\partial u}(1+\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,$

由上式解得　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}}.$

必须注意，上式右端的两个偏导数仍然是 u,v 的函数，而 u、v 又分别是 x、y、z 的函数，且 z 又是 x、y 的函数. 由复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u})(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v})+\frac{\partial F}{\partial u}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial v})]}{(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v})^2}$$

$$=\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial v})-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u})}{(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v})^2}$$

$$=\frac{\frac{\partial F}{\partial u}(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x})-\frac{\partial F}{\partial v}(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x})}{(\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial u})^2},$$

将$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial x}$代入上式，并整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(\frac{\partial F}{\partial u})^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-(\frac{\partial F}{\partial v})^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}}{(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v})^3},$$

若对复合函数求导十分熟悉，且引进 F_1'，F_2' 分别代替 $\frac{\partial F}{\partial u}$，$\frac{\partial F}{\partial v}$，$F''_{11}$，$F''_{12}$，$F''_{22}$ 分别代替 $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}$，$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$，则简洁的书写方式为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(F_1')^2\cdot F''_{22}+2F_1'F_2'F''_{12}-(F_2')^2F''_{11}}{(F_1'+F_2')^3}.$$

7.2.91　设 $w=f(x,y,u)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，u 由方程 $u^5-5xy+5u=1$ 确定．求 $\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$．

解　w 是 x、y、u 的函数，而 u 是由方程 $u^5-5xy+5u=1$ 所确定的 x、y 的隐函数，所以本题是隐函数的复合函数求偏导数的问题．

将方程 $u^5-5xy+5u=1$ 两端对 x 求导数，得 $5u^4u_x'-5y+5u_x'=0$ 从而解得 $u_x'=\frac{y}{1+u^4}$，故

$$w_x'=f_1'+f_3'u_x'=f_1'+f_3'\frac{y}{1+u^4}.$$

在上式对 x 求导数时，应注意其中的 f_1'，f_3' 仍是 x、y、u 的函数．而 u 又是 x、y 的函数，故

$$\begin{aligned}w''_{xx}&=f''_{11}+f''_{13}u_x'+(f''_{31}+f''_{33}u_x')\frac{y}{1+u^4}+y\cdot f_3'\cdot\frac{-4u^3u_x'}{(1+u^4)^2}\\&=f''_{11}+\frac{yf''_{13}}{1+u^4}+\frac{yf''_{31}}{1+u^4}+\frac{y^2f''_{33}}{(1+u^4)^2}+\frac{-4u^3y^2f_3'}{(1+u^4)^3}\\&=f''_{11}+\frac{2yf''_{13}}{1+u^4}+\frac{y^2f''_{33}}{(1+u^4)^2}-\frac{4u^3y^2f_3'}{(1+u^4)^3}.\end{aligned}$$

7.2.92　设 $z=z(x,y)$，且有 $yz+zx+xy=1$，试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

解　将方程 $yz+zx+xy=1$ 两边分别对 x、y 求偏导，得

$$(y+x)\frac{\partial z}{\partial x}+z+y=0,$$

$$(y+x)\frac{\partial z}{\partial y}+z+x=0.$$

故　$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}.$$

将上面第一式两边分别对 x、y 求偏导数，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(y+x)(\frac{\partial z}{\partial y}+1)-(y+z)}{(x+y)^2}=\frac{2z}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(y+z)}{(x+y)^2}=\frac{2(y+z)}{(x+y)^2}.$$

7.2.93　已知 $f(x,y,z)=x^3y^2z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定的隐函数，求 $f_x'(-1,0,1)$.

解　本题是隐函数的复合函数求偏导数的问题.

将 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 两边对 x 求导，得

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

由此解得　$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz-3x^2}{3z^2-3xy}.$$

又　$$f_x'(x,y,z)=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\cdot\frac{yz-x^2}{z^2-xy},$$

故　$$f_x'(-1,0,1)=0+0\cdot\frac{-1}{1}=0.$$

7.2.94　设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 及 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，(＊)

(1) 设 $z=z(x,y)$ 是由(＊)所定义的隐函数；

(2) 设 $y=y(x,z)$ 是由(＊)所定义的隐函数，

分别求 $f_x'(1,1,1)$.

解　f 是 x、y、z 的函数，而 z 和 y 又是 x、y 和 x、z 的函数，所以在(1)中把 z 看成中间变量，在(2)中把 y 看成中间变量.

(1) $f_x'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=y^2z^3+3xy^2z^2\cdot z_x'$

为了求 z_x'，对(＊)两边求导，得

$$2x+2zz_x'-3yz-3xyz_x'=0,\quad z_x'=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy},$$

故　$$f_x'=y^2z^3+3xy^2z^2\cdot\frac{3yz-2x}{2z-3xy},\quad f_x'(1,1,1)=1-3=-2.$$

(2) 用同样方法可得 $f_x'(1,1,1)=-1$.

7.2.95　设 $x=e^v+u^3$，$y=e^u-v^3$，求其反函数的偏导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

解　用复合函数求导的链锁法则对 x 求偏导，得

$$1 = e^v v_x' + 3u^2 u_x', \tag{1}$$
$$0 = e^u u_x' - 3v^2 v_x'. \tag{2}$$

由两式可解得

$$e^u = (e^{u+v} + 9u^2v^2)v_x',$$

(顺便也可看出,雅可比行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 处处不为 0),从而有

$$v_x' = e^u(e^{u+v} + 9u^2v^2)^{-1}.$$

7.2.96　已知函数 $f(x,y,z) = x^3y^2z$ 及方程

$$x + y + z - 3 + e^{-3} = e^{-(x+y+z)}, \tag{1}$$

(1) 如果 $x = x(y,z)$ 是由方程(1) 确定的隐函数;求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}$;

(2) 如果 $z = z(x,y)$ 是由方程(1) 确定的隐函数,求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}$.

解　(1) 依题意,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 为 $f[x(y,z),y,z]$ 对 y 的偏导数,故有

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z\frac{\partial x}{\partial y} + 3x^2yz, \tag{2}$$

因为(1) 式确定 x 为 y,z 的隐函数,所以在(1) 式对 y 求导数时应将 z 看成常量,从而有

$$\frac{\partial x}{\partial y} + 1 = -e^{-(x+y+z)}\left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right),\text{或}\ \left(\frac{\partial x}{\partial y} + 1\right)(e^{-(x+y+z)} + 1) = 0.$$

故有 $\dfrac{\partial x}{\partial y} = -1$,将此代入(2) 式,得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2y^2z + 2x^3yz,$$

所以
$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)} = -3 + 2 = -1.$$

(2) 同(1) 一样求得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz + x^3y^2\frac{\partial z}{\partial y},$$

把(1) 式对 y 求导,将 x 看成常量,可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$,故有

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz - x^3y^2,$$

所以
$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)} = 2 - 1 = 1.$$

7.2.97　设 $u = f(z)$,其中 z 是由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 所定义的 x 和

y 的隐函数，$f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 均可微. 求证：$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$.

证 由 $z=x+y\varphi(z)$，及 $\frac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$，有

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'(z)}$，又 $u=f(z)$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'(z)}{1-y\varphi'(z)},\tag{1}$$

又由 $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)+y\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y}$，有 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}$，

故
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(z)\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}.\tag{2}$$

比较(1)、(2) 得，$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$.

7.2.98 证明：由方程组

$$\begin{cases}x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha),\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)\end{cases}$$

(其中 $\alpha=\alpha(x,y)$ 为参变数，$f(\alpha)$ 为任意可微分的函数) 所定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程式

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=z^2.$$

证 方程 $x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha)$ 两端对 x 求偏导数，得

$$\cos\alpha-x\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+y\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

把 $-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha)$ 代入上式，即得

$$\cos\alpha+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial\alpha}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial z}{\partial\alpha}=-z\cos\alpha,\tag{1}$$

同法可求得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-z\sin\alpha.\tag{2}$$

将(1),(2) 两式平方，然后相加，即得 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=z^2$.

7.2.99 设 $z=x^2+y^2$，其中 $y=y(x)$ 为由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 所定义的函数，求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 先由 $x^2-xy+y^2=1$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$2x-y-xy'+2yy'=0,$$

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0. \tag{1}$$

于是， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$，　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3} = \dfrac{6}{(x - 2y)^3}$.

再求$\dfrac{dz}{dx}$及$\dfrac{d^2z}{dx^2}$，

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2yy' = 2x + 2y \cdot \frac{2x - y}{x - 2y} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y},$$

将上式对 x 求导，并由(1)式得

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 + 2y'^2 + 2yy'' = 2y' + xy'',$$

将 y'，y'' 代入，得

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2(2x - y)}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^3}.$$

7.2.100　若 $u = f(x,y,z)$，又 $g(x,y,z) = 0$ 和 $h(x,y) = 0$，其中 f、g 和 h 均可微，且 $h_y' g_z' \neq 0$，试求$\dfrac{du}{dx}$.

解　因函数 $h(x,y)$ 可微，且 $h_y' \neq 0$，所以由 $h(x,y) = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$，且有 $y'(x) = -\dfrac{h_x'}{h_y'}$. (1)

将上述的 $y(x)$ 代入 $g(x,y,z) = 0$，得 $g[x,y(x),z] = 0$，又由 $g(x,y,z) = 0$ 可微，且 $g_z' \neq 0$，故存在 $z = z(x)$，且有

$$g_x' + g_y' y'(x) + g_z' \frac{dz}{dx} = 0, \tag{2}$$

故

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{g_x' + g_y' y'(x)}{g_z'}. \tag{3}$$

将(1)代入(3)，得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{h_x' g_y' - g_x' h_y'}{h_y' g_z'}, \tag{4}$$

再将上述的 $y(x)$，$z(x)$ 代入 $u = f(x,y,z)$，得 $u = f[x,y(x),z(x)]$. 由于 f 可微，故

$$\frac{du}{dx} = f_x' + f_y' y'(x) + f_z' z'(x) \tag{5}$$

将(1)、(4)两式代入(5)式中，得

$$\frac{du}{dx} = f_x' - \frac{h_x' f_y'}{h_y'} + \frac{(h_x' g_y' - g_x' h_y')}{h_y' g_z'} f_z'.$$

7.2.101　设函数 $z = z(x,y)$ 满足方程 $F(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}) = 0$，证

明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

证　令 $u=x+\frac{z}{y}, v=y+\frac{z}{x}$，将方程分别对 x,y 求导，得

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial F}{\partial v}(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2})=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2})+\frac{\partial F}{\partial v}(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y})=0.$$

从上面两式解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}},$$

故有

$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{(\frac{z}{x}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}-x\frac{\partial F}{\partial u})+(\frac{z}{y}\frac{\partial F}{\partial u}-y\frac{\partial F}{\partial v})}{\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}}\\&=\frac{z(x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v})-xy(x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v})}{x\frac{\partial F}{\partial u}+y\frac{\partial F}{\partial v}}\\&=z-xy.\end{aligned}$$

7.2.102　设由 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$，确定 $z=f(x,y)$，其中 f,F 均有二阶连续偏导数. 证明：

(1) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$；

(2) $(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})=0$.

证　(1) 因 $F_1'(\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'(-\frac{y}{z^2})\frac{\partial z}{\partial x}=0$,

$$F_1'(-\frac{x}{z^2})\frac{\partial z}{\partial y}+F_2'(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y})=0.$$

所以　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$.

上面两式分别乘以 x 和 y 然后相加，即可得证.

(2) 利用(1)将 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ 分别对 x 及 y 求偏导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad 即\ x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y},\quad 即\ x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

再将上面第一式乘以 y 加第二式乘以 x，即可得证.

注　若先求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$再整理，则计算较繁.

7.2.103　设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x、y 的函数，其中 f、F 都具有一阶连续偏导数. 证明：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法 1　此题实际上是求由方程组$\begin{cases}F(x,y,t)=0,\\ y-f(x,t)=0.\end{cases}$所确定的 $y=Y(x)$ 及 $t=T(x)$ 中前一个函数的导数，对方程组关于 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dx}=0,\\ \frac{dy}{dx}-\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dx}=0.\end{cases}$$

消去$\frac{dt}{dx}$得，　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法 2　可以不借助方程组，直接用隐函数求导法，令 $Q(x,y,t)=y-f(x,t)=0$，则

$Q_x=-\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$(视 t 是 x,y 的函数)，$Q_y=1-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$，

于是　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{Q_x}{Q_y}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}}{1-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}}.\tag{1}$$

(1) 式中的$\frac{\partial t}{\partial x},\frac{\partial t}{\partial y}$可由 $F(x,y,t)=0$ 求出. 即有

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_t}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}},\quad \frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_t}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}},$$

代入(1)式即可得证.

证法 3 用全微分法证明,视 $t=t(x,y)$,则

$$y=f(x,t)=f[x,t(x,y)],$$

对此等式微分得

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial t}dt, \tag{2}$$

式中的 dt 可由 $F(x,y,t)=0$ 确定,对它微分得

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial t}dt=0. \tag{3}$$

由(3)式解出 dt,代入(2)式并整理即可得证.

证法 4 用复合函数的链锁法则求导,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

将 $\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$, $\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}$ 代入并整理即可得证.

7.2.104 设 $z=z(x,y)$ 是由 $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$ 定义的函数,其中 $\varphi(u)$ 可微,a, b, c 是常数,证明:$z=z(x,y)$ 是方程 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$ 的解.

证 方程两端对 x、y 求偏导,并将 z 看成是 x、y 的函数 $z=z(x,y)$,得

$$a+c\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{2}$$

由(1)、(2)解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-a+2x\varphi'}{c-2z\varphi'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-b+2y\varphi'}{c-2z\varphi'}.$$

于是 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}$

$$= \frac{(cy - bz)(-a + 2x\varphi') + (az - cx)(-b + 2y\varphi')}{c - 2z\varphi'}$$

$$= \frac{(bx - ay)(c - 2z\varphi')}{c - 2z\varphi'} = bx - ay.$$

7.2.105　设 $z(x,y)$ 是由方程 $f(y - x, yz) = 0$ 所确定的隐函数，其中函数 f 对各变量具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $u = y - x, v = yz$，则方程为 $f(u,v) = 0$，将其两端对求 x 导，得

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

即 $\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$，故 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial v}}$. 再对 x 求偏导，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y}\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{y\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}\left\{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial f}{\partial v} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial f}{\partial u}\right\}$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}{y\frac{\partial f}{\partial v}} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{y\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^3}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

7.2.106　证明：由方程 $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ 所定义的隐函数 $z = z(x,y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证　将 $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ 对 x 及 y 分别求导，得

$$0 = \varphi(z) + x\varphi'\frac{\partial z}{\partial x} + \psi'\frac{\partial z}{\partial x},\quad 1 = x\varphi'\frac{\partial z}{\partial y} + \psi'\frac{\partial z}{\partial y}.$$

整理得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi(z)}{x\varphi' + \psi'}$,　$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x\varphi' + \psi'}$，故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial y}. \tag{1}$$

将此式再分别对 x 及 y 求导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\varphi'\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\varphi(z)\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\varphi'(z)(\frac{\partial z}{\partial y})^2-\varphi(z)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\tag{3}$$

(2) 乘$(\frac{\partial z}{\partial y})^2$减(3) 乘$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$,并利用关系式(1) 即可得证.

7.2.107 设 $z=f(x,y),\varphi(x,y)=0$,其中 f 和 φ 对 x,y 具有二阶连续偏导数,且 $\varphi_y'\neq 0$,求 z 对 x 的二阶导数

解 $\frac{dz}{dx}=f_x'+f_y'\frac{dy}{dx}=f_x'-\frac{f_y'\varphi_x'}{\varphi_y'}$,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(f_x')-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_y'\varphi_x'}{\varphi_y'})$$

$$=f_{xx}''+f_{xy}''\frac{dy}{dx}-\frac{\varphi_y'\frac{d}{dx}(f_y'\varphi_x')-f_y'\varphi_x'\frac{d}{dx}(\varphi_y)}{(\varphi_y')^2}$$

$$=f_{xx}''-f_{xy}''\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}-\frac{\varphi_y'f_y'[\varphi_{xx}''+\varphi_{xy}''(-\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'})]}{(\varphi_y')^2}$$

$$-\frac{\varphi_y'\varphi_x'[f_{yx}''+f_{yy}''(-\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'})]}{(\varphi_y')^2}+\frac{1}{(\varphi_y')^2}[f_y'\varphi_x'(\varphi_{yx}''-\frac{\varphi_{yy}''\varphi_x'}{\varphi_y'})]$$

$$=\frac{1}{(\varphi_y')^3}[f_{xx}''(\varphi_y')^3-2f_{xy}''\varphi_x'(\varphi_y')^2-f_y'(\varphi_y')^2\varphi_{xx}''$$

$$+2\varphi_y'\varphi_x'f_y'\varphi_{xy}''+(\varphi_x')^2\varphi_y'f_{yy}''-f'_y(\varphi_x')^2\varphi_{yy}''].$$

7.2.108 证明:当 $1+xy=k(x-y)$(式中 k 为常数)时,

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

证 将等式 $1+xy=k(x-y)$ 两端微分,得

$$xdy+ydx=k(dx-dy),$$

故 $(x-y)(xdy+ydx)=k(x-y)(dx-dy)=(1+xy)(dx-dy)$,

化简即得 $$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

7.2.109 证明:若 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$,则当 $xy>0$ 时,

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

证 将所给等式两端微分,得

$$2xy^2dx + 2x^2ydy + 2xdx + 2ydy = 0$$

即
$$x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0. \tag{1}$$

由 $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ 可解得

$$x = \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\quad y = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \tag{2}$$

因为 $xy > 0$,故知 x,y 应同时取正号或同时取负号,不论取什么符号,当用(2) 式代入(1) 式后均可得到

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

7.2.110　证明:由方程 $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ 所定义的隐函数 $z = z(x,y)$ 满足方程 $(\frac{\partial z}{\partial y})^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + (\frac{\partial z}{\partial x})^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

证　记 $\frac{\partial z}{\partial x} = p,\ \frac{\partial z}{\partial y} = q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$

将所给方程两端分别对 x 和 y 逐次求偏导数,得

$$\varphi(z) + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]p = 0,$$
$$[x\varphi'(z) + \psi'(z)]q = 1; \tag{*}$$
$$2\varphi'(z)p + [x\varphi''(z) + \psi''(z)]p^2 + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]r = 0,$$
$$\varphi'(z)q + [x\varphi''(z) + \psi''(z)]pq + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]s = 0,$$
$$[x\varphi''(z) + \psi''(z)]q^2 + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]t = 0,$$

将后三个式子依次乘以 q^2,$(-2qp)$ 及 p^2,然后相加,并注意到 $x\varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$(因为(*)式),即得

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0,$$

此即所要证明的方程.

7.2.111　设函数 $z = z(x,y)$ 由隐函数 $\frac{x}{z} = \varphi(\frac{y}{z})$ 所确定,其中 φ 二阶可微,证明:$z(x,y)$ 满足关系式 $z_{xx}''z_{yy}'' - (z_{xy}'')^2 = 0$.

证　$\frac{x}{z} = \varphi(\frac{y}{z})$ 两边分别对 x,y 求导,得

$$\frac{z - x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = \varphi'(\frac{y}{z})(-\frac{y}{z^2})\frac{\partial z}{\partial x},\quad -\frac{x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = \varphi'(\frac{y}{z})\frac{z - y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}.$$

由此解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x-y\varphi'(\frac{y}{z})};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z\varphi'(\frac{y}{z})}{y\varphi'(\frac{y}{z})-x},$$

而 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{[x-y\varphi'(\frac{y}{z})]\frac{\partial z}{\partial x}}{[x-y\varphi'(\frac{y}{z})]^2}-\frac{z[1-y\varphi''(\frac{y}{z})(-\frac{y}{z^2})\frac{\partial z}{\partial x}]}{[x-y\varphi'(\frac{y}{z})]^2}$$

$$=\frac{-y^2\varphi''(\frac{y}{z})}{[x-y\varphi'(\frac{y}{z})]^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{[y\varphi'(\frac{y}{z})-x]\cdot[\varphi'(\frac{y}{z})\frac{\partial z}{\partial y}+z\varphi''(\frac{y}{z})\frac{z-y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}]}{[x-y\varphi'(\frac{y}{z})]^2}$$

$$-\frac{z\varphi'(\frac{y}{z})[\varphi'(\frac{y}{z})+y\varphi''(\frac{y}{z})\frac{z-y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}]}{[y\varphi'(\frac{y}{z})-x]^2}.$$

整理得 $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x^2\varphi''(\frac{y}{z})}{[x-y\varphi'(\frac{y}{z})]^3},$$

同理可得 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy\varphi''(\frac{y}{z})}{[x-y\varphi''(\frac{y}{z})]^3}.$$

故 $z_{xx}''z_{yy}''-(z_{xy}'')^2=0$.

7.2.112 设 $u=\varphi(\frac{y}{x})+x\psi(\frac{y}{x})$,其中 φ 与 ψ 是任给的二次连续可微函数,证明:$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+\psi(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\psi'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(\frac{y}{x})\frac{1}{x}+\psi'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x^4}+\varphi'(\frac{y}{x})\frac{2y}{x^3}+\psi''(\frac{y}{x})\frac{y^2}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(\frac{y}{x})\frac{1}{x^2}+\psi''(\frac{y}{x})\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^3})+\varphi'(\frac{y}{x})(-\frac{1}{x^2})-\frac{y}{x^2}\psi''(\frac{y}{x}).$$

将上面三式分别乘以 x^2、y^2、$2xy$，然后相加，即得

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

7.2.113　设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 dz 及 d^2z.

解　对 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 两端求微分，得

$$\frac{1}{z}dx-\frac{x}{z^2}dz=\frac{y}{z}(-\frac{z}{y^2})dy+\frac{y}{z}\frac{1}{y}dz,$$

即 $\frac{zdx-xdz}{z}=\frac{ydz-zdy}{y}$，由此解得 $dz=\frac{z(ydx-zdy)}{y(z+x)}$.　　(1)

由(1)可得 $(x+z)dz=zdx+\frac{z^2}{y}dy$，再微分，得

$$(dx+dz)dz+(x+z)d^2z=dzdx+\frac{2z}{y}dzdy-\frac{z^2}{y^2}dy^2,$$

整理得

$$\begin{aligned}(x+z)d^2z&=-dz^2+\frac{2z}{y}dydz-\frac{z^2}{y^2}dy^2=-(dz-\frac{z}{y}dy)^2\\&=-\frac{z^2[(ydx+zdy)-(x+z)dy]^2}{y^2(x+z)^2}\\&=-\frac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^2},\end{aligned}$$

于是，$d^2z=-\frac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$.

7.2.114　设 $u=u(x,y,z)$，$\varphi(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$，证明：$\frac{1}{x}u_x'+\frac{1}{y}u_y'+\frac{1}{z}u_z'=\frac{1}{u}$.

证　设 $\alpha=u^2-x^2,\beta=u^2-y^2,\gamma=u^2-z^2$，故

$$\varphi(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

于是　$\varphi_\alpha'\alpha_x'+\varphi_\beta'\beta_x'+\varphi_\gamma'\gamma_x'$

$$= \varphi_\alpha'(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}) + \varphi_\beta'(\frac{\partial\beta}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}) + \varphi_\gamma'(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x})$$
$$= \varphi_\alpha'(2uu_x' - 2x) + \varphi_\beta'(2uu_x') + \varphi_\gamma'(2uu_x') = 0,$$

即 $\frac{1}{x}u_x'(\varphi_\alpha' + \varphi_\beta' + \varphi_\gamma') = \frac{1}{u}\varphi_\alpha'.$

同样可得 $\frac{1}{y}u_y'(\varphi_\alpha' + \varphi_\beta' + \varphi_\gamma') = \frac{1}{u}\varphi_\beta',$

$$\frac{1}{z}u_z'(\varphi_\alpha' + \varphi_\beta' + \varphi_\gamma') = \frac{1}{u}\varphi_\gamma'.$$

将三式相加，得

$$(\frac{1}{x}u_x' + \frac{1}{y}u_y' + \frac{1}{z}u_z')(\varphi_\alpha' + \varphi_\beta' + \varphi_\gamma') = \frac{1}{u}(\varphi_\alpha' + \varphi_\beta' + \varphi_\gamma')$$

即 $\frac{1}{x}u_x' + \frac{1}{y}u_y' + \frac{1}{z}u_z' = \frac{1}{u}.$

7.2.115 已知 $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1$，证明

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0, \ (xy > 0).$$

证 将方程 $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1$ 两边求全微分，得

$$2xy^2dx + 2yx^2dy + 2xdx + 2ydy = 0,$$

整理得 $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0,$ (1)

由 $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1$ 有 $1 - x^2 = y^2(1+x^2)$，

于是 $1 - x^4 = y^2(1+x^2)^2$，从而 $y(1+x^2) = \pm\sqrt{1-x^4}$， (2)

同样可得 $x(1+y^2) = \pm\sqrt{1-y^4}.$ (3)

由 $xy > 0$，有 $xy(1+x^2)(1+y^2) > 0$，于是(2)、(3) 式右边的符号应相同，代入方程(1) 时由于右端为 0，不妨在根号前面同取"+"号，则有

$$\sqrt{1-y^4}dx + \sqrt{1-x^4}dy = 0,$$

所以 $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

7.2.116 已知 $z = z(u)$，且 $u = \varphi(u) + \int_y^x p(t)dt$，其中 $z(u)$ 可微，$\varphi'(u)$ 存在，且 $\varphi'(u) \neq 1$，$p(t)$ 连续，求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x} + p(x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 z 是 u 的函数，而 u 又是 x, y 的函数(以隐函数形式给出)，所以 u 是中间变量.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_u'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x),$$

即　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{p(x)}{1-\varphi_u'(u)}$（在求$\left(\int_y^x p(x)dt\right)'$时，$y$看成常数），所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{p(x)}{1-\varphi_u'(u)}.$$

同理　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{-p(y)}{1-\varphi_u'(u)}.$

于是 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{1}{1-\varphi'_u(u)}[p(y)p(x)-p(x)p(y)]=0.$

注　因 $z=z(u)$，z 不显含 x 和 y，所以

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$，而不是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$，而不是 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7.2.117　求由 $2xz-2xyz+\ln(xyz)=0$ 确定的函数 $z=f(x,y)$ 的全微分.

解法 1　方程两边对 x 求偏导数，得

$$2z+2xz_x'-2yz-2xyz_x'+\frac{1}{xyz}(yz+xyz_x')=0.$$

故 $z_x'=-\dfrac{z}{x}$，同样可得 $z_y'=\dfrac{(2xyz-1)z}{y[1-\ln(xyz)]}$，于是

$$dz=-\frac{z}{x}dx+\frac{(2xyz-1)z}{y[1-\ln(xyz)]}dy.$$

解法 2　由全微分形式不变性有

$$2(xdz+zdx)+2(xydz+xzdy+yzdx)+\frac{dx}{x}+\frac{1}{y}dy+\frac{1}{z}dz=0,$$

由此解得　$dz=-\dfrac{z}{x}dx+\dfrac{(2xyz-1)z}{y[1-\ln(xyz)]}dy.$

(2) 方程组的情形

7.2.118　设 u、v 为 x、y 的隐函数，它们由方程组 $\begin{cases}u^2-v+x=0\\u+v^2-y=0\end{cases}$ 确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解法 1　直接用公式，设

$$F(x,y,u,v)=u^2-v+x,\ G(x,y,u,v)=u+v^2-y,$$

则 $$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & 2v\end{vmatrix}=4uv+1,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2v\end{vmatrix}=2v,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 2v\end{vmatrix}=-1,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2u.$$

代入公式,即得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\frac{-2v}{4uv+1},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=\frac{1}{4uv+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\frac{1}{4uv+1},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=\frac{2u}{4uv+1}.$$

解法 2 公式一般不易记,多采用下述方法,将 u、v 看成 x、y 的函数,分别将方程两端对 x 求导数,得方程组

$$\begin{cases}2u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}+1=0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}+0=0.\end{cases}$$

解此方程组,可得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2v}{4uv+1}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4uv+1}$.

同理,分别将方程两端对 y 求导数,得方程组

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}+0=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}+1=0. \end{cases}$$

解此方程组，可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4uv+1},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u}{4uv+1}.$$

7.2.119　若 u、v 是由方程组 $x=u\cos\dfrac{v}{u}$，$y=u\sin\dfrac{v}{u}$ 所确定的 x、y 的反函数. 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解法 1　设 $F(x,y,u,v)=u\cos\dfrac{v}{u}-x=0$，$G(x,y,u,v)=u\sin\dfrac{v}{u}-y=0$. 于是 u、v 就可看成由上面方程组所确定的隐函数，由隐函数求导的方法，将方程组分别对 x、y 求导（这里要注意，u、v 是 x、y 的函数），可得

$$\begin{cases} \cos\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\sin\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{1}{u^2}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=1, \\ \sin\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cos\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{1}{u^2}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0. \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \cos\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\sin\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{1}{u^2}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial y}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \\ \sin\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{1}{u^2}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial y}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=1. \end{cases}$$

上面两个线性方程组具有相同的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -\sin\dfrac{v}{u} \\ \sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & \cos\dfrac{v}{u} \end{vmatrix}=\cos^2\frac{v}{u}+\sin^2\frac{v}{u}\neq 0,$$

解这两个方程组就得到所求的结果：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{vmatrix} 1 & -\sin\dfrac{v}{u} \\ 0 & \cos\dfrac{v}{u} \end{vmatrix}=\cos\frac{v}{u},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\begin{vmatrix} 0 & -\sin\dfrac{v}{u} \\ 1 & \cos\dfrac{v}{u} \end{vmatrix}=\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & 1\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & 0\end{vmatrix}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\begin{vmatrix}\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & 0\\ \sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & 1\end{vmatrix}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}.$$

解法 2 对原题所给方程的两端分别求微分，得

$$\begin{cases}dx=\cos\frac{v}{u}du-\frac{1}{u}\sin\frac{v}{u}(udv-vdu),\\ dy=\sin\frac{v}{u}du+\frac{1}{u}\cos\frac{v}{u}(udv-vdu).\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}(\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u})du-\sin\frac{v}{u}dv=dx,\\ (\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u})du+\cos\frac{v}{u}dv=dy.\end{cases}$$

从上面线性方程组中解出 du、dv，可得

$$\begin{cases}du=\cos\frac{v}{u}dx+\sin\frac{v}{u}dy,\\ dv=(\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u})dx+(\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u})dy.\end{cases}$$

与微分式

$$\begin{cases}du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\\ dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\end{cases}$$

比较，可得$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$同解法 1.

7.2.120 已知函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases}x=\text{ch}u\cos v,\\ y=\text{sh}u\sin v\end{cases}$$

确定，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 将原方程组对 x 求导数，得

$$\begin{cases} \mathrm{sh}u\cos u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{ch}u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ \mathrm{ch}u\sin u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{sh}u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

所以，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{sh}u\cos v}{\mathrm{sh}^2u\cos^2v + \mathrm{ch}^2u\sin^2v}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\mathrm{ch}u \cdot \sin v}{\mathrm{sh}^2u\cos^2v + \mathrm{ch}^2u\sin^2v}, \tag{2}$$

将方程(1)对 x 求偏导，并利用(1)、(2)的结果，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{sh}u\mathrm{ch}u(\mathrm{ch}^2u\sin^2v - \mathrm{sh}^2u\cos^2v + 2\sin^2v\cos^2v)}{(\mathrm{sh}^2u\cos^2v + \sin^2v\mathrm{ch}^2u)^3}.$$

7.2.121 $y = y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x = 3t^3 + 2t + 3, \\ e^y\sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

解 y 与 x 的函数关系是通过两个方程表示的. 如果从其中一个方程解出 t，代入另一个方程，即可得到 y 与 x 的一个关系式，这样做既麻烦又没有必要，而把 t 看作中间变量，直接用复合函数的求导公式比较简便.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dt}\right)'_x \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2}$$

现求 $\dfrac{dt}{dx}\Big|_{t=0}$，$\dfrac{d^2t}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

第一个方程两边对 x 求导，得 $\quad 1 = 6t\dfrac{dt}{dx} + 2\dfrac{dt}{dx}$， (1)

再求一次导数，得 $\quad 0 = 6\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2 + 6t\dfrac{d^2t}{dx^2} + 2\dfrac{d^2t}{dx^2}$， (2)

当 $t = 0$ 时，由(1)得 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2}$，由(2)得 $\dfrac{d^2t}{dx^2} = -\dfrac{3}{4}$.

再求 $\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}$. 第二个方程对 t 求导，得

$$e^y\frac{dy}{dt}\sin t + e^y\cos t - \frac{dy}{dt} = 0. \tag{3}$$

再对 t 求导数，得

$$e^y(\frac{dy}{dt})^2\sin t + e^y\frac{d^2y}{dt^2}\sin t + 2e^y\frac{dy}{dt}\cos t - e^y\sin t - \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \tag{4}$$

当$t=0$时，由第二个方程得$y=1$，代入(3)得，$e-\frac{dy}{dt}=0$，即$\frac{dy}{dt}=e$.

再把$t=0, y=1, \frac{dy}{dt}=e$代入(4)，得$\frac{d^2y}{dt^2}=2e^2$.

把$\frac{dt}{dx}|_{t=0}=\frac{1}{2}$，$\frac{d^2t}{dx^2}|_{t=0}=\frac{-3}{4}$，$\frac{dy}{dt}|_{t=0}=e$，$\frac{d^2y}{dt^2}|_{t=0}=2e^2$，代入$\frac{d^2y}{dx^2}$的表达式中，得

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{dx^2}|_{t=0} &= \frac{d^2y}{dt^2}|_{t=0}(\frac{dt}{dx}|_{t=0})^2 + \frac{dy}{dt}|_{t=0}\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} \\ &= 2e^2(\frac{1}{2})^2 + e\frac{-3}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4}e = \frac{e(2e-3)}{4}.\end{aligned}$$

7.2.122 在xoy平面上怎样的区域内，方程组

$$\begin{cases} x = u + v, & (1) \\ y = u^2 + v^2, & (2) \\ z = u^3 + v^3 & (3) \end{cases}$$

可定义z为x、y的函数？(其中参数u、v取一切可能的实数值)并求$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由(1)、(2)式得$2y-x^2=(u-v)^2\geqslant 0$，即$y\geqslant\frac{x^2}{2}$. 故在$y\geqslant\frac{x^2}{2}$的区域内$z$可定义为$x,y$的函数.

由(1)，有$(u+v)^2=x^2$，即$u^2+2uv+v^2=x^2$，

由(2)，有$uv=\frac{1}{2}(x^2-y)$，代入(3)得

$$\begin{aligned} z &= u^3+v^3 = (u+v)(u^2-uv+v^2) \\ &= x[y-\frac{1}{2}(x^2-y)] = \frac{3}{2}xy - \frac{1}{2}x^3. \end{aligned}$$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{2}(y-x^2)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}x$.

7.2.123 设函数组$\begin{cases} u = f(x,y), \\ g(x,y,z) = 0, \\ h(x,z) = 0 \end{cases}$

确定 u 是 x 的函数，且 $h_z' \neq 0, g_y' \neq 0$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解　由 $h(x,z)=0$ 和 $h_z' \neq 0$ 可得 $\frac{dz}{dx}=-\frac{h_x'}{h_z'}$，再由 $h(x,z)=0$，$g(x,y,z)=0$ 和 $g_y' \neq 0$ 确定 y 是 x 的函数，且 $g_x' + g_y' \frac{dy}{dx} + g_z' \frac{dz}{dx} = 0$，将 $\frac{dz}{dx}=-\frac{h_x'}{h_z'}$ 代入得 $\frac{dy}{dx}=\frac{h_x' g_z' - h_z' g_x'}{g_y' h_z'}$，于是

$$\frac{du}{dx}=f_x'+f_y'\frac{dy}{dx}=\frac{f_x' g_y' h_z' + f_y'(h_x' g_z' - h_z' g_x')}{g_y' h_z'}.$$

7.2.124　设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 有连续偏导数，且 $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$，求 $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

解　将 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 对 u 求偏导数，则有方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=1, \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=0. \end{cases}$$

因为 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$，则方程组有唯一解.

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

同理，将 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 对 v 求偏导数，解方程组可得

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

故 $$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

7.2.125　设 $u = u(x,y)$ 由方程组 $u = f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t) = 0$，$h(z,t) = 0$ 所确定，其中 f,g,h 为连续可微函数，且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$，求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解　由全微分基本定理得

$$du = f_x' dx + \left[f_y' - \frac{1}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}} g_y' (f_z' h_t' - f_t' h_z')\right] dy,$$

由此不难得到　$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y' - g_y' \cdot \frac{\partial(f,h)}{\partial(z,t)} \Big/ \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,t)}.$$

7.2.126　设 $u = u(x,y,z)$，$v = v(x,y,z)$ 连续可微，$x = x(s,t)$，$y = y(s,t)$，$z = z(s,t)$ 连续可微. 证明：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}.$$

证　记 $U = (u,v)$，$X = (x,y,z)$，$S = (s,t)$，则有 $\frac{dU}{dS} = \frac{dU}{dX}\cdot\frac{dX}{dS}$，再由行列式的柯西定理，即有

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{11} & b_{21} \end{vmatrix}.$$

将 $\frac{dU}{dX}$ 及 $\frac{dX}{dS}$ 的行列式代入即可得证.

7.1.127　设方程 $x = \varphi(u,v)$，$y = \psi(u,v)$，$z = \omega(u,v)$ 定义 z 为 x、y 的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　对 x 求偏导数，得

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{3}$$

由(1) 及(2) 解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\tag{4}$$

其中 $I=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. 再将(4) 的结果代入(3),即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u})=-\frac{\frac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(u,v)}}{I}.$$

同理可得　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v})=-\frac{\frac{\partial(\varphi,\omega)}{\partial(u,v)}}{I}.$

7.2.128　已知 $u=f(x,y,z,t)$ 关于各个变量都可导,而其中由方程组

$$\begin{cases}y^2+yz-zt^3=0,\\ te^z+z\cdot\sin t=0\end{cases}\tag{1}$$

确定 z、t 为 y 的函数,试求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解　容易求得,$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy},\tag{2}$$

对方程组(1) 分别在等式两端关于 y 求导,整理得

$$\begin{cases}2y+z=(t^3-y)\frac{dz}{dy}+3t^2z\frac{dt}{dy},\\ 0=(te^z+\sin t)\frac{dz}{dy}+(e^z+z\cos t)\frac{dt}{dy}.\end{cases}\tag{3}$$

解此方程组得$\frac{dz}{dy}=\frac{I_1}{I}$,　$\frac{dt}{dy}=\frac{I_2}{I}$. 其中,

$$I=\begin{vmatrix} t^3-y & 3t^2z \\ te^z+\sin t & e^z+z\cos t \end{vmatrix},\quad I_1=\begin{vmatrix} 2y+z & 3t^2z \\ 0 & e^z+z\cos t \end{vmatrix},$$

$$I_2=\begin{vmatrix} t^3-y & 2y+z \\ te^z+\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

代入(2)式，得$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_1}{I}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{I_2}{I}\frac{\partial f}{\partial t}$.

7.2.129 设$x=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$, $y=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}$, $z=\frac{1}{u^3}+\frac{1}{v^3}+e^x$，求$\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 本题看起来函数关系比较复杂，但只需将z、x、u，看作是自变量v、y的函数，按隐函数求导的三种方法即可求出结果.

解法1 设$F=x-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}$, $G=y-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}$,

$$H=z-\frac{1}{u^3}-\frac{1}{v^3}-e^x,$$

代入隐函数求导公式，经整理后即可得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(v,x,u)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,x,u)}}=\frac{3}{uv^3}-\frac{3}{v^4}+\frac{u-v}{v^3}e^x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,x,u)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,x,u)}}=\frac{3}{2u}+\frac{u}{2}e^x.$$

解法2 对已知方程的两端分别求微分，得

$$dz=-\frac{3}{u^4}du-\frac{3}{v^4}dv+e^xdx,\ dx=-\frac{1}{u^2}du-\frac{1}{v^2}dv,$$

$$dy=-\frac{2}{u^3}du-\frac{2}{v^3}dv.$$

从后两式解出$du=-(\frac{u}{v})^3dv-\frac{u^3}{2}dy$, $dx=\frac{u-v}{v^3}dv+\frac{u}{2}dy$，代入第一式，再经整理后得

$$dz=(\frac{3}{uv^3}-\frac{3}{u^4}+\frac{u-v}{v^3}e^x)dv+(\frac{3}{2u}+\frac{u}{2}e^x)dy,$$

故得 $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{3}{uv^3}-\frac{3}{v^4}+\frac{u-v}{v^3}e^x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2u}+\frac{u}{2}e^x$.

解法3 将原方程组分别对v、y求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial v}=-\dfrac{3}{u^4}\dfrac{\partial u}{\partial v}-\dfrac{3}{v^4}+e^x\dfrac{\partial x}{\partial v},\\ 0=-\dfrac{2}{u^3}\dfrac{\partial u}{\partial v}-\dfrac{2}{v^3},\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial u}{\partial v}-\dfrac{1}{v^2}.\end{cases}\quad 及\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{3}{u^4}\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^x\dfrac{\partial x}{\partial y},\\ 1=-\dfrac{2}{u^3}\dfrac{\partial u}{\partial y},\\ \dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}.\end{cases}$$

从两个方程组中分别求得

$$\frac{\partial u}{\partial v}=-(\frac{u}{v})^3,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u-v}{v^3},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{3}{uv^3}-\frac{3}{v^4}-\frac{u-v}{v^3}e^x,$$

及 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{u^3}{2},\quad \dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{u}{2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{2u}+\dfrac{u}{2}e^x.$

7.2.130 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2, x+y+z=2$，求$\frac{dx}{dz}$、$\frac{dy}{dz}$、$\frac{d^2x}{dz^2}$、$\frac{d^2y}{dz^2}$在 $x=1,y=-1,z=2$ 点的值.

解 把z看成自变量，y、x看成是z的函数，它们的函数关系由方程组给定，对 z 求导数，得

$$\begin{cases}2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}=z, & (1)\\ \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0. & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(\dfrac{dx}{dz})^2+2x\dfrac{d^2x}{dz^2}+2(\dfrac{dy}{dz})^2+2\dfrac{d^2y}{dz^2}=1, & (3)\\ \dfrac{d^2x}{dz^2}+\dfrac{d^2y}{dz^2}=0. & (4)\end{cases}$$

将 $x=1,y=-1,z=2$ 代入(1)，(2) 式，解得

$$\frac{dx}{dz}=0,\quad \frac{dy}{dz}=-1.$$

将上述结果及 x、y、z 值联同(4) 式所决定的式子$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}$一起代入(3) 式，即得

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4},\quad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

7.2.131 设 $xu-yv=0, yu+xv=1$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 将上面两方程微分，得

$$\begin{cases} xdu - ydv = vdy - udx, \\ ydu + xdv = -udy - vdx. \end{cases}$$

于是有

$$du = \frac{1}{x^2 + y^2}[-(xu + yv)dx + (xv - yu)dy],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}.$$

同法可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

7.2.132　设 $u + v = x + y, \dfrac{\sin u}{\sin v} = \dfrac{x}{y}$，求 du、dv、d^2u、d^2v.

解　将原式改写为 $\begin{cases} u + v = x + y, \\ y\sin u = x\sin v, \end{cases}$ 微分得

$$\begin{cases} du + dv = dx + dy, & (1) \\ \sin udy + y\cos udu = \sin vdx + x\cos vdv. & (2) \end{cases}$$

联立求解，得

$$du = \frac{(\sin v + x\cos v)dx - (\sin u - x\cos v)dy}{x\cos v + y\cos u},$$

$$dv = \frac{(y\cos u - \sin v)dx + (\sin u - y\cos u)dy}{x\cos v + y\cos u}.$$

对(1)，(2) 式再微分一次，得

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ y\cos ud^2u + 2\cos udydu - y\sin udu^2 \\ \qquad = x\cos vd^2v + 2\cos vdxdv - x\sin vdv^2. \end{cases}$$

联立求解，得

$$d^2u = \frac{(2\cos vdx - x\sin vdv)dv - (2\cos vdy - y\sin udu)du}{x\cos v + y\cos u},$$

$$d^2v = -d^2u.$$

7.2.133　设 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解法 1　对已知方程的两边求微分，得

$$dx = \cos vdu - u\sin vdv, \quad dy = \sin vdu + u\cos vdv.$$

联立求解，得

$$du = \cos vdx + \sin vdy, \quad dv = \frac{1}{u}(-\sin vdx + \cos vdy).$$

$$udv = -\sin v dx + \cos v dy.$$

对上式再微分一次，并利用 du 的结果，得

$$ud^2v + dudv = -\cos v dv dx - \sin v dv dy = -dudv,$$

于是，$d^2z = d^2v = -\dfrac{2}{u}dudv$

$$= -\frac{2}{u^2}(\cos v dx + \sin v dy)\cdot(-\sin v dx + \cos v dy)$$

$$= \frac{2}{u^2}(\sin v\cos v dx^2 - \cos 2v dxdy - \sin v\cos v dy^2),$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\sin v\cos v}{u^2} = \frac{\sin 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

解法 2　消去 u, v，由 $z = v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

7.2.134　设 $z = z(x,y)$ 是由方程组 $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}, z = uv$（$u$ 及 v 为参数）所定义的函数，求当 $u = 0$ 及 $v = 0$ 时的 dz 及 d^2z.

解　$dx = e^{u+v}(du + dv),\quad dy = e^{u-v}(du - dv),$

$$dz = udv + vdu,\quad d^2z = ud^2v + 2dudv + vd^2u.$$

当 $u = v = 0$ 时，$dx = du + dv, dy = du - dv, dz = 0$，由此可得

$$du = \frac{dx+dy}{2},\quad dv = \frac{dx-dy}{2},$$

故　$$d^2z = 2dudv = \frac{1}{2}(dx^2 - dy^2).$$

7.2.135　证明：由方程组

$$\begin{cases}[z - f(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2), & (1)\\ [z - f(\alpha)]f'(\alpha) = \alpha x^2 & (2)\end{cases}$$

所定义的函数 $z = z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$，（其中 α 是 x, y 的函

数).

证 (1) 两端分别对 x,y 求偏导数,得

$$[z-f(\alpha)][\frac{\partial z}{\partial x}-f'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x}]=x(y^2-\alpha^2)-x^2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad (3)$$

和
$$[z-f(\alpha)]\cdot[\frac{\partial z}{\partial y}-f'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}]=x^2(y-\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y}). \quad (4)$$

将(2)式代入(3)式并整理,得

$$[z-f(\alpha)]\frac{\partial z}{\partial x}=x(y^2-\alpha^2), \quad (5)$$

将(2)式代入(4)式并整理,得

$$[z-f(\alpha)]\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y. \quad (6)$$

(5)、(6)式相乘,再利用(1)式,即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

7.2.136 设 $e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}$,求 du、dv、d^2u、d^2v 当 $x=1$、$y=1$、$u=0$、$v=\frac{\pi}{4}$ 时的表达式.

解 设 $\xi=\frac{u}{x}$, $\eta=\frac{u}{y}$,则原方程组化为

$$e^{\xi}\cos\eta=\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\xi}\sin\eta=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

解之,得
$$\xi=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{2}, \quad \eta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

$$d\xi=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}, \quad d\eta=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

$$du=\xi dx+xd\xi, \quad dv=\eta dy+yd\eta.$$

当 $x=1$、$y=1$、$u=0$、$v=\frac{\pi}{4}$ 时,$\xi=0$,$\eta=\frac{\pi}{4}$,

$$d\xi=\frac{dx+dy}{2}, \quad d\eta=\frac{dy-dx}{2}, \quad du=\frac{dx+dy}{2},$$

$$dv=\frac{\pi}{4}dy+\frac{dy-dx}{2}=-\frac{1}{2}dx+(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})dy.$$

$$d^2\xi=\frac{[dx(x^2+y^2)-(xdx+ydy)2x]dx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+\frac{[dy(x^2+y^2)-(xdx+ydy)2y]dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)-2(xdx+ydy)^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2\eta=\frac{[dy(x^2+y^2)-(xdy-ydx)2x]dx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$+\frac{[-dx(x^2+y^2)-(xdy-ydx)2y]dy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{-2(xdy-ydx)(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2u=d(\xi dx)+d(xd\xi)=2d\xi dx+xd^2\xi,$$

$$d^2v=d(\eta dy)+d(yd\eta)=2d\eta dy+yd^2\eta.$$

当 $x=1$、$y=1$、$u=0$、$v=\frac{\pi}{4}$，$\xi=0$，$\eta=\frac{\pi}{4}$ 时，

$$d^2\xi=\frac{2(dx^2+dy^2)-2(dx+dy)^2}{4}=-dxdy,$$

$$d^2\eta=\frac{-2(dy-dx)(dx+dy)}{4}=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2),$$

故 $$d^2u=dx^2+dxdy-dxdy=dx^2,$$

$$d^2v=dy^2-dxdy+\frac{1}{2}(dx^2-dy^2)=\frac{1}{2}(dy-dx)^2.$$

7.2.137　设 $u=f(ax,by,cz)$，求 d^nu.

解　设 $\xi=ax,\eta=by,\zeta=cz$，则 $d\xi=adx,d\eta=bdy,d\zeta=cdz$，

$$d^i\xi=d^i\eta=d^i\zeta=0,\ (i\geqslant 2).$$

故

$$d^nu=(d\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+d\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+d\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta})^nf(\xi,\eta,\zeta)$$

$$=(adx\frac{\partial}{\partial\xi}+bdy\frac{\partial}{\partial\eta}+cdz\frac{\partial}{\partial\zeta})^nf(\xi,\eta,\zeta).$$

6.变量代换

7.2.138　把 y 看作自变量，变换方程 $y'y'''-3y''^2=x$.

解　函数 $y=y(x)$ 的各阶导函数 $y',y'',y''',\cdots$ 与其反函数 $x=x(y)$ 的各阶导函数 $x',x'',x''',\cdots$ 间有以下关系：

$$y'=\frac{1}{x'},\tag{1}$$

$$y''=(y')'=(\frac{1}{x'})'_y\cdot y_x'=-\frac{x''}{x'^2}\cdot\frac{1}{x'}=-\frac{x''}{(x')^3},\tag{2}$$

$$y''' = (y'')' = -\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]'_t \cdot y_x' = \frac{3(x'')^2 - x'x''}{(x')^5}, \quad (3)$$

把(1)、(2)、(3) 式代入所给方程，化简整理即得

$$x''' + x(x')^5 = 0.$$

7.2.139 设 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}, v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，把方程 $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 变换为自变量 u, v 的方程.

解 由 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}, v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ 得，$x = e^u\cos v, y = e^u\sin v$.

则 $$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}e^u\cos v + \frac{\partial z}{\partial y}e^u\sin v = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}. \quad (1)$$

同理有 $$\frac{\partial z}{\partial v} = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}. \quad (2)$$

(1) − (2) 得

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = (x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

在所给变换之下，原方程变换为

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

7.2.140 取 x 作函数，$t = xy$ 作自变量，变换方程

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$$

解 将 $t = t(x)$ 看作 x 的函数，在 $t = xy$ 两端对 x 求导数，得

$\frac{dt}{dx} = y + xy'$，由于 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$，故得 $y' = \frac{1 - y\frac{dx}{dt}}{x\frac{dx}{dt}}$. 又 $\frac{d^2t}{dx^2} = 2y' + xy''$，

由于 $\frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3}$，代入得 $-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3} = 2y' + xy''$，

整理得 $y'' = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x(\frac{dx}{dt})^3} - \frac{2y'}{x}$. 将上式代入所给方程，得

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+xy\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0,$$

即
$$\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0.$$

7.2.141　利用变量代换 $t=\ln|x|$,变换常微分方程 $y'''=\frac{6y}{x^3}$.

解　应用复合函数求导公式,有

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}}{x^2},$$

$$y'''=\frac{1}{x^4}\left[x^2\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}-2x\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right],$$

将 y''' 代入所给方程,即得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{dy}{dt}=6y.$$

7.2.142　利用 $x=\cos t$,变换微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0.$$

解　注意到 $\frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t,$　　(1)

由
$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2},\qquad(2)$$

注意到 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}},\ \frac{d^2t}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$,有

$$y'' = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3}. \qquad (3)$$

将(1)代入(2)、(3)式有

$$y' = -\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t},\quad y'' = \frac{-\sin t\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + \cos t\cdot\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y', y'' 及 x 代入所给方程,即得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$$

7.2.143　利用 $x = e^t, y = ue^{2t}$ 变换微分方程 $x^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0$,其中 $u = u(t)$.

解　$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{2t}(2u + u')}{e^t} = e^t(2u + u'),$$

$$y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t(u'' + 3u' + 2u)}{e^t} = e'' + 3u' + 2u.$$

其中 u' 及 u'' 表示 u 对 t 的一阶及二阶导数,以下各题类似,不再说明.

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程,化简整理,得

$$u'' + (u + 3)u' + 2u = 0.$$

7.2.144　利用 $x = \operatorname{tg} t, y = \frac{u}{\cos t}$ 变换微分方程 $(1 + x^2)^2y'' = y$,其中 $u = u(t)$.

解　$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{u'\cos t + u\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = u'\cos t + u\sin t,$$

$$y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{u''\cos t + u\cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = (u'' + u)\cos^3 t.$$

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程,整理即得 $u'' = 0$.

7.2.145　利用 $x=\text{th}t, y=\dfrac{u}{\text{ch}t}$ 变换微分方程 $(1-x^2)^2y''=-y$，其中 $u=u(t)$.

解

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{u'\text{ch}t-u\text{sh}t}{\text{ch}^2t}}{\frac{1}{\text{ch}^2t}}=u'\text{ch}t+u\text{sh}t,$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{u''\text{ch}t-u\text{ch}t}{\frac{1}{\text{ch}^2t}}=(u''-u)\text{ch}^3t.$$

将 y'' 及 x,y 代入所给方程，化简整理即得 $u''=0$.

7.2.146　利用 $x=u+t, y=u-t$ 变换微分方程

$$y''+(x+y)(1+y')^3=0.$$

解

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{u'-1}{u'+1},$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{u''(u'+1)-u''(u'-1)}{(u'+1)^2}}{u'+1}=\frac{2u''}{(u'+1)^3}.$$

将 y',y'' 及 x,y 代入所给方程，化简整理即得 $u''+8u(u')^3=0$.

7.2.147　利用 $x=\dfrac{1}{t}$ 及 $y=\dfrac{u}{t}$（其中 $u=u(x)$）变换微分方程

$$y'''-x^3y''+xy'-y=0.$$

解

$$y'=\frac{\frac{u't-u}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}}=u-tu',\quad y''=\frac{-tu''}{-\frac{1}{t^2}}=t^3u'',$$

$$y'''=\frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2u''+t^3u'''}{-\frac{1}{t^2}}=-t^4(3u''+tu''')$$

将 y',y'',y''' 及 x,y 代入所给方程，化简整理即得

$$t^5u'''(3t^4+1)u''+u'=0.$$

7.2.148 利用 $u=\frac{y}{x-b}$, $t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$,变换斯托克斯方程

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

(其中 $u=u(t)$).

解 由于 $t=\ln|x-a|-\ln|x-b|$,故有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{(x-a)(x-b)},$$

即
$$\frac{dx}{dt}=\frac{(x-a)(x-b)}{a-b}. \tag{1}$$

又因 $u=\frac{y}{x-b}$,故 $y=u(x-b)$,

$$y'=(x-b)\frac{du}{dx}+u=(x-b)\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}+u=\frac{(a-b)u'}{x-a}+u, \tag{2}$$

$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(a-b)u''}{x-a}+u'-\frac{(a-b)u'}{(x-a)^2}\frac{dx}{dt}]$$

$$\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}=\frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}. \tag{3}$$

将(3)式代入所给方程,即得 $u''-u'=\frac{Au}{(a-b)^2}\quad(a\neq b)$.

7.2.149 证明:若方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 用代换 $x=\varphi(\xi)$ 变换为方程 $\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0$,则

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)]\cdot[Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}$$
$$=[2p(x)\cdot q(x)+q'(x)]\cdot[q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

证 $\frac{dx}{d\xi}=\varphi'(\xi)$, $\frac{d^2x}{d\xi^2}=\varphi''(\xi)$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}}=\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\varphi'(\xi)}$,

在 7.2.142 题的(3)式中,将 t 换成 ξ,即有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{[\varphi'(\xi)]^2}\cdot\frac{d^2y}{d\xi^2}-\frac{\varphi''(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^3}\frac{dy}{d\xi},$$

代入原方程，两端同乘以$[\varphi'(\xi)]^2$，即得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\{P[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)-\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)}\}\frac{dy}{d\xi}+q[\varphi(\xi)]\cdot[\varphi'(\xi)]^2y=0.$$

于是，
$$P(\xi)=p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'},\ Q(\xi)=q\cdot(\varphi')^2;$$
$$Q'(\xi)=q'\cdot(\varphi')^3+2q\varphi'\varphi''.$$

从而得知

$$\begin{aligned}&[2p(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)]\cdot[Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}\\&=\{2(p\varphi'-\frac{\varphi''}{\varphi'})q\cdot(\varphi')^2+q'\cdot(\varphi')^2+2q\varphi'\varphi''\}[q\cdot(\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}}\\&=[2pq\cdot(\varphi')^3+q'\cdot(\varphi')^3]q^{-\frac{3}{2}}(\varphi')^{-3}\\&=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

7.2.150　将方程式$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$变为极坐标$r$与$\varphi$所表示的方程(即令$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$).

解　当$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$时，有

$$\frac{dx}{d\varphi}=\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi,\quad\frac{dy}{d\varphi}=\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi,$$
$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=\cos\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\cos\varphi,$$
$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}=\sin\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi.$$

于是，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi},\tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}\cdot\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{(\frac{dx}{d\varphi})^3}=\frac{r^2+2(\frac{dr}{d\varphi})^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi)^3}.\tag{2}$$

将(1)式及x、y代入所给方程，化简整理即得

$$\frac{dr}{d\varphi}=r\text{ 或 }r'=r.$$

以下各题中，$\frac{dr}{d\varphi}$及$\frac{dr}{d\varphi^2}$均简记为r'及r''.

7.2.151　把式子 $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}$ 变换为极坐标的形式.

解　$$xy'-y=r\cos\varphi\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}-r\sin\varphi$$
$$=\frac{r(r'\sin\varphi\cos\varphi+r\cos^2\varphi-r'\sin\varphi\cos\varphi+r\sin^2\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$
$$=\frac{r^2}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},\tag{1}$$
$$x+yy'=r\cos\varphi+r\sin\varphi\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$
$$=\frac{rr'\cos^2\varphi-r^2\sin\varphi\cos\varphi+rr'\sin^2\varphi+r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}$$
$$=\frac{rr'}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}.\tag{2}$$
将(1)、(2) 式代入所给式子,即得 $\dfrac{x+yy'}{xy'-y}=\dfrac{r'}{r}$.

7.2.152　将方程组
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)\end{cases}$$
变为极坐标方程的形式.

解　由原方程组得
$$\cos\varphi\frac{dr}{dt}-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi,$$
$$\sin\varphi\frac{dr}{dt}+r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi.$$
联立解之,即得
$$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}[r\cos\varphi(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)$$
$$-(-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)]=kr^3,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{r}[\cos\varphi(-r\cos\varphi+kr^3\sin\varphi)$$
$$-\sin\varphi(r\sin\varphi+kr^3\cos\varphi)]=-1,$$
原方程组即化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=kr^3,\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=-1.\end{cases}$$

7.2.153　在勒让德变换中，曲线 $y=y(x)$ 的每一点 (x,y) 对应于点 (X,Y)，其中 $X=y'$，$Y=xy'-y$。求 Y'，Y'' 及 Y'''。

解　$Y'=\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{dY}{dx}\dfrac{dx}{dX}=\dfrac{xy''}{\dfrac{dX}{dx}}=\dfrac{xy''}{y''}=x$;

$$Y''=\frac{\dfrac{dY'}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}}=\frac{1}{y''};$$

$$Y'''=\frac{\dfrac{dY''}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}}=\frac{\dfrac{-y'''}{y''^2}}{y''}=\frac{-y'''}{y''^3}.$$

7.2.154　引入新变量 ξ 及 η：$\xi=x+y$，$\eta=x-y$。解方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解　在仅作自变量代换，引入新自变量 $\xi=\xi(x,y)$，$\eta=\eta(x,y)$ 这种最简单的情形时，只要把 ξ，η 看作中间变量，用复合函数求偏导数的公式，即可求出：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程，即得变换后的方程. 本题中，

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-1.$$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\text{或}\frac{\partial z}{\partial \eta}=0,$$

即有 $z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y)$，其中 φ 为任意的一阶连续可微函数.

7.2.155　令 $\xi=x$，$\eta=x^2+y^2$，变换并求解方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x}=1,\frac{\partial \xi}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=2x,\frac{\partial \eta}{\partial y}=2y$，于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta},\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程，得

$$y(\frac{\partial z}{\partial \xi}+2x\frac{\partial z}{\partial \eta})-2xy\frac{\partial z}{\partial \eta}=0\text{ 或 }y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0.$$

由于 $y\neq 0$，故$\frac{\partial z}{\partial \xi}=0$，即 $z=\varphi(\eta)=\varphi(x^2+y^2)$，其中 φ 为任意的一阶连续可微函数.

7.2.156 利用变换 $\xi=x,\eta=y-bz$，变换并求解方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1\quad(a\neq 0).$$

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好. 首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$d\xi=dx,\quad d\eta=dy-bdz \tag{1}$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理，得

$$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dy-bdz),$$

整理得 $$(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta})dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}dy,$$

$$dz=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dx+\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dy,$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}},$$

代入原方程，得

$$a\frac{\partial z}{\partial \xi}+b\frac{\partial z}{\partial \eta}=1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\text{ 或 }\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{a},$$

于是 $z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$，其中 φ 为任意的一阶连续可微函数.

7.2.157　利用变换 $\xi=x,\eta=\frac{y}{x}$，变换并求解方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

解　$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1,\ \frac{\partial \xi}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x},$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

代入原方程，得

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial \eta}=z,$$

$$x\frac{\partial z}{\partial \xi}=z\text{ 或 }\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z.$$

解之，得

$$z=\xi\varphi(\eta)=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

7.2.158　取 $u=\ln x,v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$ 作为新自变量，变换方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

注意到 $x=e^u$ 及 $y=\operatorname{sh}v$，代入原方程，即得

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v.$$

7.2.159　取 $u=\frac{y}{x},v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 作新自变量，变换方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解　本题用微分法较好.

$$du=\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$dv = dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{r}$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}(\frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2}) + \frac{\partial z}{\partial v}(dz + \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy + \frac{z}{r}dz).$$

于是，
$$(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v})dz$$

$$= (-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v})dx + (\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v})dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v})(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v})^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v})(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v})^{-1},$$

代入原方程，得

$$x(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}) + y(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v})$$

$$= (z + r)(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}),$$

整理得 $2(z + r)\frac{\partial z}{\partial v} = z + r$. 如果 $z + r = 0$，则可推得 $x^2 + y^2 = 0$，但由于 $x \neq 0$，所以 $x^2 + y^2$ 不可能为零. 于是，$z + r \neq 0$，从而得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

7.2.160 取 $\xi = y + ze^{-x}, \eta = x + ze^{-y}$ 作新自变量，变换式子

$$(z + e^x)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y)\frac{\partial z}{\partial y} - (z^2 - e^{x+y}).$$

解
$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta$$

$$= \frac{\partial z}{\partial \xi}(dy + e^{-x}dz - ze^{-x}dx)$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot(dx + e^{-y}dz - ze^{-y}dy).$$

于是，

$$(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta})dz$$

$$= (\frac{\partial z}{\partial \eta} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi})dx + (\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta})dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\frac{\partial z}{\partial \eta} - ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi})(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta})^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta})(1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta})^{-1}.$$

代入原式，化简整理即得

$$原式 = \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

7.2.161　令 $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$，变换式子 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$.

解　$dx = vdu + udv$，　$dy = udu - vdv$，解之，得

$$du = \frac{vdx + udy}{u^2 + v^2},\quad dv = \frac{udx - vdy}{u^2 + v^2}.$$

于是，$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{1}{u^2 + v^2}[\frac{\partial z}{\partial u}(vdx + udy) + \frac{\partial z}{\partial v}(udx - vdy)]$

$$= \frac{1}{u^2 + v^2}[(v\frac{\partial z}{\partial u} + u\frac{\partial z}{\partial v})dx + (u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v})dy],$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

$$= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2}[(v\frac{\partial z}{\partial u} + u\frac{\partial z}{\partial v})^2 + (u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v})^2]$$

$$= \frac{1}{u^2 + v^2}[(\frac{\partial z}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2].$$

7.2.162　引入新变量 u、v、w，其中 $w = w(u,v)$. 令 $u = x^2 + y^2$，$v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$，$w = \ln z - (x + y)$，变换方程 $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$.

解　$du = 2xdx + 2ydy$，　$dv = -\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy$，

$$dw = \frac{1}{z}dz - dx - dy.$$

另一方面，$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv$，

故有　$\frac{1}{z}dz - dx - dy = \frac{\partial w}{\partial u}(2xdx + 2ydy) + \frac{\partial w}{\partial v}(-\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy)$.

整理得　$dz = (2xz\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + z)dx + (2yz\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + z)dy.$

将由上式所确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$yz(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1)=-xz.$$

$$(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1)=(y-x)z,$$

即
$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

7.2.163 利用$x=ue^w,y=ve^w,z=we^w$，变换方程

$$(x\frac{\partial z}{\partial x})^2+(y\frac{\partial z}{\partial y})^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

解 $dx=e^w du+ue^w dw,\quad dy=e^w dv+ve^w dw,$

$dz=e^w dw+we^w dw.$

于是，有
$$e^w dw=\frac{1}{1+w}dz,$$

$$e^w du=dx-ue^w dw=dx-\frac{u}{1+w}dz,$$

$$e^w dv=dy-ve^w dw=dy-\frac{v}{1+w}dz.$$

在全微分式$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$的两端乘以$e^w$，并将上述结果代入，得

$$\frac{dz}{1+w}=\frac{dw}{\partial u}(dx-\frac{u}{1+w}dz)+\frac{\partial w}{\partial v}(dy-\frac{v}{1+w}dz).$$

或 $$(1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v})dz=(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}dx+(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}dy.$$

将由上式确定的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入原方程，得

$$[ue^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}]^2+[ve^w(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}]^2=(we^w)^2(1+w)^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

消去$[e^w(1+w)]^2$，即得

$$u^2(\frac{\partial w}{\partial u})^2+v^2(\frac{\partial w}{\partial v})^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

7.2.164 假定$u=xe^z,v=ye^z,w=ze^z$，其中$w=w(u,v)$，变换式子$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $dw=e^z(1+z)dz=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv$

$$= \frac{\partial w}{\partial u}(e^z dx + xe^z dz) + \frac{\partial w}{\partial v}(e^z dy + ye^z dz).$$

于是，
$$(1 + z - x\frac{\partial w}{\partial u} - y\frac{\partial w}{\partial v})dz = \frac{\partial w}{\partial u}dx + \frac{\partial w}{\partial v}dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1 + z - x\frac{\partial w}{\partial u} - y\frac{\partial w}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1 + z - x\frac{\partial w}{\partial u} - y\frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}.$$

7.2.165　(1) 利用变换 $\xi = x + \alpha y$, $\eta = x + \beta y$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

并适当选取 α、β 的值使变换后的方程为$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. 这里假定所涉及的 u 的偏导数都连续；

(2) 求出满足(1) 的 x, y 的函数的普遍形式.

解　(1) 利用复合函数求导法，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\alpha + \beta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

代入原方程即得

$$(1 + 5\alpha + \alpha^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (2 + 5\alpha + 5\beta + 2\alpha\beta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \eta} + (1 + 5\beta + \beta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

为使$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$，应选取 α、β 值，使 $1 + 5\alpha + \alpha^2 = 0$, $1 + 5\beta + \beta^2 = 0$ 成立，即得 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21})$.

(2) 对$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 关于 ξ 和 η 两次积分，再换回原变量 x、y，即得满足(1) 式的 x、y 的函数 $u(x, y)$ 的普遍形式

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x + \alpha y) + \psi(\alpha + \beta y)$$

即 $$u(x,y)=\varphi(x+\alpha y)+\psi(x+\beta y),$$

其中 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{21})$. φ,ψ 是二阶可导的任意函数.

7.2.166 将方程

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+zx\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0,$$

按 $x=uv,y=vt,z=tu$ 变换成关于新变量 t,u,v 的方程.

解 由变换式 $x=uv,y=vt,z=tu$ 求得 $x_u'=v,x_v'=u,x_t'=0$, $y_u'=0,y_v'=t,y_t'=v,z_u'=t,z_v'=0,z_t'=u$. 于是有

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}v+\frac{\partial w}{\partial z}t,$$

同理 $$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}t,\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}u.$$

及

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}v^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}vt+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}t^2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}t^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}ut+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}u^2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}u^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}vu+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}v^2.$$

将上面三个等式分别乘以 u^2、v^2、t^2，然后相加并利用关系式 $x=uv$, $y=vt,z=tu$，可得

$$u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$=2\left(x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+zx\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0.$$

故所给方程变换为

$$u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

7.2.167 证明：利用线性变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$，并适当选取 a、b 的值，可将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解 由变换式求得 $\xi_x'=1,\xi_y'=a,\eta_x'=1,\eta_y'=b$，于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}a+\frac{\partial u}{\partial\eta}b,$$

及 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}a^2+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

代入所给方程，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=(1+4a+3a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+(2+4a+4b+6ab)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(1+4b+3b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$$

为使变换后的方程不含 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ 项，令 $1+4a+3a^2=0$ 及 $1+4b+3b^2=0$，分别得 $a=-1$ 或 $a=-\frac{1}{3}$ 及 $b=-1$ 或 $b=-\frac{1}{3}$，而当 $a=-1$，$b=-\frac{1}{3}$ 或 $a=-\frac{1}{3}$，$b=-1$ 时，有 $2+4a+4b+6ab\neq 0$，所以用变换 $\begin{cases}\xi=x-y,\\ \eta=x-\frac{y}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\xi=x-\frac{y}{3},\\ \eta=x-y,\end{cases}$

可将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

7.2.168　设函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y}$，试以 $\xi=\frac{y}{x}$，$\eta=y$ 为新的自变量，$u=yz-x$ 为 ξ,η 的函数，把方程变换为 $u=u(\xi,\eta)$ 所满足的方程.

解　本题是自变量和因变量都作变量代换的问题，在 $u=yz-x$ 两端对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial x}-1,$$

而 $\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$，$\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$，代入上式，得

$$-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=y\frac{\partial z}{\partial x}-1,\text{即}\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\left(1-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right).$$

将上式再对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}\left[\frac{2xy}{x^4}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{y}\left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

代入原方程并化简，得$\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$，或$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$. 故原方程变换为$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$.

7.2.169 设 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，作变换 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$，证明等式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

成立的充要条件是$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (r \neq 0).$ (2)

证 必要性.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x}(-\sin\varphi) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi, \\ &\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi, \\ &-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由(1)、(3) 得$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

充分性. 由(2) 式及(3) 式得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\right],$$

即
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\varphi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\varphi - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\varphi = 0.$$

因 $\cos\varphi$ 与 $\sin\varphi$ 不能同时为零，所以

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & -\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

7.2.170　假定 $u=xy, v=\frac{x}{y}$，试以 u,v 为自变量，改写微分方程 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，并求解.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}y+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}x+\frac{\partial z}{\partial v}(-\frac{x}{y^2}),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{2x}{y}\frac{\partial z}{\partial v}]=4x^2[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}].$$

故原方程变为
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

因为
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{z}{2u}]=0,$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{z}{2u}=\varphi(u).$$

其中 φ 为任意函数，解该方程，得
$$z=e^{\int\frac{1}{2u}du}\left[\int\varphi(u)e^{-\int\frac{1}{2u}du}du+\psi(v)\right]$$
$$=\sqrt{u}\left[\int\varphi(u)\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}du+\psi(v)\right],$$

由于 φ,ψ 是任意函数，因此适合方程的函数的形式必为：$z=f_1(u)+\sqrt{u}f_2(v)$，其中 f_1,f_2 为任意二次可微的一元函数，而适合原方程的函数取如下形式：
$$z=f_1(xy)+\sqrt{xy}f_2(\frac{x}{y}).$$

7.2.171　若 x、y 是 u、v 的连续可微函数，反之 u、v 亦是 x、y 的连续可微函数，且 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\neq 0$，证明：$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}$.

证　取 $u=x, v=y$，则有
$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}\frac{D(s,t)}{D(x,y)}=\frac{D(x,y)}{D(x,y)}=1.$$

将变量 s、t,改换成 u、v,由题设 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\neq 0$,有

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}.$$

7.2.172 作变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,将曲率公式 $K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ 用 ρ、θ 表示出来.

解 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(\rho\sin\theta)}{d(\rho\cos\theta)}=\frac{\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta}{\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta}$,

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2ydx-d^2xdy}{(dx)^3}$$
$$=\frac{2(d\rho)^2d\theta-\rho d^2\rho d\theta+\rho^2(d\theta)^3}{(\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta)^3}.$$

其中 $d^2x=\cos\theta d^2\rho-2\sin\theta d\rho d\theta-\rho\cos\theta(d\theta)^2$,

$d^2y=\sin\theta d^2\rho+2\cos\theta d\rho d\theta-\rho\sin\theta(d\theta)^2$.

于是有

$$K=\frac{\dfrac{2(d\rho)^2d\theta-\rho d^2\rho d\theta+\rho^2(d\theta)^3}{(\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta)^3}}{\left[1+\left(\dfrac{\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta}{\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{2(d\rho)^2-\rho d^2\rho d\theta+\rho^2(d\theta)^3}{[(d\rho)^2+\rho^2(d\theta)^2]^{3/2}},$$

将分子分母同除以 $(d\theta)^3$,整理可得

$$K=\frac{|\rho^2+2\rho_\theta'^2-\rho\rho''_\theta|}{(\rho^2+\rho_\theta'^2)^{3/2}}.$$

7. 方向导数与梯度

7.2.173 求函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $P(1,1)$ 沿与 x 轴的正方向成 $\alpha=60°$ 的方向导数.

解 $z_x'=2x$, $z_x'|_{(1,1)}=2$, $z_y'=-2y$, $z_y'|_{(1,1)}=-2$,

$$\cos 60°=\frac{1}{2},\quad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,1)}=1-\sqrt{3}$.

7.2.174 求函数 $f(x,y)=\ln(e^{-x}+\frac{x^2}{y})$ 沿方向 (a,b) 的方向导数.

解　因为 $f_x' = \dfrac{1}{e^{-x}+\dfrac{x^2}{y}}(-e^{-x}+\dfrac{2x}{y}) = \dfrac{-y+2xe^x}{y+x^2e^x}$，

$$f_y' = \frac{1}{e^{-x}+\dfrac{x^2}{y}}(-\frac{x^2}{y^2}) = -\frac{x^2}{y^2e^{-x}+yx^2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\dfrac{2xe^x-y}{y+x^2e^x} - b\dfrac{x^2}{y^2e^{-x}+yx^2})$.

7.2.175　求函数 $f(x,y)=\ln(ce^{-x}+\dfrac{x^2}{y})$ 分别沿方向 $l_1=\{1,0\}$，$l_2=\{0,1\}$ 及 $l_3=al_1+bl_2$ 的方向导数，其中 a、b 为正实数，$y>0$.

解　$l_1=\{1,0\}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=1,\cos\beta=0$，故

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-e^{-x}+\dfrac{2x}{y}}{e^{-x}+\dfrac{x^2}{y}} = \frac{2x-ye^{-x}}{x^2+ye^{-x}}.$$

$l_2=\{0,1\}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=0,\cos\beta=1$，故

$$\frac{\partial f}{\partial l_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\dfrac{x^2}{y^2}}{e^{-x}+\dfrac{x^2}{y}} = \frac{-x^2}{y^2e^{-x}+yx^2}.$$

$l_3=al_1+bl_2=\{a,b\}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

故　$$\frac{\partial f}{\partial l_3} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\frac{2x-ye^{-x}}{x^2+ye^{-x}} - b\frac{x^2}{y^2e^{-x}+yx^2}).$$

7.2.176　求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $M(1,1)$ 沿与 ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的导函数，在怎样的方向上此导函数有：(1) 最大的值；(2) 最小的值；(3) 等于 0.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M(1,1)}=1$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M(1,1)}=1$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{M(1,1)}=\cos\alpha+\cos(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}).$$

(1) 当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$,即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时,$\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大;

(2) 当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-1$,即 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时,$\frac{\partial z}{\partial l}$,最小;

(3) 当 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=0$,即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时,$\frac{\partial z}{\partial l}=0$.

7.2.177 研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)处的偏导数和方向导数.

解 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0,0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(\Delta x+\frac{(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^4+(\Delta x)^2}})$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{|\Delta x|\sqrt{(\Delta x)^2+1}}),\text{不存在},$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(\Delta y+\frac{(\Delta y)^2}{|\Delta y|})\frac{1}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}(1+\frac{\Delta y}{|\Delta y|}),\text{不存在}.$$

即 $f(x,y)$ 在(0,0)点处不可微.

记 $\Delta x=\rho\cos\alpha,\Delta y=\rho\cos\beta$,其中 α,β 分别为有向线段 l 与 x 轴,y 轴正向的夹角,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则 $f(x,y)$ 在(0,0)处沿任意方向 $l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$ 的方向导数,根据定义直接计算得

$$\frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\cos\beta)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}[\rho\cos\alpha+\rho\cos\beta+\frac{\rho^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)}{\sqrt{\rho^4\cos^4\alpha+\rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\cos^2\beta}}]$$

$$= \lim_{\rho \to 0}(\cos\alpha + \cos\beta + \frac{1}{\sqrt{\rho^2\cos^4 + 1}}) = \cos\alpha + \cos\beta + 1.$$

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向 $l = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 的方向导数存在.

7.2.178 求函数 $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处沿曲线 $x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$ 在该点的切线方向上的导函数.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$,

在点 $M(1,2,-2)$ 处它们的值分别为 $\dfrac{8}{27}, -\dfrac{2}{27}, \dfrac{2}{27}$.

又曲线在该点处的切线的方向余弦分别为 $\dfrac{1}{9}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{8}{9}$. 于是,所求的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M = \frac{8}{27}\,\frac{1}{9} + (-\frac{2}{27})\cdot\frac{4}{9} + \frac{2}{27}\cdot(-\frac{8}{9}) = -\frac{16}{243}.$$

7.2.179 如果 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在,且在点 (x_0,y_0), $f(x,y)$ 的各方向导数均存在,又 $D_l f = f_x'\cos\alpha + f_y'\sin\alpha$,问 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否可微?

解 不一定,如在点 $(0,0)$ 考察函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0, \\ 0, & y \neq x^2 \text{ 或 } x \leqslant 0. \end{cases}$$

我们有 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,

而沿曲线 $y = x^2 (x > 0)$,有

$\dfrac{\Delta z}{\rho} = \dfrac{1}{\rho} \not\to 0$,(当 $\rho \to 0$ 时).

7.2.180 设 P_0 为单位球内一点,从 P_0 向单位球面的切面作垂线,可得垂足 P,当切面变动时,P 点的轨迹成一封闭曲面.

(1) 求此曲面所围成的体积 V;

(2) P_0 沿什么方向变动时,此体积的变化率最大?

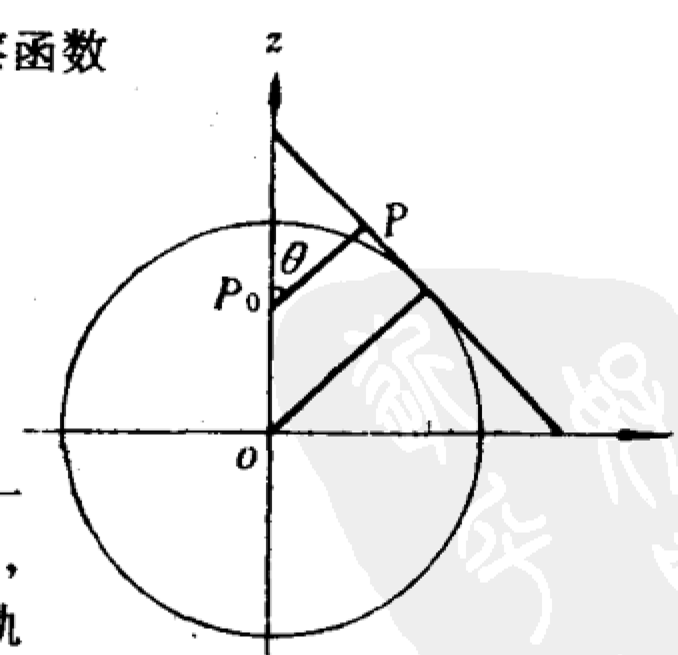


图 7.2.180

解　(1) 如图，选P_0点在oz轴上，设P_0点的坐标为$(0,0,a)$，所得的曲面应为一对称于oz轴的旋转面，以oz轴与P_0P之间的夹角θ为参数，则

$$|P_0P| = 1 - a\cos\theta,$$

从而P点坐标满足参数方程

$$\begin{cases} x = (1 - a\cos\theta)\sin\theta, \\ z = (1 - a\cos\theta)\cos\theta + a, \end{cases} (0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

或化简为

$$\begin{cases} x = \sin\theta - \dfrac{a}{2}\sin 2\theta, \\ z = \cos\theta + \dfrac{a}{2}(1 - \cos 2\theta), \end{cases} (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

于是所求的体积为

$$V = \pi\int_\pi^0 (\sin\theta - \frac{a}{2}\sin 2\theta)^2(-\sin\theta + a\sin 2\theta)d\theta$$

$$= \pi\int_0^\pi (\sin\theta - \frac{a}{2}\sin 2\theta)^2(\sin\theta - a\sin 2\theta)d\theta = \frac{4}{3}\pi(1 + a^2).$$

(2) 由上可见，在一般情况下，设P_0点的坐标为(X,Y,Z)，则体积V为

$$V = \frac{4}{3}\pi(1 + X^2 + Y^2 + Z^2).$$

在P_0点处沿方向$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$的方向导数为

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{4}{3}\pi[2X\cos\alpha + 2Y\cos\beta + 2Z\cos\gamma]$$

$$= \frac{8}{3}\pi(\boldsymbol{op}\cdot\boldsymbol{n}) = \frac{8}{3}\pi|\boldsymbol{op}_0|\cos(\widehat{\boldsymbol{op},\boldsymbol{n}}).$$

其中$\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，显然当$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{op}_0$方向一致时（这时$\cos(\widehat{\boldsymbol{op}_0,\boldsymbol{n}}) = 1$），体积$V$有最大的变化率.

7.2.181　求函数$f(x,y) = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$在点$(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$沿曲线$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$在该点的法线方向上的方向导数.

解法1　函数$f(x,y) = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$在点$(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$处可

微,其偏导数为

$$f_x'(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})=-\frac{\sqrt{2}}{a},\quad f_y'(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})=-\frac{\sqrt{2}}{b}$$

问题的关键在于由所给的条件确定方向 l.

由微分学可知,所给椭圆的切线方程 $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=0$,其中$(x,y)$是椭圆上任一点,由此可知椭圆在点$(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$处的内法线方向上的单位向量为

$$l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\{\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\},$$

于是可得,$D_lf(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}}{b}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

解法2　由于函数$f(x,y)$的梯度$\mathrm{grad}f=(f_x',f_y')$的方向是等位线$f(x,y)=c$的法线方向,而椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是$f(x,y)=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$在 xoy 平面上的等位线,故有

$$D_lf(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})=\|\mathrm{grad}f\|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}$$

$$=(\sqrt{f'^2_x+f'^2_y})_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

7.2.182　设$u=f(x,y,z)$为可微分两次的函数,若$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为方向 l 的方向余弦,求$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}(\frac{\partial u}{\partial l})$.

解　$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$

$$\frac{\partial^2u}{\partial l^2}=(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma)\cos\alpha$$
$$+(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma)\cos\beta$$
$$+(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}\cos\alpha+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos\gamma)\cos\gamma$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha.$$

7.2.183 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在沿椭圆球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数.

解 $n = \{\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\}$，此法向量的单位向量为 $n_0 = \left\{\frac{x_0}{a^2\Delta}, \frac{y_0}{b^2\Delta}, \frac{z_0}{c^2\Delta}\right\}$，其中

$$\Delta = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}.$$

于是 $$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{M_0} = \frac{x_0}{a^2\Delta}2x_0 + \frac{y_0}{b^2\Delta}2y_0 + \frac{z_0}{c^2\Delta}2z_0 = \frac{2}{\Delta}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right)$$
$$= \frac{2}{\Delta} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

7.2.184 求函数 $u = x + y + z$ 在沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的外法线方向上的导函数. 在球面上怎样的点使得上述的导函数有：(1) 最大值；(2) 最小值；(3) 等于零.

解 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1$，则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为 $\{\frac{x_0}{r_0}, \frac{y_0}{r_0}, \frac{z_0}{r_0}\} = \{x_0, y_0, z_0\}$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}\cdot\{x_0, y_0, z_0\} = \{1,1,1\}\cdot\{x_0, y_0, z_0\}$$
$$= x_0 + y_0 + z_0.$$

(1) $$x_0 + y_0 + z_0 = 1\cdot x_0 + 1\cdot y_0 + 1\cdot z_0$$
$$\leqslant \sqrt{3}\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{3},$$

当 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，上式等号成立，此点恰在球面上，因此，在 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 点 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 取得最大值.

(2) 同法可得，$-(x_0 + y_0 + z_0) = -1\cdot x_0 - 1\cdot y_0 - 1\cdot z_0 \leqslant \sqrt{3}$

或 $x_0+y_0+z_0\geqslant -\sqrt{3}$，故在点$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\frac{\partial u}{\partial n}$取最小值.

(3) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时$\frac{\partial u}{\partial n}=0$，因此，所求的点为由方程

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

所确定的解(x,y,z)，它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线 —— 圆上面.

7.2.185　设 $f(x,y,z)=\frac{\varphi(r^2)}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\varphi$ 为可微函数，求梯度 $\mathrm{grad}f$.

解　$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{r\varphi'(r^2)2x-\varphi(r^2)\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{x}{r^3}[2r^2\varphi'(r^2)-\varphi(r^2)],$$

同样可求得　$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{r^3}[2r^2\varphi'(r^2)-\varphi(r^2)],$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{r^3}[2r^3\varphi'(r^2)-\varphi(r^2)],$$

于是　$$\mathrm{grad}f=\frac{2r^2\varphi'(r^2)-\varphi(r^2)}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).$$

7.2.186　求函数 $u=2x^3y-3y^2z$ 在点 $P(1,2,-1)$ 处的梯度及其模.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x^3-6yz,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-3y^2.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,-1)}=12,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,-1)}=14,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,-1)}=-12.$$

于是　$\mathrm{grad}f=12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，　$|\mathrm{grad}f|=22$.

7.2.187　求函数 $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在$(1,-1,0)$处的梯度的大小与方向.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,-1,0)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,-1,0)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,-1,0)}=0.$$

故在(1，－1,0) 点处，有 $\|\text{grad}u\|=\frac{1}{2}$.

又记 α,β,γ 分别为梯度与 x、y、z 正向之间的夹角，则有

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma=0,$$

于是　$\alpha=\frac{3\pi}{4},\quad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \gamma=\frac{\pi}{2}.$

7.2.188　已知标量场 $u=\ln r$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

(1) 求出使 $u(x,y)=c$ 的等值线(其中 c 是常数)；

(2) 求出 grad$u$；

(3) 求出满足 $\|\text{grad}u\|=1$ 的点.

解　(1) $\ln r=c, r=e^c>0$,其图形为一个圆.

(2) $u_x=\frac{x}{r^2}$, $u_y=\frac{y}{r^2}$, $\text{grad}u=\frac{1}{r^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$,

(3) $\|\text{grad}u\|=1$,即 $r=1$.

7.2.189　求函数 $u=\frac{1}{r}$ (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度。

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$. 于是

$$\text{grad}u=-\frac{1}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}),$$

或简记成 $\text{grad}u=\{-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\}$,在点 M_0 处的梯度为

$$\text{grad}u=\{-\frac{x_0}{r_0^3},-\frac{y_0}{r_0^3},-\frac{z_0}{r_0^3}\},$$

其中 $r_0=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 从而得

$$|\text{grad}u|=\sqrt{(-\frac{x_0}{r_0^3})^2+(-\frac{y_0}{r_0^3})^2+(-\frac{z_0}{r_0^3})^2}=\frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(\text{grad}\,u\hat{,}x)=\frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(\mathrm{grad}\,u\hat{,}y)=\frac{-\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(\mathrm{grad}\,u\hat{,}z)=\frac{-\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}}=-\frac{z_0}{r_0^3}.$$

7.2.190　求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 (x_0,y_0) 沿与过这点的等位线垂直的方向的方向导数.

解　因为函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 的梯度 $\mathrm{grad}f=\{f_x,f_y\}$ 的方向是等位线 $f(x,y)=c$ 的法线方向，而 $z=f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 的等位线 $\ln(x^2+y^2)=c$ 是一族以原点为中心的同心圆，与这些圆垂直的方向就是圆的法线方向，它即是函数 $\ln(x^2+y^2)$ 的梯度方向.

由于　$\mathrm{grad}f=f_x(x,y)i+f_y(x,y)j=\dfrac{2x}{x^2+y^2}i+\dfrac{2y}{x^2+y^2}j,$

所以　$(\dfrac{\partial f}{\partial l})|_{(x_0,y_0)}=\pm\ |\mathrm{grad}f|_{(x_0,y_0)}$

$$=\pm\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}=\pm\sqrt{(\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2})^2+(\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2})^2}$$

$$=\pm\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

7.2.191　求函数 $u=xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿方向 $l=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 的方向导数，函数在该点的梯度的大小等于什么？

解　$\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,1,1)}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,$

$$|\mathrm{grad}u|\Big|_{(1,1,1)}=\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2}\Big|_{(1,1,1)}=\sqrt{3}.$$

7.2.192　在点 $(4,2,-1)$ 处，计算函数 $f(x,y,z)=z\sqrt{x^2-y^2}$ 沿方向 $l=\{2,1,-1\}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

解　l 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=z\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(4,2,-1)}=\frac{-4}{\sqrt{12}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=z\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(4,2,-1)}=\frac{2}{\sqrt{12}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\sqrt{x^2-y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(4,2,-1)}=\sqrt{12}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(4,2,-1)}&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_{(4,2,-1)}\\&=\frac{-4}{\sqrt{12}}\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{12}}\frac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{12}\frac{-1}{\sqrt{6}}\\&=\frac{-3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

7.2.193　求函数$u=\cos^2(xy)+\frac{y}{z^2}$在$P(0,-19,-24)$沿直线$l$的方向导数，其中$l$为直线$\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{z}{2}=1,\\ y-2z+4=0\end{cases}$在平面$x+y-z=5$上的投影.

解　l的方向余弦为$\left\{\frac{-4}{\sqrt{186}},\frac{-7}{\sqrt{186}},\frac{-11}{\sqrt{186}}\right\}$. 由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2\cos(xy)\cdot\sin(xy)\cdot y=-y\sin(2xy),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,-19,-24)}=-19\sin 0=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2\cos(xy)\cdot\sin(xy)+\frac{1}{z^2}=-x\sin(2xy)+\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,-19,-24)}=\frac{1}{24^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2y}{z^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(0,-19,-24)}=-\frac{38}{24^3}.$$

可得

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(0,-19,-24)}=\frac{1}{24^3}\frac{-17}{\sqrt{186}}+\frac{-38}{24^2}\frac{-11}{\sqrt{186}}=\frac{125}{6912\sqrt{186}}.$$

7.2.194　求$z=y^3e^{2x}$在点$(2,-1)$的方向导数的最大值，并求指向这个方向的单位向量.

解　$\mathrm{grad}(y^3,e^{2x})|_{(2,-1)}=\{2y^3e^{2x},3y^2e^{2x}\}|_{(2,-1)}=\{-2e^4,3e^4\}.$

所以　$\max \frac{\partial z}{\partial \alpha} = |\{-2e^4, 3e^4\}| = \sqrt{13}e^4$，

单位向量为 $\alpha^0 = \{\frac{-2e^4}{\sqrt{13}e^4}, \frac{3e^4}{\sqrt{13}e^4}\} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$.

8. 综合问题

7.2.195　已知方程 $f(x,y) = x^2 - y^2 = 0$，又 $y = y(x)$，$-\infty < x < +\infty$，是满足该方程的函数，问

(1) 有多少连续函数 y 满足该方程？

(2) 有多少可微函数 y 满足该方程？

(3) 若(i) $y(1) = 1$，(ii) $y(0) = 0$，分别有多少连续函数 y 满足该方程？

(4) 设 $y(1) = 1$，$\delta > 0$ 充分小，满足该方程的连续函数 $y = y(x)$ $(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ 有多少？

解　答案是显然的

(1) 四个：$y = x, y = -x, y = |x|, y = -|x|$；

(2) 两个：$y = x, y = -x$；

(3) (i) 两个：$y = x, y = |x|$；

(ii) 四个：$y = x, y = -x, y = |x|, y = -|x|$；

(4) 只有一个，$y = x$.

由此不难看出，对于使 $f_y' \neq 0$ 的点(1,1)，只在它的充分小的邻域内，方程有唯一连续解；若在大范围内，过该点的连续可微函数不唯一，而在使 $f_y' = 0$ 的点(0,0)，即使在它的任意小的邻域内，方程都有四个连续解，这也说明，对于隐函数存在定理的结论，$f_y'(x_0, y_0) \neq 0$ 的条件是何等重要！然而也应指出，它并非必要条件，例如对于方程 $f(x,y) = x - y^3 = 0$，$f_y'(0,0) = 0$，过点(0,0)的点仍然有唯一解(而且是大范围的解)$y = x^{1/3}(-\infty < x < +\infty)$.

事实上，尽管 $f_y'(0,0) = 0$，但 $f(x,y)$ 关于 y 是严格单调下降的，那么自然要问，这种严格单调的性质是否是必要的？回答也是否定的. 不妨考察方程 $f(x,y) = (y - x)^2 = 0$. 显然有 $f_y'(0,0) = 0$，而且对于任意 $x \neq 0$，$f(x,y)$ 关于 y 无单调性，但 $f(x,y) = 0$ 却有唯一解 $y = x(-\infty < x < +\infty)$.

7.2.196　设函数 $F(x,y)$ 于条形域：$a < x < b$，$-\infty < y < +\infty$

上关于 x 连续，F_y' 处处存在且有常数 m，使得 $0 < m \leqslant F_y'$，证明方程 $F(x,y)=0$ 在区间 (a,b) 上存在唯一的连续解.

证 对任意的 $x_0 \in (a,b)$，需证存在 $y_0 \in (-\infty, +\infty)$，使 $F(x_0, y_0)=0$. 任取 y_1，记 $g(y)=F(x_0,y_1)+m(y-y_1)$，则由 $F(x_0,y_1)=g(y_1)$ 和

$$\frac{d}{dy}[F(x_0,y)-g(y)] = F_y'(x_0,y) - m \geqslant 0$$

可知 $$F(x_0,y)\begin{cases}\leqslant g(y), y \leqslant y_1,\\ \geqslant g(y), y > y_1.\end{cases}$$

于是易见 $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x_0,y) = +\infty$，$\lim\limits_{y\to-\infty} F(x_0,y) = -\infty$.

由介值定理，必有 $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ 使 $F(x_0,y_0)=0$，这样我们证明了 $y=y(x)(a<x<b)$ 的存在性. 唯一性不难由 $F_y'>0$ 看出，至于连续性，对 $x_0 \in (a,b)$，对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$F[x_0, y(x_0)-\varepsilon] < 0 < F[x_0, y(x_0)+\varepsilon],$$

由 F 关于 x 的连续性，有 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$F[x, y(x_0)-\varepsilon] < 0 < F[x, y(x_0)+\varepsilon],$$

据介值定理，便有 $|y(x) - y(x_0)| < \varepsilon$，即 $y(x)$ 在 x_0 点连续.

7.2.197 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续，$k(x,y)$ 是三角形区域 $D=\{(x,y); a\leqslant x\leqslant b; a\leqslant y\leqslant x\}$ 上的连续函数，证明：对任意参数 λ，方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy$$

在 $[a,b]$ 上有唯一连续解 $\varphi(x)$.

证 设 $|k(x,y)| \leqslant M$，$|f(x)| \leqslant N$，在区间 $[a,b]$ 上定义

$$\varphi_1(x) = f(x),$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy, (n=2,3,\cdots). \quad (1)$$

由归纳法可以证明

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{N}{n!}|\lambda|^n M^n (x-a)^n. \quad (2)$$

于是 $\varphi_n(x)$ 一致收敛于 $\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 即为所求之解.

为证唯一性，设 $\tilde{\varphi}(x)$ 是另一解，令 $\psi(x) = \varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)$，则 $\psi(a)=0$，且

$$\psi(x) = \lambda \int_a^x k(x,y)\psi(y)dy.$$

设 $|\psi(x)| \leqslant L$,反复应用上式,便有

$$|\psi(x)| \leqslant LM|\lambda|(x-a) \leqslant \frac{L}{2!}M^2|\lambda|^2(x-a)^2$$

$$\leqslant \cdots \leqslant \frac{L}{n!}M^n|\lambda|^n(x-a)^n \leqslant \frac{L}{n!}M^n|\lambda|^n(b-a)^n \to 0.$$

当 $n \to \infty$ 时,有 $\psi(x) \equiv 0$,即 $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$. 唯一性证毕.

7.2.198　若在某一包含点 $P(x,y)$ 在内的区域上 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 存在且有界,则它在该区域上连续.

证　$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)],$$

应用拉格朗日中值定理,得

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x$, $(0 < \theta_1 < 1)$

$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y'(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$, $(0 < \theta_2 < 1)$

于是　$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y'(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y.$$

由于在所述区域上偏导数有界,所以存在 $M > 0$,使

$$|f_x'(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)| \leqslant M, \quad |f_y'(x, y+\theta_2\Delta y)| \leqslant M.$$

故　$|f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)| \leqslant M(|\Delta x| + |\Delta y|)$.

当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 时,上面不等式右边趋向于 0,由此推知

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y),$$

所以函数 $f(x,y)$ 在上述区域上连续.

7.2.199　设 $F[x,y(x),z(x)] = P[x,y(x)] + Q[x,y(x)] \cdot z(x)$,其中出现的函数都是连续可微的,试计算 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z})$.

解　$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + z(x)\frac{\partial Q}{\partial y}$,　$\frac{\partial F}{\partial z} = Q[x,y(x)]$,

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z}) = \frac{\partial Q}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

因此　$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z}) = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} + [z(x) - y'(x)]\frac{\partial Q}{\partial y}$.

7.2.200　证明在$(-\infty,+\infty)$上存在唯一的函数$y(x)$，使$y(x)=x+\frac{1}{2}\sin y(x)$，且$y(x)$无穷次可微.

证　记$F(x,y)=y-x-\frac{1}{2}\sin y$，则$F_y'=1-\frac{1}{2}\cos y\geqslant\frac{1}{2}>0$，由此可得$y(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的存在唯一性. 再由隐函数微分法，$y(x)$连续可微，且

$$y'(x)=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y(x)}.$$

而此式说明n阶导数$y^{(n)}(x)$连续，则$y^{(n+1)}(x)$必连续. 故得欲证的结论.

7.2.201　设$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$，$v=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$，$w=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$，$x^2+y^2+z^2\neq 0$. 求$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

解　注意到$J=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^6}\cdot$

$$\begin{vmatrix}(x^2+y^2+z^2)-2x^2 & -2xy & -2xz\\ -2xy & (x^2+y^2+z^2)-2y^2 & -2yz\\ -2xz & -2yz & (x^2+y^2+z^2)-2z^2\end{vmatrix},$$

记$\lambda=x^2+y^2+z^2$，$A=\begin{vmatrix}2x^2 & 2xy & 2xz\\ 2xy & 2y^2 & 2yz\\ 2xz & 2yz & 2z^2\end{vmatrix}$，则有

$$J=\lambda^{-6}|\lambda I-A|=\lambda^{-6}f(\lambda),$$

其中$f(\lambda)=\lambda^3-a_1\lambda^2+a_2\lambda-a_3$是$A$的特征多项式，于是$a_k(k=1,2,3)$是$A$的所有$k$阶余子式之和，显然$a_3=|A|=0$，而$A$的所有二阶余子式均为0，即$a_2=0$，又有$a_1=2\lambda$，故易见

$$J=-\lambda^3=-(u^2+v^2+w^2)^3,$$

由此便得
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{(u^2+v^2+w^2)^3}.$$

7.2.202　设$F(x,y)$的偏导数存在，$f(x)$可导且$f'(x)\neq 0$，求$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}$.

解　原式$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}+\dfrac{F(x,y)-F(x,y-\varepsilon)}{\varepsilon}}{\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}+\dfrac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}}$

$$=\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{F(x,y-\varepsilon)-F(x)}{-\varepsilon}}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(x-\varepsilon)-f(x)}{-\varepsilon}},$$

所以
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}=\frac{F_y'}{f_x'}.$$

7.2.203　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}, & y>0;\\ 0, & y=0.\end{cases}$（这样的函数在 xoy 平面的闭上半平面有定义），又设 $g(x)=\int_0^1 f(x,y)dy$，求 $g'(x)$ 及 $\int_0^1 f_x'(x,y)dy$.

解　因 $\dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}$ 当 $y>0$ 时是 y 的连续函数（固定 x，x 可任意）.

又 $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}=0$，故 $f(x,y)$ 对于固定的 x（x 值可任意）在区间 $[0,1]$ 上是 y 的连续函数，于是 $g(x)$ 有意义，并且 $\int_0^1 f(x,y)dx$ 是常义积分，不是广义积分.

取函数 $h(x,y)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{y}}, & y>0;\\ 0, & y=0.\end{cases}$ 同样，$h(x,y)$ 对于固定的 x（其值任意），在区间 $(0,+\infty)$ 是 y 的连续函数．又 $h(x,y)$ 在 $0\leqslant y<+\infty$ 时可对 y 求偏导数．事实上，当 $y>0$ 时，

$$h_y'(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(xe^{-\frac{x^2}{y}})=xe^{-\frac{x^2}{y}}\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}},$$

又 $h_y'(x,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{h(x,y)-h(x,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{y}}=0$，所以，$h_y'(x,y)=f(x,y)$，$y\geqslant 0$，由此可得

$$g(x)=h(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}=xe^{-x^2}-0=xe^{-x^2},$$

$$g'(x)=e^{-x^2}+xe^{-x^2}(-2x)=e^{-x^2}(1-2x^2).$$

上述结果对 $-\infty<x<+\infty$ 成立，包括 $x=0$ 在内.

另一方面,取函数

$$k(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{y}}(1-\frac{x^2}{y}), & y>0;\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

这个函数与 $h(x,y)$ 有些不同, $k(x,y)$ 对于固定的 x (要求 $x\neq 0$) 在 $[0,+\infty)$ 上是 y 的连续函数,但是

$$k(0,y)=\begin{cases}1, y>0;\\ 0, y=0.\end{cases}$$

为不连续的函数,容易验证,当 $x\neq 0$ 时有

$$k_y'(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{y}}(\frac{3x^2}{y^2}-\frac{2x^4}{y^3}), & y>0;\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

注意上述 $k_y'(x,y)$ 的结果仅对 $x\neq 0$ 才成立,又对于任意的 x 的值都有

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{y}}(\frac{3x^2}{y^2}-\frac{2x^4}{y^3}), & y>0;\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

即有 $k_y'(x,y)=f_x'(x,y), x\neq 0, y\geqslant 0$.

于是当 $x\neq 0$ 时,有

$$\int_0^1 f_x'(x,y)dy=\int_0^1 k_y'(x,y)dy=k(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}=e^{-x^2}(1-2x^2).$$

当 $x=0$ 时,有 $\int_0^1 f_x'(x,y)dy=\int_0^1 0dy=0$,所以

$$\int_0^1 f_x'(x,y)dy=\begin{cases}e^{-x^2}(1-2x^2), x\neq 0;\\ 0, \qquad x=0.\end{cases}$$

注 本题说明,常义积分与微分运算不能无条件换序.

7.2.204 设 $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,又设 $g(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ (当 $y\neq 0$ 时,$g(y)$ 是常义积分,而当 $y=0$ 时,$g(y)$ 是收敛的广义积分),求 $g'(y)$ 以及 $\int_0^1 f_y'(x,y)dx$.

解 当 $y\neq 0$ 时,$g'(y)=\text{arctg}\,\frac{1}{y}=\int_0^1 f_y'(x,y)dx$,

$$\int_0^1 f_y'(x,0)dx = 0,\ g'(0) \text{ 不存在}.$$

事实上，$g(y)$ 在 $y=0$ 处的右导数为$\frac{\pi}{2}$，左导数为 $-\frac{\pi}{2}$.

7.2.205　设 $w=F(x,y,z)$ 三次可微，y、z 是 x 的二次可微函数. 试证：若对任意逐段光滑函数 $f(x)$，都有 $\int_{x_0}^{x_1}[\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})]f(x)dx=0$，则对$[x_0,x_1]$上的所有 x 都有

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}=0.$$

证　首先证明 $\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})\equiv 0$.

对任意的 $x\in[x_0,x_1]$，由题设可知，$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})$ 为连续函数. 若在$[x_0,x_1]$上某一点 x' 有$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})\neq 0$，不妨设其大于零，则由函数的连续性，在包含 x' 的某一确定区间 $a\leqslant x\leqslant b$ ($[a,b]\subset[x_0,x_1]$) 上有

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})>0,$$

作 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 在}[x_0,x_1]\text{内但不在}[a,b]\text{内},\\ (x-a)^2(x-b)^2, & a\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$

显然这样的 $f(x)$ 是光滑的. 对这个 $f(x)$ 将有

$$\int_{x_0}^{x_1}[\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})]f(x)dx=\int_a^b[\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})]f(x)dx>0,$$

这与题设矛盾，故$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})=0$.

而 $\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial z})=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}=0$. 证毕

7.2.206　设 $f(x,y)$ 是可微函数，证明：$f(x,y)=c$ 是微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的解的充要条件是：$P\frac{\partial f}{\partial y}=Q\frac{\partial f}{\partial x}$.

证　由 $f(x,y)=c$ 对 x 求导得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \tag{1}$$

必要性：若 $f(x,y)=c$ 是微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2}$$

的解，则由(2)得，$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，代入(1)有

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\left(-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)=0,$$

即 $P\frac{\partial f}{\partial y}=Q\frac{\partial f}{\partial x}$.

充分性：若 $P\frac{\partial f}{\partial y}=Q\frac{\partial f}{\partial x}$，则由(1)得，$\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{Q}$，故 y 满足(2)，即 $f(x,y)=c$ 是(2)的解.

7.2.207 假定 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，又

$$u(x_1,x_2,x_3)=\int_0^{2\pi}f(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi)d\varphi,$$

且 $$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi)d\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x_1+x_3\cos\varphi,x_2+x_3\sin\varphi)d\varphi,\quad (i=1,2,3)$$

试证：$x_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x_3}=0$.

证 设 $x=x_1+x_3\cos\varphi,y=x_2+x_3\sin\varphi$，由

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}\quad (i=1,2,3)$$

得 $$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi.$$

故 $$x_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=x_3\Big[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d\varphi-$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right)d\varphi\Big]$$

$$=x_3\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\varphi-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin 2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\varphi\right)d\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}=\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial x}d(\sin\varphi)-\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial y}d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin\varphi(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi})d\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}$$

$$+ \int_0^{2\pi}\cos\varphi(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi})d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi}\sin\varphi(-x_3\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x_3\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})d\varphi$$

$$+ \int_0^{2\pi}\cos\varphi(-x_3\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + x_3\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})d\varphi$$

$$= x_3\int_0^{2\pi}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\varphi - \sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\varphi)d\varphi$$

故 $x_3(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}) - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$

7.2.208 已知 $u = u(\sqrt{x^2+y^2})$ 有连续二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2$. 试求 u.

解 设 $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $u = u[z(x,y)]$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{du}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{du}{dz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \frac{du}{dz}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \frac{du}{dz}\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由假设可知，$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = x^2 + y^2$，即 $\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} = z^2$.

令 $P = \frac{du}{dz}$，则上式可化成 $\frac{dP}{dz} + \frac{P}{z} = z^2$. 解之得

$$P = e^{-\int\frac{dz}{z}}\left[\int z^2 e^{\int\frac{dz}{z}}dz + c_1\right] = \frac{z^3}{4} + \frac{c_1}{2},$$

故 $u = \frac{u^4}{16} + c_1\ln z + c_2$，即 $u = \frac{1}{16}(x^2+y^2)^2 + c_1\ln\sqrt{x^2+y^2} + c_2$.

7.2.209 设函数 $u = f(r)$，其中 $r = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$，试求 $f(r)$ 的表达式.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

由对称性可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

从而有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{f''(r)+f'(r)}{x^2+y^2+z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$，

即 $f''(r)+f'(r)=e^{-r}$. 解之得 $f(r)=c_1+c_2e^{-r}-re^{-r}$.

7.2.210 已知函数 $F_i(x)$ $(i=1,2,3)$ 可微，$A=|a_{ij}|$ 是一个三阶函数行列式，其中 $a_{ij}=F_i(x_j)$，$i,j=1,2,3$，x_3 是由方程 $x_2^3+x_3+\sin x_2x_3=1$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial A}{\partial x_1},\frac{\partial A}{\partial x_2}$ 在 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$ 处的值.

解 令 $G(x_2,x_3)=x_2^3+x_3+\sin x_2x_3-1$，则

$$\frac{dx_3}{dx_2}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x_2}}{\frac{\partial G}{\partial x_3}},$$

而 $\frac{\partial G}{\partial x_2}=2x_2+x_3\cos x_2x_3$ $\frac{\partial G}{\partial x_3}=1+x_2\cos x_2x_3$，故

$$\frac{dx_3}{dx_2}=-\frac{2x_2+x_3\cos x_2x_3}{1+x_2\cos x_2x_3}.$$

当 $x_2=1,x_3=0$ 时，$\frac{dx_3}{dx_2}=-1$，而 $A=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}$，$j=1,2$.

$$\frac{\partial A}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{3}a_{i1}A_{i1}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1}A_{i1}=\begin{vmatrix}F_1'(x_1) & F_1(x_2) & F_1(x_3)\\ F_2'(x_1) & F_2(x_2) & F_2(x_3)\\ F_3'(x_1) & F_3(x_2) & F_3(x_3)\end{vmatrix}.$$

当 $x_1=0,x_2=1,x_3=0$ 时，$\frac{\partial A}{\partial x_1}=\begin{vmatrix}F_1'(0) & F_1(1) & F_1(0)\\ F_2'(0) & F_2(1) & F_2(0)\\ F_3'(0) & F_3(1) & F_3(0)\end{vmatrix}$，

$$\frac{\partial A}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\sum_{i=1}^{3}a_{i2}A_{i2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_2}(a_{i2}A_{i2})=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2}A_{i2}+a_{i2}\frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2}A_{i2}+\sum_{i=1}^{3}a_{i2}\frac{\partial A_{i2}}{\partial x_2}$$

$$=\begin{vmatrix}F_1(x_1) & F_1'(x_2) & F_1(x_3)\\ F_2(x_1) & F_2'(x_2) & F_2(x_3)\\ F_3(x_1) & F_3'(x_2) & F_3(x_3)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_1(x_1) & F_1(x_2) & F_1'(x_3)\frac{dx_3}{dx_2}\\ F_2(x_1) & F_2(x_2) & F_1'(x_3)\frac{dx_3}{dx_2}\\ F_3(x_1) & F_3(x_2) & F_3'(x_3)\frac{dx_3}{dx_2}\end{vmatrix}.$$

当 $x_1=0,x_2=1,x_3=0$ 时，

$$\frac{\partial A}{\partial x_2}=\begin{vmatrix}F_1(0) & F_1'(1) & F_1(0)\\ F_2(0) & F_2'(1) & F_2(0)\\ F_3(0) & F_3'(1) & F_3(0)\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}F_1(0) & F_1(1) & F_1'(0)\\ F_2(0) & F_2(1) & F_2'(0)\\ F_3(0) & F_3(1) & F_3'(0)\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}F_1(0) & F_1(1) & F'_1(0)\\ F_2(0) & F_2(1) & F_2'(0)\\ F_3(0) & F_3(1) & F_3'(0)\end{vmatrix}=\left.\frac{\partial A}{\partial x_1}\right|_{(0,1,0)}.$$

7.2.211　一正圆锥的半径以 7cm/分的速率增大，而它的高以 20cm/分的速率减小，求当半径 $r=45$cm，高 $h=100$cm 时，该正圆锥体积的变化率，这时体积是在增大还是减小？

解　正圆锥的体积 $V=\pi r^2h/3$，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{2}{3}\pi rh\frac{dr}{dt}+\frac{1}{3}\pi r^2\frac{dh}{dt},$$

又 $\frac{dr}{dt}=7$(cm/分)，$\frac{dh}{dt}=-20$(cm/分)，故当 $r=45$(cm)，$h=100$(cm) 时，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\pi\times45\times100\times7+\frac{\pi}{3}\times45^2\times(-20)$$

$$=7500(\text{cm}^3/\text{分})$$

这时体积是在增大.

§3 多元函数微分学的几何应用

内容提要

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 设空间曲线的参数方程为

$$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=w(t),$$

且 $\varphi(t),\psi(t),w(t)$ 都是 t 的可微函数，则曲线在参数 $t=t_0$ 的对应点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{w'(t_0)},$$

和

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+w'(t_0)(z-z_0)=0,$$

其中 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),w'(t_0)$ 不全为零.

(2) 若曲线方程为

$$y=\psi(x),z=w(x),$$

并设 $\psi(x),w(x)$ 都是可微函数，则曲线在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{w'(t_0)},$$

和 $$(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+w'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(3) 若曲线方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

假定

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0},\quad\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_{P_0},\quad\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_{P_0}$$

不全为零，且 F、G 均为可微函数，则曲线在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方

程和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}}$$

和

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0.$$

2. 空间曲面的切平面与法线

(1) 设空间曲面的方程为 $z=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 为可微函数，则曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程和过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程分别为

$$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0),$$

和
$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

(2) 若曲面方程为 $F(x,y,z)=0$，它在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微则曲面在点 P_0 处的切平面方程和通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程分别为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

和
$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

(3) 若曲面方程为 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=w(u,v)$，并且 φ,ψ,w 都是可微函数，则曲面在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)[x_0=\varphi(u_0,v_0),y_0=\psi(u_0,v_0),z=w(u_0,v_0)]$ 处的切平面方程和通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线方程分别为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \psi_u(u_0,v_0) & \psi_u(u_0,v_0) & w_u(u_0,v_0) \\ \varphi_v(u_0,v_0) & \psi_v(u_0,v_0) & w_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0,$$

和
$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} \psi_u & w_u \\ \psi_v & w_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} w_u & \varphi_u \\ w_v & \varphi_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}_{(u_0,v_0)}}.$$

问 题 与 解 答

1. 空间曲线的切线与法平面

7.3.1 求曲线 $x = a\cos\alpha\cos t, y = a\sin\alpha\cos t, z = a\sin t$ 在点 $t = t_0$ 处的切线与法平面方程.

解 设曲线 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = w(t)$ 在点 $t = t_0$ 的切向量为

$$\mathbf{s}(t_0) = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), w'(t_0)\}.$$

在本题中，曲线在参数 $t = t_0$ 的对应点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0 = \varphi(t_0) = a\cos\alpha\cos t_0,$$

$$y_0 = \psi(t_0) = a\sin\alpha\cos t_0,$$

$$z_0 = \omega(t_0) = a\sin t_0,$$

$$\mathbf{s}(t_0) = \{-a\cos\alpha\sin t_0, -a\sin\alpha\sin t_0, a\cos t_0\}.$$

于是，所求的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0} = \frac{y - y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0} = \frac{z - z_0}{a\cos t_0},$$

即

$$\frac{x - x_0}{-\cos\alpha\sin t_0} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha\sin t_0} = \frac{z - z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为

$$(-a\cos\alpha\sin t_0)(x - x_0) + (-a\sin\alpha\sin t_0)(y - y_0) + a\cos t_0(z - z_0) = 0,$$

以 x_0、y_0、z_0 的值代入上式，化简整理得

$$x\cos\alpha\sin t_0 x + \sin\alpha\sin t_0 y - \cos t_0 z = 0,$$

即法平面通过原点.

7.3.2 试写出曲线 $x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t, z = c\cos^2 t$ 在已知点 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线和法平面方程.

解 曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 的对应点 P_0 的坐标和在该点的切向量分别为

$$x_0 = a\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}, \quad y_0 = b\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{b}{2},$$

$$z_0 = c\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{c}{2}, \quad \mathbf{s} = \{a, 0, -c\}$$

于是，切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-\dfrac{a}{2}}{a}=\dfrac{z-\dfrac{c}{2}}{-c},\\ y=\dfrac{b}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1,\\ y=\dfrac{b}{2};\end{cases}$$

法平面方程为 $\quad a(x-\dfrac{a}{2})+(-c)(z-\dfrac{c}{2})=0,$

即
$$ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2).$$

7.3.3　求曲线 $y=x,z=x^2$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

解　取 x 为参数，则曲线方程为

$$x=x,y=x,z=x^2.$$

于是，曲线在点 M 处的切向量为 $\mathbf{s}=\{1,1,2\}$，切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2};$$

法平面方程为 $\quad (x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$

即
$$x+y+2z=4.$$

7.3.4　求曲线 $x^2+z^2=10,y^2+z^2=10$ 在点 $M(1,1,3)$ 处的切线和法平面方程.

解　当曲线以两个曲面方程

$$F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$$

的交线形式给出时，可先求出两曲面在交点处的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=\{F_x',F_y',F_z'\},\boldsymbol{G}=\{G_x',G_y',G_z'\},$$

则曲线在该点处的切向量为

$$\mathbf{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$\boldsymbol{n}_1=\{2,0,6\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{0,2,6\},$$
$$\mathbf{s}=\{2,0,6\}\times\{0,2,6\}=\{-12,-12,4\}.$$

于是，在点 $M(1,1,3)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{-12}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z-3}{4},$$

或 $$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1};$$

法平面方程为 $-12(x-1)-12(y-1)+4(z-3)=0$,

即 $3x+3y-z=3$.

7.3.5 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

解 $F=x^2+y^2+z^2-6=0, G=x+y+z=0$,

$\boldsymbol{n}_1=\{2,-4,2\}, \quad \boldsymbol{n}_2=\{1,1,1\}$,

$\boldsymbol{s}=\{2,-4,2\}\times\{1,1,1\}=\{-3,0,3\}$.

于是,在点 M 处的切线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}\\ y=-2\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+z=2,\\ y+z=0;\end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1)-(z-1)=0 \text{ 或 } x-z=0.$$

7.3.6 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点,使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 曲线在所求点处的切向量为 $\boldsymbol{s}(t)=\{1,2t,3t^2\}$,已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,2,1\}$. 按题意,应有

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=\{1,2t,3t^2\}\cdot\{1,2,1\}=1+4t+3t^2=0.$$

解上式,得 $t=-1$ 及 $t=-\frac{1}{3}$. 于是,所求的点为

$$P_1(-1,1,-1),\ P_2\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right).$$

7.3.7 求曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$$

在点 $(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

解法1 设

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x, G(x,y,z)=2x-3y+5z-4$,

则在点 $(1,1,1)$ 处可求得

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_{(1,1,1)}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 5\end{vmatrix}=16,$$

$$\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

故所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1},$$

所求的法平面方程为

$$16(x-1) + 9(y-1) - (z-1) = 0.$$

即
$$16x + 9y - z - 24 = 0.$$

解法 2　直接对所给曲线方程两端微分，得

$$\begin{cases} (2x-3)dx + 2ydy + 2zdz = 0. \\ 2dx - 3dy + 5dz = 0. \end{cases}$$

解上面方程组可得

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2z & 2x-3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2x-3 & 2y \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= (10y + 6z) : (4z - 10x + 15) : (9 - 6x - 4y).$$

而曲线在点(1,1,1)处切向量的方向数之比为

$$dx : dy : dz = 16 : 9 : -1,$$

故所给曲线在点(1,1,1)处的切线方程为

$$\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$16x + 9y - z = 24.$$

7.3.8　求过直线$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$的平面使之平行于曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2} \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$在点(1, −1,2)的切线.

解　设过直线的平面束方程为

$$(x + 2y + z - 1) + \lambda(x - y - 2z + 3) = 0.$$

其中λ是待定的系数.该平面束的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{1+\lambda, 2-\lambda, 1-2\lambda\}.$$

而曲线在点(1, −1,2)的切线的方向向量为

$$s=\left\{\begin{vmatrix}2y & -z\\1 & 2\end{vmatrix}_{(1,-1,2)},\begin{vmatrix}-z & 2x\\2 & 1\end{vmatrix}_{(1,-1,2)},\begin{vmatrix}2x & 2y\\1 & 1\end{vmatrix}_{(1,-1,2)}\right\}$$
$$=\{-2,-6,4\}.$$

由条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$ 得 $4\lambda+10=0,\lambda=-\dfrac{5}{2}$. 故所求的平面方程是

$$3x-9y-12z+17=0.$$

7.3.9 求曲线 $x^2-z=0,3x+2y+1=0$ 上的点 $(1,-2,1)$ 处的法平面与直线 $9x-7y-21z=0,x-y-z=0$ 间的夹角.

解 所给曲线方程为两曲面的交线,用参数形式表示为

$$x=x,y=-\frac{1}{2}(3x+1),z=x^2.$$

而它在定点 $(1,-2,1)$ 处的法平面方程为

$$(x-1)-\frac{3}{2}(y+2)+2(z-1)=0,$$

即
$$2(x-1)-3(y+2)+4(z-1)=0.$$

又知所给直线的方向数为 $\begin{vmatrix}-7 & -21\\-1 & -1\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}-21 & 9\\-1 & 1\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}9 & -7\\1 & -1\end{vmatrix}$,即 $-14,-12,-2$.

设所求夹角为 θ,由空间解析几何知

$$\sin\theta=\frac{|2\times(-14)+(-3)\times(-12)+4\times(-2)|}{\sqrt{(-14)^2+(-12)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=0,$$

故 $\theta=0$,即此法平面与所给直线平行.

7.3.10 已知曲线

$$z=f(x,y),\qquad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

其中 f 为可微函数. 求曲线上 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的切线与 oxy 平面所成角的正切.

解法 1 将曲线看作由参数方程

$$x=x,y=\psi(x)=y_0+(x-x_0)\mathrm{tg}\alpha,z=w(x)=f[x,\psi(x)]$$

给出,则切向量为

$$\begin{aligned}s&=\{1,\psi'(x_0),w'(x_0)\}\\&=\{1,\mathrm{tg}\alpha,f_x'[x_0,\psi(x_0)]+f_y'[x_0,\psi(x_0)]\psi_x'(x_0)\}\\&=\{1,\mathrm{tg}\alpha,f_x'(x_0,y_0)+\mathrm{tg}\alpha\cdot f_y'(x_0,y_0)\}.\end{aligned}$$

于是,曲线上 M_0 点的切线与 oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{w'(x_0)}{\sqrt{1+\varphi'^2(x_0)}}=\frac{f_x'(x_0,y_0)+\mathrm{tg}\alpha\cdot f_y'(x_0,y_0)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

$$=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

解法 2　将曲线看作两曲面

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0,G(x,y,z)=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}-\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=0$$

的交线，则该交线在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}-f_y'(x_0,y_0) & 1\\ -\frac{1}{\sin\alpha} & 0\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}1 & -f_x'(x_0,y_0)\\ 0 & \frac{1}{\cos\alpha}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}-f_x'(x_0,y_0) & -f_y'(x_0,y_0)\\ \frac{1}{\cos\alpha} & -\frac{1}{\sin\alpha}\end{vmatrix}},$$

即　$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha},$$

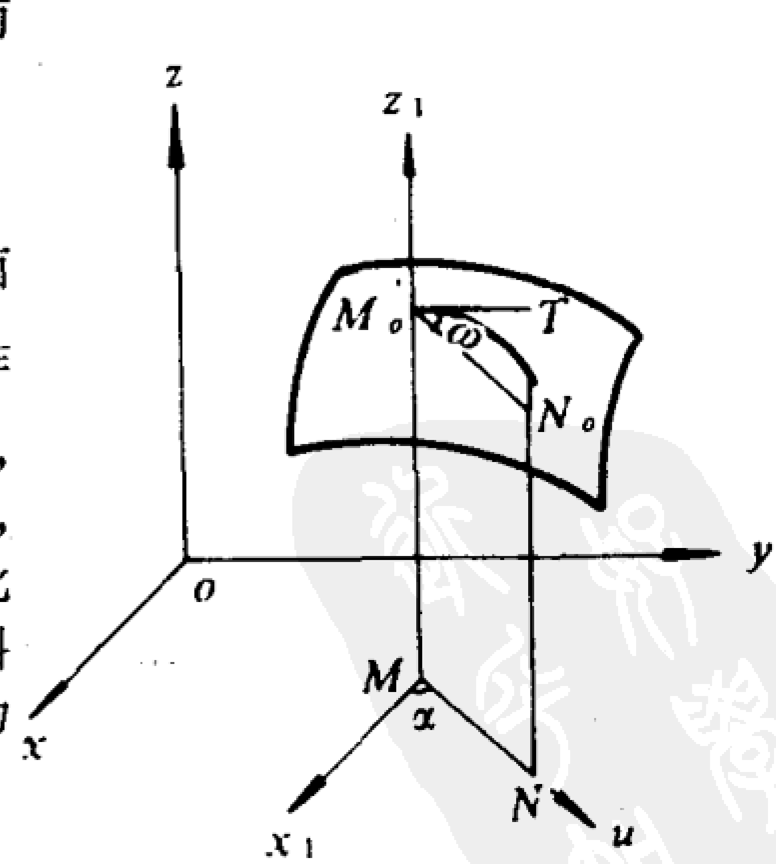
问题要求的是这条切线 M_0T 与直线 M_0N_0 的交角的正切 $\mathrm{tg}w$（见图），而直线 M_0N_0 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{z-z_0}{0},$$

把原点移到 $M_0(x_0,y_0,0)$，且将平面 $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}$ 与 xoy 平面的交线作为 u 轴，这里 MN 与 ox 轴的夹角为 α，过 M 且平行于 z 轴的直线作为 z_1 轴，于是切线 M_0T 落在平面 uMz_1 上，因此在平面 uMz_1 上 $\mathrm{tg}w$ 就是直线 M_0T 的斜率. 设 u 轴上的点 N 关于 u 轴的坐标为 u，而关于 xoy 平面的坐标为 (x,y)，则

$$u=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}.$$

故在平面 uMz_1 上，M_0T 的方程为



7.3.10 题图

$$u=\frac{z-z_0}{f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha},$$

即 $$z-z_0=[f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha]\cdot u,$$

由此得 $$\mathrm{tg}w=f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

7.3.11 求函数

$$u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xyz}$$

在点 $M(-1,3,-3)$ 沿曲线 $x=-t^2,y=3t^2,z=-3t^3$ 在该点的切线方向上的导数.

解 所给曲线在任一点 t 的切线的方向数为

$$\frac{dx}{dt}=-2t,\frac{dy}{dt}=6t,\frac{dz}{dt}=-9t^2,$$

故在点 $M(-1,3,-3)$ 处的方向数为 $-2,6,-9$,因此在点 M 的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{2}{11},\cos\beta=\frac{6}{11},\cos\gamma=-\frac{9}{11}.$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{yz\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2yz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{xz\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy^2z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xyz^2}.$$

于是 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\left(-\frac{2}{11}\right)+\left(-\frac{1}{27\sqrt{10}}\right)\cdot\frac{6}{11}+\frac{\sqrt{10}}{27}\cdot\left(-\frac{9}{11}\right)$$

$$=-\frac{50}{99\sqrt{10}}.$$

7.3.12 证明:(1) 螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ 的切线与 oz 轴的夹角形成定角;(2) 若螺旋线与 oz 轴的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 时,确定 a、b 的一组值.

证 (1) 螺旋线上任意点处的切线的方向向量为

$$s_1 = \{x_t', y_t', z_t'\} = \{-a\sin t, a\cos t, b\},$$

而 oz 轴的方向向量为 $s_2 = \{0, 0., 1\}$.

设螺旋线的切线与 oz 轴的夹角为 γ，则

$$\cos\gamma = \frac{-a\sin t \cdot 0 + a\cos t \cdot 0 + b \cdot 1}{\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

故 $\cos\gamma$ 为常数，即 γ 为常数，于是，曲线的切线与 oz 轴形成定角.

(2)　因 $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

所以得　　$a = 1, b = \sqrt{3}$.

7.3.13　证明：曲线

$$x = ae^t\cos t, y = ae^t\sin t, z = ae^t$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证　圆锥 $x^2 + y^2 = z^2$ 的顶点在原点，过圆锥上任一点 $P(x,y,z)$ 的母线也过原点. 因此，母线的方向向量为 $s_1 = \{x, y, z\}$.

曲线在点 P 的切向量为

$$s_2 = \{x', y', z'\} = \{ae^t(\cos t - \sin t), ae^t(\sin t + \cos t), ae^t\}$$

$$= \{x - y, x + y, z\}.$$

于是，曲线与锥面各母线相交的角度便是它们方向向量 s_1 与切向量 s_2 相交的角度，即

$$\cos(\hat{s_1, s_2}) = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1||s_2|}$$

$$= \frac{x(x-y) + y(x+y) + z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}$$

$$= \frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

故交角相同.

7.3.14　设 $u(x,y) = c_1, v(x,y) = c_2$ 是平面上两曲线族，c_1, c_2 是任意常数，而且对于平面上任何点 (x,y) 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明这两族曲线是正交的.

证 设 k_1、k_2 是两族曲线在任意点 $P(x,y)$ 处的切线斜率，则

$$k_1 = \frac{dy}{dx}\bigg|_P = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\bigg|_P, \quad k_2 = \frac{dy}{dx}\bigg|_P = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}\bigg|_P.$$

于是由题设即知 $k_1k_2 = -1$，即两条切线互相垂直. 由点 $P(x,y)$ 的任意性，故两族曲线正交.

7.3.15 证明：曲面 $F_1(x,y,z)=0, F_2(x,y,z)=0, F_3(x,y,z)=0$ 切同一直线 l 于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的条件是函数 F_1,F_2,F_3 的函数行列式

$$\begin{vmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} = 0.$$

证 设直线 l 的一组方向数为 $\{A,B,C\}$，曲面 F_1,F_2,F_3 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线的方向数分别为

$$\{F_{1x},F_{1y},F_{1z}\}_{P_0}, \{F_{2x},F_{2y},F_{2z}\}_{P_0} \text{ 及 } \{F_{3x},F_{3y},F_{3z}\}_{P_0}.$$

由于各曲面的公切线与各曲面在该点的法线均垂直，故

$$\begin{cases} \{A,B,C\} \cdot \{F_{1x},F_{1y},F_{1z}\} = 0, \\ \{A,B,C\} \cdot \{F_{2x},F_{2y},F_{2z}\} = 0, \\ \{A,B,C\} \cdot \{F_{3x},F_{3y},F_{3z}\} = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} AF_{1x} + BF_{1y} + CF_{1z} = 0, \\ AF_{2x} + BF_{2y} + CF_{2z} = 0, \\ AF_{3x} + BF_{3y} + CF_{3z} = 0. \end{cases}$$

要使上述方程组有非零解，必须

$$\begin{vmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} = 0.$$

问题得证.

2. 空间曲面的切平面与法线

7.3.16 求曲面 $z = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$ 在点 $M_0(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的切平面与法线方程.

解 因曲面由显式方程 $z = f(x,y)$ 给出，则其法向量为 $\boldsymbol{n} = \{f_x, f_y, -1\}$.

在本题中，$n=\{-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},-1\}_{M_0}=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\}$. 于是，在点 M_0 处的切平面方程为

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1),$$

或
$$z=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-y);$$

过点 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1},$$

即
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

7.3.17 求曲面 $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ 在点 $M_0(2,2,1)$ 处的切平面与法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8=0$，则切平面的法向量为 $n=\{F_x',F_y',F_z'\}$.

本题中，在点 M_0 处的法向量为

$$n=\{\frac{1}{z}2^{\frac{x}{z}}\ln 2,\frac{1}{z}2^{\frac{y}{z}}\ln 2,(x\cdot 2^{\frac{x}{z}}+y\cdot 2^{\frac{y}{z}})(-\frac{1}{z^2})\ln 2\}_{M_0}$$
$$=4\ln 2\{1,1,-4\}.$$

于是，在 M_0 处的切平面方程为

$$(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0,$$

或
$$x+y-4z=0;$$

过 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

7.3.18 求曲面 $x=ue^v,y=ve^u,z=u+v$ 在 $u=v=0$ 处的切平面方程.

曲面由参数方程给出，可用三种方法解决该问题.

解法 1 直接用公式求解.

当 $u=v=0$ 时，$x=y=z=0$，又

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} ve^u & 1 \\ e^u & 1 \end{vmatrix}_{(0,0)} = e^u(v-1)\Big|_{(0,0)} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & e^v \\ 1 & ue^v \end{vmatrix}_{(0,0)} = e^v(u-1)\Big|_{(0,0)} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} e^v & ve^u \\ ue^v & e^u \end{vmatrix}_{(0,0)} = e^{u+v}(1-uv)\Big|_{(0,0)} = 1,$$

故所求的切平面方程为　$x + y - z = 0.$

解法 2　利用微分求解.

$$dx = e^v du + ue^v dv \tag{1}$$

$$dy = ve^u du + e^u dv \tag{2}$$

$$dz = du + dv \tag{3}$$

由(1)、(2)式解得

$$du = \frac{e^u dx - ue^v dy}{e^{u+v}(1-uv)},\ dv = \frac{-ve^u dx + e^v dy}{e^{u+v}(1-uv)},$$

将 du, dv 代入(3)式，得

$$dz = \frac{1}{e^{u+v}(1-uv)}[e^u(1-v)dx + e^v(1-u)dy],$$

于是　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^u(1-v)}{e^{u+v}(1-uv)},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{e^v(1-u)}{e^{u+v}(1-uv)},$

当 $u = v = 0$ 时，$x = y = z = 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

故所求的切平面方程为

$$z - 0 = 1 \cdot x + 1 \cdot y,$$

即

$$z = x + y.$$

解法 3　将 z 看作是 x, y 的函数，u, v 是中间变量，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \tag{4}$$

又在原方程的一、二两式两边分别对 x、y 求导，得

$$\begin{cases}1 = e^v \dfrac{\partial u}{\partial x} + ue^v \dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0 = ve^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + e^u \dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

$$\begin{cases}0 = e^v \dfrac{\partial u}{\partial y} + ue^v \dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1 = ve^u \dfrac{\partial u}{\partial y} + e^u \dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}$$

从中解出$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$、然后代入(4)式求出$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$,再将$u = v = 0$代入,同样可得切平面方程为

$$z = x + y.$$

7.3.19 求曲面$x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$在$M_0(u_0,v_0)$处的切平面及法线方程.

解 容易求得

$$x_u'\big|_{M_0} = \cos v_0,\qquad x_v'\big|_{M_0} = -u_0\sin v_0,$$

$$y_u'\big|_{M_0} = \sin v_0,\qquad y_v'\big|_{M_0} = u_0\cos v_0,$$

$$z_u'\big|_{M_0} = 0,\qquad z_v'\big|_{M_0} = a.$$

曲面上对应于参数u_0,v_0的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$为$(u_0\cos v_0,u_0\sin v_0,av_0)$,故在$M_0$处曲面的切平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - u_0\cos v_0 & y - u_0\sin v_0 & z - av_0 \\ \cos v_0 & \sin v_0 & 0 \\ -u_0\sin v_0 & u_0\cos v_0 & a \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$(a\sin v_0)x - (a\cos v_0)y + u_0z - au_0v_0 = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x - u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \frac{y - u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}.$$

7.3.20 求曲面$x = a\cos\psi\cos\varphi, y = b\cos\psi\sin\varphi, z = c\sin\varphi$在点$M_0(\varphi_0,\psi_0)$处的切平面方程及法线方程.

解法1 曲面由参数方程

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$$

给出时,在曲面上分别令$u = u_0, v = v_0$,得到的两条曲线的切向量分别为

$$s_1=\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\},\qquad s_2=\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\},$$

则切平面的法向量为

$$n=s_1\times s_2=\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial u}\\\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}\\\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中,$u=\varphi,v=\psi$,则

$$\begin{aligned}s_1&=\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\}_{M_0}=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0,b\cos\psi_0\cos\varphi_0,0\}\\&=\cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0,b\cos\varphi_0,0\},\\s_2&=\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\}_{M_0}=\{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0,-b\sin\psi_0\sin\varphi_0,c\cos\psi_0\}.\end{aligned}$$

$$n=s_1\times s_2=abc\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\frac{\sin\psi_0}{c}\}.$$

于是切平面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0)+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}(y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0)+\frac{\sin\psi_0}{c}(z-c\sin\psi_0)=0,$$

即 $$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}x+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}y+\frac{\sin\psi_0}{c}=1,$$

法线方程为

$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}.$$

解法 2 将曲面方程消去 φ 和 ψ 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

上式两边对 x 求偏导,得 $\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},$$

同理可得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

故得 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\frac{c\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a\sin\psi_0},\quad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\frac{c\cos\psi_0\cos\varphi_0}{b\sin\psi_0}.$$

于是,切平面方程为

$$z - z_0 = -\frac{c\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a\sin\psi_0}(x - x_0) - \frac{c\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b\sin\psi_0}(y - y_0),$$

即 $\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}x + \frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b} + \frac{\sin\psi_0}{c} = 1.$

法线方程为

$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0 - b}{ac} = \frac{z\csc\psi_0 - c}{ab}.$$

7.3.21　过直线

$$\begin{cases}10x + 2y - 2z = 27,\\ x + y - z = 0\end{cases}$$

作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面，求其方程.

解　设 $F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - z^2 = 27$，则

$$F_x' = bx, F_y' = 2y, F_z' = -2z,$$

过直线的平面束方程为

$$(10x + 2y - 2z - 27) + \lambda(x + y - z) = 0,$$

其法向量为　$n_1 = \{10 + \lambda, 2 + \lambda, -2 - \lambda\}$.

设所求的切平面之切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则过切点的曲面 $F(x,y,z) = 0$ 的法向量为 $n_2 = \{6x_0, 2y_0, -2z_0\}$，由 $n_1 /\!/ n_2$，点 M 在曲面及平面束上，于是有

$$\begin{cases}\frac{10 + \lambda}{6x_0} = \frac{2 + \lambda}{2y_0} = \frac{-2 - \lambda}{-2z_0},\\ 3x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 27 = 0,\\ (10 + \lambda)x_0 + (2 + \lambda)y_0 - (2 + \lambda)z_0 - 27 = 0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $x_0 = 3, y_0 = 1, z_0 = 1, \lambda = -1$，或 $x_0 = -3, y_0 = -17, z_0 = -17, \lambda = -19$，故所求的切平面方程为

$$18(x - 3) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0,$$

或　$-18(x + 3) - 34(y + 17) + 34(z + 17) = 0,$

即　$9x + y - z - 27 = 0.$

或　$9x + 17y - 17z + 27 = 0.$

7.3.22　在曲面 $z = xy$ 上找一点，使这点的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$，并写出该法线的方程.

解　设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为所求之点，令 $F(x,y,z) = xy - z$，则

$$F_x'\big|_{M_0} = y_0, F_y'\big|_{M_0} = x_0, F_z'\big|_{M_0} = -1.$$

即法线方向向量 $s = \{y_0, x_0, -1\}$.

而已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,3,1\}$，因要求法线垂直于平面，即要求 $\boldsymbol{s}\ /\!/\ \boldsymbol{n}$，故

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1},$$

于是得　$x_0=-3, y_0=-1, z_0=3$，故所求的点为 $M_0(-3,-1,3)$. 且所求的过 M_0 点的法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

7.3.23　求平面 $lx+my+nz=p$ 与曲面 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ 相切的条件.

解　设平面与曲面相切的切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，则在 P 点它们的法向量共线，且其坐标满足两方程，即

$$lx_0+my_0+nz_0=p, \tag{1}$$

$$Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2=1, \tag{2}$$

$$\{l,m,n\}=k\{2Ax_0,2By_0,2Cz_0\}, \tag{3}$$

用 $\{x_0,y_0,z_0\}$ 与(3) 式两边作数量积，得

$$lx_0+my_0+nz_0=2k(x_0^2+y_0^2+z_0^2).$$

将(1)、(2) 式代入上式，得 $2k=p$，于是(3) 式写为

$$\{l,m,n\}=p\{Ax_0,By_0,Cz_0\},$$

即有　$$x_0=\frac{l}{pA},\ y_0=\frac{m}{pB},\ z_0=\frac{n}{pC}. \tag{4}$$

将(4) 式代入(1) 式，则得所求之相切条件为

$$\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}=p^2.$$

7.3.24　求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

解　曲面上任一点 (x,y,z) 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{2x,4y,6z\}$，已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\{1,4,6\}$. 按题设，应有 $\boldsymbol{n}_1\ /\!/\ \boldsymbol{n}_2$，即

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6}=2\lambda,$$

$$x=\lambda, y=2\lambda, z=2\lambda.$$

将 x、y、z 值代入方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 中，得 $\lambda=\pm1$，故曲面上满足要求的切点为$(\pm1,\pm2,\pm2)$. 于是，所求的切面方程为

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0,$$

及 $$(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0,$$
即 $$x+4y+6z=\pm 21.$$

7.3.25　求曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 的与平面 $x+y+z=0$ 平行的切平面方程.

解　设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1$，则过曲面上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

即 $$x_0x+y_0y-z_0z-1=0.$$

要使此平面与已知平面平行，必须

$$x_0=y_0=-z_0.$$

将此关系式代入曲面方程，得

$$x_0=y_9=-z_0=\pm 1.$$

故所求的切平面方程为

$$x+y+z-1=0,$$

或 $$x+y+z+1=0.$$

7.3.26　在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解　已知曲面的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{2(x+y+z),2(x+2y+2z),2(x+2y+3z)\}.$$

由题设知，当

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2y+2z=0, \\ x+2y+3z=\lambda, \end{cases}$$

时，$\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$ 平行，即切平面平行于 xoy 平面. 解上述方程组，得 $x=0,y=-\lambda,z=\lambda$. 将求得的 x,y,z 值代入所给的曲面方程，得 $\lambda=\pm 2\sqrt{2}$. 于是，切平面平行于 xoy 坐标平面的切点为$(0,\mp 2\sqrt{2},\pm 2\sqrt{2})$.

用同样方法可求得切平面平行于 oyz 坐标平面及 oxz 坐标平面的诸切点分别为$(\mp 4,\pm 2,0)$ 及$(\mp 2,\pm 4,\mp 2)$.

7.3.27　圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 与曲面 $bz=xy$ 在公共点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 相交成怎样的角？

解　两曲面在 M_0 点的法向量分别是

$$\boldsymbol{n}_1 = \{2x_0, 2y_0, 0\}, \boldsymbol{n}_2 = \{y_0, x_0, -b\}.$$

于是，交角 φ 满足

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{2x_0y_0 + 2x_0y_0}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + b^2}}$$

$$= \frac{4bz_0}{2a \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}},$$

故

$$\varphi = \arccos\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

7.3.28　证明：曲面 $z = xf(\frac{y}{z})$ 上任一点 P 的切平面都通过原点.

证　设曲面上任一点 P 的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，则 $z_0 = x_0 f(\frac{y_0}{x_0})$，

$$z_x'|_P = f(\frac{y_0}{x_0}) + x_0 f'(\frac{y_0}{x_0}) \cdot (-\frac{y_0}{x_0^2}) = f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0}),$$

$$x_y'|_P = x_0 f'(\frac{y_0}{x_0}) \cdot \frac{1}{x_0} = f'(\frac{y_0}{x_0}),$$

故曲面在任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$z - z_0 = [f(\frac{y_0}{x_0} - \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0})](x - x_0) + f'(\frac{y_0}{x_0})(y - y_0)$$

$$= [f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0})]x + f'(\frac{y_0}{x_0})y + y_0 f'(\frac{y_0}{x_0})$$

$$- y_0 f'(\frac{y_0}{x_0}) - x_0 f(\frac{y_0}{x_0})$$

$$= [f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0})]x + f'(\frac{y_0}{x_0})y - z_0,$$

即

$$[f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0})]x + f'(\frac{y_0}{x_0})y - z = 0.$$

故切平面通过原点.

7.3.29　证明：曲面 $f(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}) = 0$ 的切平面总通过一定点.

证　设 $u = \frac{x-a}{z-c}$，　$v = \frac{y-b}{z-c}$，则曲面上任一点的法向量为

$$n = \{\frac{1}{z-c}f_u, \frac{1}{z-c}f_v, -\frac{1}{(z-c)^2}[(x-a)f_u + (y-b)f_v]\},$$

于是切平面方程为

$$\frac{f_u'}{z-c}(X-x) + \frac{f_v'}{z-c}(Y-y) - \frac{(x-a)f_u' + (y-b)f_v'}{(z-c)^2}(Z-z) = 0,$$

即
$$[(z-c)(X-x) - (x-a)(Z-z)]f_u' + [(z-c)(Y-y) - (y-b)(Z-z)]f_v' = 0,$$

不论(x,y,z)如何（当然要以满足曲面方程为前提），$(X,Y,Z) = (a,b,c)$都满足切平面方程，即切平面都通过定点．

7.3.30　证明：锥面$z = \sqrt{x^2+y^2}+3$的所有切平面都通过锥面的顶点．

证　$z_x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，　$z_y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

锥面上任一点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程为

$$-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x-x_0) - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(y-y_0) + (z-z_0) = 0,$$

其中$\sqrt{x_0^2+y_0^2} = z_0 - 3$，代入上式整理得

$$-x_0x - y_0y + (z_0-3)(z-3) = 0.$$

因为顶点$(0,0,3)$满足上面方程，故得证．

7.3.31　证明：曲面$x^2+y^2+z^2-xz+1=0$的切平面不平行于直线

$$\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y+z-8=0. \end{cases}$$

证　直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{-1,0,1\},$$

而曲面上任一点(x,y,z)的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{2z-z, 2y, 2z-x\}.$$

若过点(x,y,z)的切平面与直线平行，则应有

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n} = -1\cdot(2x-z) + 0\cdot 2y + 1\cdot(2z-x) = 0,$$

即应有 $x=z$. 将 $x=z$ 代入曲面方程中,得

$$x^2+y^2+1=0,$$

显然在实数范围内,上述方程无解,故曲面的切平面不平行于直线.

7.3.32 证明:曲面

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a},\ (a>0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段的和为常量.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则曲面在该点的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0.$$

即

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z_0}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0},$$

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1,$$

则此切平面在坐标轴上所割下的诸线段(截距)分别为 $\sqrt{ax_0}$, $\sqrt{ay_0}$, $\sqrt{az_0}$,其和为

$$\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a,$$

因 a 为常数,故问题得证.

7.3.33 证明两曲面 $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$ 在其交点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处正交的条件为

$$(F_x'\big|_{M_0})(G_x'\big|_{M_0})+(F_y'\big|_{M_0})(G_y'\big|_{M_0})+(F_z'\big|_{M_0})(G_z'\big|_{M_0})=0,$$

并验证曲面 $x^2+y^2+z^2=ax$ 与 $x^2+y^2+z^2=by$ 互相正交.

证 所谓两曲面正交是指两曲面在它们交点处的法线互相垂直. 设在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处曲面 $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$,则

$$\boldsymbol{n}_1=\{F_x'\big|_{M_0},F_y'\big|_{M_0},F_z'\big|_{M_0}\},$$

$$\boldsymbol{n}_2=\{G_x'\big|_{M_0},G_y'\big|_{M_0},G_z'\big|_{M_0}\}.$$

因为两曲面正交,即 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,所以 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,即

$$(F_x'\big|_{M_0})(G_x'\big|_{M_0})+(F_y'\big|_{M_0})(G_y'\big|_{M_0})+(F_z'\big|_{M_0})(G_z'\big|_{M_0})=0.$$

故问题得证.

对于所给两个球面,令

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - ax = 0,$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - by = 0,$$

在其交点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处,

$$(F_x' \big|_{M_0})(G_x' \big|_{M_0}) + (F_y' \big|_{M_0})(G_y' \big|_{M_0}) + (F_z' \big|_{M_0})(G_z' \big|_{M_0})$$

$$= (2x_0 - a)2x_0 + 2y_0(2y_0 - b) + 2z_0 \cdot 2z_0$$

$$= 2[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + ax_0) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + by_0)] = 0.$$

可见这两个球面相互正交.

7.3.34　证明球坐标的坐标曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x\text{tg}\varphi$, 及 $x^2 + y^2 = z^2\text{tg}^2\theta$ 两两直交.

证　各曲面在其交点 $P(x,y,z)$ 处的法向量分别是

$$\boldsymbol{n}_1 = \{2x,2y,2z\}, \boldsymbol{n}_2 = \{\text{tg}\varphi, -1, 0\},$$

$$\boldsymbol{n}_3 = \{2x,2y,-2z\text{tg}^2\theta\}.$$

由于　$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 2x\text{tg}\varphi - 2y = 2y - 2y = 0,$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_3 = \varphi x^2 + 4y^2 - 4z^2\text{tg}^2\theta = 4z^2\text{tg}^2\theta - 4z^2\text{tg}^2\theta = 0,$$

$$\boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{n}_3 = 2x\text{tg}\varphi - 2y = 2y - 2y = 0,$$

故知这些曲面在其交点处分别两两直交.

7.3.35　证明:曲面 $F(nx - lz, ny - mz) = 0$ 在任一点处的切平面都平行于直线

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n}.$$

(其中 F 处处可微.)

证　令 $\xi = nz - lz$,　$\eta = ny - mz$,则

$$F_x' = nF_\xi' - 0 \cdot F_\eta' = nF_\xi'$$

$$F_y' = 0 \cdot F_\xi' + nF_\eta' = nF_\eta',$$

$$F_z' = -lF_\xi' - mF_\eta',$$

因　$lF_x' + mF_y' + nF_z' = nlF_\xi' + mnF_\eta' - lnF_\xi' - mnF_\eta' = 0,$

故曲面的切平面平行于所给直线.

7.3.36　试证曲面 $xyz = a^3 (a > 0)$ 的任一切平面与三坐标面所围成的四面体的体积为常数.

证　设 $F(x,y,z) = xyz - a^3$,则

$$F_x' = yz,\ F_y' = xz,\ F_z' = xy.$$

设(x_0,y_0,z_0)为曲面上任一点，则曲面在点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1,$$

它与三坐标平面所围成的四面体的体积为

$$v=\frac{1}{6}|3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0|=\frac{9}{2}a^3.$$

7.3.37　设$\varphi(x-az,y-bz)=0$确定的z是x、y的函数，φ可微，试求z_x',z_y'，并证明曲面$\varphi(x-az,y-bz)=0$上任一点处的切平面与直线$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$平行(其中$a,b$为常数).

解　设$u=x-az,v=y-bz$，则$\varphi(u,v)=0$. 将方程两边对x求偏导，得

$$\varphi_u'u_x'+\varphi_v'v_x'=\varphi_u'(1-az_x')+\varphi_v'(-bz_x')=0,$$

解之得
$$z_x'=\frac{\varphi_u'}{a\varphi_u'+b\varphi_v'};$$

同理可得
$$z_y'=\frac{\varphi_v'}{a\varphi_u'+b\varphi_v'}.$$

因为曲面$\varphi(x-az,y-bz)=0$上任一点$M(x,y,z)$处的切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{\varphi_x',\varphi_y',\varphi_z'\}$，而

$$\varphi_x'=\varphi_u',\varphi_y'=\varphi_v',\varphi_z'=-a\varphi_u'-b\varphi_v'.$$

又直线$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$的方向向量为$\boldsymbol{s}=\{a,b,1\}$. 因为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=a\varphi_x'+b\varphi_y'+1\cdot\varphi_z'=a\varphi_u'+b\varphi_v'-a\varphi_u'-b\varphi' v=0,$$

即$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，故曲面上任一点的切平面与直线$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$平行.

7.3.38　已知平面$lx+my+nz=p$与椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$相切，证明$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=p^2$.

证　设上述平面与椭球面相切于点$M_0(z_0,y_0,z_0)$，由于切平面的法向量为$\boldsymbol{n}_1=\{l,m,n\}$，椭球面上点$M_0$处的法线向量为$\boldsymbol{n}_2=\{\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\}$，而$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$共线，于是有$\boldsymbol{n}_2=\lambda\boldsymbol{n}_1(\lambda\neq 0$，实数)，即

$$\begin{cases}\dfrac{2x_0}{a^2}=\lambda l,\\ \dfrac{2y_0}{b^2}=\lambda m,\\ \dfrac{2z_0}{c^2}=\lambda n,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x_0=\dfrac{\lambda la^2}{2}\\ y_0=\dfrac{\lambda mb^2}{2},\\ z_0=\dfrac{\lambda nc^2}{2},\end{cases}$$

因为切点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 既在切平面上也在椭球面上，所以有

$$\begin{cases}l\dfrac{\lambda la^2}{2}+m\dfrac{\lambda mb^2}{2}+n\dfrac{\lambda nc^2}{2}=p,\\ \dfrac{1}{a^2}(\dfrac{\lambda la^2}{2})^2+\dfrac{1}{b^2}(\dfrac{\lambda mb^2}{2})^2+\dfrac{1}{c^2}(\dfrac{\lambda nc^2}{2})^2=1,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)\dfrac{\lambda}{2}=p, & (1)\\ (a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)\dfrac{\lambda^2}{4}=1. & (2)\end{cases}$$

(1) 式除以(2) 式可得，$\dfrac{2}{\lambda}=p$，故有

$$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2=\frac{2}{\lambda}p=p^2.$$

7.3.39　如果 $z=f(x,y)$ 有连续偏导数，且在各点处的法向量相同，则 $z-f(x,y)=0$ 必是一平面.

证　设 $z=f(x,y)$ 在各点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{f_x',f_y',-1\},$$

由题设，f_x',f_y' 均为常数，令 $f_x'=a_1,f_y'=a_2$，由中值定理得

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)\\&=a_1x+a_2y-a_1x_0-a_2y_0,\end{aligned}$$

于是

$$z-f(x,y)=z-f(x_0,y_0)-a_1x-a_2y+a_1x_0+a_2y_0=0,$$

即　$z-a_1x-a_2y+a_1x_0+a_2y_0-f(x_0,y_0)=0$,

或　$$Ax+By+z+0=0.$$

其中　$A=-a_1,B=-a_2,c=1,D=a_1x_0+a_2x_0-f(x_0,y_0)$,

故　$z-f(x,y)=0$ 是一个平面.

§ 4　二元函数的泰勒公式

内 容 提 要

设 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，(x_0+h, y_0+k) 为此邻域内任一点，则有二元函数的泰勒(Taylor)公式

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$
$$+ \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(2)}f(x_0,y_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(n)}f(x_0,y_0) + R_n,$$

其中记号

$(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$ 表示 $hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0)$，

$(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(2)}f(x_0,y_0)$ 表示

$h^2f_{xx}(x_0,y_0) + 2hkf_{xy}(x_0,y_0), + k^2f_{yy}(x_0,y_0)$，

……

$(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(n)}f(x_0,y_0)$ 表示 $\sum_{p=0}^{n} C_n^p h^p k^{n-p} \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^{n-p}}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

而 $R_n = \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{(n+1)}f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$，$(0<\theta<1)$ 称为拉格朗日型余项.

若取 $x_0 = y_0 = 0$，将 h、k 分别改写为 x、y，即可得到 n 阶麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x,y) = f(0,0) + (x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)$$
$$+ \frac{1}{2!}((x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^{(2)}f(0,0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})^{(n)}f(0,0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)}f(\theta x,\theta y),(0<\theta<1).$$

问题与解答

7.4.1　在点 $A(1,-2)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数

$$f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解　$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

而所有三阶偏导数均为零,因此有 $R_2(x,y)=0$.

在点 $A(1,-2)$ 处,有

$$f(1,-2)=5,\ \frac{\partial f}{\partial x}=0,\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

于是,

$$\begin{aligned}f(x,y)&=5+[(x-1)\cdot 0+(y+2)\cdot 0]\\&\quad+\frac{1}{2!}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2]\\&=5+2(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-(y+2)^2.\end{aligned}$$

7.4.2　当 $x=1,y=-1$ 变到 $x_1=1+h,y_1=-1+k$ 时,求函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量.

解　记 $A(1,-1),P(1+h,-1+k)$,则

$$f_x'|_A=(2xy+y^2-2y)|_A=1,$$

$$f_y'|_A=(x^2+2xy-2x)|_A=-3,$$

$$f_{xx}''|_A=2y|_A=-2,\quad f_{yy}''|_A=2x|_A=2,$$

$$f_{xy}''|_A=(2x+2y-2)|_A=-2.$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_A=\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_A=0,\quad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right|_A=\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right|_A=2.$$

而所有四阶偏导数均为零,因此 $R_3(x,y)=0$,于是,按泰勒公式得

$$\triangle f=f(P)-f(A)$$

$$= (h-3k)+\frac{1}{2\,!}(-2h^2-4hk+2k^2)+\frac{1}{3\,!}(6hk^2+6h^2k)$$
$$= (h-3k)+(h^2-2hk+k^2)+hk(h+k).$$

7.4.3　依 h 的乘幂把函数

$$F(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)]-f(x,y)$$

展开，准确到 h^4.

解　$$F(x,y)=\frac{1}{4}\{[f(x+h,y)-f(x,y)]+[f(x,y+h)-f(x,y)]+[f(x-h,y)-f(x,y)]+[f(x,y-h)-f(x,y)]\}$$

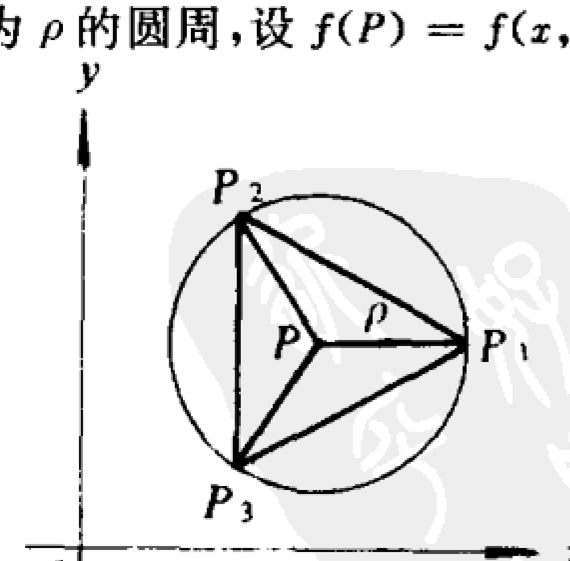
根据泰勒公式求上式右端每一个方括号内的函数增量，于是得

$$F(x,y)\approx\frac{1}{4}\Big\{\Big[h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\Big]$$
$$+\Big[h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\Big]$$
$$+\Big[-h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\Big]$$
$$+\Big[-h\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}+\frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\Big]\Big\}$$
$$=\frac{h^2}{4}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)+\frac{h^4}{48}\Big(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\Big).$$

7.4.4　已知中心在点 $P(x,y)$，半径为 ρ 的圆周，设 $f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3)$ 为已知圆周之内接正三角形的顶点，且 $x_1=x+\rho$，$y_1=y$，依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

展开(准确到 ρ^2).



解　如图所示，三角形 $P_1P_2P_3$ 的三个顶点分别为

$$P_1(x+\rho,y),\;P_2\Big(x-\frac{\rho}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\Big),\;P_3\Big(x-\frac{\rho}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\Big).$$

于是，根据泰勒公式，有

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

$$\approx\frac{1}{3}\{[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}]$$

$$+[f(P)+(-\frac{\rho}{2})\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}]+[f(P)+(-\frac{\rho}{2})\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$+(-\frac{\sqrt{3}}{2})\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}]\}$$

$$=f(P)+\frac{\rho^2}{4}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}).$$

7.4.5　依 ρ 的乘幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)d\varphi$$

展开．

解　$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x,y)$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi}{m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}]d\varphi$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^n}{m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi.$$

而　$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi-\varphi)\sin^{n-m}(\pi-\varphi)d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(\pi+\varphi)\sin^{n-m}(\pi+\varphi)d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m(2\pi-\varphi)\sin^{n-m}(2\pi-\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^m+(-1)^n+(+1)^{n-m}]\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^{n-m}\varphi d\varphi.$$

当 m、n 中至少有一个为奇数时，显见上述积分为零．当 m、n 均为偶数

时，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n+1}m!n!(n-m)!}=\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}.$$

代入原式，由于 m、n 只能为偶数，适当改变一下指标的编号，即得

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\rho^{2n}}{(2m)!(2n-2m)!}\cdot\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2n}2y^{2n-2m}}\cdot\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}m!n!(n-m)!}$$

$$=f(x,y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}(\frac{\rho}{2})^{2n}\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}(\frac{\rho}{2})^{2n}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})^nf(x,y).$$

注　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}\varphi\sin^{2n-2m}\varphi d\varphi=\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2m+2n-2m+1}m!(n-m)!(m+n-m)!}$$

$$=\frac{\pi(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}\cdot 2m!n!(n-m)!},$$

积分过程中，利用尤拉公式将被积函数变形.

7.4.6　根据麦克劳林公式展开函数

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

到四次项为止.

解　由于

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3.$$

故得　$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=[1+(-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

7.4.7　将函数 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$ 展开成麦克劳林级数.

解　$f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$

$$=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$$

$$=1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2]$$

$$+\cdots(|x|<1,|y|<1).$$

7.4.8　设 z 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数，当 $x=1,y=1$ 时它的值为 $z=1$，写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解　对原方程微分一次，得

$$3z^2dz-2xdz-2zdx+dy=0 \tag{1}$$

再微分一次，得

$$(3z^2-2x)d^2z+6z(dz)^2-4dxdz=0 \tag{2}$$

以 $x=1,y=1,z=1$ 代入(1)、(2) 两式，得

$$dz=2dx-dy,$$

$$d^2z=(4dx-6dz)dz=(4dx-12dx+6dy)(2dx-dy)$$

$$=-16(dx)^2+20dxdy-6(dy)^2,$$

…………

于是，可求得在 $x=1,y=1$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6,$$

………………

从而根据泰勒公式有

$$z=1+[2(x-1)+(-1)(y-1)]+\frac{1}{2}[(-16)(x-1)^2$$

$$+2\times10(x-1)^2\cdot(y-1)^2+(-6)(y-1)^2]+\cdots\cdots$$

$$=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)$$

$$-3(y-1)^2+\cdots\cdots$$

7.4.9　已知 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 附近的两个偏导数都存在且连续，固定 $y=y_0$，有倾角为$\frac{\pi}{4}$的直线 L 与 $z=f(x,y_0)$ 相切于横坐标为 $x=x_0$ 的点；固定 $x=x_0$，有倾角为$\frac{3}{4}\pi$的直线 L' 与 $z=f(x_0,y)$ 相切于

纵坐标为 $y=y_0$ 的点,试写出 $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 的一次近似式.

解　由泰勒公式可得函数 $z=f(x,y)$ 的全增量 Δz 的一次近似式

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)\approx hf_x(x_0,y_0)h+kf_y(x_0,y_0)$$
$$=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

由题设知　$z_x'|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$

$$z_y'|_{y=y_0}=f_y'(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi=-1,$$

故得

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)\approx 1\cdot(x-x_0)+(-1)(y-y_0)$$
$$=(x-x_0)-(y-y_0)=(x-y)-(x_0-y_0).$$

7.4.10　试将函数 $z=f(xy,\frac{y}{x})$ 近似地表示成 $(x-z)$ 和 $(y+1)$ 的一次函数.

解　由泰勒公式可知,函数 $z=f(xy,\frac{y}{x})$ 的一次近似式为

$$\Delta z=f(xy,\frac{y}{x})-f[2\cdot(-1),\frac{-1}{2}]$$
$$\approx f_x(-2,-\frac{1}{2})(x-2)+f_y(-2,-\frac{1}{2})(y+1).$$

令 $u=xy,v=\frac{y}{x}$,则

$$f_x'=f_u'(u,v)u_x'+f_v'(u,v)v_x'=yf_u'-\frac{y}{x^2}f_v',$$
$$f_y'=f_u'(u,v)u_y'+f_v'(u,v)v_y'=xf_u'+\frac{1}{x}f_v'.$$

于是

$$f_x'(-2,-\frac{1}{2})=-f_u'(-2,-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}f_v'(-2,-\frac{1}{2}),$$
$$f_y'(-2,-\frac{1}{2})=2f_u'(-2,-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f_v'(-2,-\frac{1}{2}).$$

故 $f(xy,\frac{y}{x})\approx f(-2,-\frac{1}{2})+[f_x'(-2,-\frac{1}{2})(x-2)$

$$+f_y'(-2,-\frac{1}{2})(y+1)]$$

$$= f(-2, -\frac{1}{2}) - [f_u'(-2, -\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}f_v'(-2, -\frac{1}{2})](x-2) + [2f_u'(-2, -\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f_v'(-2, -\frac{1}{2})](y+1).$$

7.4.11　设函数 $f(x,y)$ 在原点附近二次连续可微,证明:

$$f''(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) + f(0,0)}{h^2}.$$

证　由泰勒公式,有

$$\begin{aligned} f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) = {} & f(0,0) + 2hf_x'(0,0) + e^{-\frac{1}{2h}}f_y'(0,0) \\ & + \frac{1}{2}(2h)^2 f_{xx}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}}) + 2he^{-\frac{1}{2h}}f_{xy}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}}) \\ & + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{h}}f_{yy}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) = {} & 2f(0,0) + 2hf_x'(0,0) + 2e^{-\frac{1}{h}}f_y'(0,0) \\ & + h^2 f_{xx}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}}) + 2he^{-\frac{1}{h}}f_{xy}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}}) \\ & + e^{-\frac{2}{h}}f_{yy}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}}). \end{aligned}$$

注意 f 在 $(0,0)$ 点附近二次连续可微,故其二阶偏导数在 $(0,0)$ 点附近有界,因此由 $e^{-\frac{1}{h}} = o(h^2)$ 便有

$$\begin{aligned} & f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) + f(0,0) \\ = {} & [2f_{xx}''(\xi_1, \eta_1) - f_{xx}''(\xi_2, \eta_2)]h^2 + f_y'(0,0)(e^{-\frac{1}{2h}} - 2e^{-\frac{1}{h}}) \\ & + 2[e^{-\frac{1}{2h}}f_{xy}''(\xi_1, \eta_1) - e^{-\frac{1}{h}}f_{xy}''(\xi_2, \eta_2)]h \\ & + [\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{h}}f_{yy}''(\xi_1, \eta_1) - e^{-\frac{2}{h}}f_{yy}''(\xi_2, \eta_2)] \\ = {} & [2f_{xx}''(\xi_1, \eta_1) - f_{xx}''(\xi_2, \eta_2)]h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

其中 $\xi_1 = 2\theta_1 h, \eta_1 = \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}}, \xi_2 = \theta_2 h, \eta_2 = \theta_2 e^{-\frac{1}{h}}\ (0 < \theta_1, \theta_2 < 1)$,由于 f_{xx}'' 的连续性,故得

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0}\frac{f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) + f(0,0)}{h^2} \\ & = \lim_{h\to 0}[2f_{xx}''(\xi_1, \eta_1) - f_{xx}''(\xi_2, \eta_2)] = f_{xx}''(0,0). \end{aligned}$$

§5　多元函数的极值

内 容 提 要

1. 二元函数的极值

(1) 定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的任意点 (x,y)，若都适合不等式 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值 $f(x_0,y_0)$；若都适合不等式 $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极小值 $f(x_0,y_0)$.

极大值和极小值统称极值，使函数取得极值的点 (x_0,y_0) 称为极值点.

(2) 必要条件　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微且在该点处有极值，则必有

$$f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0.$$

(3) 充分条件　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，且有一阶二阶连续偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)=0,f_y'(x_0,y_0)=0$，记 $A=f_{xx}''(x_0,y_0),B=f_{xy}''(x_0,y_0),C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，则

1) 若 $B^2-AC<0$，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值：当 $A>0$（或 $C>0$），$f(x_0,y_0)$ 时为极小值；当 $A<0$（或 $C<0$）时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

2) 若 $B^2-AC>0$，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处没有极值.

3) 若 $B^2-AC=0$，则要用其他方法才能确定函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否取得极值.

2. 多元函数的极值

(1) 必要条件　若函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 可微且取得极值，则函数在 P_0 点必满足

$$f_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\ (i=1,2,\cdots,n).$$

(2) 充分条件（利用二阶微分）　若函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 具有二阶连续偏导数，$du=0$ 在点 P_0 处成立，则在此点处，当 $d^2u>0$ 时，$f(P_0)$

为极小值；当 $d^2u < 0$ 时，$f(P_0)$ 为极大值.

3. 条件极值

(1) 对自变量附有条件的极值，称为条件极值. 一般形式为：在 m 个条件

$$\varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, k = 1, 2, \cdots, m(m < n)$$

限制下，求函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的极值.

(2) 拉格朗日乘数法

设函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 都有连续偏导数，引入拉格朗日函数

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \\ = & f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

解 F 取得无条件极值的必要条件所得的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, & (j = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

求出函数 F 的驻点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$，而 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就是函数 f 在条件 $\varphi_k = 0$ 下的可能的极值点. 再利用前面的方法判断极小值或极大值.

4. 最大值与最小值问题

多元函数的最大值与最小值是通过求得函数的极值与其函数在其闭区域的边界上的函数值相比较而得到

问 题 与 解 答

1. 多元函数的极值

7.5.1　求函数 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} f_x' = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ f_y' = 4y^3 - 2x - 2y = 0, \end{cases}$$

求得驻点 $P_1(-1, -1), P_2(0, 0), P_3(1, 1)$.

在点 $P_1(-1, -1)$ 处，因为

$A = f_{xx}''(-1,-1) = 10, B = f_{xy}''(-1,-1) = -2,$

$C = f_{yy}''(-1,-1) = 10,$

$B^2 - AC = -96 < 0$，且 $A = 10 > 0$，

故函数在 $P_1(-1,-1)$ 处取得极小值 $z(-1,-1) = -2$.

在点 $P_3(1,1)$ 处，由于

$A = f_{xx}''(1,1) = 10, B = f_{xy}''(1,1) = -2,$

$C = f_{yy}''(1,1) = 10,$

$B^2 - AC = -96 < 0$，且 $A = 10 > 0$，

故函数在点 $P_3(1,1)$ 处取得极小值 $z(1,1) = -2$.

在点 $P_2(0,0)$ 处，$B^2 - AC = 0$，此时不能确定是否有极值.我们直接考察函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_2(0,0)$ 附近的变化情况.

在点 $P_2(0,0)$ 的足够小的邻域内，沿直线 $x = y$，有 $z = 4x^4 - 4x^2 < 0$；但当 $x = -y$ 时，$z = 2x^4 > 0$，因此，函数在 $P_2(0,0)$ 处无极值.一般地，判断驻点 (x_0,y_0) 不是函数的极值点，可以过点 (x_0,y_0) 作直线(或曲线)，如果在其中的一条或几条直线(或曲线)上靠近点 (x_0,y_0) 充分小的邻域内函数值变号，就可断定点 (x_0,y_0) 不是极值点.

7.5.2　求函数 $z = x^2y^3(6 - x - y)$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} f_x' = xy^3(12 - 3x - 2y) = 0, \\ f_y' = x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0. \end{cases}$$

求得驻点 $P_1(2,3)$，$P_2(x,0)$ 及 $P_3(0,y)$.

不难断定，在 P_1 点处，$A = -162, B = -108, C = -144, B^2 - AC < 0$，故函数 z 在点 P_1 处取得极大值 $z(2,3) = 108$.

在点 $P_2(x,0)$ 处，即在直线 $y = 0$ 上，当 $x \neq 0$ 及 $x \neq 6$ 时，$x^2(6 - x - y) \neq 0$，在确定点的足够小的邻域内也不变号，但 y^3 可正可负，因此，函数 z 变号，即在上述情况下没有极值，当 $x = 0$，及 $x = 6$ 时类似地可判断也无极值.

在点 $P_3(0,y)$ 处，即在直线 $x = 0$ 上.在 $y = 0$ 及 $y = 6$ 点的情况可类似地判断函数无极值.但在 $0 < y < 6$ 时，$y^3(6 - x - y) > 0$，且在所对应的点的足够小的邻域内保持正号，因此，在足够小的邻域内，$z = x^2y^3(6 - x - y) \geqslant 0$ 也成立，但邻域内任意近处总有 $z = 0$ 的点.于是对于 $x = 0, 0 < y \leqslant 6$ 的点的函数 z 取弱极小值 $z = 0$.同法可判定，对于直线 $x = 0$ 上 $y < 0$ 及 $y > 6$ 的各点处，函数 z 取得弱极大值 $z = 0$.

7.5.3　求函数　$z = xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}(a>0,b>0)$ 的极值.

解　考虑函数

$$u = z^2 = x^2y^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}),\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

显然 z 的极值均为 u 的极值. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})-\frac{2}{a^2}x^3y^2 = 0,\\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})-\frac{2}{b^2}x^2y^3 = 0,\end{cases}$$

得驻点 $P_0(0,0)$，$P_1(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})$，$P_2(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$，$P_3(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$ 及 $P_4(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})$.

由于 z 在点 P_0 附近变号，所以 $z(P_0)$ 不是极值. 又

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^2(1-\frac{6x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{6y^2}{b^2}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 4xy(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}),$$

在 P_1,P_2,P_3,P_4 各点，得

$$A = -\frac{8}{9}b^2, B = \pm\frac{4}{9}ab, C = -\frac{8}{9}a^2,$$

$$B^2-AC = (\frac{16}{81}-\frac{64}{81})a^2b^2 < 0,$$

故函数 u 取得正的极大值. 于是相应的函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极大值

$$z(P_1) = z(P_2) = \frac{ab}{3\sqrt{3}};$$

在点 P_3 及 P_4 取得极小值

$$z(P_3) = z(P_4) = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}.$$

7.5.4　求函数

$$z = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\quad(a^2+b^2+c^2\neq 0)$$

的极值.

解　令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$,则

$$z(x,y) = z(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{ar\cos\varphi + br\sin\varphi + c}{\sqrt{r^2+1}}.$$

解方程组

$$\begin{cases} z_r' = \dfrac{a\cos\varphi + b\sin\varphi - cr}{(\sqrt{r^2+1})^3} = 0, & (1) \\ z_\varphi' = \dfrac{-ar\sin\varphi + br\cos\varphi}{\sqrt{r^2+1}} = 0. & (2) \end{cases}$$

设 a、b 不同时为零. 由(2) 考虑到 $r = 0$ 不是其解(因 $r = 0$ 时,φ 为任意值都不满足(1) 式),故有 $a\sin\varphi = b\cos\varphi$,于是对该式运算可得

$$\cos\varphi = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

因为由(1) 式有 $a\cos\varphi + b\sin\varphi = 0$,由(3) 式得 $a = b = 0$,与 a、b 不同时为零的假设矛盾. 显然,当 $c = 0$ 时,方程组无解. 当 $c \neq 0$ 时,

$$r = \frac{a\cos\varphi + b\sin\varphi}{c} = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

为保证 $r > 0$,在$\cos\varphi$ 及$\sin\varphi$ 前取与 c 一致的符号. 此时,有

$$x = \frac{a}{c},\ y = \frac{b}{c}.$$

由于这时

$$z_{rr}'' = -\frac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{5/2}}, z_{\varphi\varphi}'' = -\frac{cr^2}{(1+r^2)^{1/2}}, z_{r\varphi}'' = 0,$$

$$(z_{r\varphi}'')^2 - z_{rr}''z_{\varphi\varphi}'' < 0,$$

故当 $c > 0$ 时,$z_{rr}'' < 0$,函数 z 在点$(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取得极大值 $z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$;当 $c < 0$ 时 $z_{rr}'' > 0$,函数 z 在点$(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取得极小值 $z = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

设 a、b 同时为零. 由假设 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$,知 $c \neq 0$,此时解方程组(1)、(2) 得 $r = 0$,φ 任意,即 $x = 0, y = 0$. 由于此时 $z = \dfrac{c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$,故显然得知;当 $c > 0$ 时 z 在点$(0,0)$ 取极大值 $z = c$;当 $c < 0$ 时,z 在

点(0,0)取得极小值 $z=c$.

综上所述，若 $c>0$ 时，则 z 在点$(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$取极大值 $z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；若 $c<0$ 时，则 z 在点$(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$取得极小值 $z=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，若 $c=0$(由假定，这时 $a^2+b^2\neq 0$)，则 z 无极值.

7.5.5　求函数 $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} z_x'=2e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)=0, \\ z_y'=3e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)=0, \end{cases}$$

得驻点 $P_0(0,0)$ 及 $P_1(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$. 又

$$z_{xx}''=4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+16x-6y+4),$$

$$z_{yy}''=9e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-4x-4y+\frac{2}{3}),$$

$$z_{xy}''=6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+6x-y-1).$$

在点 $P_0(0,0)$ 处，$A=16,B=-6,C=6,B^2-AC=-60<0$，故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_0)=0$；在点 $P_1(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ 处，$A=16e^{-2}$，$B=-9e^{-2},C=\frac{3}{2}e^{-2}$ 及 $B^2-AC=60e^{-4}>0$，故函数在该点无极值.

7.5.6　求函数 $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} z_x'=\cos x-\sin(x-y)=0, & (1) \\ z_y'=-\sin y+\sin(x-y)=0. & (2) \end{cases}$$

由(1)+(2)，得 $\cos x=\sin y$，由于 x,y 均为锐角，故 $y=\frac{\pi}{2}-x$，代入(1)，得

$$\cos x-\sin(2x-\frac{\pi}{2})=\cos x+\cos 2x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

但 $\cos\frac{x}{2}\neq 0$，故 $\cos\frac{3x}{2}=0$，则得驻点 $P_0(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$. 由于

$$z_{xx}'' = -\sin x - \cos(x-y),\ z_{yy}'' = -\cos y - \cos(x-y),$$
$$z_{xy}'' = \cos(x-y),$$

且在 P_0 点处，有

$$A = -\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ B = \frac{\sqrt{3}}{2},\ C = -\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$B^2 - AC = -\frac{1+2\sqrt{3}}{4} < 0,$$

故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

7.5.7 求函数 $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} z_x' = \sin y \sin(2x+y) = 0, & (1) \\ z_y' = \sin x \sin(x+2y) = 0. & (2) \end{cases}$$

它等价于下面四个方程组

$$\text{I}: \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0; \end{cases} \qquad \text{II}: \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin(2x+y) = 0; \end{cases}$$

$$\text{III}: \begin{cases} \sin y = 0, \\ \sin(x+2y) = 0; \end{cases} \qquad \text{IV}: \begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases}$$

考虑到 $0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$，于是得到原方程组(1) 与(2) 的六个解.

$$P_1(0,0), P_2(0,\pi), P_3(\pi,0),$$
$$P_4(\pi,\pi), P_5\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right), P_6\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right).$$

由于所考虑的区域是闭正方形 $0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$，故点 P_1, P_2, P_3, P_4 都是此区域的边界点，因此 P_1, P_2, P_3, P_4 不是函数 z 的极值点(根据极值的定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义). 由于

$$z_{xx}'' == 2\sin y \cos(2x+y),\ z_{xy}'' = \sin 2(x+y),$$
$$z_{yy}'' = 2\sin x \cos(x+2y).$$

在点 P_5 有 $B^2 - AC = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = -\frac{9}{4} < 0$,

且 $A = -\sqrt{3} < 0$，故函数 z 在点 P_5 取得极大值 $z(P_5) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$；在

点 P_6 处有 $B^2 - AC = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\sqrt{3})(\sqrt{3}) < 0$，且 $A = \sqrt{3} > 0$，故函数 z 在 P_6 处取得极小值 $z(P_6) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

7.5.8 求函数 $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x>0, y>0, z>0)$ 的极值.

解 $du = (1 - \frac{y^2}{4x^2})dz + (\frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2})dy + (\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2})dz.$

令 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$，解方程组

$$\begin{cases} 1 - \frac{y}{4x^2} = 0, \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

得驻点 $P_0(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

$$d^2u = \frac{y^2}{2x^3}dx^2 - \frac{y}{x^2}dxdy + (\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3})dy^2 - \frac{4z}{y^2}dydz + (\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3})dz^2,$$

在点 P_0 处，有

$$\begin{aligned} d^2u &= 4dx^2 - 4dxdy + 3dy^2 - 4dydz + 6dz^2 \\ &= (2dx - dy)^2 + dy^2 + (dy - 2dz)^2 + 2dz^2 > 0, \end{aligned}$$

(当 $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ 时). 故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0) = 4$.

7.5.9 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 所确定的函数 $z = f(x,y)$ 的极值.

解法 1 对方程两边微分，得

$$(x-1)dx + (y+1)dy + (z-2)dz = 0.$$

显而可见，当 $x = 1$，$y = -1$ 时，$dz = 0$. 代入原方程可解得 $z = 6$ 及 $z = -2$. 又 $z = 2$ 时函数不可微.

求二阶微分，得

$$dx^2 + dy^2 + (z-2)d^2z + dz^2 = 0.$$

以 $x=1,y=-1,z=6$ 代入上式,并考虑 $dz=0$,得

$$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0,(\text{当 } dx^2+dy^2\neq 0 \text{ 时})$$

故当 $x=1,y=-1$ 时,隐函数 z 取得极大值 $z=6$;

同法可判定,当 $x=1,y=-1$ 时,隐函数 z 也取得极小值 $z=-2$.

不难看出,$z=2$ 是球的切平面平行于 oz 轴的地方,因此函数 z 不取得极值.

解法 2 将方程两边分别对 x,y 求偏导数,得

$$2x+2zz_x'-2-4z_x'=0, \tag{1}$$

$$2y+2zz_y+2-4z_y'=0. \tag{2}$$

由此解出

$$z_x'=\frac{1-x}{z-2},\ z_y'=\frac{1+y}{z-2}.$$

令 $z_x'=0,z_y'=0$,求得 $x=1,y=-1$. 将它们代入原方程,解得 $z_1=6,z_2=-2$.

考察函数 $z=f(x,y)$ 在驻点 $(1,-1,6)$ 和 $(1,-1,-2)$ 的邻域取值情况.

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$,由于 $F_z'(1,-1,6)\neq 0$, $F_z'(1,-1,-2)\neq 0$,所以原方程分别在点 $(1,-1,6)$ 和 $(1,-1,-2)$ 的邻域内确定函数

$$z=f_1(x,y),\ z=f_2(x_1,y).$$

方程(1)对 x 求偏导,得 $1+z_x'^2+zz_{xx}''-2z_{xx}''=0$,于是,

$$z_{xx}''(1,-1,6)=\frac{-1}{4},\ z_{xx}''(1,-1,-2)=\frac{1}{4}.$$

方程(1)对 y 求偏导得 $z_y'z_x'+zz_{xy}''-2z_{xy}''=0$. 于是

$$z_{xy}''(1,-1,6)=0,\ z_{xy}''(1,-1,-2)=0.$$

方程(2)对 y 求偏导,得 $1+z_y'^2+zz_{yy}''-2z_{yy}''=0$,于是

$$z_{yy}''(1,-1,6)=-\frac{1}{4},\ z_{yy}''(1,-1,-2)=\frac{1}{4},$$

可见,在点 $(1,-1,6)$ 处,有

$$B^2-AC=-\frac{1}{16}<0,\text{且 } A=-\frac{1}{4}<0.$$

故 $z=6$ 是极大值.

在点 $(1,-1,-2)$ 处,有

$$B^2-AC=-\frac{1}{16}<0,\text{且 } A=\frac{1}{4}>0,$$

故 $z=-2$ 是极小值.

7.5.10　求方程 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$ 所确定的函数 z 的极值.

解　方程两边微分,得

$$2(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdx)=a^2(xdx+ydy-zdz),$$

令 $dz=0$,得方程

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](xdx+ydy)=0.$$

解之,得 $x=y=0, x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$.

以 $x=y=0$ 代入原方程,解得 $z=0$. 这是隐函数的一个奇点. 把原式看作 z^2 的一个方程,舍去增根. 可解出

$$z^2=-(a^2+x^2+y^2)+\sqrt{a^4+3a^2(x^2+y^2)},$$

显然 z 有正负两支在(0,0,0)点相交. 因此,不认为 z 在(0,0,0)点取得极值.

以 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$ 代入原方程,解得

$$x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2, z^2=\frac{1}{8}a^2.$$

为考虑极值,将一次微分改写为

$$[2(x^2+y^2+z^2)-a^2](xdx+ydy)+[2(x^2+y^2+z^2)+a^2]zdz=0.$$

将上式再微分一次,注意到 $dz=0$. 及 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$,即得

$$a^2zd^2z=-2(xdx+ydy)^2$$

故当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2$, $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $d^2z\leqslant 0$, 函数 z 取得弱极大值 $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$;当 $x^2+y^2=\frac{3}{8}a^2, z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $d^2z\geqslant 0$,函数 z 取得弱极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

7.5.11　求函数 $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)(0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi, 0\leqslant z\leqslant\pi)$ 的极值.

解　对函数微分,得

$$du=[\cos x-\cos(x+y+z)]dx+[\cos y-\cos(x+y+z)]dy$$
$$+[\cos z-\cos(x+y+z)]dz,$$

令$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$,得方程组

$$\begin{cases}\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos y-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

注意到x、y、z的取值范围,解得驻点为

$$P_0(0,0,0),P_1(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),P_2(\pi,\pi,\pi).$$

在点P_1,有

$$\begin{aligned}d^2u&=-\sin x dx^2-\sin y dy^2-\sin z dz^2\\&\quad+\sin(x+y+z)[d(x+y+z)]^2\\&=-dx^2-dy^2-dz^2-(dx+dy+dz)^2<0,\end{aligned}$$

故函数u在P_1点取得极大值$u(P_1)=4$.

由于P_0及P_2是所考虑区域$0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi,0\leqslant z\leqslant\pi$的边界点,故函数在$P_0$及$P_2$不达到极值.但如果放宽要求,对边界点,仅将其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值比较,则在边界点也可引入达强极值和达弱极值的概念,对于P_0及P_2的邻域中且属于上述区域的点(x,y,z),显然有$\sin x\geqslant 0,\sin y\geqslant 0,\sin z\geqslant 0$.又

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z)&=\sin x\cos y\cos z-\sin x\sin y\sin z+\cos x\sin y\cos z\\&\quad+\cos x\cos y\sin z\\&\leqslant\sin x+\sin y+\sin z-\sin z\sin y\sin z,\end{aligned}$$

故$u\geqslant 0$.而当$x=y=0$时或$x=y=\pi$时恒有$u=0$.因此,函数u在P_0及P_2都达到弱极小值$u(P_0)=u(P_2)=0$.

7.5.12 求函数

$$u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}\ (x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$$ 的极值.

解 设$y_1=x_1,y_2=\frac{x_2}{x_1},\cdots,y_k=\frac{x_k}{x_{k-1}},\cdots,y_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}$,则有

$$x_n=y_1y_2\cdots y_n,\ y_k>0\ (k=1,2,\cdots,n),$$

且 $$u=y_1+y_2+\cdots+\frac{2}{y_1y_2\cdots y_n}.$$

记$A=y_1y_2\cdots y_n$,则可得

$$du = \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{2}{Ay_k})dy_k.$$

令$\frac{\partial u}{\partial y_k} = 0$,得方程组

$$1 - \frac{2}{Ay_k} = 0 \ (k = 1,2,\cdots,n).$$

解之得驻点 $P_0 = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 2^{\frac{1}{n+1}} = y_0.$$

在 P_0 点,有

$$d^2u|_{P=P_0} = \frac{2}{A}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k^2}dy_k^2 + \frac{2}{Ay_k^2}(\sum_{k=1}^{n}dy_k)^2\Big|_{P=P_0}$$

$$= \frac{1}{y_0}[\sum_{k=1}^{n}dy_k^2 + (\sum_{k=1}^{n}dy_k)^2] > 0,\ (当\sum_{k=1}^{n}dy_k^2 \neq 0 时),$$

故函数 u 在 P_0 点取得极小值,也即在

$$x_1 = y_1 = 2^{\frac{1}{n+1}},$$

$$x_2 = y_2x_1 = 2^{\frac{2}{n+1}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_k = y_kx_{k-1} = 2^{\frac{k}{n+1}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = y_nx_{n-1} = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

处,函数 u 取得极小值 $u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

7.5.13　证明:函数 $z = (1+e^y)\cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一个极小值.

证　解方程组

$$\begin{cases} z_x' = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ z_y' = e^y(\cos x - 1 - y) = 0, \end{cases}$$

得 $x = k\pi,\quad y = (-1)^k - 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$.

由于　$z_{xx}'' = -(1+e^y)\cos x,\ z_{xy}'' = -e^y\sin x,$

$z_{yy}'' = e^y(\cos x - 2 - y).$

故在点$(2m\pi,0)$,$(m = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$, $A = -2, B = 0, C = -1$及 $B^2 - AC = -2 < 0$. 此时函数 z 取得极大值,且有无穷多个;而在点

$((2m+1)\pi,-2)$，$(m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，$A=1+e^{-2}$，$B=0$，$C=-e^{-2}$ 及 $B^2-AC=e^{-2}+e^{-4}>0$，此时，函数 z 无极值.

7.5.14 设函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，证明：在过点 $(0,0)$ 的任何一条直线上，$f(x,y)$ 均在点 $(0,0)$ 处取得极小值，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处无极值.

证 在直线 $x=0$ 上，$f(0,y)=y^2$，在 $y=0$ 上，$f(x,0)=2x^4$，结论均显然成立.

现考虑直线 $y=kx$，$k\neq 0$，函数 $f(x,y)$ 化为

$$\varphi(x)=f(x,kx)=x^2(2x^2-3kx+k^2).$$

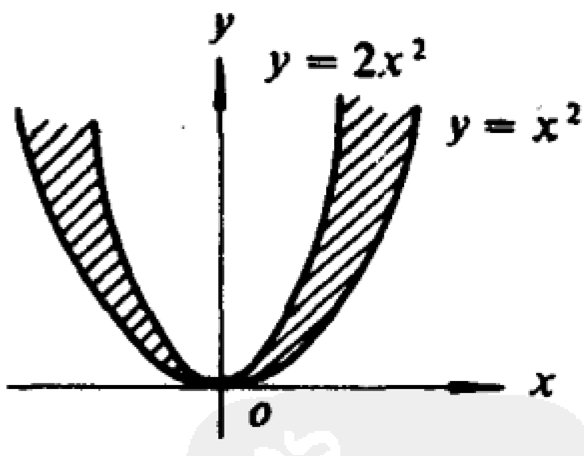
求导得

$$\varphi'(x)=8x^3-9kx^2+2k^2x,$$
$$\varphi''(x)=24x^2-18kx+2k^2.$$

因为 $\varphi'(0)=0$，$\varphi''(0)=2k^2\geqslant 0$，则当 $k\neq 0$ 时，$\varphi(x)$ 在原点取得极小值；当 $k=0$ 时，$\varphi''(0)=0$，显然无法判定是否取得极值. 但这时 $\varphi(x)=2x^4$. 对 $x\neq 0$ 均有 $\varphi(x)>0=\varphi(0)$，即 $\varphi(x)>\varphi(0)$. 可见在原点处仍取得极小值. 因此，在 $y=kx$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处取得极小值，于是在过原点的任何一条直线上，$f(x,y)$ 均在点 $(0,0)$ 处取极小值.

由 $f_x'(x,y)=2x(4x^2-3y^2)$，$f_y'(x,y)=2y-3x^2$，$f_{xx}''(x,y)=6(4x^2-y)$，$f_{xy}''(x,y)=-6x$，$f_{yy}''(x,y)=2$.

因为 $f_x'(0,0)=0$，$f_y'(0,0)=0$，所以 $(0,0)$ 是函数的驻点. 而在 $(0,0)$ 处 $B^2-AC=0$，用充分条件无法判定 $(0,0)$ 是否是极值点，但由 $f(x,y)$ 的表达式看出，当 $x^2<y<2x^2$ 时，$f(x,y)<0$，当 $y>2x^2$ 或 $y<x^2$ 时，$f(x,y)>0$（见图），因此 $f(x,y)$ 不可能在 $(0,0)$ 取得极值.



7.5.14 题图

2. 多元函数的条件极值

7.5.15 求函数 $z=xy$ 在条件 $x+y=1$ 下的极值.

解 设 $F(x,y)=xy+\lambda(x+y-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}F_x'(x,y)=y+\lambda=0,\\ F_y'(x,y)=x+\lambda=0,\end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = -\lambda = \frac{1}{2}$，则 $z = xy = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

由于当 $x \to \pm\infty$ 时，$y \to \mp\infty$，故 $z = xy \to -\infty$. 从而得知，当点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为条件极值点时，$z = \frac{1}{4}$ 为极大值.

如果将 $z = xy$ 改写为 $z = x(1-y)$，则成为普通极值问题. 易知极大值点为 $y = \frac{1}{2}$，从而 $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，即极大值点为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

7.5.16　求函数 $z = x^2 + y^2$ 在条件$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 下的极值.

解　设 $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1)$，解方程组

$$\begin{cases} F_x' = 2x + \dfrac{\lambda}{a} = 0, \\ F_y' = 2y + \dfrac{\lambda}{b} = 0, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1. \end{cases}$$

可得驻点
$$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当 $x \to \infty, y \to \infty$ 时，$z \to +\infty$，故函数 z 必在有限处取得最小值. 这里仅有一个驻点，因此，当 $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$时，函数 z 取得极小值

$$z = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

7.5.17　求函数 $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的极值.

解　设 $F(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$，解方程组

$$\begin{cases} F_x' = 2Ax + 2By + 2\lambda x = 0, & (1) \\ F_y' = 2Bx + 2Cy + 2\lambda y = 0, & (2) \\ x^2 + y^2 = 1. & (3) \end{cases}$$

由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 x、y 不全为零，故 λ 必须满足方程

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - B^2) = 0. \quad (4)$$

当$(A-C)^2 + 4B^2 = 0$ 时，所研究的函数为常数；当$(A-C)^2 + 4B^2 \neq$

0时，方程(4)有两个不等的实根，记为 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1>\lambda_2)$. 由方程组(1)、(2)、(3)可解出

$$x_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}},\quad y_{1,2}=\frac{\pm(\lambda_1-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}},$$

$$x_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-C)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}},\quad y_{3,4}=\frac{\pm(\lambda_2-A)}{\sqrt{B^2+(\lambda_2-A)^2}}.$$

相应地，有

$$\begin{aligned}z(x_1,y_1)&=Ax_1^2+2Bx_1y_1+cy_1^2\\&=(Ax_1+By_1)x_1+(Bx_1+Cy_1)y_1.\end{aligned}$$

由(1)、(2)可解得

$$Ax_1+By_1=\lambda_1x_1,\ Bx_1+Cy_1=\lambda_1y_1,$$

故得 $z(x_1,y_1)=\lambda_1x_1^2+\lambda_1y_1^2=\lambda_1(x_1^2+y_1^2)=\lambda_1$.

同理可得

$$z(x_2,y_2)=\lambda_1,\ z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2.$$

由于函数 z 在单位球面上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值，且最大值和最小值不相等. 这里仅有四个驻点 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$，而且 $z(x_1,y_1)=z(x_2,y_2)=\lambda_1,z(x_3,y_3)=z(x_4,y_4)=\lambda_2$. 于是，当 $x=x_{1,2},y=y_{1,2}$ 时，函数取得最大值 $z=\lambda_1$，因而也是极大值；当 $x=x_{3,4},y=y_{3,4}$ 时，函数取得最小值 $z=\lambda_2$，因而也是极小值.

7.5.18 设函数 $z=\cos^2x+\cos^2y$，求函数 z 在条件 $x-y=\frac{\pi}{4}$ 下的极值.

解 设 $F(x,y)=\cos^2x+\cos^2y+\lambda(x-y-\frac{\pi}{4})$，解方程组

$$\begin{cases}F_x'=-\sin2x+\lambda=0,\\F_y'=-\sin2y+\lambda=0,\\x-y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

可得 $x_k=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\quad y_k=\frac{-\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

相应地，当 k 为偶数时，$z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$；当 k 为奇数时，$z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得大值和最小值，而且 z 又是关于 x、y 的周期(周期为 π)函数，故当 k 为偶数时，函数 z 在点

(x_k,y_k) 取得最大值 $z=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$,从而是极小值;当 k 为奇数时,函数 z 在点(x_k,y_k) 取得最小值 $z=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$,从而是极小值.

7.5.19　求函数 $u=x^my^nz^p$ 在条件 $x+y+z=a$ $(m>0,n>0,p>0,a>0,x>0,y>0,z>0)$ 下的极值.

解　设 $F(x,y,z)=\omega-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a)$,其中 $\omega=\ln u+m\ln x+n\ln y+p\ln z$. 解方程组

$$\begin{cases}F_x'=\frac{m}{x}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ F_y'=\frac{n}{y}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ F_z'=\frac{p}{z}-\frac{1}{\lambda}=0,\\ x+y+z-a=0.\end{cases}$$

得驻点 P 的坐标为

$$x=\frac{am}{m+n+p},y=\frac{an}{m+n+p},z=\frac{ap}{m+n+p}.\tag{1}$$

相应地有

$$u=\frac{a^{m+n+p}m^mn^np^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

连续函数 ω 定义于平面 $x+y+z=a$ 在第一卦限内的部分,边界曲线由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a\\ z=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y+z=a\\ x=0,\end{cases}\quad\begin{cases}z+x=a\\ y=0.\end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时,显然有 $\omega\to-\infty$. 因此,函数 ω 在区域内取得最大值. 由于仅有唯一驻点,故当 x、y、z 取值为(1) 时,函数 u 取得最大值

$$u=\frac{a^{m+n+p}m^mn^np^p}{(m+n+p)^{m+n+p}},$$

因而也是极大值.

7.5.20　求函数 $u=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$ 在条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $(x>0,y>0,z>0)$ 下的极值.

解 由 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ 及 $x>0,y>0,z>0$ 不难得出

$$0<x<\frac{\pi}{2},0<y<\frac{\pi}{2},0<z<\frac{\pi}{2}.$$

设 $\omega=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z,$

$$F(x,y,z,\lambda)=\omega+\lambda(x+y+z-\frac{\pi}{2}).$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x'=\operatorname{ctg}x+\lambda=0,\\F_y'=\operatorname{ctg}y+\lambda=0,\\F_z'=\operatorname{ctg}z+\lambda=0,\\F_\lambda'=x+y+z-\frac{\pi}{2}=0.\end{cases}$$

并注意到点 $P(x,y,z)$ 在第一卦限，即得驻点 $P_0(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$.

类似 7.5.19 题的讨论，当点 (z,y,z) 趋于平面 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ 在第一卦限部分的边界时，$u\to 0$；而在边界内部 $u>0$. 因此，函数 u 在边界内部取得最大值，故在点 P_0 取得极大值 $u(P_0)=\frac{1}{8}$.

7.5.21 求(1) 函数 $z=x^2+y^2+1$ 的极值；(2) 函数 $z=x^2+y^2+1$ 在条件 $x+y+3=0$ 下的极值，并说明其几何意义.

解 (1) 解方程组 $\begin{cases}z_x'=2x=0;\\z_y'=2y=0.\end{cases}$ 得驻点 $x=0,y=0$. 对点 $(0,0)$ 有

$$A=z_{xx}''|_{(0,0)}=2,B=z_{xy}''|_{(0,0)}=0,C=z_{yy}''|_{(0,0)}=2.$$

$$B^2-AC=-4<0,A=2>0.$$

因此 $(0,0)$ 是极小值点. 其极小值为 $z=1$.

(2) 由拉格朗日乘数法. 作函数

$$F(x,y)=x^2+y^2+1+\lambda(x+y+3),$$

解方程组 $\begin{cases}F_x'=2x+\lambda=0,\\F_y'=2y+\lambda=0,\\x+y+3=0\end{cases}$ 得驻点 $x=y=\frac{3}{2}$，即 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$. 于是

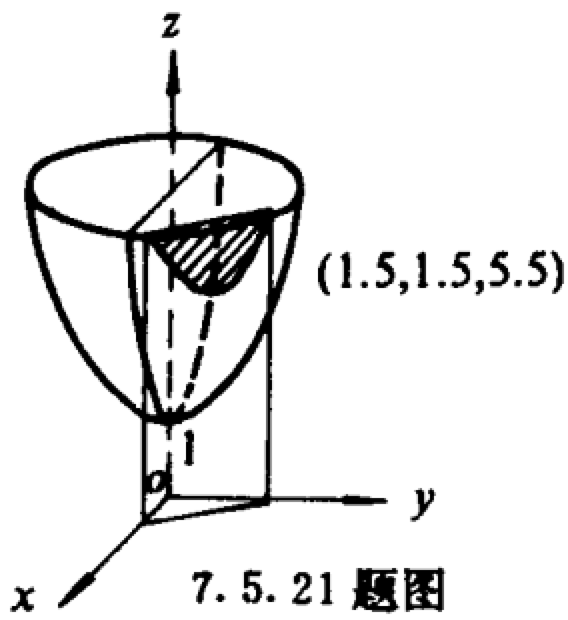
$$f(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=(\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2+1=5.5.$$

函数 $z=x^2+y^2+1$ 在条件 $x+y+3=0$ 下的极值为 $z=5.5$.

几何意义：函数 $z=x^2+y^2+1$ 的极小值是旋转抛物面的最低点的立坐标. 而 $z=x^2+y^2+1$ 在条件 $x+y+3=0$ 下的极值是旋转抛物面 $z=x^2+y^2+1$ 与平面 $x+y+3=0$ 的交线，即曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2-z+1=0,\\x+y+3=0\end{cases}$$

的最低点的立坐标(见图).



7.5.21 题图

7.5.22　设两个正数 x 和 y 之和为定值，求 $\frac{x^n+y^n}{2}$ 的极值，并证明：

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\ n\ \text{为正整数}.$$

解　设 $x+y=a$ $(x>0,y>0,a$ 为正常数). 用拉格朗日乘数法，令

$$F(x,y)=\frac{x^n+y^n}{2}+\lambda(x+y-a).$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x'=\dfrac{nx^{n-1}}{2}+\lambda=0,\\[2mm]F_y'=\dfrac{ny^{n-1}}{2}+\lambda=0,\\[2mm]x+y=a.\end{cases}$$

得唯一的驻点 $x=y=\frac{a}{2}$，即 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$. 而

$$\begin{aligned}d^2F&=F_{xx}''dx^2+aF_{xy}''dxdy+F_{yy}''dy^2\\&=\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2+\frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}dy^2>0,\end{aligned}$$

故 $f(x,y)=\frac{x^n+y^n}{2}$ 在 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ 点达到最小值. 且

$$\frac{x^n+y^n}{2}>\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^n}{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

7.5.23　求 $\ln x+\ln y+3\ln z$ 在 $x^2+y^2+z^2=5r^2$, $x>0$, $y>0$,

$z>0$ 上的极大值，并以此结果证明：对于任意的 $a、b、c>0$，有

$$abc^3 \leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

解 作函数

$$F(x,y,z)=\ln z+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2).$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x'=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ F_y'=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0, \\ F_z'=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2-5r^2=0. \end{cases}$$

得唯一解 $x=y=r, z=\sqrt{3}\,r$. 由题意知有极大值，故

$$f_{\max}=\ln 3\sqrt{3}\,r^3.$$

因 $f=\ln xyz^3=\ln\sqrt{x^2y^2z^6}\leqslant \ln 3\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$,

所以

$$\sqrt{x^2y^2z^6}\leqslant 3\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \text{ 或 } x^2y^2z^6\leqslant 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5.$$

令 $x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$，则得

$$abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

7.5.24 研究多元函数 $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 在条件 $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$ 下的极值.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda\left(\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} F_{x_i}'=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}=1, \end{cases}$$

得驻点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中

$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $d^2u=d^2F=2\sum_{i=1}^{n}dx_i^2>0$（它不受所给条件的限制），故当

$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ 时，函数 u 取得极小值

$$u=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}.$$

7.5.25　若 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$，求二次型 $u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 的极值.

解　设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)$.
解方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}F_{x_1}'=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, & (1)\\ \frac{1}{2}F_{x_2}'=a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, & (2)\\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1}{2}F_{x_n}'=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0, & (n)\\ F_\lambda'=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1=0. & (n+1)\end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解，必须矩阵 (a_{ij}) 的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 有解，其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵，E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知，此特征方程必有 n 个实根，即 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足 $|A-\lambda E|=0$. 对于任一根 λ_k，代入方程(1) ～ (n)，可求得 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个解空间，解空间的维数，等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组(1) ～ (n + 1) 的根. 当 λ_k 是单重根时，解空间是一维的，单位元素只有两个. 当 λ_k 是多重根时，对应 λ_k 的单位元素有无穷多个.

对于 λ_k 的解，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，显然满足方程组(1) ～ (n + 1)，因此，有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda_kx_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，从而得

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 上连续，故必取得最大值和最小值，于是，应于 λ_1 和 λ_n 的解，分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n，因而也是 u 的极大值和极小值，或是 u 的弱极大值和弱极小值，视 λ_1 和 λ_n 的重数而定（多重时为弱极值）. 由线性代数中把 d^2F 化为标准型的方法可证，对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k，二次型不取得极值.

3. 最大值和最小值

7.5.26 试求函数 $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x+y)$ 在闭正方形 $\bar{R}: 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$ 上的最大值和最小值.

解 由连续函数的基本性质知，$f(x,y)$ 必在 $\bar{R}$ 上取得最大值和最小值，如果它们在 $\bar{R}$ 的内部某点取到，则此点必是 $f(x,y)$ 的驻点. 因此，我们首先在正方形 $R: 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ 中求出函数的驻点. 解方程组

$$\begin{cases} f_x' = -\cos y \cdot \sin(2x+y) = 0, \\ f_y' = -\cos x \cdot \sin(x+2y) = 0, \end{cases} \quad (x,y) \in R.$$

它等价于解下列四个方程组

$$\begin{cases} \cos x = 0. \\ \cos y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \sin(x+2y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin(2y+x) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

注意 $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, 不难得到 $f(x,y)$ 在 R 内共有三个驻点：$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$、$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$、$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. 其相应的函数值为 $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 0$, $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{8}$.

考察 $f(x,y)$ 在 $\bar{R}$ 边界上的情况，在横边 $y = 0$ 及 $y = \pi$ 上，有 $f(x,0) = f(x,\pi) = \cos^2 x$，它取遍从 0 到 1 的所有的值. 在纵边 $x = 0$ 及 $x = \pi$ 上情况完全一样. 综合上述情况，通过比较，不难得到

$$\max_{(x,y)\in \bar{R}} f(x,y) = f(0,0) = f(0,\pi) = f(\pi,0) = f(\pi,\pi) = 1,$$

$$\min_{(x,y)\in \bar{R}} f(x,y) = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{8}.$$

7.5.27　试求函数 $f(x,y,z)=(ax+by+cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 的最大值和最小值，其中 $a^2+b^2+c^2>0$.

解　首先求驻点. 解方程组

$$\begin{cases} f_x' = a - 2x(ax+by+cz) = 0, \\ f_y' = b - 2y(ax+by+cz) = 0, \\ f_z' = c - 2z(ax+by+cz) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

以 a、b、c 依次乘上面各方程式，然后相加，得

$$2(ax+by+cz)^2 = a^2+b^2+c^2,$$

于是
$$ax+by+cz = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}},$$

代回前面方程组，并记 $R=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$，得到两个驻点 $(\frac{a}{R},\frac{b}{R},\frac{c}{R})$，$(-\frac{a}{R},-\frac{b}{R},-\frac{c}{R})$，而函数 $f(x,y,z)$ 在这两点的值分别为 $(\frac{R}{2\sqrt{e}})$，$-\frac{R}{2\sqrt{e}})$. 注意，在以原点为中心，ρ 为半径的球面

$$s_\rho: x=\rho\cos\alpha, y=\rho\cos\beta, z=\rho\cos\gamma$$

上，$f(x,y,z)=\rho e^{-\rho^2}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)$，
所以

$$|f(x,y,z)| \leqslant (|a|+|b|+|c|)\rho e^{-\rho^2} \to 0.$$

当 $\rho\to+\infty$ 时，存在 $\rho_0>0$，使

$$|f(x,y,z)| < \frac{R}{2\sqrt{e}}. \quad (x^2+y^2+c^2 \geqslant \rho_0^2) \tag{2}$$

由此可见，$f(x,y,z)$ 在 R 中的最大值和最小值与它在有界区域 $D=\{(x,y,z);x^2+y^2+z^2\leqslant\rho_0^2\}]$ 上的最大值和最小值相同. 再由(2)式知，$f(x,y,z)$ 在 D 上的最大值和最小值又一定在 D 的内部取得，因此，必在驻点取得，而 $f(x,y,z)$ 只有两个驻点，由此可知 $f(x,y,z)$ 在整个空间 R 空间中的最大值和最小值分别为

$$\max f(x)=\frac{R}{2\sqrt{e}},\ \min f(x)=-\frac{R}{2\sqrt{e}}.$$

7.5.28　求函数 $f(x,y)=x^2+3xy+2y^2$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

解　根据连续函数的基本性质知，所求的最大值和最小值是存在

的.

先求函数 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2<1$ 中的驻点,解方程组

$$\begin{cases} f_x' = 2x+3y=0, \\ f_y' = 3x+4y=0, \end{cases}$$

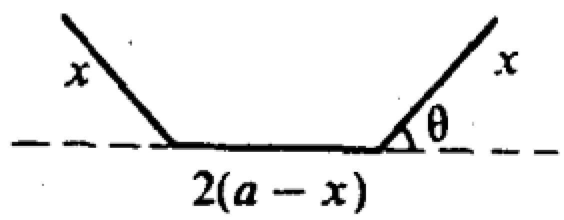
得唯一驻点(0,0),且 $f(0,0)=0$.

又 $f(x,y)$ 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值恰好等于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

的最大和最小特征值 $\frac{3+\sqrt{10}}{2}, \frac{3-\sqrt{10}}{2}$. 与 $f(0,0)$ 比较可知,所求 $f(x,y)$ 的最大值和最小值分别是 $\frac{1}{2}(3+\sqrt{10})$ 和 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{10})$.

7.5.29 设有一宽为 $2a$ 的长方形金属板,把它折成底为等角的槽(见右图),若要使槽的容积最大,试问应折起多少和倾角应取多大.



7.5.29 题图

解 右图示其横断面设折起的长度为 x,倾角为 θ. 于是,底宽为 $2(a-x)$,槽深度为 $x\sin\theta$,槽顶宽为 $2(a-x+x\cos\theta)$,从而平均宽为 $2(a-x)+x\cos\theta$,由于槽的容积与槽的横断面面积成正比,故求的 x、θ 值就是使函数

$$f(x,\theta) = x\sin\theta[2(a-x)+x\cos\theta]$$

达到极大值的 x 和 θ. 通过计算,得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin\theta(a-2x+x\cos\theta),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = x[2(a-x)\cos\theta + x(\cos^2\theta - \sin^2\theta)].$$

使上面两式为零的 $(x,0)$ 是 $f(x,\theta)$ 取得极值的驻点,但是,虽然当 $x=0,\theta=0$ 时,使 $f(x,\theta)$ 达到极小值. 但不合题意,应舍去. 故令

$$\begin{cases} a-2x+x\cos\theta=0, & (1) \\ 2(a-x)\cos\theta + x(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0, & (2) \end{cases}$$

由其来确定所要求的 x,θ.

由(1)得，$x=\dfrac{a}{2-\cos\theta}$，代入(2)中，得到 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，从而 $x=\dfrac{2}{3}a$.

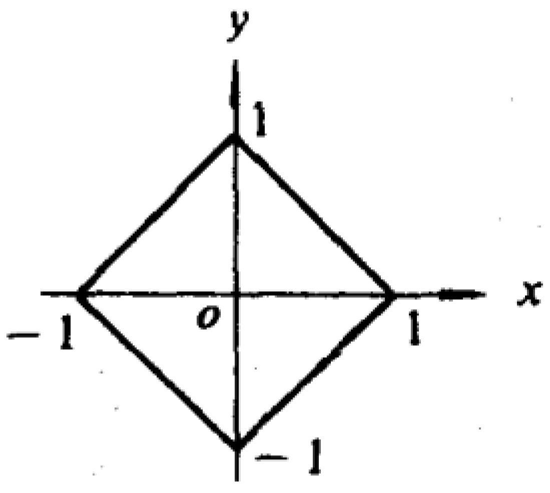
进一步可以验证，在 $(x,\theta)=(\dfrac{2}{3}a,\dfrac{\pi}{3})$ 时，有

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial\theta}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}<0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}<0.$$

于是，按此方案，即当折起 $\dfrac{2}{3}a$，倾角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 时，造成的槽的容积最大.

7.5.30　求函数 $z=x^2+y^2-xy$　在区域 $|x|+|y|\leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

解　区域如图所示.



7.5.30 题图

因为 $z_x'=2x-y,z_y'=2y-x$，

由 $z_x'=0,z_y'=0$ 得函数唯一驻点(0,0). 其相应的函数值 $z_1=0$.

考虑函数在边界上的值. 由于对称性，可以只考虑两段边界 $x+y=1$ 与 $x-y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上函数的最大值与最小值.

在 $x+y=1$ 上，$z=(x+y)^2-3xy=1-3x+3x^2,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 由 $z'=-3+6x=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，其相应的函数值 $z_2=\dfrac{1}{4}$，而在端点处的函数值为 $z_3=1,(z_4=0)$.

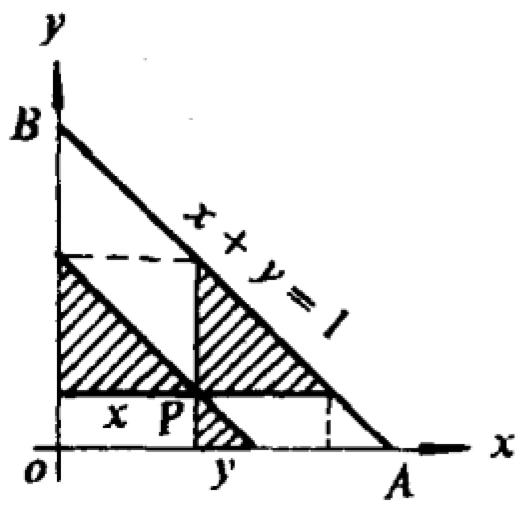
在 $x-y=1$ 上，$z=(x-y)^2+xy=1-x^2+x,(0\leqslant x\leqslant 1)$. 由 $z'=1-2x=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，其相应的函数值 $z_4=\dfrac{3}{4}$. 而在端点处的函数值为 1 和 0.

比较 $z_1=0,z_2=\dfrac{1}{4},z_3=1,z_4=\dfrac{3}{4}$ 的大小可知，在给的区域 $|x|+|y|\leqslant 1$ 上，函数 $z=x^2+y^2-xy$ 的最大值为 1，最小值为 0.

7.5.31　过以点 $O(0,0),A(1,0).B(0,1)$ 为顶点的三角形内的点 $P(x,y)$，引 OA,OB,AB 的平行线，作以 P 为顶点的三个三角形(如图.)其面积之和为 M.

(1) 当 y 一定,求 M 的最小值;

(2) 当 x,y 都变化时,求 M 的最小值.



7.5.31 题图

解 显然 $\triangle AOB$ 是一等腰三角形,而得到的三个三角形(阴影部分)也是等腰三角形,其面积分别是

$$\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}(1-x-y)^2.$$

于是 $$M = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)^2 = \left(x - \frac{1-y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2-2y+1}{4}.$$

(1) 当 y 一定时(即视 y 为常数).按一元函数求极值的必要条件,则有 $M_x' = 2\left(x - \frac{1-y}{2}\right) = 0$,即得 $x = \frac{1-y}{2}$.故当 $x = \frac{1-y}{2}$ 时,M 取极小值(即最小值),其值为 $M = \frac{1}{4}(3y^2 - 2y + 1)$.

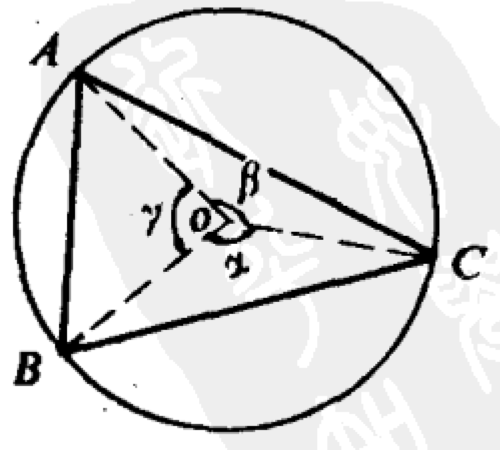
(2) 当 x、y 都变化时,由二元函数取得极值的必要条件,得方程组

$$\begin{cases} M_x' = 2\left(x - \dfrac{1-y}{2}\right) = 0, \\ M_y' = \left(x - \dfrac{1-y}{2}\right) + \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

得 $x = y = \frac{1}{3}$(唯一驻点).

由问题要求知,M 在 $x = y = \frac{1}{3}$ 处一定取得极小值(即最小值),其值为 $M = \frac{1}{6}$.

7.5.32 试求内接于定圆的三角形中面积最大者.



7.5.32 题图

解 设圆的半径为 R,其内接三角形为 ABC,连接 AO,BO,CO,其圆心角分别为 α,β,γ(见图),则 $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$.而

$$\triangle BOC\text{ 面积} = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot R\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha,$$

$\triangle AOC$ 面积 $= \frac{1}{2}R^2 \sin\beta,$

$\triangle AOB$ 面积 $= \frac{1}{2}R^2 \sin\gamma,$

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{R^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$

$$= \frac{R^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + \beta))].$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{R^2}{2}[\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{R^2}{2}[\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)] = 0, \end{cases}$$

得 $\alpha = \beta$，并代入 $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$ 中，得

$$\cos\beta - \cos 2\beta = 0.$$

解出 $\beta = \frac{2\pi}{3}$，于是 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \gamma = \frac{2\pi}{3}$. 故 $\triangle ABC$ 为正三角形时面积最大.

注　本题亦可归于使 $S = \frac{R^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ 在条件 $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ 下的极值(即最值)问题. 用拉格朗日乘数法可得到 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$，由此推出 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}\pi$，因此所求三角形为等边三角形.

这个方法可推广到内接定圆的 n 边形($n \geqslant 3$)中面积最大者是正 n 边形.

7.5.33　在区间[1,3]上用函数 $a + 3x$ 近似地替代函数 $f(x) = x^2$，试问，a,b 应为何值时，可使积分 $\int_1^3 (a + bx + x^2)^2 dx$ 为最小.

解　积分式可看作是 a 和 b 的函数，记为

$$I(a,b) = \int_1^3 (a + bx + x^2)^2 dx.$$

按二元函数极值的必要条件 $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial b} = 0$，因这里符合积分号下对 a 和 b 求导的条件，故

$$\frac{\partial I}{\partial a}=2\int_1^3(a+bx+x^2)dx=2(2a+4b+\frac{26}{3}),$$
$$\frac{\partial I}{\partial b}=2\int_1^3 x(a+bx+x^2)dx=2(4a+\frac{26}{3}b-20).$$

于是得方程组

$$\begin{cases}2a+4b-\dfrac{26}{3}=0,\\[2mm] 4a+\dfrac{26}{3}b-20=0,\end{cases}$$

解得　　$a=-\dfrac{11}{3},b=4.$

7.5.34　已知 x、y、z 为实数，且 $e^x+y^2+|z|=3$，求证：$e^xy^2|z|\leqslant 1$.

证　设 $f(x,y)=e^xy^2(3-e^x-y^2)$. 由题设 $e^x+y^2+|z|=3$，而 $|z|\geqslant 0$，故 x、y 应满足 $e^x+y^2\leqslant 3$.

$f_x'=e^xy^2(3-2e^x-y^2)$，$f_y'=2e^xy(3-e^x-2y^2)$，

令 $f_x'=0,f_y'=0$，得驻点 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$.

虽因 $y=0$ 时，也有 $f_x'=f_y'=0$，但 $y=0$ 时，所证不等式显然是成立的.

又由

$$f_{xx}''=e^xy^2(3-4e^x-y^2),$$
$$f_{xy}''=2e^xy(3-2e^x-2y^2),$$
$$f_{yy}''=2e^x(3-e^x-6y^2).$$

而 $A=f_{xx}''(0,1)=f_{xx}''(0,-1)=-2$；$B=f_{xy}''(0,1)=-2$，$f_{xy}''(0,-1)=2$；$c=f_{yy}''(0,1)=f_{yy}''(0,-1)=-8$.

可见 $B^2-AC=-12<0$. 又因 $A<0$，所以点 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 均为极大值点，且 $f(0,\pm 1)=1$，又因为在边界 $e^x+y^2=3$ 上，有 $f(x,y)=0$，故 $f(0,\pm 1)=1$ 为最大值，由此可得 $f(x,y)\leqslant 1$（其中 $e^x+y^2\leqslant 3$），即 $e^xy^2|z|\leqslant 1$.

7.5.35　若 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的边界上各点之值均为 0，在 D 的内部有连续的偏导数且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,$$

证明：$u(x,y)$ 在 D 上恒为零.

证　$u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上是连续函数. 则一定可以在 D 上取得最大值和最小值，若最大值最小值是在 D 的边界上取得，那么由已知条件可以肯定其值为零；若最大值最小值在 D 内取得，则最值处必为极点处，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

代入 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+u=0$ 中，得到 $u=0$，亦即知 $u(x,y)$ 在 D 上恒为零.

7.5.36　确定一点，使它到 n 个已知点的距离之和最小.

解　设依逆时针方向，这 n 个已知点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的直角坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，而所要求的点 P 的坐标为 (x,y). 则点 P 到 n 个已知点的距离之和是

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}=\sum_{i=1}^{n}P_i,$$

$f(x,y)$ 为极小的必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x-x_1}{P_1}+\frac{x-x_2}{P_2}+\cdots+\frac{x-x_n}{P_n}=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y-y_1}{P_1}+\frac{y-y_2}{P_2}+\cdots+\frac{y-y_n}{P_n}=0.$$

以 θ_i 表示 x 轴的正向同直线 $PP_i(i=1,2,\cdots;n)$ 间的夹角，则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i.$$

$f(x,y)$ 为相对极小的必要条件为上面两式等于零. 于是，点 $P(x,y)$ 可由上面两式的解确定.

函数 $f(x,y)$ 在平面上的一切点连续，且除 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 之外，在每点的一阶导数存在，如果用一条大的边界线把多边形围起来，则函数 $f(x,y)$ 在界内的值小于界线上的值，因此，函数 $f(x,y)$ 或在其一阶导数等于零的点上，或在 P_1,P_2，等点上取得它的绝对极小值.

在三角形的情况中，若它的任一角都不等于或大于 120° 时，这个点是等分角点之一；而当一个角等于或大于 120° 时，则此点是钝角的顶点.

在四边形的情形中，此点是对角线的交点.

7.5.37　惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数之间插入 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得分数

$$u = \frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值最大.

解 记 $w = \frac{1}{u}(a+x_1)(1+\frac{x_2}{x_1})(1+\frac{x_3}{x_2})\cdots(1+\frac{b}{x_n})$.

设 $y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_2}, \cdots, y_n = \frac{b}{x_n}$,并记 $A = y_1y_2\cdots y_n$,则有 $x_1 = \frac{b}{y_1y_2\cdots y_n} = \frac{b}{A}$ 及 $w = (a+\frac{b}{A})(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n)$.

又记 $m = a + \frac{b}{A}$,则有

$$\begin{aligned} dw &= \sum_{k=1}^{n} \frac{w}{1+y_k}dy_k - \frac{wb}{mA}\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k}{y_k} \\ &= w\sum_{k=1}^{n}(\frac{y_k}{1+y_k} - \frac{b}{mA})\frac{dy_k}{y_k}. \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial w}{\partial y_k} = 0$ 得方程组

$$\frac{y_k}{1+y_k} = \frac{b}{mA} \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

解之得驻点 $P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = (\frac{b}{a})^{n+1} = y_0.$$

在点 P_0,有

$$\begin{aligned} du|_{P=P_0} &= w\sum_{k=1}^{n} d(\frac{y_k}{1+y_k} - \frac{b}{mA})\frac{dy_k}{y_k}|_{P=P_0} \\ &= w\sum_{k=1}^{n} d(\frac{y_k}{1+y_k})(\frac{dy_k}{y_0})|_{P=P_0} - w\sum_{k=1}^{n}\frac{dy_k}{y_0}[d(\frac{1}{1+\frac{a}{b}A})]|_{P=P_0} \\ &= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\sum_{k=1}^{n} dy_k^2 + \frac{w(P_0)}{y_0(1+\frac{a}{b}A)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}[dy_k(\sum_{k=1}^{n})\frac{aA}{by_k}dy_k]_{P=P_0} \\ &= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}[\sum_{k=1}^{n} dy_k^2 + (\sum_{P=1}^{n} dy_k)^2] > 0, \end{aligned}$$

$$(\text{当}\sum_{k=1}^{n} dy_k^2 \neq 0\text{时}).$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值，从而函数 u 在

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b}{A} = \dfrac{b}{y_0^n} = \dfrac{b}{a} \cdot ay_0^{-n} = ay_0^{n+1} \cdot y_0^{-n} = ay_0, \\ x_2 = x_1 y_1 = ay_0^2, \\ x_3 = x_2 y_2 = ay_0^3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{b}{y_n} = \dfrac{b}{a} ay_n^{-1} = ay_0^{n+1} \cdot y_0^{-1} = ay_0^n, \end{cases}$$

即数 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ 构成公比为 $y_0 = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时，其值最大，并且 u 的最大值为

$$u = \frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}} = (a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}})^{-(n+1)}.$$

7.5.38　求函数 $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ 在区域 $4x^2 + y^2 = 25$ 上的最大值.

解　考虑函数 $f(x,y)$ 在区域 $4x^2 + y^2 < 25$ 内的驻点. 解方程组

$$\begin{cases} f_x' = 2x + 12y = 0, \\ f_y' = 12x + 4y = 0, \end{cases}$$

得 $x = 0, y = 0$，但因 $f_{xx}'' = 2$，$f_{xy}'' = 12$，$f_{yy}'' = 4$，且

$$(f_{xy}'')^2 - f_{xx}'' \cdot f_{yy}'' = 144 - 8 = 136 > 0.$$

所以，函数在此区域内无极值. 故函数 $f(x,y)$ 的最大值必在边界 $4x^2 + y^2 = 25$ 上达到.

现在我们求函数 $f(x,y)$ 在条件 $4x^2 + y^2 = 25$ 下的极值. 设

$$F(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 12y - 8\lambda x = 0, \\ F_y' = 12x + 4y - 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda' = 4x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}$$

得 $\lambda=-2$、$\frac{17}{4}$，代入分别求得

$$\begin{cases}x=2\\y=-3,\end{cases}\begin{cases}x=-2\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=4,\end{cases}\begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\y=-4.\end{cases}$$

由于 $f(2,-3)=f(-2,3)=-50$，$f(\frac{3}{2},4)=f(-\frac{3}{2},-4)=106\frac{1}{4}$，故知函数 $f(x,y)$ 在区域 $4x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值为 $106\frac{1}{4}$.

7.5.39 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上求一点 (x,y)，使过该点的法线与原点的距离最远.

解 椭圆在点 (x,y) 处的切线斜率为 $-\frac{b^2x}{a^2y}$，法线斜率为 $\frac{a^2y}{b^2x}$. 原点到该法线的距离等于点 (x,y) 到直线 $Y=\frac{a^2y}{b^2x}x$ 的距离 d，即

$$d=\frac{|(b^2-a^2)xy|}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}.$$

因为 $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{(b^2-a^2)^2}(\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2})$，故求 d 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最大值，相当于求 $\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}$ 在条件 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 下的最小值. 用拉格朗日乘数法，设 $F(x,y)=\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}+\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$. 解方程组

$$\begin{cases}F_x'=-\frac{2a^4}{x^3}+2b^2\lambda x=0,\\F_y'=-\frac{2b^4}{y^3}+2a^2\lambda y=0,\\F_\lambda'=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,\end{cases}$$

得 $x=\pm\sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$，$y=\pm\sqrt{\frac{b^3}{a+b}}$.

按符号的不同组合，每个象限中各有一点适合要求.

7.5.40　求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一卦限部分的切平面，使它与三个坐标面围成最小体积 v.

解　设所求的切平面在点(x,y,z)与椭球面相切，$x>0$，$y>0$，$z>0$,则切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即　$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

于是，　$$v=\frac{1}{6}\frac{a^2}{x}\cdot\frac{b^2}{y}\cdot\frac{c^2}{z}.$$

则 v 在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最小值相当于函数 $u=xyz$ 在同一条件下取最大值.用拉格朗日乘数法,设

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1).$$

由 $F_x'=0,F_y'=0,F_z'=0$ 得到一组方程

$$yz=\frac{2\lambda x}{a^2},xz=\frac{2\lambda y}{b^2},xy=\frac{2\lambda z}{c^2}.$$

三个方程两边分别乘以 x、y、z 然后相加,得

$$3xyz=2\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})=2\lambda.$$

以 $\lambda=\frac{3}{2}xyz$ 代回前三个方程,解得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

故所求的最小体积为 $v=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$

7.5.41　在直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 位于第一象限的那一部分上求一点,使该点横坐标的余弦与纵坐标的余弦的乘积最大,并求出此最大值.

解　由题意知,问题为求函数 $u=\cos x\cos y$ 在条件 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 下的最大值,用拉格朗日乘数法,设

$$F(x,y,\lambda) = \cos x\cos y + \lambda(x + y - \frac{\pi}{2}),$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x' = -\sin x\cos y + \lambda = 0, \\ F_y' = -\cos x\sin y + \lambda = 0, \\ F_\lambda' = x + y - \dfrac{\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

得驻点 $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$.

因为当(x,y)沿直线 $x + y = \frac{\pi}{2}$ 趋向端点$(0,\frac{\pi}{2})$与$(\frac{\pi}{2},0)$时，函数 u 趋于零，故函数 u 在线段内取得极大值，即最大值.

于是，当 $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$ 时，函数 u 取得最大值 $u(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

7.5.42 在旋转椭球面 $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上，求距平面 $2x + y - z = 6$ 的最近点与最远点和最近距离与最远距离.

解 设所有点为(x,y,z)，它到平面 $2x + y - z = 6$ 的距离为 $d = \frac{|2x + y - z - 6|}{\sqrt{6}}$. 为计算方便，考虑函数 $f(x,y,z) = (2x + y - z - 6)^2$，于是问题化为求函数 $f(x,y,z) = (2x + y - z - 6)^2$ 在条件 $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的条件极值. 用拉格朗日乘数法，作函数

$$F(x,y,z) = (2x + y - z - 6)^2 + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x' = 4(2x + y - z - 6) + 4\lambda x = 0 \\ F_y' = 2(2x + y - z - 6) + 2\lambda y = 0 \\ F_z' = -2(2x + y - z - 6) + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda' = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

得 $x = \pm\frac{1}{2}, y = \pm\frac{1}{2}, \pi = \mp\frac{1}{2}$.

$$d_1 = \frac{|2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) - 6|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6};$$

$$d_2=\frac{\left|2\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-6\right|}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3},$$

故最远点为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，最远距离为$\frac{4}{3}\sqrt{6}$，最近点为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，最近距离为$\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

7.5.43　经过点$\left(2,1,\frac{1}{3}\right)$的所有平面中，那一个平面与三坐标面所围成的立体的体积最小.

解　设平面的截距式方程为

$$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=1.$$

因为$\left(2,1,\frac{1}{3}\right)$在平面上，故

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{\frac{1}{3}}{z}=1,$$

即
$$\varphi(x,y,z)=6yz+3xz+xy-3xyz=0.$$

平面与坐标面所围成的体积为

$$f(x,y,z)=\frac{1}{6}xyz,$$

于是问题是求函数$f(x,y,z)$在条件$\varphi(x,y,z)=0$下的极值.应用拉格朗日乘数法，设

$$F(x,y,z)=\frac{1}{6}xyz+\lambda(6yz+3xz+xy-3xyz)$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x'=\frac{1}{6}yz+\lambda(3z+y-3yz)=0\\ F_y'=\frac{1}{6}xz+\lambda(6z+x-3xz)=0\\ F_z'=\frac{1}{6}xy+\lambda(6y+3x-3xy)=0\\ F_\lambda'=6yz+3xz+xy-3xyz=0\end{cases}$$

得
$$\frac{yz}{3z+y-3yz}=\frac{xz}{6z+x-3xz}=\frac{xy}{6y+3x-3xy},$$

由上式解出，

$$x = 2y, y = 3z, x = 6z.$$

将上面式子代入条件 $\varphi(x,y,z) = 0$，得 $z = 1$. 于是，$x = 6, y = 3$. 故所求平面方程为

$$\frac{X}{6} + \frac{Y}{3} + \frac{Z}{1} = 1,$$

即 $$X + 2Y + 6Z - 6 = 0.$$

7.5.44 过椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 上任意点作椭圆的切线，试求诸切线与坐标轴所围成的三角形面积的最小值.

解 由隐函数求导法则，得 $y' = -\dfrac{3x + y}{x + 3y}$，设 (a,b) 为椭圆上任一点，则在 (a,b) 点处的切线斜率是 $-\dfrac{3a + b}{a + 3b}$，故切线方程为

$$(3a + b)(x - a) + (a + 3b)(y - b) = 0.$$

它与坐标轴的交点为

$$\left(\frac{(a + 3b)b}{3a + b} + a, 0\right) 和 \left(0, \frac{(3a + b)a}{a + 3b} + b\right).$$

所以，切线与坐标轴围成的三角形面积 s 为

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\left|\left[\frac{(a + 3b)b}{3a + b} + a\right] \cdot \left[\frac{(3a + b)a}{a + 3b} + b\right]\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{(3a^2 + 2ab + 3b^2)^2}{(3a + b)(a + 3b)}\right|. \end{aligned}$$

因为 (a,b) 在椭圆上，所以，$3a^2 + 2ab + 3b^2 = 1$，从而

$$s = \frac{1}{2|(3a + b)(a + 3b)|},$$

于是，只需求 $(3a + b)(a + 3b)$ 在条件 $3a^2 + 2ab + 3b^2 = 1$ 下的极值即可. 为此，设

$$F(a,b) = (3a + b)(a + 3b) + \lambda(3a^2 + 2ab + 3b^2 - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} F_a' = 6a + 10b + 6\lambda a + 2b\lambda = 0 \\ F_b' = 6b + 10a + 2\lambda a + 6b\lambda = 0, \\ F_\lambda' = 3a^2 + 2ab + 3b^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

得 $$(3a + 5b)(a + 3b) - (3b + 5a)(3a + b) = 0,$$

即有 $a = \pm b$，代入椭圆方程，得 $8b^2 = 1$ 或 $4b^2 = 1$ 故有

$$b=\pm\frac{\sqrt{2}}{4},a=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ 或 }b=\pm\frac{1}{2},a=\pm\frac{1}{2}.$$

由此分别求得 $s=\frac{1}{4}$ 或 $s=\frac{1}{2}$. 所以,诸切线与坐标轴围成的三角形面积的最小值是$\frac{1}{4}$.

7.5.45　求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

解　设 (x_1,y_1) 为抛物线 $y=x^2$ 上任一点,(x_2,y_2) 为直线 $x-y-2=0$ 上任一点. 按题意,我们应求函数

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件 $y_1-x_1^2=0$ 及 $x_2-y_2-2=0$ 下的极值. 显然,由几何知. 当两点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 至少有一伸向无穷时,r 也必然趋于无穷大,故 r 的最小值必在有限处达到. 设

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2)=r^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda(x_2-y_2-2).$$

解方程组

$$\begin{cases}F_{x_1}'=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1x_1=0,\\ F_{x_2}'=2(x_2-x_1)+\lambda_2=0,\\ F_{y_1}'=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0,\\ F_{y_2}'=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0,\\ y_1-x_1^2=0,\\ x_2-y_2-2=0.\end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1=\frac{1}{2},y_1=\frac{1}{4},x_2=\frac{11}{8},y_2=-\frac{5}{8}$.

于是,所求的最短距离为

$$r_0=\sqrt{(\frac{11}{8}-\frac{1}{2})^2+(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4})^2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

7.5.46　求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的最短矩离.

解　按题设,我们应求函数

$$r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

在条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下的极值. 设

$$F(x,y,z)=r^2+\lambda(Ax+By+Cz+D).$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x' = 2(x - x_0) + \lambda A = 0, & (1) \\ F_y' = 2(y - y_0) + \lambda B = 0, & (2) \\ F_z' = 2(z - z_0) + \lambda C = 0, & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0. & (4) \end{cases}$$

由(1)、(2)、(3) 可得

$$x = x_0 - \frac{1}{2}\lambda A, y = y_0 - \frac{1}{2}\lambda B, z = z_0 - \frac{1}{2}\lambda C, \tag{5}$$

代入(4)，得

$$\lambda = \frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2} \tag{6}$$

将(5)、(6) 代入 r^2 表示式中，得

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

当 x、y、z 中有任一个趋于无穷时，r 趋于无穷. 因此，在区域内 r 必取得最小值.

于是，点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离为

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7.5.47　已知容积为 V 的开顶长方形浴盆，当其尺寸如何，有最小的表面积？

解　设浴盆长、宽、高分别为 x、y、z，则问题归结为求函数 $s = 2(x + y)h + xy$ 在条件 $V = xyh$ $(x > 0, y > 0, h > 0)$ 下的极值.

设 $F = 2(x + y)h + xy - \lambda(xyh - V)$. 解方程组

$$\begin{cases} F_x' = y + 2h - \lambda yh = 0, & (1) \\ F_y' = x + 2h - \lambda xh = 0, & (2) \\ F_h' = 2(x + y) - \lambda xy = 0, & (3) \\ xyh = V. \end{cases}$$

(1)、(2)、(3) 式可改写为

$$\frac{1}{h} + \frac{2}{y} = \lambda = \frac{1}{h} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y},$$

故有

$$x_0 = y_0 = 2h_0 = \sqrt[3]{2V}, h_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题可以断定，一定在某一处达到最小. 因此，当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$，高为 $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ 时，浴盆的表面积最小，且最小表面积 $s = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

从数学角度考虑，应讨论 x、y、h 趋于边界的情况. 当 x、y、h 中有任一个趋于零，例如，$h \to +0$ 时，则由 $V = xyh$ 即可断定 $xy \to +\infty$，但是，$s > xy$，故 $s \to +\infty$. 当 x、y、h 中有任一个趋于 $+\infty$ 时，一定引起至少有另一个趋于零. 重复上面的讨论可知，$s \to +\infty$. 因此，连续函数 s 必在区域内部取得最小值.

7.5.48　横断面为半圆形的圆柱形的浴盆，其表面积等于 s，当其尺寸怎样时，此盆有最大容积？

解　设圆柱半径为 r，高为 h，则考虑函数 $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$ 在条件 $s = \pi(r^2 + rh)$ $(r > 0, h > 0)$ 下的极值. 为此，设 $F = r^2 h - \lambda(r^2 + rh - \frac{s}{\pi})$（这里为简单起见，忽略了 $v = \frac{1}{2}\pi r^2 h$ 的余数 $\frac{1}{2}\pi$.

解方程组

$$\begin{cases} F_r' = 2rh - \lambda(2r + h) = 0, \\ F_h' = r^2 - \lambda r = 0, \\ r^2 + rh = \frac{s}{\pi} \end{cases}$$

得 $r_0 = \sqrt{\frac{s}{3\pi}}$，$h_0 = 2\sqrt{\frac{s}{3\pi}}$，于是有 $V_0 = \frac{1}{2}\pi r_0 h_0 = \sqrt{\frac{s^3}{27\pi^3}}$.

由实际情况知，V 一定达到最大体积. 因此，当 $h_0 = 2r_0 = 2\sqrt{\frac{s}{3\pi}}$ 时，体积 $V_0 = \sqrt{\frac{s^3}{27\pi^3}}$ 最大.

7.5.49　已知三角形的周长为 $2P$，求这样的三角形，当它绕着自已的一边旋转时所成的体积最大.

解　如图所示. 以 AC 为旋转轴，取高 h 及二角 α、β 为参数. 考虑函数 $V = \frac{1}{3}\pi h^3(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)$ 在条件 $\frac{h}{\cos\alpha} + \frac{h}{\cos\beta} + h(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) = 2P$ 下的

极值. 为计算简单起见,略去常数$\frac{1}{3}\pi$. 设

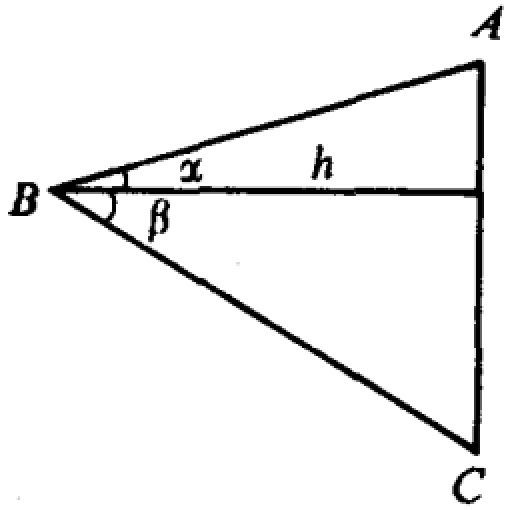
$$F = h^3(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) - \lambda(\frac{h}{\cos\alpha} + \frac{h}{\cos\beta} + h\mathrm{tg}\alpha + h\mathrm{tg}\beta).$$

解方程组

$$\begin{cases} F_h' = 3h^2(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) - \lambda(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) = 0, & (1) \\ F_\alpha' = \frac{h^3}{\cos^2\alpha} - \lambda h(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}) = 0, & (2) \\ F_\beta' = \frac{h^3}{\cos^2\beta} - \lambda h(\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\beta}) = 0, & (3) \\ F_\lambda' = h(\frac{1}{\cos\alpha}\lambda + \frac{1}{\cos\beta} + \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) - 2P = 0. & (4) \end{cases}$$

由(2)及(3)得 $\alpha = \beta$ 及 $\lambda = \frac{h^2}{1+\sin\alpha} = \frac{h^2}{1+\sin\beta}$. 代入(1),得 $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{1}{3}$. 于是,$h\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{3\cos\alpha}$,代入(4)式,得$\frac{h}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}P$,从而得三边分别为

$$AB = BC = \frac{3}{4}P, AC = 2h\mathrm{tg}\alpha = \frac{P}{2}.$$



7.5.49 题图

讨论边界情况,当 $h \to +0$ 或 $h \to P$ 时,显然有 $V \to 0$. 对于二角 α 及 β 必有大小限制:$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha$(注意 α、β 的方向规定不同),当 $\alpha \to +0$ 或 $\alpha \to \frac{\pi}{2} - 0$ 或 $\beta \to -\alpha$ 时,同样均有 $V \to 0$. 于是,当三角形的三边分别为$\frac{P}{2}$,$\frac{3P}{4}$及$\frac{3P}{4}$,并绕长为$\frac{P}{2}$的边旋转时,所得的体积最大.

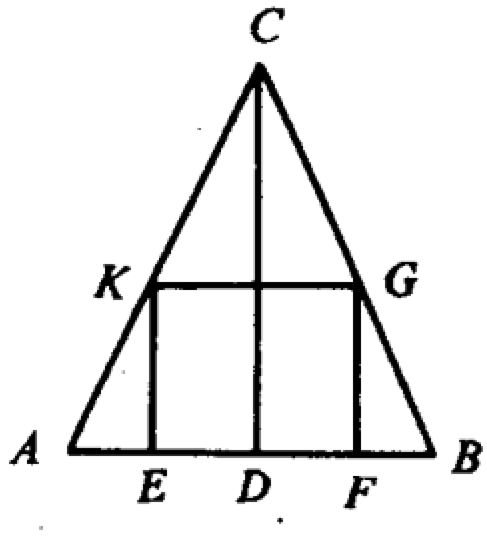
7.5.50　在已知的直圆锥内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解　设直圆锥的底面半径为 R,高为 h,且长方体的一个面与直圆锥的底面重合,两边长为 $2x$ 和 $2y$,四个顶点在直圆锥面上,高为 z,过直圆锥的高和长方体底面的对角线作一截面,如图所示,则 $CD = h$,$EK =$

$FG = z, AD = R,\ DE = \sqrt{x^2 + y^2}, (h - z)R = h\sqrt{x^2 + y^2}$($R,h$ 为常数).

由题意,考虑函数 $V = 4xyz$ 在上述条件下的极值($x > 0, y > 0, z > 0$),为计算方便简单,略去常数 4,设

$$F(x,y,z) = xyz - \lambda[h\sqrt{x^2 + y^2} - (h - z)R],$$



7.5.50 题图

解方程组

$$\begin{cases} F_x' = yz - \dfrac{\lambda hx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, & (1) \\ F_y' = xz - \dfrac{\lambda hy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, & (2) \\ F_z' = xy - \lambda R = 0, & (3) \\ (h - z)R = h\sqrt{x^2 + y^2}. & (4) \end{cases}$$

由(1)、(2)得 $x = y$,代入(3),得 $x = y = \sqrt{\lambda R}$. 又由(1)可得 $z = \dfrac{\lambda h}{\sqrt{2\lambda R}} = \dfrac{\lambda h}{\sqrt{2\lambda R}}$. 将 x,y,z 代入(4)得:

$$h = \frac{\lambda h}{\sqrt{2\lambda R}} = \frac{h}{R}\sqrt{2\lambda R},$$

解之得 $\lambda = \dfrac{2}{9}R$,从而有

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}R,\ z = \frac{1}{3}h;\ V = \frac{\sqrt{2}}{36}R^2h.$$

显然,在所论区域的边界上(即 $x \to +0, y \to +0$,或 $z \to +0$),有 $V \to 0$,故当直角平行六面体的高等于 $\dfrac{1}{3}$ 圆锥的高时,其体积最大.

7.5.51　求平面 $Ax + Bx + Cz = 0$ 与椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b} = 1$ 相交成的椭圆的面积.

解　只要确定所得椭圆的长、短半轴 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$,即可按公式 $s = \pi\bar{a}\bar{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点(0,0,0)在原椭圆柱面的中心轴上，截平面 $Ax+By+Cz=0$ 又通过它. 因此，原点是截线椭圆的中心，从而长短半轴 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的平方 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$ 分别为函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $Ax+By+Cz=0$ 及 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最大值和最小值. 设

$$F=u+2\lambda(Ax+By+Cz)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是，达到最大值、最小值点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}F_x'=\left(1-\frac{\mu}{a^2}\right)x+\lambda A=0, & (1)\\ \frac{1}{2}F_y'=\left(1-\frac{\mu}{b^2}\right)y+\lambda B=0, & (2)\\ \frac{1}{2}F_z'=z+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz=0, & (4)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)式分别乘以 x、y、z 后相加，得

$$x^2+y^2+z^2=\mu,$$

即从方程组可解得 $u(x,y,z)=\mu$. 由(1)、(2)、(3)、(4)知，若要 x、y、z 及 λ 不全为零，μ 必须满足下列方程(同时 μ 只要满足下列方程，驻点 (x,y,z) 也一定有解)：

$$\begin{vmatrix}1-\frac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A\\ 0 & 1-\frac{\mu}{b^2} & 0 & B\\ 0 & 0 & 1 & C\\ A & B & C & 0\end{vmatrix}=0.$$

展开后，得

$$\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2-\left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu+(A^2+B^2+C^2)=0.$$

此方程有两正根. 显然即为最大值及最小值 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$，由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积，$\pi \bar{a}\bar{b} = \dfrac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}$　$(C \neq 0)$.

当 $C = 0$ 时，平面 $Ax + By = 0$ 过 oz 轴，显然得不到椭圆截面.

7.5.52　求平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$（其中$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$）与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相截所成截面的面积.

解　截面为一椭圆. 我们只要考虑函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ 及 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 下的极值 $(a > 0, b > 0, c > 0)$，设

$$F = u + 2\lambda_1(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) - \lambda_2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}F_x' = \left(1 - \dfrac{\lambda^2}{a^2}\right)x + \lambda_1\cos\alpha = 0, & (1) \\ \dfrac{1}{2}F_y' = \left(1 - \dfrac{\lambda^2}{b^2}\right)y + \lambda_1\cos\beta = 0, & (2) \\ \dfrac{1}{2}F_z' = \left(1 - \dfrac{\lambda_2}{c_2}\right)z + \lambda_1\cos\gamma = 0, & (3) \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0, & (4) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. & (5) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3) 式分别乘以 x、y、z 后相加，即得

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda_2.$$

由(1)、(2)、(3)、(4) 式知，若要 x、y、z 及 λ_1 不全为零，λ_2 必须满足方程

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 - \dfrac{\lambda_2}{b_2} & 0 & \cos\beta \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{\lambda_2}{c_2} & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开整理得

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\lambda_2^2-\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha}{c^2}+\frac{\cos^2\beta}{c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos^2\gamma}{b^2}\right)\lambda_2+1=0.$$

此方程有两正根，显然即为椭圆的长短半轴的平方 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$，由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2\cos\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}.$$

于是，所求椭圆的面积为

$$s=\pi\bar{a}\bar{b}=\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}.$$

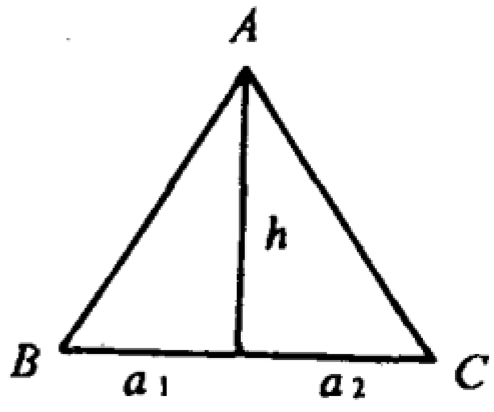
7.5.53　利用导数证明周长一定的三角形中，以等边三角形的面积为最大.

证　如图，三角形的面积 $s=\dfrac{(a_1+a_2)h}{2}$，周长为

$$(a_1+a_2)+\sqrt{h^2+a_1^2}+\sqrt{h^2+a_2^2}=k,(k\text{ 为常数})$$

用拉格朗日乘数法，设

$$F(h,a_1,a_2)=\frac{(a_1+a_2)h}{2}+\lambda(a_1+a_2$$
$$+\sqrt{h^2+a_1^2}+\sqrt{h^2+a_2^2}-k).$$



7.5.53 题图

解方程组

$$\begin{cases}F_{a_1}'=\dfrac{h}{2}+\lambda\left(1+\dfrac{a_1}{\sqrt{h^2+a_1^2}}\right)=0,\\ F_{a_2}'=\dfrac{h}{2}+\lambda\left(1+\dfrac{a_2}{\sqrt{h^2+a_2^2}}\right)=0,\\ F_h'=\dfrac{a_1+a_2}{2}+\lambda\left(\dfrac{h}{\sqrt{h^2+a_1^2}}+\dfrac{h}{\sqrt{h^2+a_2^2}}\right)=0,\\ F_\lambda'=(a_1+a_2+\sqrt{h^2+a_1^2})+\sqrt{h^2+a_2^2}-k=0,\end{cases}$$

得 $a_1=a_2$，$\dfrac{h}{a_1}=\dfrac{h}{a_2}=\sqrt{3}$，即 $\angle B=\angle C=60°$. 所以面积最大的三角形是等边三角形.

7.5.54　已知两平面曲线 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$，而 (α,β) 和 (ξ,η) 分别为两曲线上的点. 证明：如果这两点是两曲线上相距最近或

最远的点，则如下关系式必成立：

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x'(\alpha,\beta)}{f_y'(\alpha,\beta)}=\frac{g_x'(\xi,\eta)}{g_y'(\xi,\eta)}.$$

证　设 $\varphi(\alpha,\beta,\xi,\eta)$ 表示点 (α,β)，和 (ξ,η) 的距离的平方，即

$$\varphi(\alpha,\beta,\xi,\eta)=(\alpha-\xi)^2+(\beta-\eta)^2.$$

显然 φ 的约束条件为 $f(x,y)=0$ 和 $g(x,y)=0$. 设

$$F=\varphi+\lambda f+\mu g.$$

因为 $\varphi(\alpha,\beta,\xi,\eta)$ 在 (α,β,ξ,η) 处达到最大值或最小值，所以，应有

$$\begin{cases}F_\alpha'=2(\alpha-\xi)+\lambda f_x'(\alpha,\beta)=0,\\ F_\beta'=2(\beta-\eta)+\lambda f'y(\alpha,\beta)=0.\\ F_\xi'=-2(\alpha-\xi)+\mu g_x'(\xi,\eta)=0,\\ F_\eta'=-2(\beta-\eta)+\mu g_y'(\xi,\eta)=0.\end{cases}$$

由前两个等式得 $\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x'(\alpha,\beta)}{f_y'(\alpha,\beta)}$；由后两个等式得 $\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{g_x'(\xi,\eta)}{g_y'(\xi,\eta)}$. 因此

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x'(\alpha,\beta)}{f_y'(\alpha,\beta)}=\frac{g_x'(\xi,\eta)}{g_y'(\xi,\eta)}.$$

7.5.55　把已知正数 a 分解为 n 个正因数. 使它们的倒数和为最小.

解　由题意，应求函数 $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ 在条件 $a=\prod_{i=1}^{n}x_i$ 或 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ (a>0,x_i>0)$ 下的极值.

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_1}=-\frac{1}{x_i^2}+\frac{\lambda}{x_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\\ a=\prod_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

可得 $x_i=\frac{1}{\lambda}\ (i=1,2,\cdots,n)$. 从而解得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots x_n^0=a^{\frac{1}{n}},$$

[illegible]$u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=na^{\frac{1}{n}}$.

当点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 趋向于边界时，至少有一点 $x_i\to 0$，即 $\frac{1}{x_i}\to +\infty$，而 $u>\frac{1}{x_i}$，故 $u\to+\infty$. 因此，函数 u 必在区域内部取得最小值. 于是，将正数 a 分为 n 个相等正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$ 时，其倒数之和 $na^{-\frac{1}{n}}$ 最小.

7.5.56 把已知正数 a 分解为 n 个正的因数，使得它们的已知正乘幂的和为最小.

解 考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}x_i^{a_i}(a_i>0)$ 在条件 $\ln a=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ (a>0,x_i>0)$ 下的极值，设 $F=u-\lambda(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_i}=a_ix_i^{a_i-1}-\frac{\lambda}{x_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n) & (1)\\ \sum_{i=1}^{n}\ln i=\ln a & (2)\end{cases}$$

由(1)得 $x_i=(\frac{\lambda}{a_i})^{\frac{1}{a_i}}$. 代入(2)，得

$$\ln a+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln a_i}{a_i}=\ln\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

令 $\beta=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$，则有 $\lambda=a^{\frac{1}{\beta}}\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{\beta a_i}}=(a\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{a_i}})^{\frac{1}{\beta}}$，

$$x_i^0=\frac{\left(a\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{a_i}}\right)^{\frac{\frac{1}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}}}{(a_i)^{\frac{1}{a_i}}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{a_i}=\beta\lambda=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(a\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{a_i}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}}.$$

显然，函数 u 在区域内部达到最小值，于是，所求得的 u 即为最小值.

7.5.57　在求面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点，使它到 n 个已知点 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 距离的平方和最小.

解　考虑函数 $u=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值. 设

$$F(x,y,z)=u-\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x'=2\left[\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)-\lambda x\right]=2\left[(n-\lambda)x-\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=0, & (1)\\ F_y'=2\left[(n-\lambda)y-\sum_{i=1}^{n}y_i\right]=0, & (2)\\ F_z'=2\left[(n-\lambda)z-\sum_{i=1}^{n}z_i\right]=0, & (3)\\ F_\lambda'=-(x^2+y^2+z^2-1)=0. & (4)\end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)得

$$x=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ y=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ z=\frac{1}{n-\lambda}\sum_{i=1}^{n}z_i,$$

代入(4)，得

$$(n-\lambda)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2=N^2,\ (N>0)$$

于是，得

$$x'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ y'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ z'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$$

及 $$x''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ y''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i,\ z''=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i.$$

从而

$$\begin{aligned}u(x',y',z')&=\sum_{i=1}^{n}[(x'-x_i)^2+(y'-y_i)^2+(z'-z_i)^2]\\ &=n(x'^2+y'^2+z'^2)-2x'\sum_{i=1}^{n}x_i-2y'\sum_{i=1}^{n}y_i-2z'\sum_{i=1}^{n}z_i\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\end{aligned}$$

$$= n - \frac{2}{N}\left[(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n})y_i^2 + (\sum_{i=1}^{n} z_i)^2\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$= n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

同法可求得

$$u(x'',y'',z'') = n + 2N\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) > u(x',y',x').$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上连续，故必取得最大值及最小值. 于是，当 $x = x', y = y', z = z'$ 时，u 最小（同时也证明了当 $x = x'', y = y'', z = z''$ 时 u 最大）.

7.5.58 在区间[1,3]上用线性函数 $a + bx$ 近似地代替函数 $f(x) = x^2$，问 a、b 为何值时，积分 $\int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx$ 的值最小？

解 积分可看作 a 和 b 的函数，记为

$$I[a,b] = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx.$$

由二元数极值的必要条件 $\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{\partial I}{\partial b} = 0$. 这里符合积分号下对 a 和 b 求导的条件，故

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 2\int_1^3 (a + bx - x^2)dx = 2(2a + 4b - \frac{26}{3}),$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = 2\int_1^3 (a + bx - x^2)xdx = 2(4a + \frac{26}{3}b - 20).$$

于是得方程组
$$\begin{cases} 2a + 4b - \frac{26}{3} = 0, \\ 4a + \frac{26}{3}b + 20 = 0. \end{cases}$$

由此解得 $a = -\frac{11}{3}, b = 4$.

7.5.59 变量 x 和 y 满足线性方程 $y = ax + b$，它的系数需要确定，由于一系列的等精确测定的结果，对于量 x 和 y 得到 $x_i, y_i (i = 1,2,\cdots,n)$. 利用最小二乘法的方法，求系数 a 和 b 的最可靠数值.

解　根据最小二乘法的方法，系数 a 和 b 的最可靠数值是这样的：对于它们误差的平方和 $M=\sum_{i=1}^{n}(ax_i-b-y_i)^2$ 为最小. 因此上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b_i-y_i)x_i=0,\\[2ex]\dfrac{\partial M}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b_i-y_i)=0.\end{cases}$$

的解来解决. 记

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\ [x,x]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ [x,1]=\sum_{i=1}^{n}x_{i\cdot 1},$$

$$[y,1]=\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases}a[x,x]+b[x,1]=[x,y],\\ a[x,1]+bn=[y,1],\end{cases}$$

系数行列式

$$A=\begin{vmatrix}[x,x] & [x,1]\\ [x,1] & n\end{vmatrix}=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

$$=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i\neq j}x_iy_j=\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2.$$

当 $\triangle\neq 0$ 时，方程组有唯一的一组解，且

$$a=\frac{\begin{vmatrix}[x,y] & [x,1]\\ [y,1] & n\end{vmatrix}}{\triangle}=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)}{\sum\limits_{i\neq j}(x_i-y_j)^2}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}[x,x] & [x,y]\\ [x,1] & [y,1]\end{vmatrix}}{\triangle}=\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)}{\sum\limits_{i\neq j}(x_i-y_j)^2}$$

显然，此时 M 为最小，因此上述 a 和 b 即为所求.

7.5.60　已知一组实验数据

i	0	1	2	3	4
x_i	0	20	40	60	80
y_i	35.2	35.9	36.7	37.4	38.4

求一个尽可能简单的公式来拟合这些数据.

解　把所给的数据描点,容易看出这些点近似地在一条直线上,故用一次式来拟合.设所求的拟合公式为 $y=a_0+a_1x$,其中 a_1 和 a_0 是待定系数.

还需一个判断拟合好坏的标准,通常用最小二乘法,即使得平方和

$$S=(35.2-a_0-0\cdot a_1)^2+(35.9-a_0-20a_1)^2+(36.7-a_0-40a_1)^2+(37.4-a_0-60a_1)^2+(38.4-a_0-80a_1)^2$$

尽可能地小,上述的 S 依赖于 a_0 和 a_1,它是二元函数,由多元函数取极值的必要条件可得

$$\frac{\partial s}{\partial a_0}=-2(25.2-a_0)-2(35.9-a_0-20a_1)-2(36.7-a_0-40a_1)-2(37.4-a_0-60a_1)-2(38.4-a_0-80a_1)=0$$

化简得　　$5a_0+200a_1=183.6.$

由另一方程 $\frac{\partial s}{\partial a_1}=0$ 化简得

$$200a_0+12000a_1=7502,$$

解得　　$a_0=35.14,\ a_1=0.0395.$

故得一次拟合式　　$y=35.14+0.0395x.$

第八章　重　积　分

§1　二重积分

内容提要

1. 二重积分的定义与存在定理

定义：设$f(x,y)$为定义在面积确定的有界闭区域D上的有界函数，将区域D任意分成n个有面积的小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_i,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中$\Delta\sigma_i$表示第$i$个小区域，也表示其面积的大小，在每个小区域$\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点(ξ_i,η_i)，作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果不论小区域怎样划分，点$(\xi_i,\eta_i)$怎样选取，上述和式当各个小区域的直径中的最大值$\lambda$趋于零的极限存在，则称此极限值为函数$f(x,y)$在区域$D$上的二重积分，记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分符号中的$f(x,y)d\sigma$叫被积表达式，$f(x,y)$叫被积函数，$d\sigma$叫面积元素，x、y叫做积分变量，D叫做积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$叫做积分和.

由于上面和式极限的存在与小区域$\Delta\sigma_i$的分法无关，当取各边分别平行于直角坐标系的坐标轴的矩形作为这种小区域时，则

$$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y,\quad d\sigma=dxdy,$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

因之我们常把二重积分记作$\iint_D f(x,y)dxdy$，其中 $dxdy$ 叫做直角坐标系中的面积元素.

存在定理：若 $f(x,y)$ 在面积确定的有界闭域 D 上连续，则$\iint_D f(x,y)d\sigma$一定存在，亦即 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

2. 二重积分的基本性质与几何意义

性质 1　常量因子可以提到积分符号外边去，即

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma \text{ (}k\text{ 为常数)}$$

性质 2　函数的代数和的积分等于各函数的积分的代数和，即

$$\iint_D \{f(x,y) \pm \varphi(x,y)\}d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D \varphi(x,y)d\sigma.$$

性质 3　若 D、D_1、D_2 是面积确定的有界闭区域，当 D 被分割成 D_1 与 D_2 时，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma,$$

这里设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，同时所谓 D 被分割成 D_1 与 D_2 是指 $D = D_1 \cup D_2$ 且 D_1 与 D_2 没有公共内点.

性质 4　设 D 是面积确定的有界闭区域，f 和 φ 在 D 上是连续函数，且 $f(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)d\sigma,$$

由此还可得出

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质 5（估值定理）　设连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最小值和最大值分别为 m 和 M，则

$$mS \leqslant \iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant MS,$$

其中 S 表示积分域 D 的面积.

性质6(中值定理)　设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,S 表示 D 的面积,则在 D 内至少存在一点 (ξ,η) 使得下式成立:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$$

二重积分的几何意义是:若在有确定面积的有界闭区域 D 上 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)\geqslant 0$,则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶,以区域 D 为底,以 D 的边界为准线,母线平行于 oz 轴的柱面为侧面的曲顶柱体的体积.

3. 二重积分的计算

计算二重积分的基本方法是将其化为二次积分.

设积分区域

$$D\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$$

其中 $y_1(x),y_2(x)$ 都在$[a,b]$上连续,$f(x,y)$ 在 D 上连续,则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

设积分区域

$$D=\{(x,y)\,|\,c\leqslant y\leqslant d,\quad x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\}$$

其中 $x_1(y),x_2(y)$ 都在$[c,d]$上连续,$f(x,y)$ 在 D 上连续,则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

对于矩形区域

$$R=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\},$$

则有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

4. 二重积分的换元法

(1) 将直角坐标化为极坐标

设 $f(x,y)$ 在面积确定的有界闭区域 D 上连续,令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

式中 $d\sigma = rdrd\theta$ 称为极坐标中的面积元素. 如果

$$D = \{(r,\theta) | r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\},$$

其中 $r_1(\theta)$、$r_2(\theta)$ 为在$[\alpha,\beta]$上的连续函数,则

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

一般说来,当积分区域是圆域、环域、扇形域,或被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 的形式时,用极坐标来计算二重积分比较方便.

(2) 一般的换元公式(用曲线坐标计算二重积分)

在一般情形,利用变换式

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$$

其中 $x(u,v)$、$y(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数. 如果这个变换把 xoy 平面上的面积确定的有界闭区域 D 一对一地变换为 $uo'v$ 平面上的面积确定的有界闭区域 D',并且变换的雅可比(Jacobi)行列式

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v) \in D',$$

则用曲线坐标(u,v)代替直角坐标(x,y)来计算二重积分的公式是

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)]|J|dudv,$$

其中 $f(x,y)$ 设在 D 上连续,$|J|dudv$ 称为曲线坐标下的面积元素.

问 题 与 解 答

1. 二重积分的概念与性质

判断下列各命题是否正确,并说明道理(8.1.1—8.1.3 题):

8.1.1 二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 的几何意义是以 $z = f(x,y)$ 为曲顶,以 D 为底的曲顶柱体的体积.

非. 正确的命题应是,若 $f(x,y) \geqslant 0$ 对于任意 $(x,y) \in D_1$ 都成立,则

$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$ 的值等于以 $f(x,y)$ 为顶，以 D_1 为底的曲顶柱体的体积.

若 $f(x,y)\leqslant 0$ 对于任意 $(x,y)\in D_2$ 都成立，则 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$ 的值等于以 $f(x,y)$ 为顶，以 D_2 为底的曲顶柱体的体积的负值.

因此，$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ 等于在这些部分区域上的曲顶柱体体积的代数和.

8.1.2　若 $f(x,y)$ 为关于 x 的奇函数，而积分区域 D 关于 y 轴对称，则当 $f(x,y)$ 在 D 上连续时，必有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 0.$$

是. 事实上，若 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$，当 $f(x,y)$ 为关于 x 的奇函数，$[\varphi_1(y),\varphi_2(y)]$ 为关于 y 轴对称的区间时，则由定积分性质可知

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx = 0,$$

所以

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 0.$$

8.1.3　若 $f(x,y)$ 在区域 $D: a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ 上的两个累次积分都存在，则它们必定相等. 即若

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \text{ 与 } \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

都存在，则必有

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

非. 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

由于

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right),\ f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

故
$$\int_0^1 f(x,y)dy = \frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{x^2+1}.$$
$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 = \frac{-1}{1+y^2}.$$
从而
$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$
$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

这说明两个累次积分即使都存在，也不一定相等.

正确的命题应该是，若 $f(x,y)$ 在闭区域 $D: a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，则必定有
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

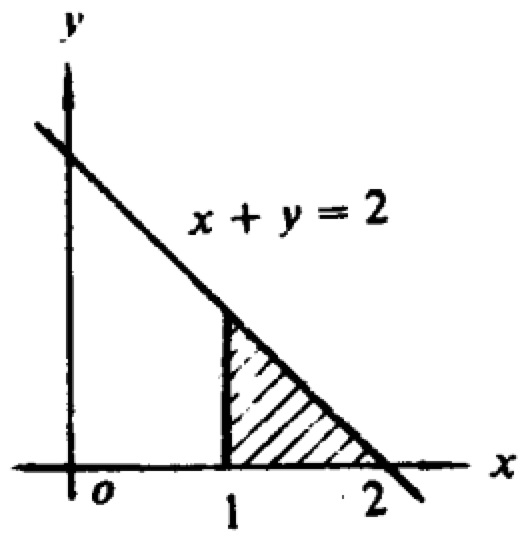
8.1.4　比较二重积分 $\iint_D \ln(x,y)d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 的大小：

(1) D 是顶点为$(1,0)$，$(1,1)$ 与$(2,0)$ 的三角形区域；

(2) D 是矩形区域：$3\leqslant x\leqslant 5$，$0\leqslant y\leqslant 1$.

解　(1) 因为 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, x+y\leqslant 2, y\geqslant 0\}$（如图），所以 $1\leqslant x+y\leqslant 2<e$，$0\leqslant \ln(x+y)<1$. 于是
$$[\ln(x+y)]^2\leqslant \ln(x+y).$$
故 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma\leqslant \iint_D \ln(x+y)d\sigma$

(2) 因为 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，所以
$$e<3\leqslant x+y\leqslant 6,\ 1<\ln(x+y).$$
于是
$$[\ln(x+y)]^2>\ln(x+y).$$
故
$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma\geqslant \iint_D \ln(x+y)d\sigma.$$



8.1.4 题图

8.1.5　估计下列二重积分的值：

(1) $\iint_D (x^2+4y^2+9)d\sigma$，　$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(2) $\iint_D \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}d\sigma$，　$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 10\}$.

解　(1) 记 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$，

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$，　得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$，　即 $(0,0)$ 为驻点，$f(0,0)=9$.

在 D 的边界上，$f(x,y)=x^2+y^2+3y^2+9=13+3y^2$，而 $0\leqslant y^2\leqslant 4$，故 $13\leqslant f(x,y)\leqslant 25$.

于是 $\max\limits_{(x,y)\in D}\{f(x,y)\}=25$，$\min\limits_{(x,y)\in D}\{f(x,y)\}=9$. 又 $\iint\limits_D d\sigma=4\pi$，所以

$$36\pi\leqslant\iint\limits_D(x^2+4y^2+9)d\sigma\leqslant 100\pi.$$

(2) 因为　$$\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant\frac{1}{100},$$

所以　$$\iint\limits_D\frac{1}{102}d\sigma\leqslant\iint\limits_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant\iint\limits_D\frac{1}{100}d\sigma.$$

但因 D 是边长为 $\sqrt{200}$ 的正方形区域，其面积 $\sigma=200$. 故

$$\frac{100}{51}\leqslant\iint\limits_D\frac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant 2.$$

8.1.6　求积分 $\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3d\sigma$ 与积分 $\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3d\sigma$ 之间的关系，其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -2\leqslant y\leqslant 2\}$；$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解　设 $D_3=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 由于 $f(x,y)=(x^2+y^2)^3$ 关于 x 和 y 都是偶函数，而 D_1 关于 x 轴对称，D_3 关于 y 轴对称，且 D_3 在第一象限内的部分恰是 D_2，因此

$$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3d\sigma=2\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)^3d\sigma=4\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3d\sigma.$$

8.1.7　设 R 为矩形 $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$. $X(x)$, $Y(y)$ 在 R 上连续，证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)dxdy=\int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证　根据在矩形域的情况下化二重积分为二次积分的计算方法，先对 y 后对 x 积分，即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y)dy = \int_a^A X(x)dx \int_b^B Y(y)dy.$$

8.1.8 设 $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$ 为二元连续函数，计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy.$$

解 按先对 y 后对 x 积分的顺序计算，即得

$$I = \int_a^A [F_x'(x,B) - F_x'(x,b)]dx = F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_a^A$$
$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

8.1.9 设 $f(x,y)$ 为连续函数，求

$$I = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)d\sigma.$$

解 记 $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$，因 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，因此在 D 上存在一点 (ξ,η)，使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \sigma f(\xi,\eta),$$

式中 σ 是 D 的面积，$\sigma = \pi r^2$. 于是

$$I = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2}\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\pi r^2}\cdot \pi r^2 f(\xi,\eta) = \lim_{r\to 0^+} f(\xi,\eta).$$

但因 $(\xi,\eta)\in D$，当 $r\to 0^+$ 时 $(\xi,\eta)\to(0,0)$，而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，因此

$$I = \lim_{r\to 0^+} f(\xi,\eta) = f(0,0).$$

8.1.10 判断下列积分的符号.

(1) $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$;　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$;

(3) $\displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy.$

解 (1) 由于 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant \ln 1 = 0$，且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$，故

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)dxdy \leqslant 0.$$

(2) 我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy = I_1 - I_2 - I_3,$$

其中

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy,\quad I_2 = \iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}dxdy,$$

$$I_3 = \iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}dxdy.$$

显然　$$0 < I_1 < \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dxdy = \pi,\quad I_2 > 0,$$

$$I_3 > \iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} dxdy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故　$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy < 0.$$

(3) 我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)dxdy + \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)dxdy.$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而积分值是正的，于是，原积分是正的.

8.1.11　设函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都在有界闭区域 D 上连续，$g(x,y)\geqslant 0$，则必有一点 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy. \tag{1}$$

证　由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，故 $f(x,y)$ 在 D 上达到最大值 M 与最小值 m，即

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M,\qquad (x,y)\in D.$$

故　$$m\cdot g(x,y) \leqslant f(x,y)g(x,y) \leqslant M\cdot g(x,y),$$

由重积分之性质得

$$m\iint_D g(x,y)dxdy \leqslant \iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy \leqslant M\iint_D g(x,y)dxdy \qquad (2)$$

若 $\iint_D g(x,y)dxdy = 0$，则由(2)式得 $\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = 0$. 因而对任意的 $(\xi,\eta) \in D$，(1) 式成立. 若 $\iint_D g(x,y)dxdy > 0$，则(2)式表明

$\mu = \dfrac{\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_D g(x,y)dxdy}$ 是介于 m 与 M 之间的一个常数，故根据连续函数的介值定理，必存在 $(\xi,\eta) \in D$，使 $f(\xi,\eta) = \mu$，从而对这样的 (ξ,η)，有

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)dxdy.$$

2. 在直角坐标系中二重积分的计算法

8.1.12　将二重积分 $I = \iint_D f(x,y)d\sigma$ 化为二次积分(两种次序)，其中积分区域 D 是：

(1) 由抛物线 $y^2 = 8x$ 与 $x^2 = y$ 所围成的区域；

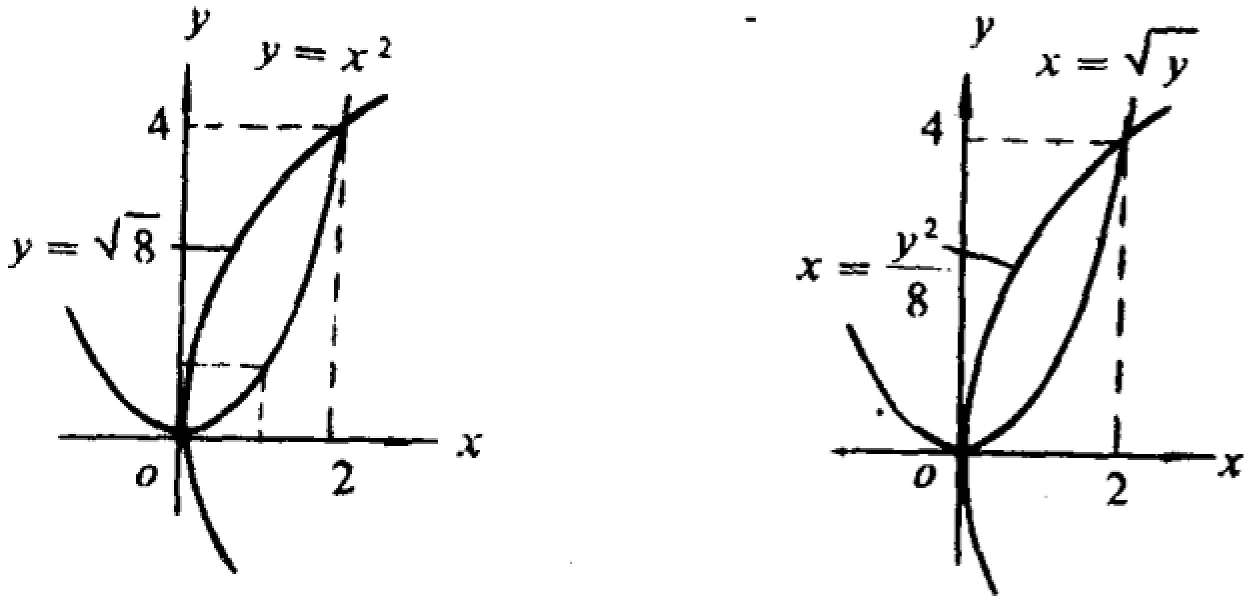
(2) 各边方程为 $x = 3, x = 5, x - 2y + 1 = 0, x - 2y + 7 = 0$ 的四边形；

(3) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant x, x \geqslant 0\}$；

(4) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$.

解　(1) 积分区域 D 如图所示，它既属 x－型区域：$D = \{(x,y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{8x}, 0 \leqslant x \leqslant 2\}$(见图(1))；又属 y－型区域：$D = \{(x,y) \mid \frac{y^2}{8} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}, 0 \leqslant y \leqslant 4\}$(见图(2)). 因此该积分先对 y 后对 x 和先对 x 后对 y 的二次积分依次为

$$I = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} f(x,y)dy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$



(1)　　8. 1. 12 题图　　(2)

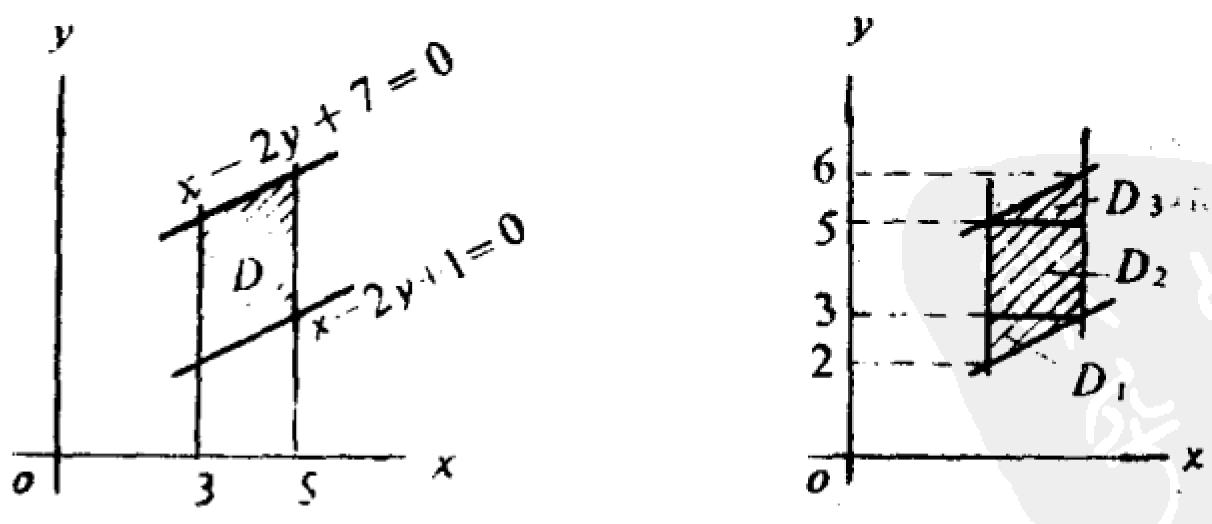
(2) 区域 D 如图(3) 所示. 如先对 y 后对 x 积分，D 已属 x — 型区域：$D=\{(x,y)\mid \frac{x+1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{x+7}{2},3\leqslant x\leqslant 5\}$(见图(3))，故

$$I=\int_3^5 dx\int_{\frac{x+1}{2}}^{\frac{x+7}{2}} f(x,y)dy.$$

如先对 x 后对 y 积分，D 虽属 y — 型区域，但右边界曲线 $x=x_2(y)$ 与左边界曲线 $x=x_1(y)$ 都是用两个式子表达的：

$$x=x_2(y)=\begin{cases}2y-1, & 2\leqslant y\leqslant 3,\\ 5, & 3<y\leqslant 6;\end{cases}$$

$$x=x_1(y)=\begin{cases}3, & 2\leqslant y\leqslant 5,\\ 2y-7, & 5<y\leqslant 6.\end{cases}$$



(3)　　(4)

这时先将 D 分成三部分(见图(4))：$D_1=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 2y-1,2\leqslant y\leqslant 3\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,3\leqslant y\leqslant 5\}$，$D_3=\{(x,y)\mid 2y+7\leqslant x\leqslant$

$5,5\leqslant y\leqslant 6\}$. 于是

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_3}f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_2^3dy\int_3^{2y-1}f(x,y)dx+\int_3^5dy\int_3^5f(x,y)dx+\int_5^6dy\int_{2y-7}^5f(x,y)dx.$$

(3)D 已属 $x-$ 型区域：$D=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\}$（见图(5)），因此化为先对 y 后对 x 的二次积分为

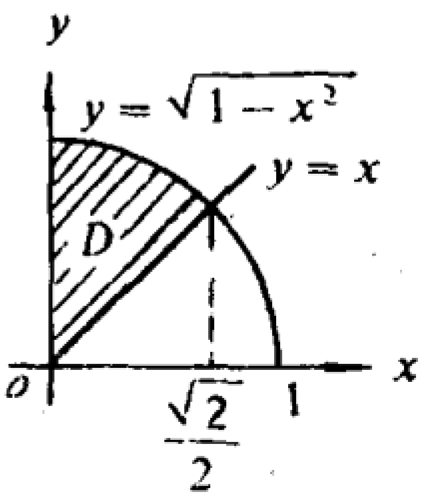
$$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy.$$

D 也属 $y-$ 型区域，但右边界曲线是用两个式子表示的：

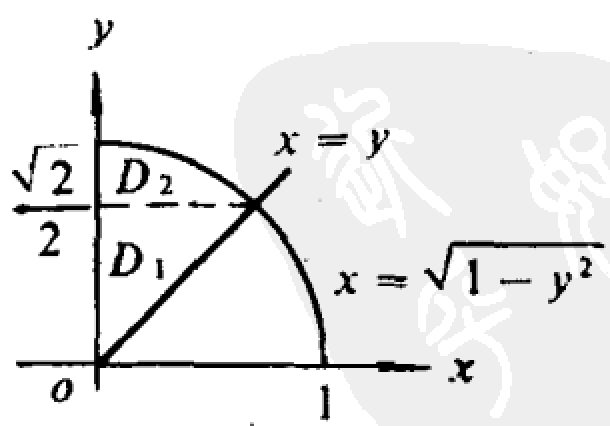
当 $0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$x=y$；当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<y\leqslant 1$ 时，$x=\sqrt{1-y^2}$（见图(6)）．因此将 D 分成 D_1 与 D_2：$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant 1\}$. 于是

$$I=\iint_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^yf(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$$



(5)

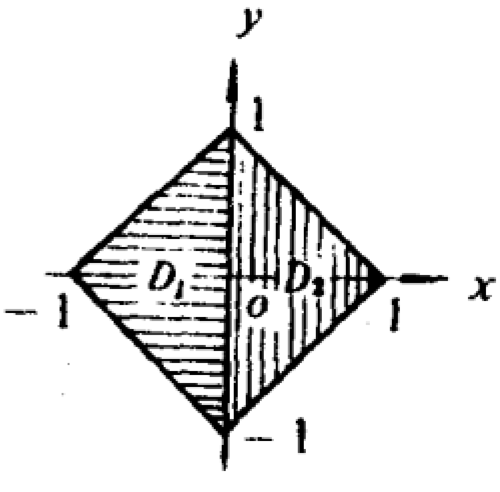


(6)

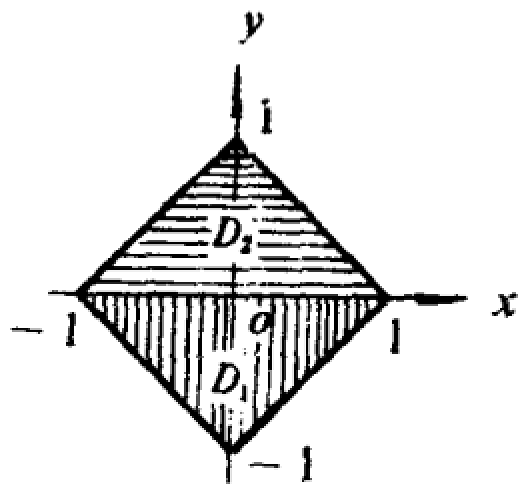
(4) 虽然 D 既属 $x-$ 型又属 y 型区域，但化为二次积分时，都需将 D

分成两部分，且因积分次序不同分法也不同（分别参见图(7)、(8)）.

$$I=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{1+x}f(x,y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x-1}^{1-x}f(x,y)dy$$
$$=\int_{-1}^{0}dy\int_{-1-y}^{1+y}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{y-1}^{1-y}f(x,y)dx.$$



(7)

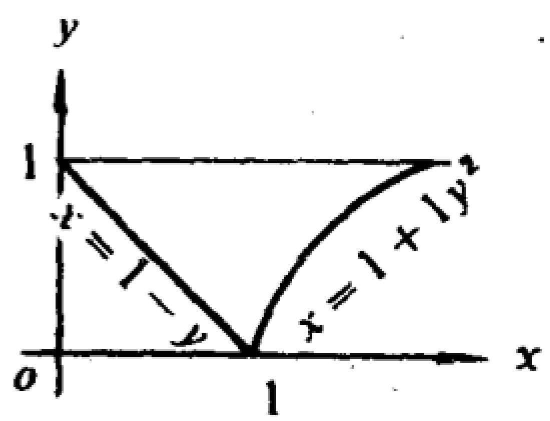


(8)

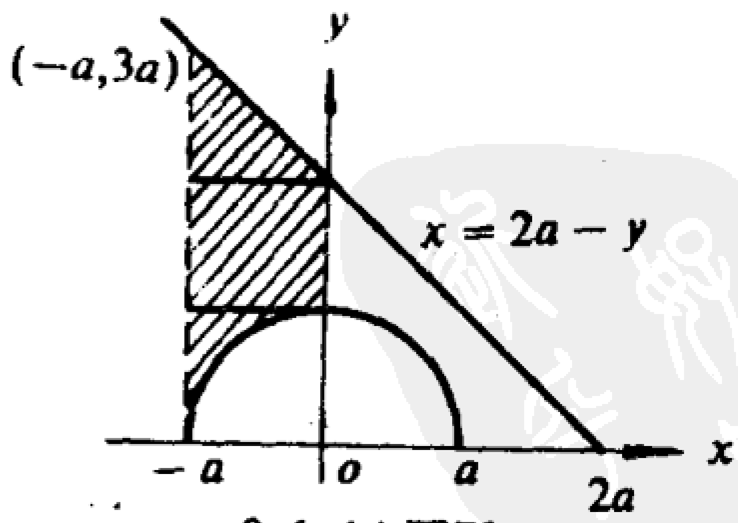
8.1.13 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 D 是由 $y^2=x-1$，$y=1-x$ 及 $y=1$ 所围成的区域，试将 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 用两种形式化为累次积分.

解 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1+y^2}f(x,y)dx.$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x-1}}^{1}f(x,y)dy.$$



8.1.13 题图



8.1.14 题图

8.1.14 下面积分中的 $f(x,y)$ 是连续函数，常数 $a>0$，试写出这积分的积分区域，并变更积分次序.

$$I = \int_{-a}^{0} dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{2a-x} f(x,y)dy.$$

解　如图，所给的积分区域是

$$\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant y \leqslant 2a - x, \qquad -a \leqslant x \leqslant 0.$$

改变积分次序，先对 x 再对 y 积分，得：

$$I = \int_0^a dy \int_{-a}^{-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_{-a}^{0} f(x,y)dx + \int_{2a}^{3a} dy \int_{-a}^{2a-y} f(x,y)dx.$$

8.1.15　将积分

$$I = \int_0^a dy \int_y^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx \qquad (a > 0)$$

写成先对 y 后对 x 的二次积分.

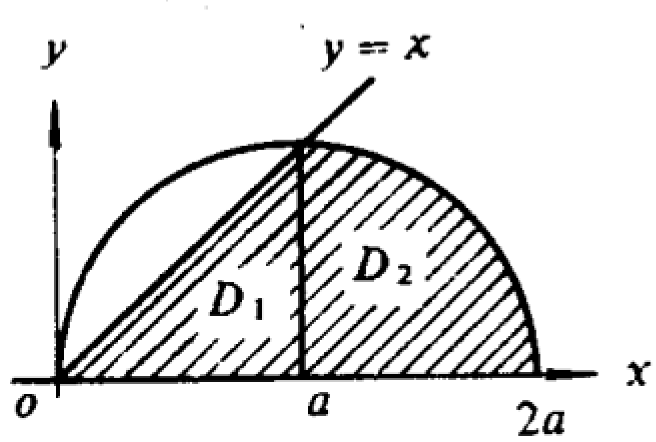
解　$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant a, y \leqslant x \leqslant a + \sqrt{a^2 - y^2}\}$

故　$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$

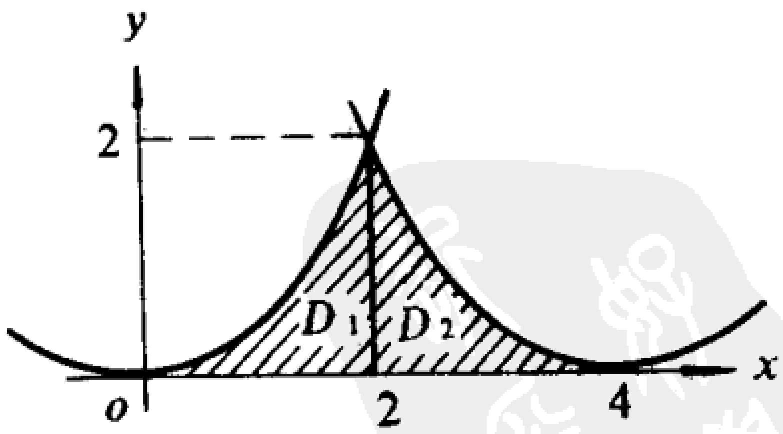
$$= \int_0^a dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$$

$$= \int_0^a dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} f(x,y)dy.$$

参见下图.



8.1.15 题图



8.1.16 题图

8.1.16　变更下列二次积分的次序.

$$\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_0^{\frac{(x-4)^2}{2}} f(x,y)dy.$$

解　首先应把两个二重积分的区域确定出来，然后才能变序. 记两区域分别为 D_1, D_2:

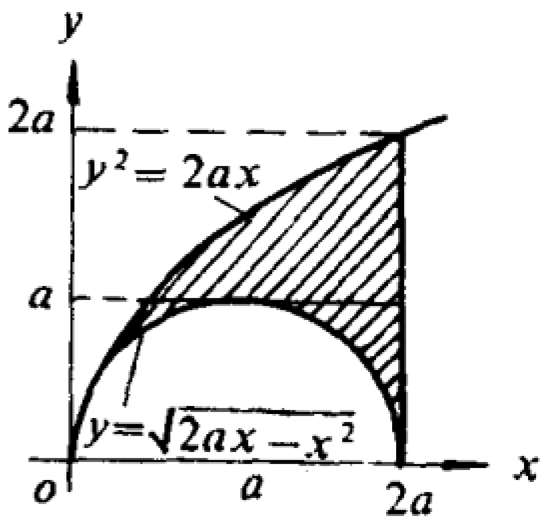
$$D_1:\begin{cases}x:(0,2)\\ y:(0,\dfrac{x^2}{2})\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}x:(2,4)\\ y:(0,\dfrac{(x-4)^2}{2})\end{cases}.$$

(参看上图). $D = D_1 + D_2$ 为一"双曲边"等腰三角形. $y = \dfrac{x^2}{2}$ 与 $y = \dfrac{(x-4)^2}{2}$ 相交于点(2,2)，由 $y = \dfrac{x^2}{2}$ 知，$x = \pm\sqrt{2y}$，由 $y = \dfrac{(x-4)^2}{2}$ 知，$x = 4 \pm \sqrt{2y}$，因而，改变积分次序时，

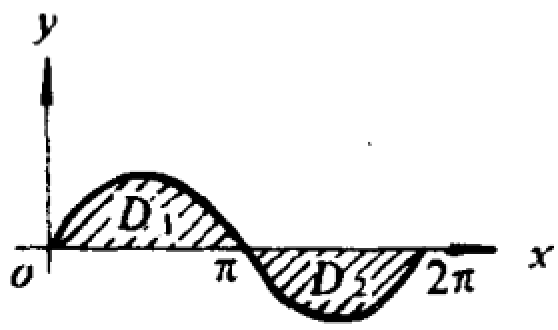
$$D:\begin{cases}y:(0,2)\\ x:(\sqrt{2y}, 4-\sqrt{2y})\end{cases}$$

故原式 $= \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{4-\sqrt{2y}} f(x,y)dx.$

8.1.17　更换二次积分 $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$ 的积分次序，其中 $f(x,y)$ 为连续函数，常数 $a > 0$.



8.1.17 题图



8.1.18 题图

解　所给的二次积分对应的二重积分的积分区域如图中阴影部分 D，所以

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$$

$$= \iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_3} f(x,y)d\sigma$$

$$= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

8.1.18　将 $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$ 改变积分次序.

解　积分区域 D 是由正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 的部分和直线 $y=0$ 所围成的(如图).

原式 $= \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

$$= \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx.$$

8.1.19　变更二次积分

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)dy + \int_2^{4.5} dx \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{3-x} f(x,y)dy$$

的积分次序.

解　把这一二次积分按其上下限画出其积分域,可以看出,两个区域合成一个积分区域 D: $y^2 \leqslant \frac{1}{2}x, x+y \leqslant 3$. 所以

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)dy + \int_2^{4.5} dx \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{3-x} f(x,y)dy$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_{-1.5}^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx.$$

8.1.20　改变二次积分 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$ 的积分次序.

解　$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$

$$= \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx.$$

8.1.21　改变积分 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 的次序.

解　积分区域是由曲线 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ 的上半圆周,抛物线

$y^2=x$ 在第一象限中的部分与直线 $x=1$ 围成的(图略).

$$原式=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{y^2}^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{1}f(x,y)dx$$
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y^2}^{1}f(x,y)dx.$$

8.1.22　证明:

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)dy.$$

其中 n 为大于 1 的正整数.

证　交换积分次序,得

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy=\int_a^b dy\int_y^b (x-y)^{n-2}f(y)dx$$
$$=\int_a^b\left[f(y)\cdot\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\Big|_y^b\right]dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b(b-y)^{n-1}f(y)dy.$$

8.1.23　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,证明:

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

证　$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\int_a^b f(y)dy\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy,$$

又　$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dy}{f(y)}=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy,$$

式中, $D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$. 所以

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right]dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy.$$

又因为$\dfrac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)f(y)}\geqslant 1$,所以

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant\iint_D dxdy=(b-a)^2.$$

8.1.24　求二重积分

$$\iint_{[0,1;0,1]}(x+y)\mathrm{sgn}(x-y)dxdy.$$

解　由定义

$$\operatorname{sgn}(x-y)=\begin{cases}1, & x-y>0;\\ 0, & x-y=0;\\ -1, & x-y<0,\end{cases}.$$

因此，应将区域 $D:[0,1;0,1]$ 分为两部分 D_1 和 D_2，

$$D_1:\begin{cases}x:(0,1)\\ y:(x,1)\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}x:(0,1)\\ y:(0,x).\end{cases}$$

于是
$$\operatorname{sng}(x-y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D_2,\\ -1 & (x,y)\in D_1.\end{cases}$$

故　原式 $=\iint\limits_{D_1}(x+y)\operatorname{sgn}(x-y)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x+y)\operatorname{sgn}(x-y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_x^1(x+y)(-1)dy+\int_0^1 dx\int_0^x(x+y)\cdot 1dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx=0.$$

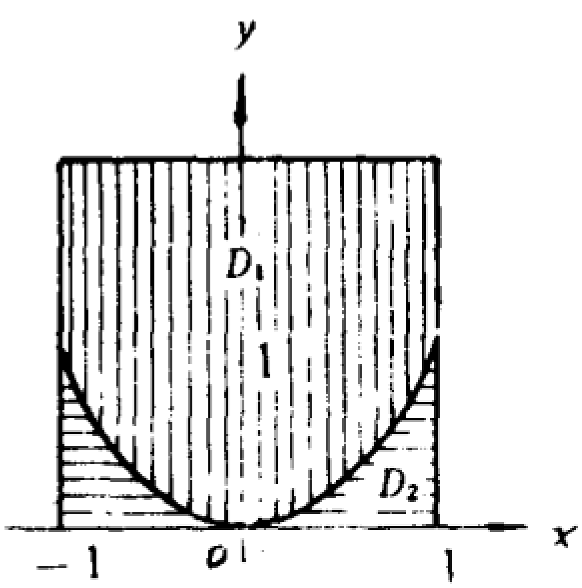
8.1.25　求积分 $\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}dxdy$. 积分区域 $D:|x|\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2$.

解　将区域 D 以曲线 $y=x^2$ 为界分为 D_1 和 D_2（如图），则

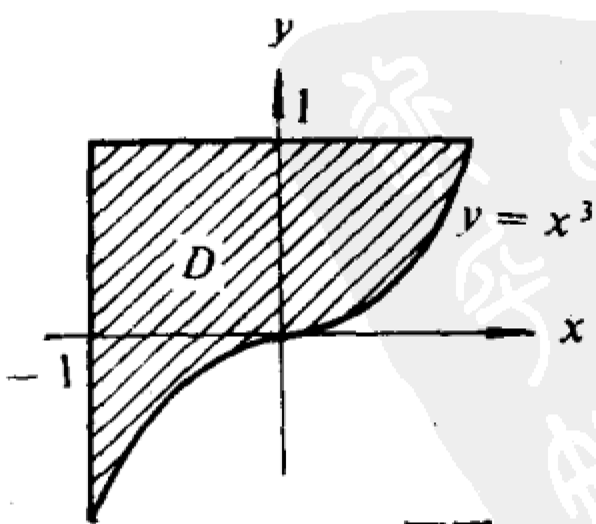
原式 $=\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}dxdy$

$$=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}dy+\int_{-1}^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy$$

$$=\int_{-1}^1\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{x^2}^2dx+\int_{-1}^1\Big[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{x^2}dx$$



8.1.25 题图



8.1.26 题图

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}[x^2]^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{4}{3}\int_{0}^{1}|x|^3dx = \frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

8.1.26　计算二重积分 $\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中 D 是由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 所围成的区域，f 是连续函数.

解　作区域 D 的图形(如上图)，令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

$$\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \iint\limits_D xdxdy + \iint\limits_D xyf(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}xdx\int_{x^3}^{1}dy + \int_{-1}^{1}xdx\int_{x^3}^{1}yf(x^2+y^2)dy$$

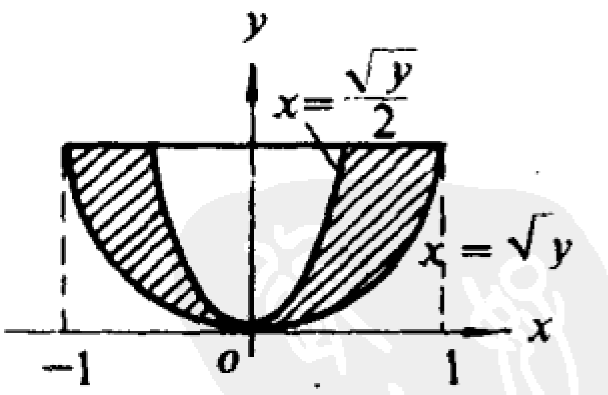
$$= \int_{-1}^{1}x(1-x^3)dx + \int_{-1}^{1}xdx\int_{x^3}^{1}\frac{1}{2}f(x^2+y^2)d(x^2+y^2)$$

$$= -2\int_0^1 x^4dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+y^2)]_{x^3}^{1}dx$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]dx = -\frac{2}{5}.$$

(因为 $x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数).

8.1.27　计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，其中 D 为抛物线 $y=x^2$，$y=4x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的区域.



8.1.27 题图

解　如图，区域 D 关于 y 轴是对称的，函数 $x+y$ 在 D 上的积分可视为 x 与 y 分别在 D 上积分之和，即

$$\iint\limits_D (x+y)d\sigma = \iint\limits_D xd\sigma + \iint\limits_D yd\sigma.$$

其中，被积函数 $z=x$ 在 D 上是奇函数，故 $\iint\limits_D xd\sigma = 0$.

被积函数 $z=y$ 在 D 上对固定的 y，它是 x 的偶函数，故

$$\iint\limits_D yd\sigma = 2\iint\limits_{D_0} yd\sigma,$$

其中 D_0 是 D 在 $x>0$ 的部分.

于是 $$\iint\limits_D (x+y)d\sigma = \iint\limits_D y d\sigma = 2\iint\limits_{D_0} y d\sigma$$

$$= 2\int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} y dx = \int_0^1 y\sqrt{y}\,dy = \frac{2}{5}.$$

8.1.28　计算 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}}} |\cos(x+y)|dxdy.$

解　设积分域 $D: 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，$D=D_1+D_2$，其中 D_1：$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}-x$；$D_2$：$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}-x<y\leqslant\frac{\pi}{2}$. 当点 $(x,y)\in D_1$ 时，$\cos(x+y)\geqslant 0$；当点 $(x,y)\in D_2$ 时，$\cos(x+y)<0$，因而有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}}} |\cos(x+y)|dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} |\cos(x+y)|dxdy + \iint\limits_{D_2} |\cos(x+y)|dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_1} \cos(x+y)dxdy - \iint\limits_{D_2} \cos(x+y)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\sin x-\cos x)dx = \pi - 2.$$

8.1.29　求 $I=\int_0^1 xf(x)dx$，其中 $f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt.$

解　原积分 I 可写成 $I=\int_0^1 x\left(\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt\right)dx$

为将它化为某区域内的二重积分，注意

$$\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt = -\int_{x^2}^1 e^{-t^2}dt,$$

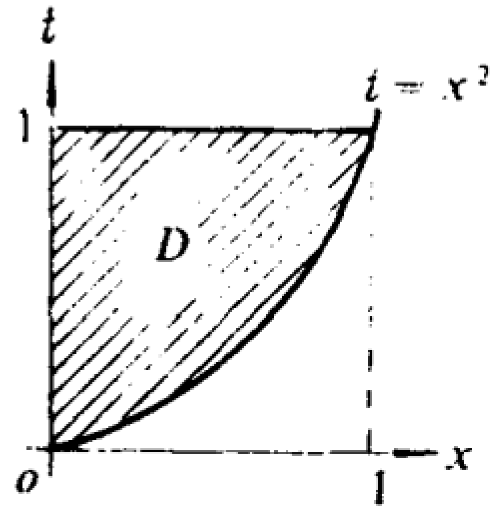
从而 $I = -\int_0^1 x\int_{x^2}^1 e^{-t^2}dtdx = -\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 xe^{-t^2}dt = -\iint\limits_D xe^{-t^2}dxdt.$

其中积分区域 $D = \{(x,t)\,|\,x\in(0,1),t\in(x^2,1)\}$(如图).

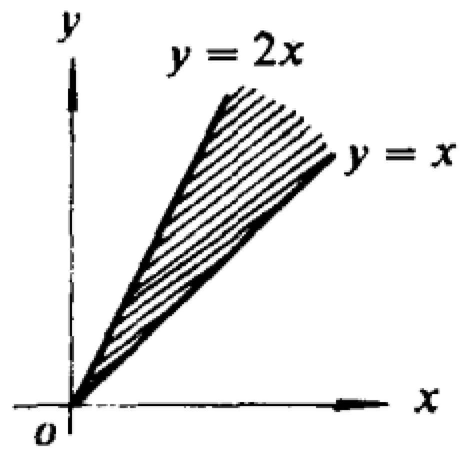
因 e^{-t^2} 不可积，所以改变积分次序，于是 $D = \{(x,t)\,|\,t\in(0,1),$ $x\in(0,\sqrt{t})\}$，于是 $I = -\int_0^1 dt\int_0^{\sqrt{t}} xe^{-t^2}dx$，故

$$原式 = -\int_0^1 dt\int_0^{\sqrt{t}} xe^{-t^2}dx = -\int_0^1 \frac{1}{2}te^{-t^2}dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-t^2}dt^2 = \frac{1}{4}(e^{-1}-1).$$



8.1.29 题图



8.1.30 题图

8.1.30　变更积分顺序，计算二次积分 $\int_0^\infty dx\int_x^{2x} e^{-y^2}dy.$

解　如图，

$$\int_0^\infty dx\int_x^{2x} e^{-y^2}dy = \int_0^\infty dy\int_{\frac{1}{2}y}^{y} e^{-y^2}dy = \int_0^\infty e^{-y^2}(y-\frac{1}{2}y)dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-y^2}\frac{y}{2}dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y^2}dy^2 = \frac{1}{4}.$$

8.1.31　设 $a = \int_0^1 e^{-t^2}dt$，$b = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}dt$，求整数 m、n 使得

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^1\left(\int_0^x e^{-y^2}dy\right)dx = ma - nb + \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

解　$2\int_{-\frac{1}{2}}^1\left(\int_0^x e^{-y^2}dy\right)dx = 2\left(-\int_{\frac{1}{2}}^0 dx\int_x^0 e^{-y^2}dy + \int_0^1 dx\int_0^x e^{-y^2}dy\right)$

$$= 2\Big(-\iint\limits_{\substack{x\leqslant y\leqslant 0\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0}} e^{-y^2}dxdy + \iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant x\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} e^{-y^2}dxdy\Big)$$

$$= 2\left(-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}dy\int_{-\frac{1}{2}}^{y}e^{-y^2}dx + \int_0^1 dy\int_y^1 e^{-y^2}dx\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{-\frac{1}{2}}(y+\frac{1}{2})e^{-y^2}dy + \int_0^1(1-y)e^{-y^2}dy\right)$$

$$= -e^{-y^2}\Big|_0^{-\frac{1}{2}} + \int_0^{-\frac{1}{2}}e^{-y^2}dy + 2\int_0^1 e^{-y^2}dy + e^{-y^2}\Big|_0^1$$

$$= 2\int_0^1 e^{-y^2}dy - \int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t^2}dt + \frac{1}{e} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

$$= 2a - b + \frac{1}{e} - \frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

所以 $m = 2, n = 1$.

8.1.32　计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 $B: |y| \leqslant |x|, |x| \leqslant 1$.

解　因为 $f(x,-y) = f(x,y)$，$f(-x,y) = f(x,y)$，即 $f(x,y)$ 对 x、y 皆是偶函数，且区域 D 对 x 轴、y 轴对称，所以

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma = 4\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)dy = 4\int_0^1 (x^2y + \frac{y^3}{3})\Big|_0^x dx$$

$$= 4\int_0^1 (x^3 + \frac{x^3}{3})dx = \frac{16}{3}\int_0^1 x^3dx = \frac{4}{3}x^4\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

8.1.33　计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy + \int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

解　如图，

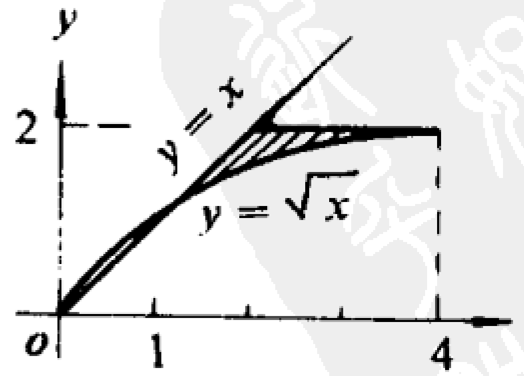
$$\text{原式} = -\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$

$$= -\int_1^2 \frac{2y}{\pi}(\cos\frac{\pi y^2}{2y} - \cos\frac{\pi y}{2y})dy$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\int_1^2 y d\sin\frac{\pi y}{2}$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}(y\sin\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \sin\frac{\pi y}{2}dy)$$



8.1.33 题图

$$= -\frac{4}{\pi^2}[-1 + (\frac{2}{\pi}\cos\pi - \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2})]$$

$$= \frac{4}{\pi^3}(\pi + 2).$$

8.1.34　已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明

$$2\left[\int_0^a f(x)dx \int_x^a f(y)dy\right] = \left[\int_0^a f(x)dx\right]^2.$$

证　设区域 $D: 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a$，则

$$I = \iint_D f(x)f(y)dxdy = \int_0^a \left[\int_0^a f(x)f(y)dy\right]dx$$

$$= \int_0^a \left[\int_0^a f(x)f(t)dt\right]dx = \int_0^a f(t)dt \int_0^a f(x)dx = \left[\int_0^a f(x)dx\right]^2.$$

又 $I = I_1 + I_2$，其中

$$I_1 = \int_0^a dx \int_x^a f(x)f(y)dy = \int_0^a f(x)dx \int_x^a f(y)dy,$$

$$I_2 = \int_0^a dx \int_0^x f(x)f(y)dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x)f(y)dx$$

$$= \int_0^a f(y)\left[\int_y^a f(t)dt\right]dy = \int_0^a f(x)\left[\int_x^a f(t)dt\right]dx$$

$$= \int_0^a f(x)\left[\int_x^a f(y)dy\right]dx = \int_0^a f(x)dx \int_x^a f(y)dy,$$

所以　$2[\int_0^a f(x)dx \int_x^a f(y)dy] = [\int_0^a f(x)dx]^2.$

8.1.35　设 $f(x)$ 为闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数，试研究

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy,$$

从而证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

此处仅当 $f(x)$ 为常数时等号才成立.

证　因为　$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$

$$= \int_a^b \left\{\int_a^b [f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y)]dy\right\}dx$$

$$= \int_a^b \left\{\int_a^b f^2(x)dy - 2\int_a^b f(x)f(y)dy + \int_a^b f^2(y)dy\right\}dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b f^2(x)dy\right]dx - 2\int_a^b f(x)\left[\int_a^b f(y)dy\right]dx + \int_a^b \left[\int_a^b f^2(y)dy\right]dx$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)dx - 2\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 + (b-a)\int_a^b f^2(y)dy$$

$$= 2\left\{(b-a)\int_a^b f^2(x)dx - \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\right\} \quad (1)$$

当且仅当 $f(x) \equiv f(y)$，即 $f(x)$ 为常数时，则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由(1)即得 $(b-a)\int_a^b f^2(x)dx = \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2.$

若 $f(x)$ 不恒为常数，则 $\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy > 0.$

于是由(1)得 $(b-a)\int_a^b f^2(x)dx > [\int_a^b f(x)dx]^2.$

故 $(b-a)\int_a^b f^2(x)dx \geqslant [\int_a^b f(x)dx]^2.$

此处仅当 $f(x)$ 为常数时等号才成立.

8.1.36 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (|x| + |y|)dxdy.$

解 设 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 在第一象限内的部分为 $D_1: x^2 + y^2 \leqslant 1, x > 0, y > 0$，其上面的积分为

$$\iint\limits_{D_1} (|x| + |y|)dxdy = \iint\limits_{D_1} (x + y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x + y)dy.$$

设 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 在第二、第三、四象限内的部分分别为 D_2, D_3, D_4，

D_2: $x^2 + y^2 \leqslant 1,\quad x < 0,\quad y > 0$;

D_3: $x^2 + y^2 \leqslant 1,\quad x < 0,\quad y < 0$;

D_4: $x^2 + y^2 \leqslant 1,\quad x > 0,\quad y < 0$.

它们上面的积分分别为

$$\iint\limits_{D_2} (|x| + |y|)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (-x + y)dy$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u + v)dv, \quad (u = -x, v = y);$$

$$\iint\limits_{D_3} (|x| + |y|)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 (-x - y)dy$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u+v)dv, \quad (u=-x, v=-y);$$

$$\iint_{D_4} (|x|+|y|)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 (x-y)dy$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u+v)dv, \quad (u=x, v=-y);$$

所以，原式 $= 4\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dy$

$$= 4\int_0^1 \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)\right]dx = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

8.1.37　设 m、n 为正整数，且其中至少有一个是奇数，试证：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy = 0.$$

证　设 m 是奇数，则

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy = \int_{-a}^a y^n dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} x^m dy.$$

因为 x^m 是奇函数，且积分上下限只差一个正负号，所以对 x 的积分为零，于是

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy = 0.$$

同理可证，当 n 为奇数时，

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n dxdy = 0.$$

8.1.38　将二重积分 $\iint_D (x-y)^n f(y)dxdy$ 化为定积分，其中 D 是直线 $y=x_0$，$y=x$ 及 $x=z$（其中 $x_0<z$）所围的三角形域，并证明

$$\underbrace{\int_{x_0}^z dx \int_{x_0}^x dx \cdots \int_{x_0}^x f(x)dx}_{n+1\text{次}} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^z (x-y)^n f(y)dy.$$

证　将二重积分化为二次积分，得

$$\iint_D (x-y)^n f(y)dxdy = \int_{x_0}^z f(y)dy \int_y^z (x-y)^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^z (z-y)^{n+1} f(y)dy.$$

另一方面，$\iint\limits_D (x-y)^n f(y)dxdy = \int_{x_0}^z dx \int_{x_0}^x (x-y)^n f(y)dy$，

因此有 $\int_{x_0}^z dx \int_{x_0}^x (x-y)^n f(y)dy = \int_{x_0}^z \frac{(z-y)^{n+1}}{n+1} f(y)dy.$

设 $I_n(x) = \int_{x_0}^x (x-y)^n f(y)dy$，则上式变为

$$I_{n+1}(z) = (n+1)\int_{x_0}^z I_n(x)dx,$$

将 $n+1$ 换为 n，z 换为 x 便得

$$I_n(x) = n\int_{x_0}^x I_{n-1}(x)dx.$$

反复运用此式便得

$$I_n(x) = n!\underbrace{\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\cdots\int_{x_0}^x dx}_{n+1\text{次}}.$$

即 $\underbrace{\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\cdots\int_{x_0}^x f(x)dx}_{n+1\text{次}} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-y)^n f(y)dy.$

8.1.39 计算区域 $D\{(x,y)\,|\,x^4-(2a^2-1)x^2-2xy+y^2\leqslant 0\}$ 上的积分 $\iint\limits_D xydxdy$.

解 由 $x^4-(2a^2-1)x^2-2xy+y^2\leqslant 0$ 可得，

$$(x-y)^2\leqslant a^4-(x^2-a^2)^2,$$

即
$$|x-y|\leqslant\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2}, \tag{1}$$

$$-\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2}\leqslant x-y\leqslant\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2},$$

故
$$x-\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2},$$

又由(1)有 $(x^2-a^2)^2\leqslant a^4$，即 $(2a^2-x^2)x^2\geqslant 0$. 故知 $2a^2-x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant 2a^2$. 因而 $-\sqrt{2}a\leqslant x\leqslant\sqrt{2}a$. 于是

$$\iint_D xydxdy = \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} dx \int_{x-\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2}}^{x+\sqrt{a^4-(x^2-a^2)^2}} xydy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} x \cdot \frac{1}{2}\{[x + \sqrt{a^4 - (x^2 - a^2)^2}]^2 - [x - \sqrt{a^4 - (x^2 - a^2)^2}]^2\}dx$$

$$= 2\int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} x^2 \sqrt{x^2(2a^2 - x^2)}dx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}a} x^2 \sqrt{x^2(2a^2 - x^2)}dx \qquad (令\ x = \sqrt{2}a\sin\theta)$$

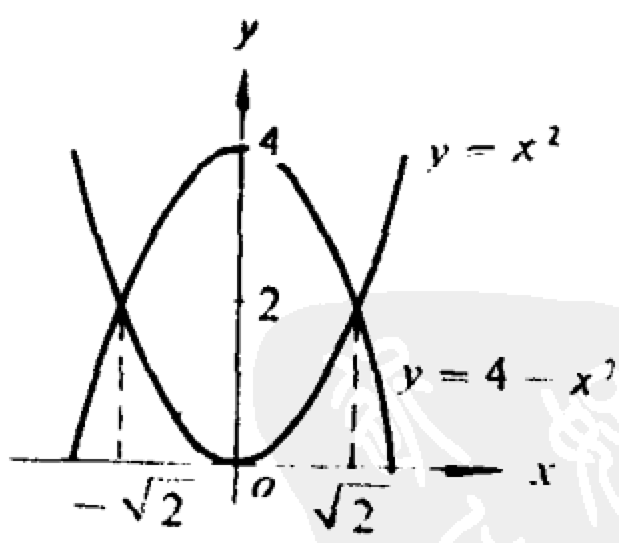
$$= 16\sqrt{2}a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot \cos^2\theta d\theta$$

$$= 16\sqrt{2}a^5\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d\theta\right]$$

$$= 16\sqrt{2}a^5\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{15}\sqrt{2}a^5.$$

3. 在极坐标系中二重积分的计算法

8.1.40　交换二次积分 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dydx$ 的积分次序，并把它转换为极坐标中的二次积分.



8.1.40 题图

解　如图，

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$$

$$= \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx.$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} d\theta \int_0^{\operatorname{tg}\theta\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

$$+ \int_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\operatorname{arctg}(-\sqrt{2})} d\theta \int_0^{-\frac{1}{2\cos^2\theta}(-\sin\theta+\sqrt{1+15\cos 2\theta})} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

8.1.41 将对极坐标的二次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 交换积分次序，再把它化为直角坐标系，写出先对 x 后对 y 以及先对 y 后对 x 的两个二次积分.

解 $I=\int_0^a rdr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

$$+\int_a^{2a}rdr\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_{-a}^0 dy\int_{-y}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx$$

$$=\int_0^a dx\int_{-x}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)dy+\int_a^{2a}dx\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)dy.$$

8.1.42 改变下面积分的次序，并转化成在极坐标中的二次积分.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{1-x}^x f(x,y)dy+\int_1^{+\infty}dx\int_0^x f(x,y)dy.$$

解 积分区域由直线 $y=x$、$y=1-x$ 及 x 轴所围成(图略)，

原式 $=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{1-y}^{+\infty}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}f(x,y)dx.$

极坐标形式为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{+\infty}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

8.1.43 将积分 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$ 化为极坐标形式的二次积分(两种不同的积分次序).

解 积分区域 D 是由半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和直线 $x+y=1$ 所围成的. 在极坐标系中，$y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $x+y=1$ 化为 $r=1$ 和 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$. 故有

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

下面研究先对 θ 后对 r 的积分，将 $r = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$ 改变形式，得

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}.$$

故
$$\varphi_1(r) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\,r} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}\,r}$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1(r) = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}\,r}$$

由此即得

$$\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 rdr\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\,r}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\,r}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta.$$

8.1.44　计算 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中，$D:\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2$.

解　原式 $= \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\sin r\cdot rdrd\theta = 2\pi\int_\pi^{2\pi}\sin r\cdot rdr$

$$= 2\pi[(-r\cos r)\Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\cos rdr]$$

$$= 2\pi(-2\pi-\pi) = -6\pi^2.$$

8.1.45　计算 $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|d\sigma$，其中，$D:x^2+y^2 \leqslant 16$.

解　因被积函数中绝对值符号内的 x^2+y^2-4 在 D 上变号，所以将 D 分为两部分（如图）：$D_1 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 4\}$，

$$D_2 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 16\},$$

考虑到积分区域的几何形状和被积函数的构造，则有

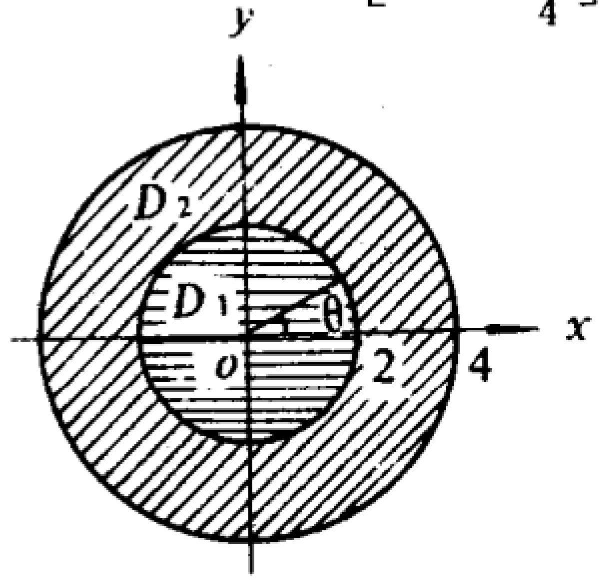
$$I = \iint\limits_D |x^2+y^2-4|d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)d\sigma + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)d\sigma$$

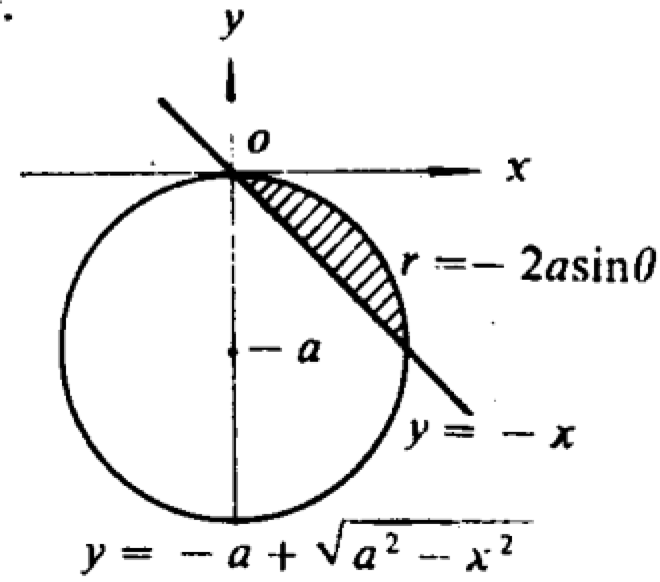
$$= \iint\limits_{D_1}(4-r^2)rdrd\theta + \iint\limits_{D_2}(r^2-4)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr + \int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4(r^2-4)rdr$$

$$= 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 80\pi.$$



8.1.45 题图



8.1.46 题图

8.1.46　计算 $\int_0^a dx \int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dy.$

解　虽已给出二次积分，但直接计算较繁. 考虑到被积函数的构造，可选用极坐标，为此，由积分限可知相应的二重积分的积分区域

$$D = \{(x,y) \mid -x \leqslant y \leqslant -a + \sqrt{a^2-x^2}, x \leqslant a\}(\text{如图}),$$

再将积分化为极坐标形式，得

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a\sin\theta} \frac{1}{r\sqrt{4a^2-r^2}} rdr$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left[\arcsin\frac{r}{2a}\right]_{r=0}^{r=-2a\sin\theta} d\theta = \frac{\pi^2}{32}.$$

8.1.47　计算积分

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx.$$

解　虽已给出二次积分，但 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，因此考虑用极坐标. 由积分限可知，相应的二重积分的积分区域 D 由

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y,\quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}\right\}$$

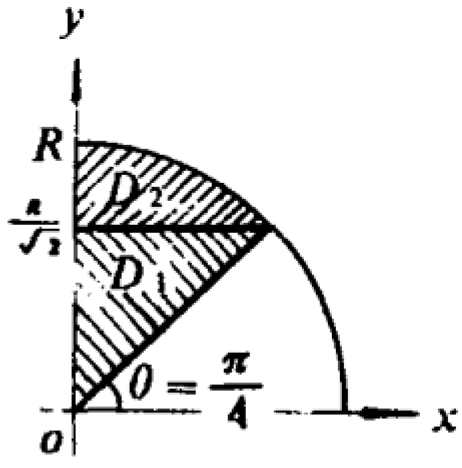
与　$$D_2 = \left\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2-y^2},\quad \frac{R}{\sqrt{2}} \leqslant y \leqslant R\right\}$$

组成(如图). 将积分化为极坐标形式,得

$$I=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_D e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^R=\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2}).$$



8.1.47 题图

8.1.48 计算积分

$$\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

解 化为极坐标计算,因 $D'=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,故

$$\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\pi\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$$

$$=\pi\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\pi(\arcsin t+\sqrt{1-t^2})\Big|_0^1=\pi(\frac{\pi}{2}-1).$$

8.1.49 计算下列二重积分:

(1) $I=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$,其中 D 为 $x^2+y^2=2Rx$ 围成的区域;

(2) $I=\iint_D\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$,其中 D 为圆 $x^2+y^2=4,x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x,y=0$ 所围成的第一象限内的区域.

解 (1) $I=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}rdr$,

令 $t=R^2-r^2$,则

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{R^2}^{R^2\sin^2\theta}-\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\frac{R^3}{9}(3\pi-4).$$

(2) 因 $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$,所以 $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\theta$,

$$I=\iint_D\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\theta rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr=\frac{3}{64}\pi^2.$$

8.1.50　计算积分 $\iint\limits_D (x^2+y)d\sigma$，　$D: x^2+y^2 \leqslant a^2$.

解　因为 $f(-x,y)=f(x,y)$，区域 D 关于 y 轴对称，故

$$\iint\limits_D (x^2+y)d\sigma = \iint\limits_D x^2 d\sigma = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2\cos^2\theta r dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi}{4}a^4.$$

8.1.51　计算 $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma, D: a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2$.

解　$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma = \iint\limits_D \frac{1}{2} r\ln r^2 dr d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \ln r^2 dr^2$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} [r^2\ln r^2 - r^2]_a^b d\theta = \frac{\pi}{2}[b^2\ln b^2 - a^2\ln a^2 - b^2 + a^2].$$

8.1.52　计算 $\int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} [(x-a)^2+y^2]dy$，$(a>0)$.

解　变换成极坐标计算，得

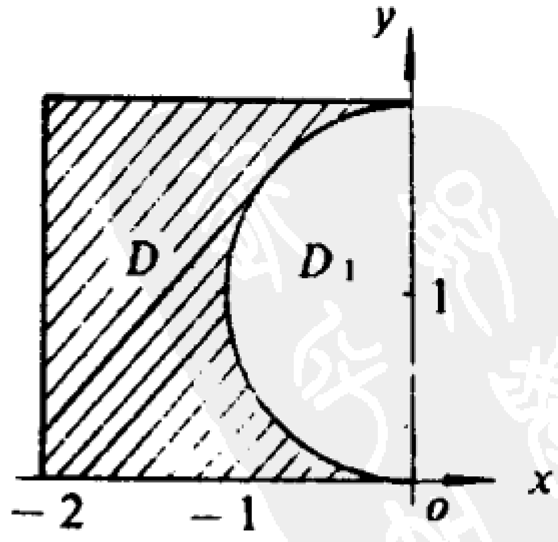
$$\int_{-a}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} [(x-a)^2+y^2]dy$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a [(r\cos\theta - a)^2 + r^2\sin^2\theta] r dr$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a [r^3 + a^2 r - 2ar^2\cos\theta] dr$$

$$= a^4\int_0^{\pi} (\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cos\theta] d\theta = \frac{3}{4}\pi a^3.$$

8.1.53　计算 $I = \iint\limits_D x^2y^2 dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2$，$y=0$，$x=-2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的区域.



8.1.53 题图

解　如图，

$$I = \iint\limits_{D+D_1} x^2y^2 dxdy - \iint\limits_{D_1} x^2y^2 dxdy$$

$$\iint\limits_{D+D_1} x^2y^2 dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_0^2 x^2y^2 dy$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{8}{3} x^2 dx = \frac{64}{9}.$$

采用极坐标，得

$$\iint_{D_1} x^2 y^2 dxdy = \iint_{D_1} r^5 \sin^2\theta \cos^2\theta drd\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^5 \sin^2\theta \cos^2\theta dr$$

$$= \frac{32}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8\theta (1 - \sin^2\theta) d\theta = \frac{32}{3} [\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} u du].$$

利用分部积分公式可得

$$\iint_{D_1} x^2 y^2 dxdy = \frac{32}{3} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{32}{3} (\frac{105}{384} - \frac{943}{3840}) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7}{24} \frac{\pi}{2}$$

从而　　$I = \frac{64}{9} - \frac{7}{24} \cdot \frac{\pi}{2}.$

8.1.54　计算 $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} \quad (m > 0).$

解　设 D 为由 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x^2 + y^2 = z^2 \ (0 < z < 1)$ 所围成的区域，采用极坐标计算. 若 $m \neq 1$，则

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = \iint_D \frac{rdrd\theta}{r^{2m}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^1 r^{(1-2m)} dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{r^{2-2m}}{2-2m} \Big|_z^1 = \frac{\pi}{1-m} [1 - z^{2-2m}]. \tag{1}$$

如果 $0 < m < 1$，当 $z \to +0$ 时，(1) 式趋于 $\frac{\pi}{1-m}$；如果 $m > 1$，当 $z \to +0$ 时，(1) 式趋于 $-\infty$.

若 $m = 1$，则

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \int_z^1 \frac{drd\theta}{r} = 2\pi \cdot \ln r \Big|_z^1 = -2\pi \ln z. \tag{2}$$

当 $z \to +0$ 时，(2) 式趋于 $+\infty$. 于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-m}, & 0<m<1;\\ +\infty, & m=1;\\ -\infty, & m>1.\end{cases}$$

4. 用曲线坐标计算二重积分

8.1.55 求二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy$，$D$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$x>0,y>0$.

解 设 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，通过此变换，$xoy$ 平面上的区域 D 变成了 $r\theta$ 平面上的区域 $D_1: r=1, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 且

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr,$$

于是

$$\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-r^2}abrd\theta dr$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=\frac{ab\pi}{2}\Big[-\frac{1}{2}\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{ab\pi}{6}.$$

8.1.56 计算 $\iint\limits_D\ln(xy)dxdy$，$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant xy\leqslant 2, x\leqslant y\leqslant 4x, x>0\}$.

解 $D=\{(x,y)\mid x\leqslant xy\leqslant 2, 1\leqslant\dfrac{y}{x}\leqslant 4, x>0\}$，

令 $xy=u, \dfrac{y}{x}=v$，则 $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}\ (u>0,\ v>0)$，

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v^3}}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

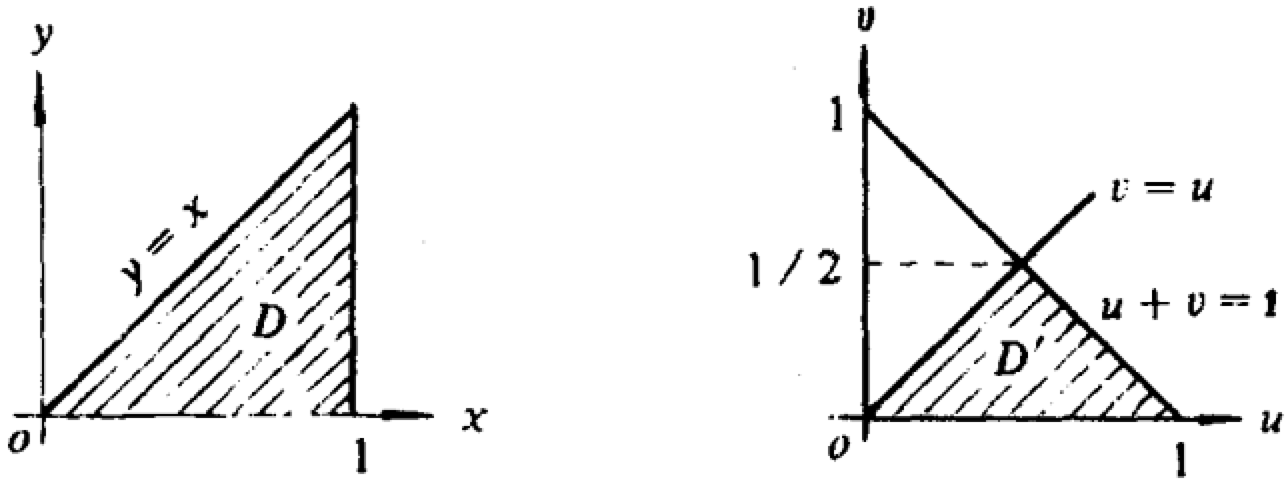
$$D' = \{(u,v) \mid 1 \leqslant u \leqslant 2, 1 \leqslant v \leqslant 4\},$$

所以

$$\iint_D \ln(xy)dxdy = \iint_{D'} \ln u \frac{1}{2v}dudv = \int_1^2 \ln u du \int_1^4 \frac{dv}{2v} = \ln 2(2\ln 2 - 1).$$

8.1.57　当 $f(x,y)$ 连续时，对于 $I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$ 进行变量替换 $x = u + v, y = u - v$.

解　在这个变换下 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$ 与 $D' = \{(u,v) \mid 0 \leqslant v \leqslant u, u + v \leqslant 1\}$ 一一对应（如图），



(a)　　　(b)

8.1.57 题图

变换的行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

所以 $I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$

$$= \iint_{D'} f(u+v, u-v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv = 2\int_0^{\frac{1}{2}} dv \int_v^{1-v} f(u+v, u-v)du.$$

8.1.58　计算 $\iint_D \frac{2x+y}{x^{3/2}}dxdy$，其中 D 是抛物线 $y^2 = 2x$ 和直线 $x + y = 4, x + y = 12$ 所围成的区域.

解　令 $\begin{cases} y = \xi\sqrt{x}, \\ x + y = \eta. \end{cases}$ 从中解出 ξ, η，即得变量代换 $\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \\ \eta = x + y. \end{cases}$

在这个变换下，xy 平面上的区域 D 变成 $\xi\eta$ 平面上的矩形区域 D'：$-\sqrt{2}\leqslant\xi\leqslant\sqrt{2}$，$4\leqslant\eta\leqslant 12$. 其变换行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\dfrac{y}{2x^{3/2}} & \dfrac{1}{x^{1/2}}\\ 1 & 1\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1}{-\dfrac{2x+y}{2x^{3/2}}}=-\frac{2x^{3/2}}{2x+y},$$

于是

$$\iint_D\frac{2x+y}{x^{3/2}}dxdy=\iint_{D'}\frac{2x+y}{x^{3/2}}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta=2\iint_{D'}2d\xi d\eta$$

$$=32\sqrt{2}.$$

8.1.59 求 $\iint\limits_D(x+y)dxdy$ 其中 $D: x^2+y^2\leqslant x+y$.

解 D 即为 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{2}$. 令 $x=\frac{1}{2}+u$，$y=\frac{1}{2}+v$，则

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

于是
$$\iint_D(x+y)dxdy=\iint_{D'}(1+u+v)dudv.$$

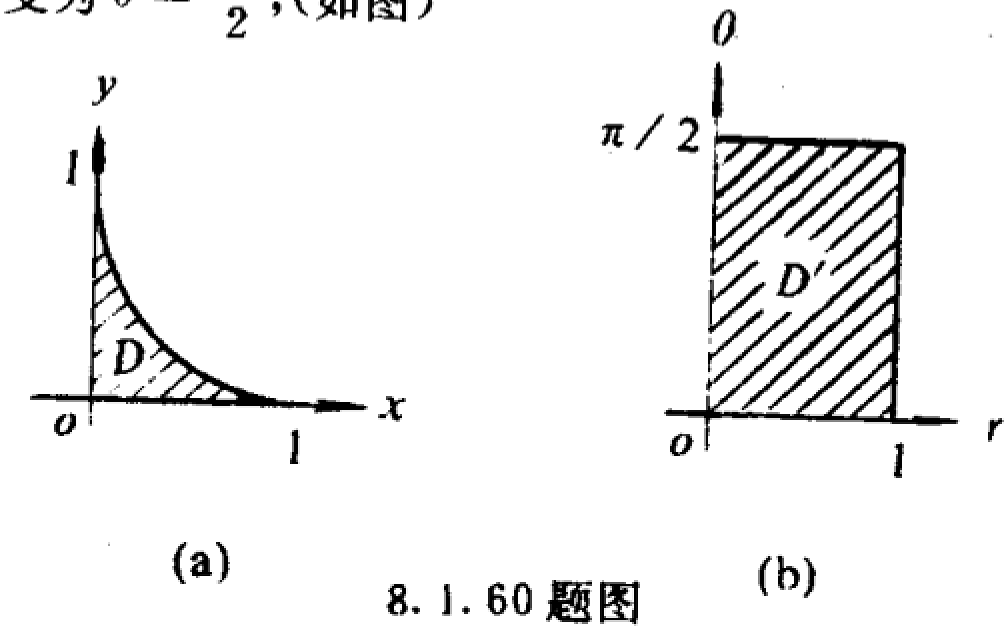
令 $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$，则

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1+r\cos\theta+r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\left[\frac{r^2}{2}+(\cos\theta+\sin\theta)\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

8.1.60 计算 $\iint\limits_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$，其中 D 是由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和坐标轴所围成的区域.

解　令 $x=r\cos^4\theta, y=r\sin^4\theta$，则被积函数化为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{r}$，曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 变为直线 $r=1$，直线 $y=0$ 变为 $\theta=0$，直线 $x=0$ 变为 $\theta=\frac{\pi}{2}$，(如图)



8.1.60 题图

且
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=4r\sin^3\theta\cos^3\theta,$$

于是得 $\iint\limits_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy=\iint\limits_{D'}\sqrt{r}\,4r\sin^3\theta\cdot\cos\theta^3drd\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^3\theta\cdot\cos^3\theta d\theta\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}dr=\frac{8}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$=\frac{8}{5}\left[\frac{\sin^4\theta}{4}-\frac{\sin^6\theta}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{5}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right]=\frac{2}{15}.$$

8.1.61　若 $a>0, f(u)$ 为偶函数，问 $\int_{-a}^{a}dy\int_{-a}^{a}f(y-x)dx$ 等于 $\int_0^{2a}f(u)(1-\frac{u}{2a})du$ 吗？为什么？

解　作变换 $x=x, y=x+u$，则 xoy 平面上的区域 D：$-a\leqslant x\leqslant a$，$-a\leqslant y\leqslant a$ 变为 xou 平面上的区域 D'：$-a\leqslant x\leqslant a$，$-a-x\leqslant u\leqslant a-x$，且

$$J=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1,$$

于是

$$I=\int_{-a}^{a}dy\int_{-a}^{a}f(y-x)dx=\iint\limits_{D'}f(u)dudx$$

$$= \int_0^{2a} f(u)du \int_{-a}^{a-u} dx + \int_{-2a}^{0} f(u)du \int_{-a-u}^{a} dx$$

$$= \int_0^{2a} (2a-u)f(u)du + \int_{-2a}^{0} (2a+u)f(u)du.$$

在第二式中，令 $u=-v$，则

$$I = \int_0^{2a} (2a-u)f(u)du + \int_0^{2a} (2a-v)f(-v)dv$$

$$= \int_0^{2a} (2a-u)f(u)du + \int_0^{2a} (2a-v)f(v)dv$$

$$= 2\int_0^{2a} (2a-u)f(u)du = 4a\int_0^{2a} (1-\frac{u}{2a})f(u)du.$$

若 $a=\frac{1}{4}$，则 $I=\int_0^{2a} f(u)(1-\frac{u}{2a})du$，否则便不等于它.

8.1.62 证明：$\iint\limits_D f(ax+by+c)dxdy$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du,$$

其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$，且 $a^2+b^2\neq 0$.

证 作变换 $x=\dfrac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$y=\dfrac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则

$$ax+by=u\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix}=1,$$

xoy 面上的区域 D 变换为 uov 面上的区域 D'

$$\iint\limits_D f(ax+by+c)dxdy = \iint\limits_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dudv$$

$$= \int_{-1}^{1} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dv$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du.$$

§2　三重积分

内 容 提 要

1. 三重积分的定义与存在定理

定义：设 $f(x,y,z)$ 为定义在空间有确定体积的有界闭区域 Ω 上的有界函数，将 Ω 任意分成 n 个有确定体积的小区域 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_i,\cdots,\Delta v_n$，其中 Δv_i 表示第 i 个小区域，也表示它的体积. 在每个小区域 $\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$，如果不论小区域怎样划分和点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 怎样选取，上述和式当各个小区域的直径中的最大值 λ 趋于零时的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分，记为 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv$，即

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

三重积分符号中的 $f(x,y,z)dv$ 叫做被积表达式，$f(x,y,z)$ 叫做被积函数，dv 叫做体积元素.

由于上面和式极限的存在与小区域 Δv_i 的分法无关，当取各面分别平行于直角坐标系的坐标面的长方体作为小区域时，则 $dv=dxdydz$，因而我们常把三重积分记为

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz.$$

记号中 $dxdydz$ 叫做直角坐标系中的体积元素.

关于三重积分的存在定理和基本性质，和二重积分完全类似，因此不再重述.

2. 三重积分的计算法

三重积分通过化为三次积分来计算. 随着积分区域 Ω 的表示法不同，可以将三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

化为先对 z,或者先对 x,或者先对 y 的三次积分,即有以下几种情形:

(1) 如果积分区域 Ω 在平面 xoy 上的投影为

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x_1\leqslant x\leqslant x_2,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\},$$

其中 $y_1(x),y_2(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续,Ω 的边界曲面分为两部分,其方程各为 $z=z_1(x,y)$ 及 $z=z_2(x,y)$(其中 $z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$ 且 $z_1(x,y),z_2(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续),即积分区域 Ω 由不等式

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$$

所确定,则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

(2) 如果积分区域 Ω 由不等式

$$z_1\leqslant z\leqslant z_2,x_1(z)\leqslant x\leqslant x_2(z),y_1(x,z)\leqslant y\leqslant y_2(x,z)$$

(其中 $x_1(z),x_2(z)$ 在 $[z_1,z_2]$ 上连续,$y_1(x,z),y_2(x,z)$ 在 $D_{xz}=\{(x,z)\,|\,z_1\leqslant z\leqslant z_2,\ x_1(z)\leqslant x\leqslant x_2(z)\}$ 上连续)所确定,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}f(x,y,z)dy$$

$$=\int_{z_1}^{z_2}dz\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}dx\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)}f(x,y,z)dy.$$

(3) 如果积分区域 Ω 由不等式

$$y_1\leqslant y\leqslant y_2,z_1(y)\leqslant z\leqslant z_2(y),x_1(y,z)\leqslant x\leqslant x_2(y,z)$$

(其中 $z_1(y),z_2(y)$ 在 $[y_1,y_2]$ 上连续,$x_1(y,z),x_2(y,z)$ 在 $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,y_1\leqslant y\leqslant y_2,z_1(y)\leqslant z\leqslant z_2(y)\}$ 上连续)所确定,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D_{yz}} dydz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)dx$$

$$=\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1(y)}^{z_2(y)}dz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)}f(x,y,z)dx.$$

3. 三重积分的换元

(1) 用柱面坐标计算三重积分

设 $P(x,y,z)$ 为空间中的一点，并设 P 在 xoy 平面上的投影 P' 的极坐标为 (r,θ)，则 (r,θ,z) 就是 P 点的柱面坐标，点 P 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z.$$

在柱面坐标系中，$dv = rdrd\theta dz$，于是得到柱面坐标系中的三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$$

其中 $F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. 要计算在柱面坐标系中的三重积分，与直角坐标系三重积分所用的原理一样，可把它化为对 r,θ,z 的三次积分.

(2) 用球面坐标计算三重积分

设 $P(x,y,z)$ 为空间中的一点，若 ρ 是矢量 **OP** 的模，θ 是 **OP** 在 xoy 平面上的投影与 x 轴正向的夹角，φ 是 **OP** 与 z 轴正向的夹角，则 (ρ,θ,φ) 是点 P 的球面坐标，点 P 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\varphi.$$

在球面坐标系中，$dv = \rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$，于是得到球面坐标系中的三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi,$$

其中 $F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$. 要计算在球面坐标系中的三重积分，与直角坐标系三重积分所用的原理一样，把它化为对 ρ、θ、φ 的三次积分.

(3) 一般换元公式(用曲线坐标计算三重积分)

设函数 $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ 在 $O'uvw$ 空间的有确定体积的有界闭区域 Ω' 上都有连续的一阶偏导数. 作变换 $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$，引进新变量 u,v,w. 如果这个变换把 $Oxyz$ 空间的有确定体积的有界闭区域 Ω 一对一地变成 Ω'，并且变换的雅可比式

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v,w) \in \Omega',$$

则把三重积分的变量从直角坐标(x,y,z)变换为曲线坐标(u,v,w)的公式是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\iiint\limits_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]|J|dudvdw,$$

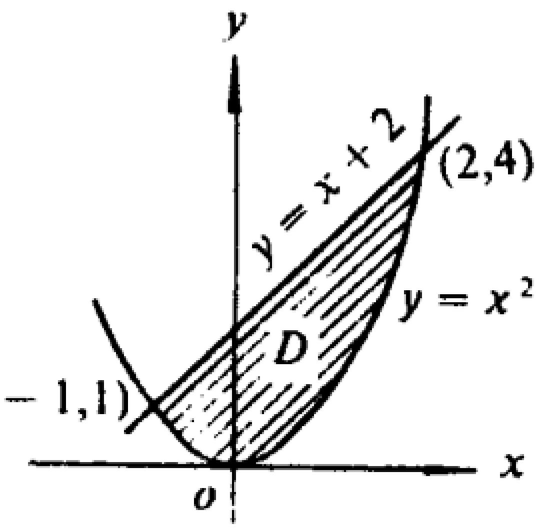
其中$|J|dudvdw$为曲线坐标中的体积元素.

问 题 与 解 答

1. 直角坐标系中三重积分的计算法

8.2.1　求$\iiint\limits_{\Omega} xdv$. 其中$\Omega$是由$y=x^2$, $y=x+2$, $4z=x^2+y^2$, $z=x+3$所围成的区域.

解　Ω在xoy平面上的投影D如图所示.



8.2.1 题图

$$\iiint\limits_{\Omega} xdv=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}dy\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{x+3}xdz$$
$$=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}[x^2+3x-\frac{x^3}{4}-\frac{xy^2}{4}]dy$$
$$=\int_{-1}^{2}[x^2(x+2)+3x(x+2)-\frac{x^3}{4}(x+2)-\frac{x}{12}(x+2)^3-x^4-3x^3+\frac{x^5}{4}+\frac{x^7}{12}]dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\{(x+2)(x^2+3x-\frac{x^3}{4})-x^2(x^2+3x-\frac{x^3}{4})-\frac{x}{12}[(x+2)^3-x^6]\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\{2(x^2+3x-\frac{x^3}{4})-\frac{x}{12}[(x+2)^3-x^6]\}dx=\frac{837}{160}.$$

8.2.2　求$\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$,其中$\Omega$是由$z=xy$及$x+y=1,z=0$所围成的区域.

解　$\iiint\limits_{\Omega} xy\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} xy\,dz$

$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2y^2 dy = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx$

$= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5)dx = \frac{1}{180}.$

8.2.3　求三重积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} e^{|z|}dv$ 的值.

解　$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} e^{|z|}dv = \int_{-1}^1 e^{|z|}\left(\iint\limits_{D(z)} d\sigma\right)dz = \int_{-1}^1 e^{|z|}\pi(1-z^2)dz$

$= 2\pi\int_0^1 (1-z^2)e^z dz = 2\pi.$

8.2.4　计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$ 的值，其中 Ω 为两个球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分.

解　由方程 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2+z^2=2Rz \end{cases}$ 消去 z，得两球的交线为

$$\begin{cases} z = \dfrac{R}{2}; \\ x^2+y^2 = R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2. \end{cases}$$

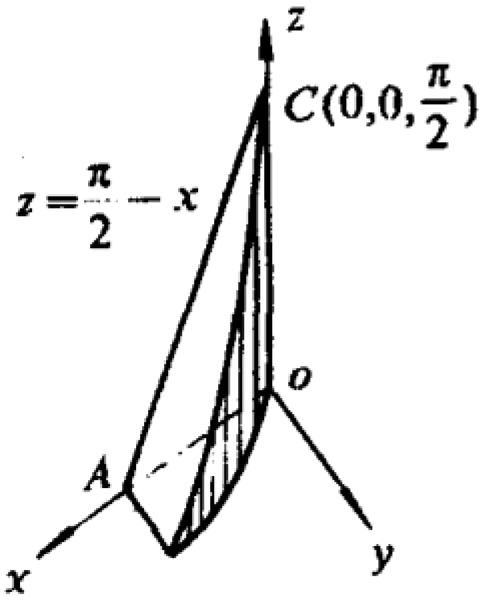
设 Ω 被平行于 xoy 平面的平面所截的圆域为 P_z，则在 $z=\frac{R}{2}$ 之上时，P_z 为 $x^2+y^2\leqslant R^2-z^2$；在 $z=\frac{R}{2}$ 之下时，P_z 为 $x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_0^R dz \iint\limits_{P_z} z^2 dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2\cdot\pi(2Rz-z^2)dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2\cdot\pi(R^2-z^2)dz = \frac{59}{480}\pi R^5.$$

8.2.5　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$，$\Omega$ 是由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$，平面 $y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

解 如先对 z 积分，Ω 的上下边界曲面分别为平面 $z=\frac{\pi}{2}-x$ 与 $z=0$；$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}-x,(x,y)\in D_{xy}\}$，而 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\}$. 因此



8.2.5 题图

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}dy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(x+z)dz$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y[\sin(x+z)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}-x}dy$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\cdot\frac{(\sqrt{x})^2}{2}dx$$
$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

8.2.6 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中 $\Omega=\{|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|z|\leqslant c\}$.

解 由于 Ω 关于三个坐标面都对称，且被积函数也关于三个坐标面对称，故有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=8\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

其中 $\Omega_1=\{0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c\}$，且

$$\iiint\limits_{\Omega_1}z^2dxdydz=\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c z^2dz=\frac{1}{3}abc^3,$$

同理 $$\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dxdydz=\frac{1}{3}a^3bc,\quad\iiint\limits_{\Omega_1}y^2dxdydz=\frac{1}{3}ab^3c,$$

所以 $$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\frac{8}{3}abc(a^2+b^2+c^2).$$

8.2.7 计算 $\iiint\limits_{\Omega}y^2dv$，其中 Ω 是由平面 $z=0$ 及曲面 $z=$

$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$（常数 $a>0,b>0$）所围成的区域.

解　由对称性，有

$$\iiint_\Omega y^2dv = 4\int_0^b y^2dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}dx\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz$$

$$= 4\int_0^b y^2dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dx,$$

令 $x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sin t$,，则 $dx=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cos tdt$，于是

$$\iiint_\Omega y^2dv = 4\int_0^b y^2dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}a(1-\frac{y^2}{b^2})\cos^2tdt$$

$$=4a\int_0^b y^2(1-\frac{y^2}{b^2})dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2tdt = 4a\cdot\frac{2b^3}{15}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{15}ab^3\pi.$$

8.2.8　计算三重积分 $\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$，其中 Ω 是由 $1\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 2$ 和 $1\leqslant z\leqslant 2$ 所围成的区域.

解　$$\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}=\int_1^2dx\int_1^2dy\int_1^2\frac{dz}{(x+y+z)^3}$$

$$=\int_1^2dx\int_1^2\left[-\frac{1}{2(x+y+z)^2}\right]_{z=1}^{z=2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2dx\int_1^2[\frac{-1}{(x+y+2)^2}+\frac{1}{(x+y+1)^2}]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left[\frac{1}{x+y+2}-\frac{1}{x+y+1}\right]_{y=1}^{y=2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+2})dx$$

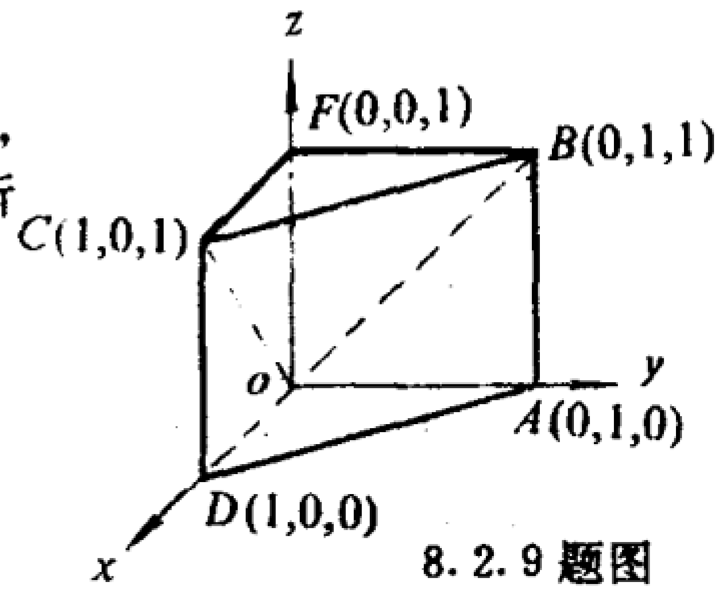
$$=\frac{1}{2}[\ln(x+4)-2\ln(x+3)+\ln(x+2)]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}[\ln6-3\ln5+3\ln4-\ln3]=\frac{7}{2}\ln2-\frac{3}{2}\ln5.$$

8.2.9　改变积分

$$\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$$

的次序.



8.2.9 题图

解 所给积分的区域是由 $x=0$, $y=0, z=0, z=x+y$ 及 $x+y=1$ 所围成的四棱锥 $OABCD$(如图).

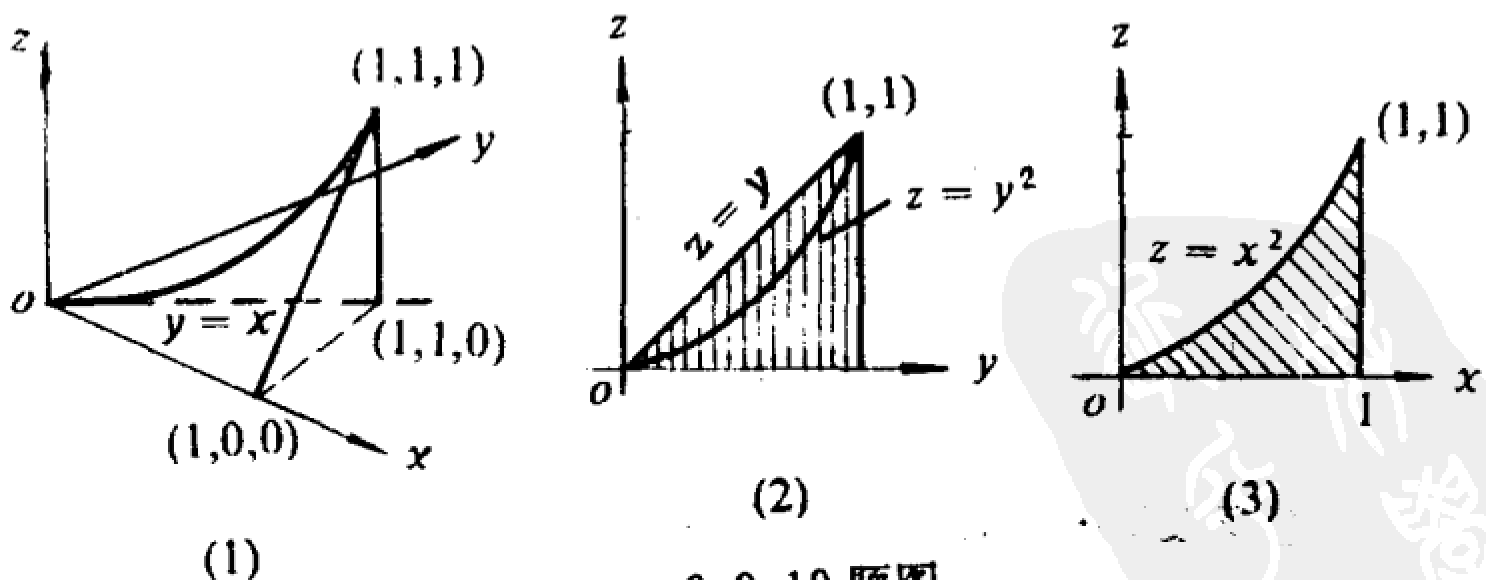
$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^{y}dy\int_0^{1-y}f(x,y,z)dz+\int_0^1 dx\int_y^{1}dy\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dz$$
$$=\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{1-y}f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y}f(x,y,z)dx.$$

由于积分区域对称于平面 $y=x$(亦即,把 x 变成 y 同时把 y 变为 x 时,积分区域不变),故只要把以上积分中 x 与 y 对调就可得到另一种次序

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy$$
$$=\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)dy.$$

8.2.10 改变 $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$ 的积分次序.

解 所给的积分区域由 $z=xy, z=0, y=x$ 及 $x=1$ 所围成(图(1)),它在 yoz 平面上的投影区域如图(2) 所示.



8.2.10 题图

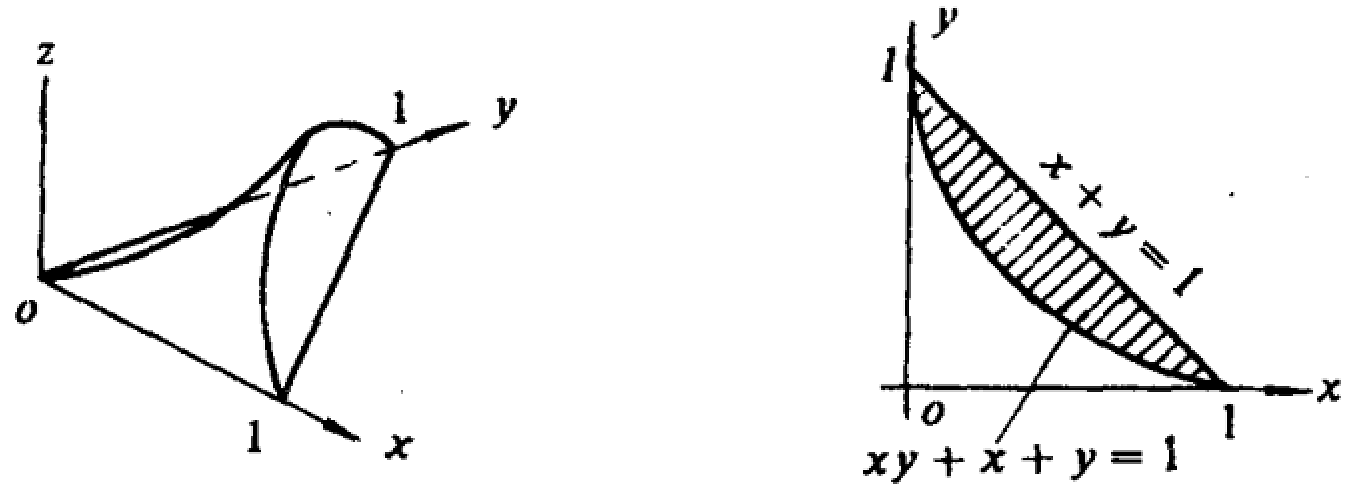
$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}dz\int_{\frac{z}{y}}^{1}f(x,y,z)dx+\int_0^1 dy\int_0^{y^2}dz\int_y^1 f(x,y,z)dx$$

$$=\int_0^1 dz\int_z^{\sqrt{z}} dy\int_{\frac{z}{y}}^1 f(x,y,z)dx+\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_y^1 f(x,y,z)dx.$$

它在 xoz 平面上的投影区域如图(3) 所示.

$$I=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dx\int_{\frac{z}{x}}^x f(x,y,z)dy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_{\frac{z}{x}}^x f(x,y,z)dy.$$

8.2.11　求 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$，$\Omega$ 是由曲面 $z=xy$ 和平面 $x+y+z=1$，$z=0$ 所围成的区域.



(1)　　8.2.11 题图　　(2)

解　Ω 的图形如图(1)，它在 xoy 平面上的投影区域如图(2) 所示，故

$$I=\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} dy\int_0^{xy} xdz+\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} xdz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{(1-x)^2}{1+x}dx=2\ln 2-\frac{11}{8}.$$

2. 柱面及球面坐标系中三重积分的计算法

8.2.12　计算积分

$$I=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz.$$

解 采用球面坐标，则有

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} \rho\sin\varphi d\rho = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin\varphi[4\cos^2\varphi - \frac{1}{\cos^2\varphi}]d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

8.2.13

(1) 证明 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)dv = \pi \int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du$;

(2) 计算 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4)dv$.

解 (1) 采用柱面坐标，得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} f(z)rdr$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(z)\cdot\frac{1-z^2}{2}dz = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du.$$

(2) 由(1)的结果，得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4)dv$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}(a_0u^4 + a_1u^3 + a_2u^2 + a_3u + a_4)(1-u^2)du$$

$$= 2\pi\int_0^1 (a_0u^4 + a_2u^2 + a_4)(1-u^2)du$$

$$= 2\pi\int_0^1 [-a_0u^6 + (a_0 - a_2)u^4 + (a_2 - a_4)u^2 + a_4]du$$

$$= 2\pi(-\frac{a_0}{7} + \frac{a_0 - a_2}{5} + \frac{a_2 - a_4}{3} + a_4)$$

$$= \frac{4\pi}{105}(3a_0 + 7a_2 + 35a_4).$$

8.2.14 计算积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$ 的值，其中 Ω 为两球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 及 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分.

解 消去 z，得两球的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4}, \\ z = \dfrac{R}{2}, \end{cases}$$

它在 xoy 平面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4}, \\ z = 0. \end{cases}$$

因 Ω 的边界为球面，故采用球面坐标，Ω 上面的界面为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，下面的界面为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$，为了采用球面坐标，把 Ω 分成两部分.

$$\iiint_{\Omega_1} z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R r^2\cos^2\varphi r^2 \sin\varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{5}R^5\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{7}{60}\pi R^5,$$

$$\iiint_{\Omega_2} z^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^2\cos^2\varphi r^2\sin\varphi dr = \frac{\pi}{160}R^5.$$

故 $$\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz = \left(\frac{7}{60} + \frac{1}{160}\right)\pi R^5 = \frac{59}{480}\pi R^5.$$

8.2.15　计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,\ \Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}.$$

解　因 Ω 为球，中心在坐标原点、被积函数是 $x^2 + y^2 + z^2$ 的函数，故可采用球面坐标进行计算.

$$\iiint_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi \ln r^2 dr = -\frac{8}{9}\pi.$$

注　Ω 内的 $(0,0,0)$ 为 $\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln r^2$ 的瑕点，由于 $r^3 \ln r^2 \to 0$，故该瑕积分收敛，这就是事先未对之讨论的原因.

8.2.16　设函数 $f(u)$ 具有连续的导数，求

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dxdydz.$$

解　三重积分的积分区域为 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant t^2$，它的积分值一定是

t 的函数 $\varphi(t)$，故问题变为求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(t)}{\pi t^4}$，现先求 $\varphi(t)$.

因积分区域为中心在坐标原点的球，且被积函数又是 $x^2+y^2+z^2$ 的函数，故可采用球坐标计算.

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr,$$

因 r 的积分限不含 θ、φ，故上式等于

$$\int_0^t f(r)r^2dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\int_0^t f(r)r^2dr(4\pi)=4\pi\int_0^t f(r)r^2dr,$$

所以原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4\pi\int_0^t f(r)r^2dr}{\pi t^4}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)t^2}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$.

若 $f(0)=0$，则原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f'(t)}{1}=f'(0)$；

若 $f(0)\neq 0$，则原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=\infty$.

8.2.17 求 $\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_{(x^2+y^2)^2}^{1}x^2dz$.

解 由积分限可知，积分区域 Ω 在 xoy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$. 用柱面坐标计算，可得

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int_{(x^2+y^2)^2}^{1}x^2dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{r^4}^{1}(r\cos\theta)^2dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^2 r^3z\Big|_{r^4}^{1}dr=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta\int_0^2(r^3-r^7)dr$$

$$=(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4})\Big|_0^{2\pi}\cdot(\frac{r^4}{4}-\frac{r^8}{8})\Big|_0^2=-28\pi.$$

8.2.18 计算

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant x\}.$$

解 Ω 是中心在$(\frac{1}{2},0,0)$，半径为$\frac{1}{2}$的球面 $x^2+y^2+z^2=x$ 所围成的区域. 用球面坐标计算，Ω 的方程可化为 $r=\sin\varphi\cdot\cos\theta$. 故积分区域由不等式

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant\sin\varphi\cos\theta$$

所确定，于是

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\iiint_{\Omega_2}r\cdot r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sin\varphi\cos\theta}r^3dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\cdot\frac{(\sin\varphi\cos\theta)^4}{4}d\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta\int_0^{\pi}\sin^5\varphi d\varphi\qquad(\varphi=\frac{\pi}{2}+t)$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5tdt$$

$$=\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4\cdot2}{5\cdot3\cdot1}=\frac{\pi}{10}.$$

8.2.19 计算三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(lx^2+my^2+nz^2)dxdydz$.

解 采用球面坐标计算，令 $x=r\cos\varphi\cdot\cos\theta,y=r\sin\varphi\cdot\sin\theta,z=r\cos\varphi$，则 $\Omega:0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant a,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，于是

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(lx^2+my^2+nz^2)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}r^4\sin\varphi(l\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta+m\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta+n\cos^2\varphi)drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^4\sin\varphi(l\sin^2\varphi\cos^2\theta+m\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta+n\cos^2\varphi)dr$$

$$=\frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}(\frac{4}{3}l\cos^2\theta+\frac{4}{3}m\sin^2\theta+\frac{2}{3}\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^5}{5}(\frac{4l}{3}\pi+\frac{4}{3}m\pi+\frac{4}{3}n\pi)=\frac{4}{15}\pi a^5(l+m+n).$$

8.2.20 计算 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\frac{(b-x)dxdydz}{(\sqrt{(b-x)^2+y^2+z^2})^3}\ (b>a>0)$.

解 考虑到被积分函数中含有 $(b-x)$ 及 y^2+z^2，故可采用柱面坐标：$y=r\cos\theta,z=r\sin\theta,x=x$，于是

$$原式=\int_{-a}^{a}dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{(b-x)rdr}{(\sqrt{(b-x)^2+r^2})^3},$$

但 $\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{rdr}{(\sqrt{(b-x)^2+r^2})^3}$

$$= \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{2}[(b-x)^2+r^2]^{-\frac{3}{2}}d[(b-x^2)+r^2]$$

$$= -[(b-x)^2+r^2]^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{b-x} - \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2-2bx}}.$$

所以，原式 $= \int_{-a}^{a} dx \int_0^{2\pi} [1 - \frac{b-x}{\sqrt{b^2+a^2-2bx}}] d\theta$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} [1 - \frac{b-x}{\sqrt{b^2+a^2-2bx}}] dx$$

(令 $\sqrt{b^2+a^2-2bx} = u$)

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{b} \int_{b-a}^{b+a} (u - b + \frac{b^2+a^2-u^2}{2b}) du = \frac{4\pi a^3}{3b^2}.$$

8.2.21 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx.$

解 采用球坐标，由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr$$

$$= 4\pi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr.$$

令 $r^2 = t$，则

$$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx = \pi^{\frac{3}{2}}.$$

8.2.22 已知 $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2) dxdydz$，其中 f 为可微函数，求 $F'(t)$.

解 令 $x = \rho\sin\varphi\cos\theta, y = \rho\sin\varphi\sin\theta, z = \rho\cos\varphi$，则

$$F(t) = \iiint\limits_{\rho^2\leqslant t^2} f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{t} f(\rho^2)\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^t f(\rho^2)\rho^2 d\rho,$$

故 $F'(t) = 4\pi f(t^2)t^2$.

8.2.23　计算三重积分 $\iiint_\Omega (x+y+z)dv$，其中 Ω 为 $z=h, x^2+y^2=z^2\ (h>0)$ 所围成的区域.

解　用柱面坐标计算，

$$\iiint_\Omega (x+y+z)dv = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z (r\cos\theta + r\sin\theta + z) r dr$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} [\frac{r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^3}{3}\sin\theta + \frac{r^2}{2}z]_0^z d\theta$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} (\frac{z^3}{3}\cos\theta + \frac{z^3}{3}\sin\theta + \frac{z^3}{2}) d\theta$$

$$= \int_0^h [\frac{z^3}{3}\sin\theta - \frac{z^3}{3}\cos\theta + \frac{z^3}{2}\theta]_0^{2\pi} dz = \int_0^h \pi z^3 dz = \frac{1}{4}\pi h^4.$$

注　此题用对称性计算更为方便.

3. 用曲线坐标计算三重积分

8.2.24　求 $\iiint_\Omega x^2 dxdydz$，Ω 是由 $z=ay^2, z=by^2, y>0$ 以及 $z=\alpha x, z=\beta x, z=h\ (h>0, 0<a<b, 0<\alpha<\beta)$ 所围成的区域.

解　令 $u=\frac{z}{y^2},\ v=\frac{z}{x},\ w=z$，则 $J=-\frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{u^{\frac{3}{2}}v^2}$，

于是　$I = \iiint_\Omega x^2 dxdydz = \iiint_\Omega \frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{v^2}\cdot\frac{w^2}{u^{\frac{3}{2}}v^2} dudvdw$

$$= \int_a^b du \int_\alpha^\beta dv \int_0^h \frac{1}{2}\cdot\frac{w^{\frac{7}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}v^4} dw$$

$$= \frac{2}{27}(\frac{1}{\beta^3}-\frac{1}{\alpha^3})(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}})h^4\sqrt{h}.$$

8.2.25　求 $\iiint_\Omega x^2 y e^{xyz} dxdydz$，$\Omega = \{x\geqslant 0, y\geqslant 1, z\geqslant 1, xy\leqslant 1\}$.

解　令 $x=u, y=\frac{u+v}{u}, z=\frac{u+v+w}{u+v}$，则 $f(u,v,w)=e^{u+v+w}$，此时雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{u(u+v)};$$

故 $I=\iiint\limits_{\Omega} x^2ye^{xyz}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'} e^{u+v+w}dudvdw$

$$=\int_0^1 du\int_0^{1-u}dv\int_0^{1-u-v}e^{u+v+w}dw=\int_0^1 du\int_0^{1-u}(e-e^{u+v})dv$$

$$=\int_0^1[e(1-u)-e+e^u]du=\frac{e}{2}-1.$$

8.2.26 计算$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz$,其中$\Omega$是由曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围成的区域.

解 令 $x=a\rho\sin\varphi\cdot\cos\theta$, $y=b\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=c\rho\cos\varphi$,则 $J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=abc\rho^2\sin\varphi$,故有

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{4}{5}\pi abc.$$

8.2.27 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$,其中$\Omega$是六个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,\qquad(h_1>0,h_2>0,h_3>0)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3,$$

所围成的平行六面体,且行列式$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0.$

解 作变量替换

$$\begin{cases}u=a_1x+b_1y+c_1z,\\v=a_2x+b_2y+c_2z,\\w=a_3x+b_3y+c_3z,\end{cases}\qquad\begin{cases}u=\pm h_1,\\v=\pm h_2,\\w=\pm h_3.\end{cases}$$

于是,xyz空间中的斜平行六面体Ω变成uvw空间中的直角平行六面体Ω':

$$-h_1\leqslant u\leqslant h_1,\ -h_2\leqslant v\leqslant h_2,\ -h_3\leqslant w\leqslant h_3.$$

为了求 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$，首先求 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta$，故

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{\Delta},$$

于是

$$\iiint_{\Omega} dxdydz=\frac{1}{|\Delta|}\iiint_{\Omega'} dudvdw=\frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1}du\int_{-h_2}^{h_2}dv\int_{-h_3}^{h_3}dw=\frac{8}{|\Delta|}h_1h_2h_3.$$

§ 3　重积分的应用

内 容 提 要

1. 曲面面积

设曲面$\sum$由方程 $z=f(x,y)$ 给出，D_{xy} 为曲面$\sum$在 xoy 面上的投影区域，它是有确定面积的有界闭域，并设函数 $f(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$，则曲面$\sum$的面积为

$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}dxdy.$$

积分号下被积表达式称为曲面的面积元素，记为

$$dS=\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}d\sigma_{xy}$$

于是
$$d\sigma_{xy}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}dS=|\cos r|dS,$$

其中 r 是曲面$\sum$在点 (x,y,z) 处的法线与 z 轴所成的夹角.

如果曲面的方程为 $x=g(y,z)$ 或 $y=h(z,x)$，可分别把曲面投影到 yoz 面上(投影区域记作 D_{yz})或 zox 面上(投影区域记作 D_{zx})，则在类似的相应条件下有

$$S=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial y})^2+(\frac{\partial g}{\partial z})^2}\,dydz,$$

或
$$S=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+(\frac{\partial h}{\partial z})^2+(\frac{\partial h}{\partial x})^2}\,dzdx.$$

2. 体积

设空间区域 Ω 由曲面 $z=z_1(x,y)$ 和 $z=z_2(x,y)$ 围成，其中 $z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 都是 D_{xy} 上的连续函数，并且 $z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$；区域 Ω 在 xoy 平面上的投影为平面区域 D_{xy}，D_{xy} 由不等式

$$y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x) \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

来表示，其中 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，则空间区域 Ω 的体积为

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dxdy$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} [z_2(x,y) - z_1(x,y)]dy.$$

同样，有时为了计算方便，也可以将空间区域 Ω 投影到 yoz 或 zox 平面上，其处理方法与上面类似.

3. 物体总质量与重心坐标

(1) 平面薄板

设有一平面薄板，占有 xoy 面上的区域 D_{xy}，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，并且假定 $\rho(x,y)$ 在有确定面积的有界闭域 D_{xy} 上连续，则此平面薄板的总质量为

$$M = \iint\limits_{D_{xy}} \rho(x,y)dxdy,$$

其重心 G 的坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D_{xy}} x\rho(x,y)dxdy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_{D_{xy}} y\rho(x,y)dxdy.$$

(2) 一般物体

设一物体占有有确定体积的有界闭域 Ω，在点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)$，并且假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则此物体的总质量为

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dxdydz,$$

其重心 G 的坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz$$

4. 转动惯量(惯性矩)

(1) 平面薄板

设 xoy 平面内薄板占有有确定面积的有界闭域 D_{xy}，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，并且假定 $\rho(x,y)$ 在 D_{xy} 上连续，该薄板对于 x 轴、y 轴、

原点 O 的转动惯量分别记为 J_x,J_y,J_0,则

$$J_x = \iint\limits_{D_{xy}} y^2\rho(x,y)dxdy, \quad J_y = \iint\limits_{D_{xy}} x^2\rho(x,y)dxdy$$

$$J_0 = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy = J_x + J_y.$$

(2) 一般物体

设一物体占有有确定体积的有界闭区域 Ω,在点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)$,并且假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,若该物体对于各坐标平面的转动惯量分别为 J_{xy},J_{yz},J_{zx};对于各坐标轴的转动惯量分别为 J_x,J_y,J_z;对于原点 O 的转动惯量为 J_0,则

$$J_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$J_{zx} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

$$J_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = J_{zx} + J_{xy},$$

$$J_y = \iiint\limits_{\Omega} (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)dxdydz = J_{xy} + J_{yz},$$

$$J_z = \iiint\limits_{\Omega} (z^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz = J_{yz} + J_{zx},$$

$$J_0 = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx},$$

5. 引力

设一物体占有有确定体积的有界闭区域 Ω,在点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)$,并且假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,若该物体对于区域 Ω 外单位质点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的引力在三个坐标轴上的分量分别为 F_x,F_y,F_z,则

$$F_x = K\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(x - x_0)}{r^3}dxdydz,$$

$$F_y = K\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dxdydz,$$

$$F_z = K\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dxdydz,$$

式中 K 为引力常数，$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

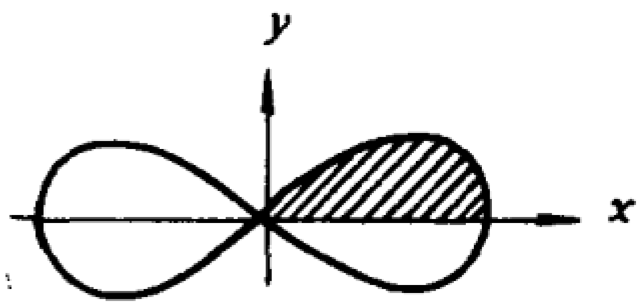
问 题 与 解 答

8.3.1　求曲面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内的部分的面积.

解　由 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1-(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{\sqrt{2}\,|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$



8.3.1 题图

如果采用极坐标，则方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 可化为 $r^2=a^2\cos 2\theta$，这是双纽线(如图).

由于曲面以及积分区域的对称性，故所求积分等于它在第一卦限内的面积的 4 倍，由此得

$$S=4\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\frac{|x|dxdy}{\sqrt{x^2-y^2}}=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{r\cos\theta\cdot r}{r\sqrt{\cos 2\theta}}dr$$

$$=2\sqrt{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}d\theta=2\sqrt{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-2\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}du=\frac{\pi a^2}{2}.$$

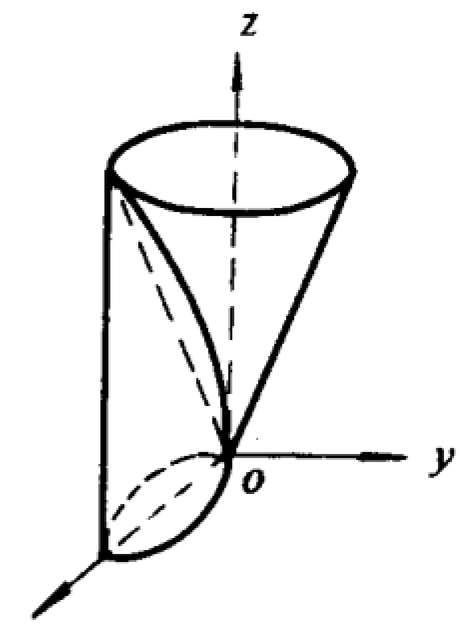
8.3.2　设 Ω 为曲面 $x^2+y^2-ax=0$ 和 $x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}z^2$($a$、$h$ 为常数)所围成的空间封闭图形，求出 Ω 的体积 V 和表面积 S.

解　如图所示，不妨设 $a>0,h>0$，则

$$V=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{h}{a} r^2 dr$$

$$= \frac{4ha^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{8}{9}a^2 h.$$



8.3.2 题图

设锥面 $z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 - ax = 0$ 所截出的截面为 S_1，而柱面 $y = \sqrt{ax - x^2}$ 被锥面 $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$ 所截出的截面为 S_2，则对于 S_1，$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h}{a}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以 $$S_1 = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a} dxdy = \frac{\pi a\sqrt{a^2+h^2}}{4}.$$

对于 S_2，$y = \sqrt{ax - x^2}$，$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$，$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$，

由联立方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0; \\ x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2}z^2, \end{cases}$ 消去 y 得 $z = \pm\frac{h}{\sqrt{a}}\sqrt{x}$，则 S_2 在平面 xoz 上的投影为由 $z = \pm\frac{h}{\sqrt{a}}\sqrt{x}$ 及 $x = a$ 所围区域 D_{xz}，所以

$$S_2 = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz = \iint_{D_{xz}} \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dxdz$$

$$= \int_0^a dx \int_{-\frac{h}{\sqrt{a}}\sqrt{x}}^{\frac{h}{\sqrt{a}}\sqrt{x}} \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dz = h\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2ah.$$

故 Ω 的表面积为 $S = 2(S_1 + S_2) = \frac{a}{2}(8h + \pi\sqrt{a^2+h^2})$.

8.3.3 求由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围物体的表面积.

解 所求面积是两正交圆柱所围成的面积，画出它在第一卦限内的图形，由对称性知

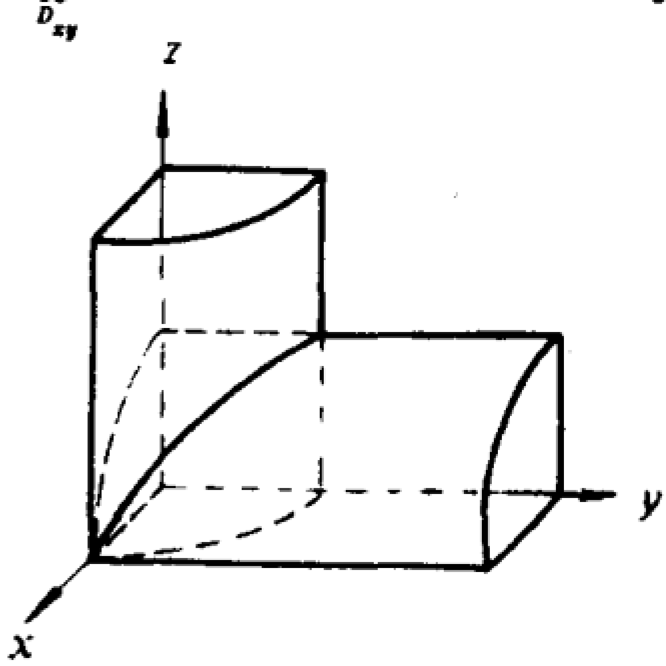
$$S = 16\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy,$$

其中 D_{xy} 是 $0 \leqslant x \leqslant R$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$,而 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$,

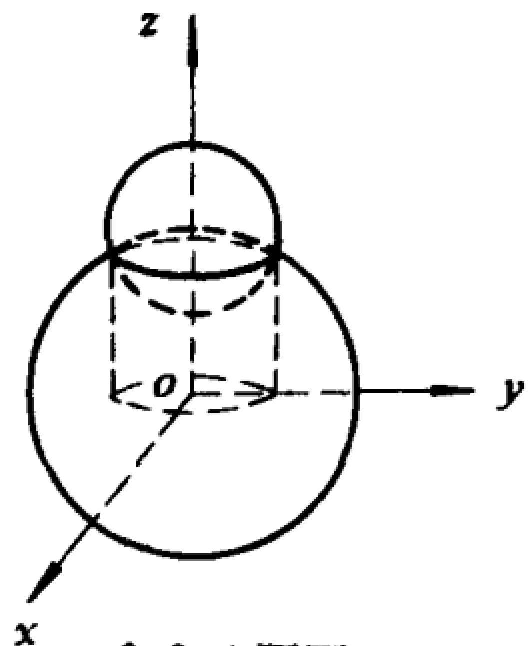
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

故得

$$S = 16\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dxdy = 16R\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}dydx = 16R^2.$$



8.3.3 题图



8.3.4 题图

8.3.4　设半径为 r 的球的球心在半径为 a(a 为常数) 的定球面上($r < a$),试证当前者夹在定球内部的表面积为最大时,$r = \frac{4}{3}a$.

解　如图所示,以定球球心为原点,两个球心的连线为 z 轴建立直角坐标系,则定球与另一球的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2,$$

联立求解,得两球交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4a^2}(4a^2 - r^2), \\ z = a - \frac{r^2}{2a}. \end{cases}$$

它在 xoy 平面上的投影圆域为 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant\frac{r^2}{4a^2}(4a^2-r^2)$，
另一球夹在定球内部的表面积为 S，则这部分球面方程为

$$z=a-\sqrt{r^2-x^2-y^2},$$

而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

所以
$$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\iint_{D_{xy}}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{r}{2a}\sqrt{4a^2-r^2}}\frac{r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\rho d\rho=2\pi r\left[-\sqrt{r^2-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{r}{2a}\sqrt{4a^2-r^2}}$$

$$=2\pi r(r-\frac{r^2}{2a})=2\pi r^2-\frac{\pi r^3}{a}.$$

可见所求表面积 S 是半径 r 的函数，$S=S(r)$

$$\frac{dS}{dr}=4\pi r-\frac{3\pi r^2}{a},\quad \frac{d^2S}{dr^2}=4\pi-\frac{6\pi r}{a},$$

令 $\frac{dS}{dr}=0$，得 $r_1=0,r_2=\frac{4}{3}a$，显然 $r=0$ 时，$S=0$，使 S 为最小；$r=\frac{4}{3}a$ 时，$\frac{d^2S}{dr^2}\Big|_{r=\frac{4}{3}a}=-4\pi<0$，所以当 $r=\frac{4}{3}a$ 时，另一球夹在定球内的表面积为最大.

8.3.5 求由半球面 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=4z$ 所围成的立体的全表面积 S.

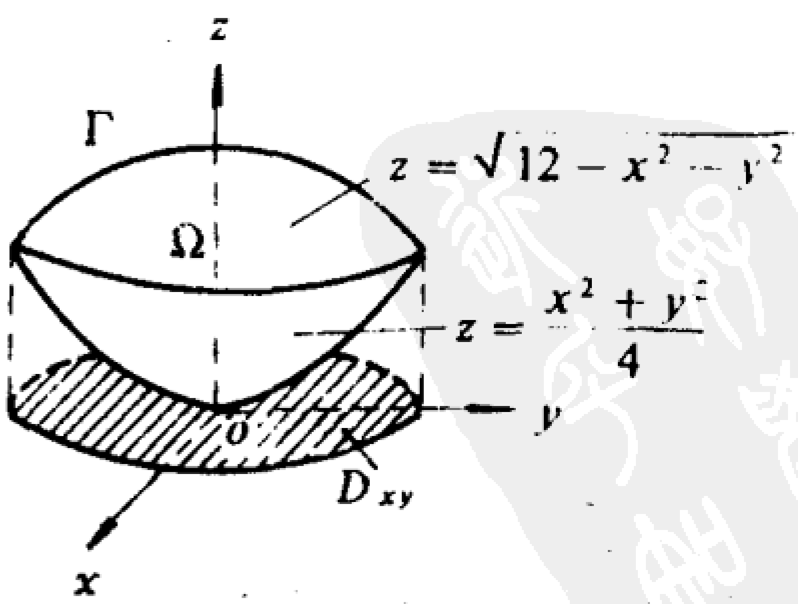
解 由于立体 Ω 是由两曲面围成(如图)，所以要分开求两部分面积，两曲面的交线为

$$\Gamma:\begin{cases}z=\sqrt{12-x^2-y^2},\\x^2+y^2=4z.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x^2+y^2=8,\\z=2\end{cases}.$$

故 Ω 在 xoy 面上的投影为

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 8\}$$



8.3.5 题图

对于曲面 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$，有

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{12-x^2-y^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12-x^2-y^2}}$$

所以 $S_1=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12-x^2-y^2}}dxdy$

$$=2\sqrt{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{12-r^2}}rdr=8(3-\sqrt{3})\pi.$$

对于曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{4}$,有

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2+y^2},$$

所以　$S_2=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2+y^2}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{4+r^2}rdr=8(\sqrt{3}-\frac{1}{3})\pi.$$

因此全面积 $S=S_1+S_2=\frac{64}{3}\pi$.

8.3.6　求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内的部分的面积.

解　变换为极坐标,则方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 化为 $r^2=a^2\sin2\theta$,这是在第Ⅰ、Ⅲ象限内的双纽线,由于曲面及积分区域的对称性,故所求积分等于它在第一卦限内的面积的2倍.

又由 $z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$,得

$$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}},$$

于是　$S=2\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}dxdy=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\sin2\theta}}\sqrt{a^2+r^2}rdr$

$$=\frac{2a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(1+\sin2\theta)^{\frac{3}{2}}-1]d\theta=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

8.3.7　在 xoy 面上选择曲线 $r=a\cos n\theta$ 的一圈作为准线,以平行于 z 轴的直线作为母线,生成一柱面,计算该柱面在球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 上截出的面积.

解　当 $n\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$,即 $\theta=(\frac{1}{2n}+\frac{k}{n})\pi$ 时,$r=0$,因此可取对应于 $-\frac{\pi}{2n}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2n}$ 的一圈作为准线,即

$$D_{xy}=\{(r,\theta)\,|\,0\leqslant r\leqslant a\cos n\theta,\ -\frac{\pi}{2n}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2n}\}.$$

并注意到柱面在球面上截出的上下两部分面积是相等的,而上半球面方程为 $z=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 于是

$$S=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2a\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}d\theta\int_0^{a\cos n\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=2a\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}[-\sqrt{a^2-r^2}]_{r=0}^{r=a\cos n\theta}d\theta$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}}(1-|\sin n\theta|)d\theta$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2n}}^{0}(1+\sin n\theta)d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2n}}(1-\sin n\theta)d\theta$$

$$=2a^2[(\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n})+(\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{n})]=\frac{2}{n}(\pi-2)a^2.$$

8.3.8　求曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 被平面 $x-y=\pm1,x+y=\pm1$ 所截出的部分的面积.

解　将坐标轴旋转 $\frac{\pi}{4}$,即作变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-y_1),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1),$$

则曲面方程化为 $z=-x_1y_1$,积分区域变为 $|x_1|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},|y_1|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. 由此得

$$S=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\leqslant y_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial z}{\partial y_1})^2}dx_1dy_1$$

$$= 8 \iint\limits_{\substack{0\leqslant y_1\leqslant x_1 \\ 0\leqslant x_1\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}}} \sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}dx_1dy_1,$$

化为极坐标得

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sec\theta}\sqrt{1+r^2}rdr = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+\frac{\sec^2\theta}{2})^{\frac{3}{2}} - 1]d\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3+\mathrm{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta - \frac{2\pi}{3},$$

设 $u = \mathrm{tg}\theta$，则

$$\int(3+\mathrm{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta = \int(3+u^2)^{\frac{3}{2}}\frac{du}{1+u^2}$$

$$= \int\sqrt{3+u^2}du + 2\int\frac{(3+u^2)du}{(1+u^2)\sqrt{3+u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}[u\sqrt{3+u^2} + 3\ln(u+\sqrt{3+u^2})]$$

$$+ 2\ln(u+\sqrt{3+u^2}) + 4\int\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{3+u^2}}.$$

再作变换 $\sqrt{\frac{3}{u^2}+1} = v$，则 $u^2 = \frac{3}{v^2-1}$，$udu = -\frac{3vdv}{(v^2-1)^2}$，

故得

$$\int\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{3+u^2}} = \int\frac{udu}{u^2(1+u^2)\sqrt{\frac{3}{u^2}+1}}$$

$$= -\int\frac{\frac{3v}{(v^2-1)^2}dv}{\frac{3}{v^2-1}\cdot\frac{v^2+2}{v^2-1}\cdot v} = -\int\frac{dv}{v^2+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{v}{\sqrt{2}} + c,$$

由此得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3+\mathrm{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta$$

$$= \left\{\frac{1}{2}[u\sqrt{3+u^2} + 3\ln(u+\sqrt{3+u^2})\right.$$

$$\left.+ 2\ln(u+\sqrt{3+u^2}\right\}_0^1 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{v}{\sqrt{2}}\Big|_{+\infty}^2$$

$$= 1 + \frac{7}{4}\ln 3 - 2\sqrt{2}\,\text{arctg}\sqrt{2} + \sqrt{2}\pi.$$

故所求面积为

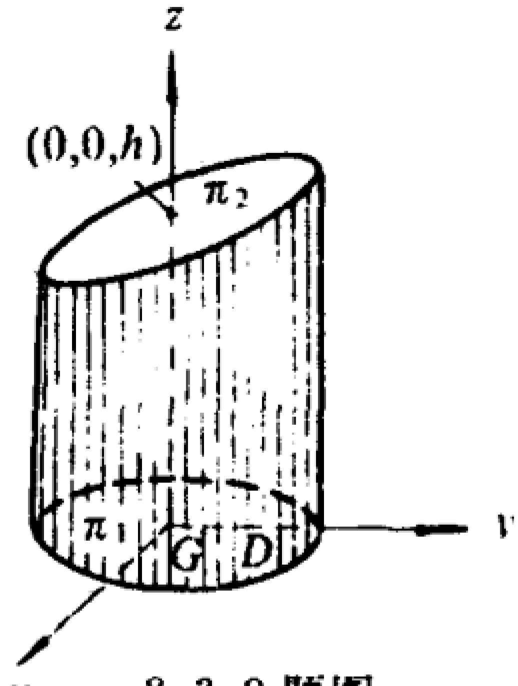
$$S = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{3\sqrt{2}}\ln 3 - \frac{8}{3}\text{arctg}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{3\sqrt{2}}\ln 3 + \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3}\text{arctg}\sqrt{2}.$$

又由于 $\text{arctg}\sqrt{2} + \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$，所以

$$S = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{3\sqrt{2}}\ln 3 + \frac{8}{3}\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\pi.$$

8.3.9　柱面被两平面 π_1 与 π_2 所截（其中 π_1 与柱面的母线垂直），得到一个柱体，π_1 在柱面内部的部分区域为 D. 试证：柱体的体积 $V = \sigma h$，其中 σ 为 D 的面积，h 是 D 的几何中心（即形心或匀质薄片的重心）所对应的高.



8.3.9 题图

证　选取 D 的形心 G 为原点建立直角坐标系（如图）. 于是 G 的坐标 $\bar{x} = \bar{y} = 0$，，即

$$\iint_D x\,dxdy = 0,\quad \iint_D y\,dxdy = 0.$$

如设平面 π_2 的法向量为 $\{a_x, a_y, a_z\}$，则其方程为

$$a_x(x-0) + a_y(y-0) + a_z(z-h) = 0,$$

从中解出 $z = h - \frac{a_x x + a_y y}{a_z}$，于是柱体的体积为

$$V = \iint_D \left(h - \frac{a_x x + a_y y}{a_z}\right)dxdy$$

$$= h\iint_D dxdy - \frac{a_x}{a_z}\iint_D x\,dxdy - \frac{a_y}{a_z}\iint_D y\,dxdy = h\sigma.$$

8.3.10　由螺线 $r = 2\theta$ 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 围成一平面薄片 D（如图），

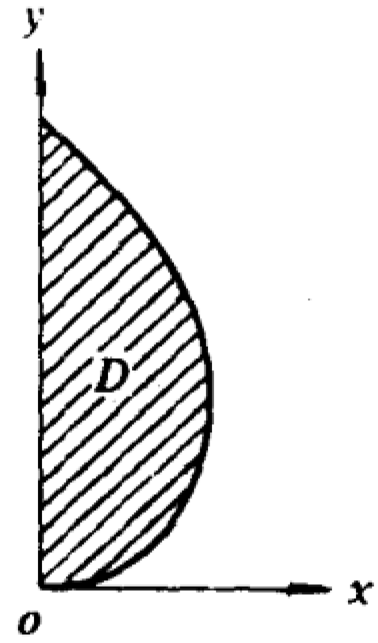
它的面密度 $\rho(x,y)=x^2+y^2$,求它的质量.

解　由公式

$$m=\iint_D \rho(x,y)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy,$$

引入极坐标,令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则区域 D 可表示为 $\theta\leqslant r\leqslant 2\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,于是

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\theta}r^3dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4d\theta=\frac{\pi^5}{40}.$$



8.3.10 题图

8.3.11　求球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 被圆柱 $x^2+y^2=Rx$ 所截出部分的体积 V.

解　由于所求立体 V 关于 zox、xoy 坐标平面对称,故只要求出第一卦限的部分体积(如图),再 4 倍就得到 V.

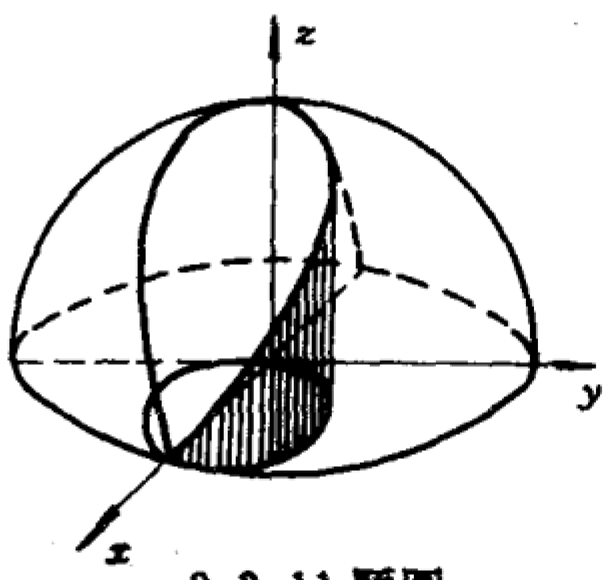
第一卦限部分是曲顶柱体,其上顶是球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,下底是 xoy 平面在第一象限的半圆域 $x^2+y^2\leqslant Rx$,它的极坐标形式为

$$D_{xy}=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant R\cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\},$$

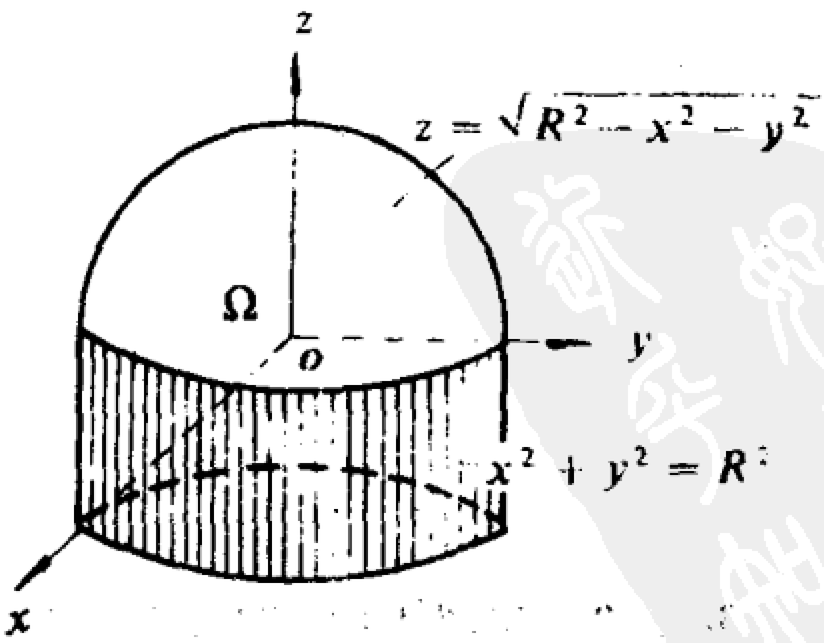
所以

$$V=4\iint_{x^2+y^2\leqslant Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}R^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}).$$



8.3.11 题图



8.3.12 题图

8.3.12　在底半径为 R 高为 H 的圆柱上方拼加一个同半径的半球，要使整个匀质物体的重心位于球心处，R 与 H 应是什么样的关系？

解　选坐标系如图所示．这时，因 Ω 关于 yoz 面对称，且 x 是关于 x 的奇函数，所以 $\iiint\limits_{\Omega} xdv = 0$，从而 $\bar{x} = 0$；同理 $\bar{y} = 0$. 要使重心在球心处，相当于要使 $\bar{z} = 0$. 为此应使 $\iiint\limits_{\Omega} zdv = 0$，但

$$\iiint\limits_{\Omega} zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_{-H}^0 z \cdot rdz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r\cos\varphi \cdot r^2 \cdot \sin\varphi dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot (-\frac{H^2}{2}) + 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^2}{4}(R^2 - 2H^2).$$

于是应有 $R^2 - 2H^2 = 0$，从中解得 $R = \sqrt{2}H$.

8.3.13　一个正圆锥的高为 $h(h > 1)$，轴与母线间的角为 α，如果它的密度与到平面 π 的距离的 n 次方成正比，而平面 π 过圆锥顶点且垂直于轴，而且在到 π 的距离为 1 单位时它等于 a $(n > 0)$，试确定锥体的质量.

解　取锥顶为坐标原点，锥的轴为 z 轴，则锥体的侧表面方程为 $x^2 + y^2 - z^2\text{tg}^2\alpha = 0$. 化为柱坐标，则侧表面方程为 $r^2 - z^2\text{tg}^2\alpha = 0$，即 $r = z\,\text{tg}\alpha$. 锥体为 $0 \leqslant z \leqslant h$，$0 \leqslant r \leqslant z\text{tg}\alpha$.

令密度 $\rho(x,y,z) = kz^n$ 由 $\rho(x,y,z)|_{z=1} = a$，得 $k = a$，即 $\rho(x,y,z) = az^n$. 于是

$$M = \iiint\limits_{\Omega} az^n r dr d\theta dz = a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^n dz \int_0^{z\text{tg}\alpha} rdr$$

$$= a \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}\text{tg}^2\alpha \int_0^h z^{n+2}dz = \frac{\pi a h^{n+3}\text{tg}^2\alpha}{n+3}.$$

8.3.14　一匀质薄板 D 为半椭圆形状，求它的重心.

解　适当选择坐标系，D 可表示为

$$-a \leqslant x \leqslant a,\quad 0 \leqslant y \leqslant b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

由于密度均匀，又 D 关于 y 轴对称，所以 $\bar{x} = 0$ 是明显的，于是由公式

$$\bar{y} = \frac{1}{S}\iint\limits_D ydxdy = \frac{1}{S}\int dx \int_0^{b\sqrt{\quad}} ydy$$

$$= \frac{b^2}{2S}\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx = \frac{b^2}{\pi ab}(2a-\frac{2a^3}{3a^2}) = \frac{4b}{3\pi}.$$

可得重心为$(0,\frac{4b}{3\pi})$.

8.3.15　铸造车间用的钢水包的内部形状是圆台，其底面直径$CB = 600mm$，上口面直径$DA = 760mm$，深度$FE = 800mm$，求钢水包装满密度均匀的钢水时的重心(不计钢水包自重).

解　选圆锥台的中心轴为z轴，以坐标平面$x = 0$截钢水包Ω所得的截面为$ABCD$(如图)，延长AB交z轴于O，取O为原点. 注意在坐标平面$x = 0$上，直线AB的斜率是

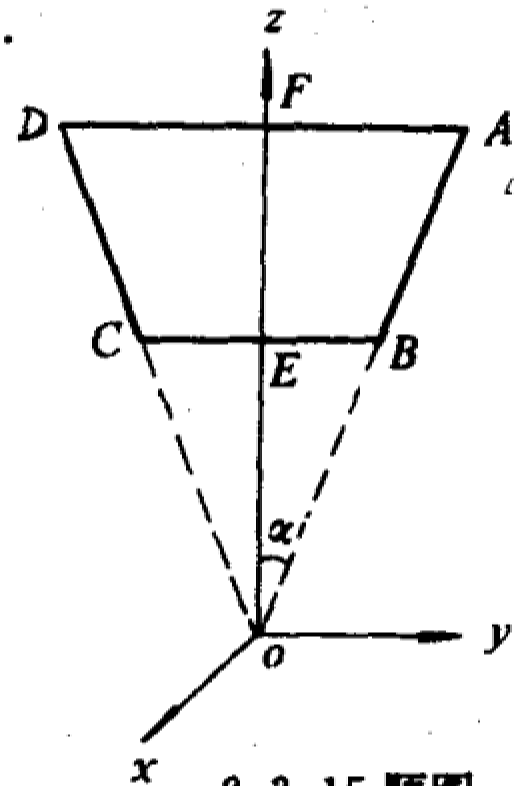
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{AD-BC}{2EF} = \frac{760-600}{1600} = 0.1,$$

又　$$OE = \frac{BE}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{300}{0.1} = 3000,$$

$$OF = \frac{AF}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{380}{0.1} = 3800,$$

所以截面方程为

$$y^2 = (0.1z)^2,\quad 3000 \leqslant z \leqslant 3800,$$



8.3.15 题图

由对称性可知，Ω的重心必在z轴上，即$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$，因此只要求出$\bar{z}$即可. 既然钢水的密度是均匀的，不妨设密度$\rho = 1$，于是

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz}.$$

采用柱面坐标，当$x = 0$时，包壁上的点到z轴的距离r就是该点的纵坐标y，因此在柱面坐标下，截面方程为

$$r^2 = (0.1z)^2,\quad 3000 \leqslant z \leqslant 3800,$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \int_{3000}^{3800}dz\int_0^{0.1z}rdr\int_0^{2\pi}d\theta = \pi\int_{3000}^{3800}(0.1z)^2dz$$

$$= \frac{\pi}{3}(0.1)^2(3800^3 - 3000^3),$$

$$\iiint_{\Omega} zdxdydz = \int_{3000}^{3800} zdz \int_0^{0.1z} rdr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \int_{3000}^{3800} z(0.1z)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{4}(0.1)^2(3800^4 - 3000^4),$$

从而　$\bar{z} = \dfrac{3(3800^4 - 3000^4)}{4(3800^3 - 3000^3)} \approx 3431mm.$

即重心到包底的距离是 $\bar{z} - OE = 3431 - 3000 = 431mm.$

8.3.16　求由曲面 $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, z = 0$ 所围成均匀物体的重心.

解　不妨设 $\rho = 1$，则

$$M = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px}\,\frac{x^2}{2p} dx = \frac{p^3}{28},$$

于是

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} xdv = \frac{28}{p^3}\int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} xdz$$

$$= \frac{28}{p^3} \cdot 2\int_0^{\frac{p}{2}} x\sqrt{2px}\,\frac{x^2}{2p} dx = \frac{28}{p^3} \cdot \frac{p^4}{72} = \frac{7p}{18},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} ydv = \frac{28}{p^3}\int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} ydy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = 0,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} zdv = \frac{28}{p^3}\int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} zdz$$

$$= \frac{28}{p^3} \cdot \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px}\left(\frac{x^2}{2p}\right)^2 dx = \frac{28}{p^3} \cdot \frac{p^4}{704} = \frac{7p}{176}.$$

故重心为$\left(\frac{7p}{28}, 0, \frac{7p}{176}\right)$.

8.3.17　设有一由曲线 $y = \ln x$，x 轴及直线 $x = e$ 所围成的（密度为 1）匀质薄板. 求此薄板绕轴 $x = t$ 旋转的转动惯量 $I(t)$，并问 t 为何值时 $I(t)$ 最小.

解　$I(t) = \iint_{D_{xy}} (x - t)^2 dxdy = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} (x - t)^2 dy$

$$= \int_1^e (x - t)^2 \ln x dx,$$

用分部积分法可求得

$$I(t)=t^2-\frac{1}{2}(e^2+1)t+\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}.$$

由 $I'(t)=2t-\frac{1}{2}(e^2+1)=0$ 解得唯一驻点 $t=\frac{e^2+1}{4}$，且因 $I''(t)=2>0$，所以当 $t=\frac{e^2+1}{4}$ 时 $I(t)$ 最小.

8.3.18　密度均匀的圆环形薄片 D 绕与 D 垂直并过它的中心的轴旋转，求它的转动惯量.

解　适当选择坐标系，圆环形薄片 D 可表示为

$$R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2,$$

密度 $\rho=$ 常数 c，引入极坐标，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，得

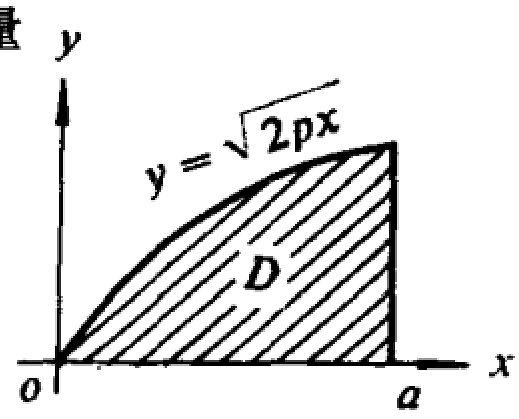
$$J=\iint_D c(x^2+y^2)dydx=c\int_0^{2\pi}d\theta\int_{R_1}^{R_2}r^3dr=\frac{c\pi}{2}(R_2^4-R_1^4).$$

8.3.19　求由变动的面积的重心所描出的曲线，所指的变动面积是由曲线 $y=\sqrt{2px}$，$y=0$，$x=a$（a 为常数）所围成的（如图所示）.

解　设密度 $\rho=1$，则变动的面积的质量

$$M=\iint_D dxdy=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{2px}}dy$$

$$=\int_0^a\sqrt{2px}dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}.$$



8.3.19 题图

从而

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D xdxdy=\frac{1}{M}\int_0^a xdx\int_0^{\sqrt{2px}}dy$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^a\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{3}{2\sqrt{2}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{2\sqrt{2}p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{2}}}{5}=\frac{3}{5}a,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D ydxdy=\frac{1}{M}\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{2px}}ydy=\frac{1}{2M}\int_0^a 2pxdx$$

$$=\frac{3\sqrt{pa}}{4\sqrt{2}}.$$

消去 a，得 $\bar{y}=\frac{1}{8}\sqrt{30px}$，故所求曲线的方程为

$$y = \frac{1}{8}\sqrt{30px}.$$

8.3.20 求由曲线$(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})^3 = \frac{xy}{c^2}$围成的均匀薄板的重心.

解 设$x = ar\cos^2\theta$, $y = br\sin^2\theta$,则已给曲线的方程可化为

$$r = r(\theta) = \frac{ab}{c^2}\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

又
$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = 2abr\cos\theta\sin\theta,$$

故得
$$S = \iint_D dxdy = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{r(\theta)} r\cos\theta\sin\theta dr = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2}{c^4}\cos^5\theta\sin^5\theta d\theta$$
$$= \frac{a^3b^3}{2c^4}B(3,3) = \frac{a^3b^3}{60c^4},$$
$$x = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy = \frac{2ab^2}{S}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{r(\theta)} r^2\cos^3\theta\sin\theta dr$$
$$= 2\frac{a^5b^4}{3c^6S}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9\theta\sin^7\theta dr = \frac{a^5b^4}{3c^6S}B(5,4) = \frac{a^5b^4}{3c^6S}\frac{4!\,3!}{8!}$$
$$= \frac{a^5b^4}{840c^6S} = \frac{60c^4}{a^3b^3}\cdot\frac{a^5b^4}{840c^6} = \frac{a^2b}{14c^2};$$

由对称性得$y = \frac{ab^2}{14c^2}$.

8.3.21 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, x=0, y=0, z=0$所围成的均匀物体对于三个坐标平面的转动惯量(如图).

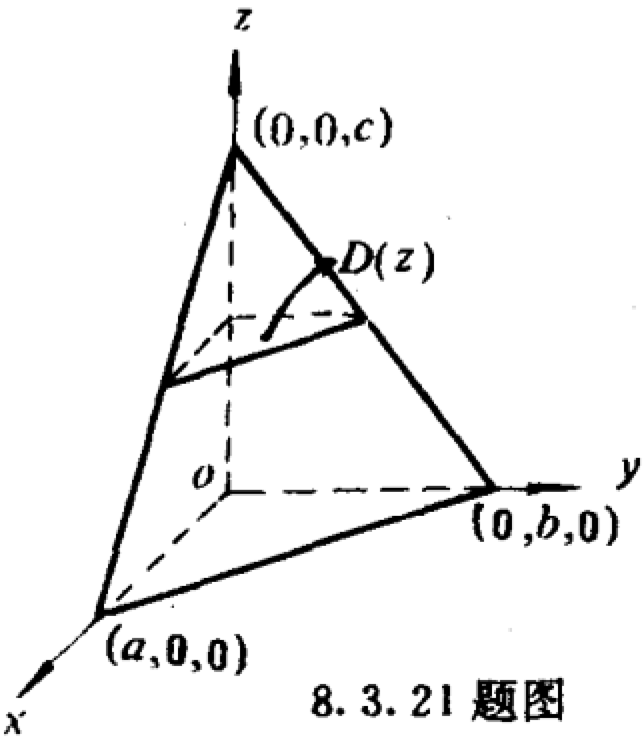
解 不妨设$\rho = 1$,则

$$J_{xy} = \iiint_\Omega z^2dxdydz = \int_0^c(\iint_{D(z)} z^2dxdy)dz = \int_0^c(z^2\iint_{D(z)} dxdy)dz,$$

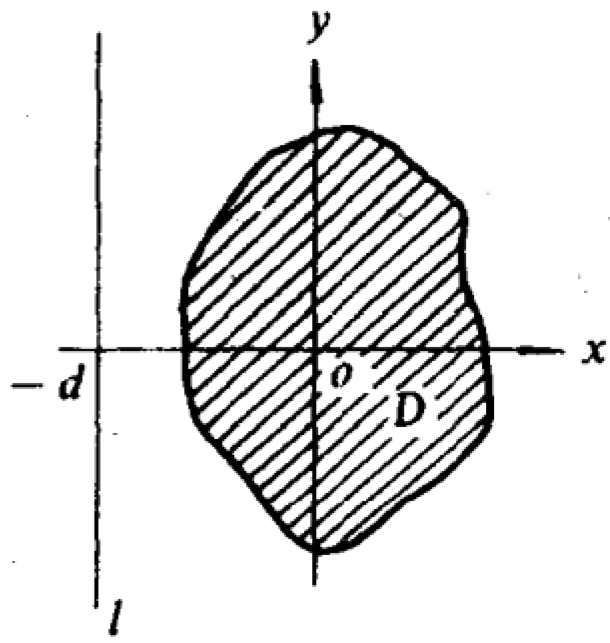
其中$D(z)$为物体被平行于xoy平面所截的区域,其面积为$\frac{1}{2}\frac{a(c-z)}{c}\cdot\frac{b(c-z)}{c} = \frac{1}{2}\frac{ab}{c^2}(c-z)^2$. 所以

$$J_{xy} = \frac{ab}{2c^2}\int_0^c z^2(c-z)^2dz = \frac{abc^3}{60}.$$

同理可求出$J_{yz} = \frac{a^3bc}{60}$, $J_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$.



8.3.21 题图



8.3.22 题图

8.3.22 试证：一个平面图形对于图形所在平面上任意给定轴的转动惯量等于 $Md^2 + I_c$. 其中 M 是分布在平面图形上的质量，d 是从图形重心到已给轴的距离，I_c 是图形对于平行于已给轴且经过重心的轴的转动惯量.

证　设平面图形为 D，点 O 为 D 的重心，直线 l 为定轴，取 O 为坐标原点，(从而 $\bar{x} = \bar{y} = 0$)，y 轴平行于直线 l，则 $I_c = I_y$，直线 l 的方程为 $x = -d$(如图). 于是 D 对 l 的转动惯量

$$I_l = \iint_D \rho(x+d)^2 d\sigma = \iint_D \rho x^2 d\sigma + 2d\iint_D \rho x d\sigma + d^2\iint_D \rho d\sigma$$

$$= I_y + 2d\bar{x}M + d^2M = I_c + d^2M.$$

这一关系称为平行轴原理.

8.3.23 求一均匀球壳(密度 ρ 为常数)对不在球壳上的一质点 P(质量为 1)的引力.

解　取球心为坐标原点，设球半径为 R，质点 P 位于正的 z 轴上，距离球心的距离为 $a(a \neq R)$，所要求的这个引力在 x 轴与 y 轴上的投影 F_x 及 F_y 显然为零. 而

$$F_z = k\iint_{\Sigma} \rho \frac{z-a}{r^3} dS \qquad (k \text{ 为引力常数})$$

这里 r 为球面 $\sum$ 上任意一点与点 P 的距离.

利用球面坐标：

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\varphi.$$

则 $\qquad dS = R^2\sin\varphi d\varphi d\theta,\quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi}$

$$F_z = 2\pi R^2\rho k\int_0^\pi \frac{(R\cos\varphi - a)\cos\varphi d\varphi}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi)^{3/2}},$$

用代换 $R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi = t^2$,则 $R\cos\varphi - a = \frac{1}{2a}(R^2 - a^2 - t^2)$,

$\cos\varphi d\varphi = -\frac{t}{Ra}dt$,于是

$$F_z = \frac{\pi R\rho k}{a^2}\int_{R+a}^{R-a}\left(\frac{R^2 - a^2}{t^2} - 1\right)dt$$

$$= \frac{\pi R\rho k}{a^2}\left\{(R^2 - a^2)\left[\frac{1}{R+a} - \frac{1}{|R-a|}\right] - |R-a| + R + a\right\}.$$

分两种情形讨论:

(1) 设 $a < R$(质点 P 在球内),则 $|R - a| = R - a$,于是

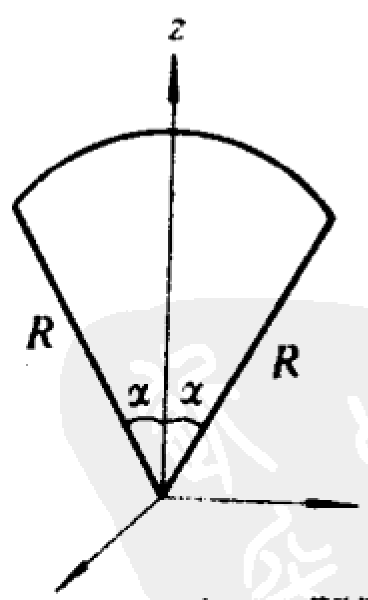
$$F_z = 0;$$

(2) 设 $a > R$(质点 P 在球外),则 $|R - a| = -(R - a)$,于是

$$F_z = -\frac{4\pi R^2\rho k}{a^2}.$$

因此在一个均匀球壳内的点,都不感受球壳表面的任何引力,而在球壳外的点,所感受到球壳表面的引力与集中球壳的全部质量 $M = 4\pi R^2\rho$ 于球心时该点所感受到的引力一样.

8.3.24　求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对于在其顶点的一单位质量的质点的吸引力,设球的半径为 R,而轴截面的扇形角等于 2α(如图).



8.3.24 题图

解　由对称性知 $F_x = 0, F_y = 0$,因而只需求 F_z.

$$F_z = k\rho_0\iiint_\Omega \frac{zdxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= k\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\alpha d\varphi\int_0^R \frac{r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi}{r^3}dr$$

$$= k\rho_0\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\alpha \cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^R dr$$

$$= k\pi\rho_0 R\sin^2\alpha.$$

8.3.25　设球在动点 $P(x,y,z)$ 的密度与该点到球心距离成正比,求质量为 m 的非均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 对于其直径的转动惯量.

解 依假设 $\rho = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,其中 k 为比例常数,则

$$J_z = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)dxdydz$$

$$= k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r\cdot r^2\cdot\sin^2\varphi\, r^2\sin\varphi dr = 2k\pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^{R}r^5dr$$

$$= 2k\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{R^6}{6} = \frac{4k\pi R^6}{9}.$$

又因 $$m = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$= k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}r^3dr = k\pi R^4.$$

故得 $$J_z = \frac{4mR^2}{9}.$$

§ 4　含参变量的积分

内 容 提 要

1. 含参变量的常义积分

(1) **定义**　若二元函数 $f(x,y)$ 在有界矩形区域 $R(a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d)$ 上有定义且连续，则积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在且确定了一个定义在 $[a,b]$ 上的 x 的函数，记为

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy,\quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

被积函数 $f(x,y)$ 所依赖的变量 x，在积分过程中保持某一个固定的值，通常称为参变量，而积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 称为含参变量的积分.

(2) 连续性　若二元函数 $f(x,y)$ 在有界矩形区域 $R(a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d)$ 上有定义且连续，则

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数.

(3) 对积分号下的参数的微分法　若 $f(x,y)$ 在有界矩形区域 $R(a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d)$ 上连续，并且存在连续偏导数 $f_x(x,y)$，则当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，有

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d f_x(x,y)dy.$$

一般情况下，当积分限 $\psi(x),\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上都具有连续导数 $\psi'(x),\varphi'(x)$，且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$c\leqslant\varphi(x)\leqslant d,c\leqslant\psi(x)\leqslant d,f(x,y)$ 和 $f_x'(x,y)$ 在 $R[a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d]$ 上连续，于是有

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy=f[x,\psi(x))]\psi'(x)-f[x,\varphi(x)]\varphi'(x)+\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,y)dy\quad (a<x<b).$$

(4) 积分号下的积分法　若 $f(x,y)$ 在有界矩形区域 $R(a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d)$ 上连续，则

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

2. 含参变量的广义积分

(1) 一致性敛性的定义　设函数 $f(x,y)$ 是定义在区域 $R(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y<+\infty)$ 上的连续函数，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在只与 ε 有关的正数 $D=D(\varepsilon)$，使得当 $d\geqslant D$ 时，对区间 $[a,b]$ 内一切 x，不等式

$$\left|\int_d^{+\infty} f(x,y)dy\right| < \varepsilon$$

都成立，则称广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在区间 $[a,b]$ 内一致收敛，并且在该区间内是参数 x 的连续函数.

对于下限为 $-\infty$ 的积分或无界函数的情形都有类似的定义.

(2) 一致收敛的判别法

1) 柯西判别法　积分 $\int_c^{\infty} f(x,y)dy$ 在区间 $[a,b]$ 内一致收敛的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$，都存在正数 $D=D(\varepsilon)$，使得对于任意的 $A,B>D$，对于区间 $[a,b]$ 内的一切 x，都有

$$\left|\int_A^B f(x,y)dy\right| < \varepsilon.$$

2) 维尔斯特拉斯判别法　设 $f(x,y)$ 作为 y 的函数在任一有限区间 $[c,d]$ 上可积，若存在与参变量 x 无关的函数 $F(y)$，它在区间 $[c,+\infty)$ 上可积，即 $\int_c^{+\infty} F(y)dy<+\infty$，且对于区间 (x_1,x_2) 内的一切 x，

$$|f(x,y)|\leqslant F(y),\quad (y\geqslant c)$$

则积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在区间 (x_1,x_2) 内一致收敛.

3) 对参变量的微分法　若(i) 函数 $f(x,y)$ 在区域 $R(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant+\infty)$ 上连续，并且设 $f'_x(x,y)$ 在区域 R 上亦连续；(ii) 积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 收敛；(iii) 积分 $\int_c^{+\infty} f_x'(x,y)dy$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，则当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，

$$\frac{d}{dx}\int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$$

(4) 对参变量的积分法　若函数 $f(x,y)$ 在区域 $R(a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant$

$y \leqslant +\infty$) 内连续，并且 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\int_a^b \left[\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx = \int_c^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

问 题 与 解 答

8.4.1　设 a、$b(a<b)$ 都是正数，求积分 $J=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

解　设 $h(x)=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$，则 $h(x)=\int_a^b x^y dy$. 于是

$$J=\int_0^1 h(x)dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy,$$

因 $f(x,y)=x^y$ 在矩形 $R=\{0\leqslant x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b\}$ 上连续，利用积分号下积分法，得

$$J=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\bigg|_{x=0}^{x=1}\right]dy=\int_a^b\frac{1}{y+1}dy=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

8.4.2　对 $|r|<1$，求 $J(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\varphi+r^2)d\varphi$.

解　$|r|<1$ 时，$1-2r\cos\varphi+r^2\geqslant 1-2|r|+r^2=(1-|r|)^2>0$，所以 $f(r,\varphi)=\ln(1-2r\cos\varphi+r^2)$ 在 $-1<r<1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 上连续，又 $f_r'(r,\varphi)=\frac{-2\cos\varphi+2r}{1-2r\cos\varphi+r^2}$ 也在 $-1<r<1, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 上连续，所以对 $J(r)$ 施行积分号下求导得

$$J'(r)=\int_0^\pi\frac{-2\cos\varphi+2r}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi=\int_0^\pi\frac{1}{r}\left(1+\frac{r^2-1}{1-2r\cos\varphi+r^2}\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{r}\left[\varphi-2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}=0.$$

由此可知，$J(r)=C$(C 为常数)，但因 $J(0)=\int_0^\pi \ln 1 d\varphi=0$，所以 $C=0$，即 $J(r)=0$，　$(|r|<1)$.

8.4.3　求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

解　令 $J(\alpha)=\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$，因 α, $1+\alpha$ 对 α 连续，$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 对 x 与 α 连续，故依连续性知 $J(\alpha)$ 连续，于是

$$\lim_{a\to 0}J(a)=J(0)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

8.4.4　求 $g(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-t^2}}dt$ 的导数.

解　被积函数 $f(x,t)=e^{x\sqrt{1-t^2}}$ 对 x 及 t 均连续，其偏导数 $f_x(x,t)=\sqrt{1-t^2}e^{x\sqrt{1-t^2}}$ 存在且连续，而且 $\varphi(x)=\sin x,\psi(x)=\cos x$ 不仅连续而且可导，所以

$$g'(x)=(-\sin x)e^{x\sqrt{1-\cos^2x}}-\cos xe^{x\sqrt{1-\sin^2x}}+\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}e^{x\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}e^{x\sqrt{1-t^2}}dt-\sin xe^{x|\sin x|}-\cos xe^{x|\cos x|}.$$

8.4.5　求积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ 的值.

解　考虑含参变量 a 的积分 $I(a)=\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx$，因为函数 $\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}$ 及其对于 a 的偏导数 $\frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}$ 都在区域 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant a\leqslant 1$ 上连续，所以对积分施行积分号下求导，得

$$I'(a)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+ax)}dx$$

$$=\frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{a}{1+x^2}-\frac{a}{1+ax}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+a^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+a\,\mathrm{arctg}x-\ln(1+ax)\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{1+a^2}\left[\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}a-\ln(1+a)\right].$$

上式两边对 a 从 0 到 1 积分，得

$$I(1)-I(0)=\int_0^1\frac{1}{1+a^2}\left[\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}a-\ln(1+a)\right]da$$

$$=\frac{\ln 2}{2}\mathrm{arctg}a\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(1+a^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+a)}{1+a^2}da$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2-I(1).$$

因为 $I(1)=I$，$I(0)=0$，所以要求的积分值为

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

8.4.6　利用等式 $\frac{\text{arctg}x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2}$ 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

解　$\int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_0^1\left[\int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2}\right]\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}},$$

令 $x = \cos u$，则

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + y^2\cos^2 u} = \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\text{tg}u}{\text{tg}^2 u + 1 + y^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1 + y^2}} dy = \frac{\pi}{2}\left[\ln(y + \sqrt{1 + y^2})\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(1 + \sqrt{2}).$$

8.4.7　求函数 $F(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2 + y^2}dx$ 在 $y = 0$ 时的导数.

解　注意函数 $\ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，所以不能在积分号下求导数. 这里

$$F(0) = \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^1 = -1,$$

当 $y \neq 0$ 时，

$$F(y) = \left[x\ln\sqrt{x^2 + y^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) - 1 + y\,\text{arctg}\frac{1}{y}.$$

故 $F'(y) = \lim\limits_{y \to 0}\frac{F(y) - F(0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + y\,\text{arctg}\frac{1}{y}}{y}$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y \to +0; \\ -\frac{\pi}{2}, & y \to -0. \end{cases}$$

即在 $y=0$ 处函数 $F(y)$ 的导数不存在.

8.4.8　设 $F(t)=\frac{1}{h^2}\int_0^h dy\int_0^h f(t+x+y)dx\ (h>0)$,其中 $f(t)$ 为连续函数,求 $F''(t)$.

解　设 $t+x+y=u$,则

$$F(t)=\frac{1}{h^2}\int_0^h dy\int_{t+y}^{t+y+h}f(u)du,$$

$$F'(t)=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(t+y+h)-f(t+y)]dy,$$

再设 $t+y+h=w,\ t+y=v$,则

$$F'(t)=\frac{1}{h^2}\int_{t+h}^{t+2h}f(w)dw-\frac{1}{h^2}\int_t^{t+h}f(v)dv,$$

$$F''(t)=\frac{1}{h^2}[f(t+2h)-f(t+h)]-\frac{1}{h^2}[f(t+h)-f(t)]$$

$$=\frac{1}{h^2}[f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)].$$

8.4.9　在区间 $1\leqslant x\leqslant 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$,试确定 a、b 的值,使得积分 $\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ 取最小值.

解　设 $I(a,b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$,则

$$\frac{\partial I}{\partial a}=2\int_1^3(a+bx-x^2)dx=2(2a+4b-\frac{26}{3}),$$

$$\frac{\partial I}{\partial b}=2\int_1^3 x(a+bx-x^2)dx=2(4a+\frac{26}{3}b-20),$$

令 $\frac{\partial I}{\partial a}=\frac{\partial I}{\partial b}=0$,得

$$2a+4b-\frac{26}{3}=0,\quad 4a+\frac{26}{3}b-20=0.$$

解该方程组,得 $a=-\frac{11}{3}$,$b=4$,即所求的线性函数为 $4x-\frac{11}{3}$,可使 $I(a,b)$ 取最小值.

8.4.10　求 $I(\theta)=\int_0^\pi\ln(1+\theta\cos x)dx$,其中 $|\theta|<1$.

解　利用积分号下求导数来求这个积分.对 $|\theta|<1$ 中任一定值 θ,常可以取 b,使 $|\theta|\leqslant b<1$,这时 $f(x,\theta)=\ln(1+\theta\cos x)$ 和 $f_\theta(x,\theta)=\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$, $-b\leqslant\theta\leqslant b$ 上是连续函数,所以

$$I'(\theta)=\int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\theta\cos x}dx=\frac{1}{\theta}\int_0^\pi\left(1-\frac{1}{1+\theta\cos x}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\theta\cos x},$$

作代换，令 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，求得一个原函数

$$\int\frac{dx}{1+\theta\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\theta\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{2dt}{(1+\theta)+(1-\theta)t^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

所以 $I'(\theta)=\frac{\pi}{\theta}-\frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right).$

这个结论对于 $-1<\theta<1$ 中一切 θ 是成立的.

再对 θ 积分，得

$$I(\theta)=\pi\left(\ln\theta+\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right)+c$$
$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})+c,$$

而由 $I(0)=0$，得 $c=-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{1}{2}$.

于是
$$I(\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

8.4.11　利用 $I_1=\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$，求 $I_n=\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(a>0$，n 为正整数)

解　$f(x,a)=\frac{1}{x^2+a^2}$ 以及 $f_a'(x,a)=-\frac{2a}{(x^2+a^2)^2}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$，$0<a<+\infty$ 内是连续的，故 I_1 收敛，又因为对于任意固定的正数 a_0 及 A，$0\leqslant\frac{2a}{(x^2+a^2)^2}\leqslant\frac{2A}{(x^2+a_0^2)^2}$，$(a_0\leqslant a\leqslant A)$，所以 I_2 对 $a_0\leqslant a\leqslant A$ 为一致收敛的. 于是 $\frac{dI_1}{da}=\int_0^{+\infty}\frac{-2adx}{(x^2+a^2)^2}=-\frac{\pi}{2a^2}$，从而

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{2\cdot 2a^3}.$$

类似地可得

$$I_n=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot\pi}{2.4\cdots(2n-2)\cdot 2a^{2n-1}}.$$

8.4.12　求狄利克雷积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

解　考虑积分

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx,\quad(\alpha\geqslant 0),$$

这是含参变量 α 的积分.有了因子 $e^{-\alpha x}$,常能保持积分有一致收敛性.这时 $I=I(0)$.

记　$$f(x,\alpha)=\begin{cases}1, & x=0;\\ e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

那末 $f_\alpha(x,\alpha)=-e^{-\alpha x}\sin x$,显然 $f(x,\alpha),f_\alpha(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x\leqslant\infty,0\leqslant\alpha\leqslant\infty$ 上的连续函数,又 $\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ 关于 $\alpha\geqslant 0$ 为一致收敛,所以 $I(\alpha)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数,从而

$$I=I(0)=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha),$$

下面来求 $I(\alpha)$,为此考虑 $I'(\alpha)(\alpha>0)$,因为

$$\int_0^{\infty}f_\alpha(x,\alpha)dx=-\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx,$$

这个积分关于 α 在任何区间 $[\varepsilon,\infty)(\varepsilon>0)$ 上一致收敛,这是因为 $|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\varepsilon x}$,而 $\int_0^{\infty}e^{-\varepsilon x}dx$ 收敛,因此,在积分号下求微分,得到在 (ε,∞) 内成立的等式

$$I'(\alpha)=\int_0^{\infty}-e^{-\alpha x}\sin x dx=\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x+\cos x)}{1+\alpha^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

但对任何 $\alpha_0>0$,总可取 $[\varepsilon,\infty)$ 含有 α_0,因此 $I'(\alpha_0)$ 存在,也就是

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{1+\alpha^2}$$

对任意 $\alpha>0$ 成立.所以当 $\alpha>0$ 时

$$I(\alpha)=-\operatorname{arctg}\alpha+c.$$

另一方面,

$$|I(\alpha)|=\left|\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\int_0^{\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha},$$

当 $\alpha\to\infty$ 时，$I(\alpha)\to 0$，因此得到 $0=-\frac{\pi}{2}+c$，即 $c=\frac{\pi}{2}$. 所以

$$I=I(0)=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0}(-\operatorname{arctg}\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}.$$

进一步，作变换 $\beta x=z$，可以得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \beta>0,\\ 0, & \beta=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \beta<0.\end{cases}$$

8.4.13　证明 Γ— 函数 $\Gamma(\alpha)$ 在域 $\alpha>0$ 内是连续的，并有各阶连续导函数.

证　根据 Γ 函数的定义

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \tag{1}$$

下面先证明当 $\alpha>0$ 时 $\Gamma(\alpha)$ 是可导的，且

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx. \tag{2}$$

事实上，将(1) 式右边在积分号下求导，即得(2) 式，只需证明积分(2) 当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant M<+\infty$ 时一致收敛.

由于 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{\alpha_0}{2}}\ln x=0$，故当 $0<x\leqslant 1$ 时，$|x^{\frac{\alpha_0}{2}}\ln x|\leqslant T$，因而

$$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x|\leqslant|x^{\alpha-1}\ln x|=|x^{\alpha-\frac{\alpha_0}{2}-1}||x^{\frac{\alpha_0}{2}}\ln x|$$
$$\leqslant Tx^{\alpha-\frac{\alpha_0}{2}-1}\leqslant Tx^{\frac{\alpha_0}{2}-1}.$$

由于 $\int_0^1 x^{\frac{\alpha_0}{2}-1}dx$ 收敛，故当 $0<x\leqslant 1$ 时，积分(2) 当 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant M<+\infty$ 时一致收敛.

又因当 $x\geqslant 1$ 时，$0\leqslant\ln x<x$，且对于 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant M<+\infty$ 时有

$$|x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{\alpha}e^{-x}\leqslant x^{M}e^{-x},$$

由于 $\int_1^\infty x^M e^{-x}dx$ 收敛，因此，当 $x\geqslant 1$ 时，积分(2) 在 $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant M<+\infty$ 上也一致收敛. 从而在积分号下求导是合理的，同时也证明了 $\Gamma(\alpha)$ 在域 $\alpha>0$ 内是连续的.

根据同样的理由可得

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}\ln^n x\,dx.$$

故知 $\Gamma(x)$ 具有各阶导函数，而且还是连续的.

8.4.14　试利用 Γ — 函数计算下列积分

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$；　(2) $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx$；($n$ 为正整数)；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x dx$.

解　(1) $I=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}-1}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}dx$

$$=B(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2!}=\frac{\pi}{8}.$$

(2) 在 $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}t^{a-1}e^{-t}dt$ 中，设 $t=x^2$，则

$$\Gamma(a)=2\int_0^{+\infty}x^{2a-1}e^{-x^2}dx.$$

将所求积分与之比较，得

$$I=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{2n+1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

(3) 在 $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ 中，设 $t=\sin^2 x$，则

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}x\cos^{2q-1}x dx.$$

将所求积分与之比较，得

$$I=\frac{1}{2}B(\frac{7}{2},\frac{5}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\cdot\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 5!}[\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}][\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}]=\frac{3\pi}{512}.$$

8.4.15　试求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$，$(\beta>\alpha>0)$.

解　因为 $\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\int_\alpha^\beta e^{-xy}dy$，所以 $I=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta e^{-xy}dy$，又当 $x\geq$

$0, \alpha \leqslant y \leqslant \beta$时，$e^{-xy} \leqslant e^{-\alpha x}$. 而$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$是收敛的，所以$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$在$[\alpha, \beta]$上一致收敛，于是可交换积分次序

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_\alpha^\beta e^{-xy}dy = \int_\alpha^\beta dy \int_0^{+\infty} e^{-xy}dx.$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-xy}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} (\frac{-e^{-by}}{y} + \frac{1}{y}) = \frac{1}{y}$,

所以
$$I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{y}dy = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

第九章　曲线积分与曲面积分

§1　曲线积分

内容提要

1. 对弧长的（第一型）曲线积分

(1) 定义　设 c 是平面内一条光滑或分段光滑曲线，函数 $f(x,y)$ 在 c 上有界，把 c 分成任意 n 个子弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，第 i 段的长度为 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$. (ξ_i,η_i) 是 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上的任意一点，如果不论子弧段怎样划分，点 (ξ_i,η_i) 怎样选取，当 $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 存在，则此极限称为函数 $f(x,y)$ 在曲线 c 上对弧长的（第一型）曲线积分. 记作 $\int_c f(x,y)ds$，即

$$\int_c f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

其中函数 $f(x,y)$ 叫做被积函数，c 叫做积分路径，$f(x,y)ds$ 叫做被积表达式，ds 是弧长微分.

(2) 计算公式　设自身不相交的曲线 c 由参数方程

$$x=\varphi(t),y=\psi(t),(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，而且函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都连续，当 t 单调增大由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 画出由点 A 到点 B 的曲线 c，若 $f(x,y)$ 在曲线弧 c 上连续，则积分 $\int_c f(x,y)ds$ 存在，且

$$\int_c f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

特别地，如果曲线 c 由方程 $y=\varphi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$（其中 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导）给出时，则

$$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx.$$

若 c 是一条有限长度的光滑或分段光滑的空间曲线，函数 $f(x,y,z)$ 在 c 上有界，可类似于平面上第一类曲线积分的定义，给出 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 c 上的第一类曲线积分 $\int_c f(x,y,z)ds$ 的定义．其中 ds 是空间曲线 c 上的弧长微分．

若自身不相交的空间曲线 c 由参数方程

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

给出，$f(x,y,z)$ 在 c 上连续，且函数 $x(t),y(t),z(t)$ 及其导函数 $x'(t)$，$y'(t),z'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都连续，则空间曲线第一类曲线积分 $\int_c f(x,y,z)ds$ 存在，且

$$\int_c f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt.$$

2. 对坐标的（第二型）曲线积分

(1) 定义　设 $\overset{\frown}{AB}$ 是一条从点 A 到点 B 的有向且有限长度的光滑曲线弧，函数 $P(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上有界，用 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点 $A=M_0(x_0,y_0),M_1(x_1,y_1),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),M_n(x_n,y_n)$ 把 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$．用 Δs_i 表示 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长，$\lambda=\max\{\Delta s_i\}$，用 Δx_i 记 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 在 x 轴上的投影：$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$．在每个有向弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，并作和 $\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$．如果不论子弧段怎样划分，点 (ξ_i,η_i) 怎样选取，当 $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$ 时，极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 存在，则称该极限值为函数 $P(x,y)$ 沿有向曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 对坐标 x 的（第二型）曲线积分，记作

$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx$，即

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

其中 $P(x,y)$ 称为被积函数，$\widehat{AB}$ 称为积分路径.

类似地可定义

$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

一般地，若函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向光滑曲线弧段 $\widehat{AB}$ 上有界，且积分 $\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx$、$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy$ 都存在，则它们的和称为对坐标的（第二型）一般形式的曲线积分，并记为

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

若令 $\boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$, $d\boldsymbol{s} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$，则上式可改写为

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(2) 计算公式　设自身不相交的平面曲线 $\widehat{AB}$ 由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

给出，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，当 t 单调地从 α 变到 β 时，$\widehat{AB}$ 上的点从始点 A 变到终点 B，若函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 $\widehat{AB}$ 上连续，则积分 $\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

特别地，当曲线 $\widehat{AB}$ 由 $y = \varphi(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 给出时，则

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b}\{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}dx.$$

类似地可以定义三元函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 关于空间曲线 $\widehat{AB}$ 的对坐标的（第二型）一般形式的曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

它的计算方法与平面情形相仿.

3. 两类曲线积分的关系

设自身不相交的平面光滑曲线$\widehat{AB}$由参数方程

$$x = x(s), y = y(s), 0 \leqslant s \leqslant l$$

给出,其中 s 为曲线弧长,若 α 表示沿着弧长的增加方向的切线与 x 轴正向之间的夹角,且 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 在$\widehat{AB}$上连续,则

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_0^l \{P[x(s),y(s)]\cos\alpha + Q[x(s),y(s)]\sin\alpha\}ds$$

其中 $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ 是曲线$\widehat{AB}$的切线向量的方向余弦.

同样,对于自身不相交的空间光滑曲线 c 上的曲线积分,有

$$\int_c Pdx + Qdy + Rdz = \int_c (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

其中 $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$,$\cos\beta = \frac{dy}{ds}$,$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$ 是空间曲线 c 的切线向量的方向余弦.

4. 格林公式

设闭区域 D 的边界是由一条逐段光滑且自身不相交的曲线 c 所围成,函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 及其偏导数$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$在 D 上连续且有连续的一阶偏导数,则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_c Pdx + Qdy,$$

其中 c 是 D 取正向的边界曲线.

5. 平面曲线积分与积分路径无关的条件

设 D 是单连通闭区域,如果函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在闭区域 D 内连续,且有一阶连续的偏导数,则以下四个命题互相等价:

(1) 曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ 在域 D 中与路径无关,只与位于 D 中的起点 A 和终点 B 有关.

(2) 沿位于 D 内的任一自身不相交的逐段光滑的闭曲线 c,有

$$\oint_c Pdx + Qdy = 0.$$

(3) 对 D 内的任意一点 (x,y)，有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

(4) 在 D 内存在一个单值函数 $u(x,y)$，使 $du=Pdx+Qdy$.

问 题 与 解 答

1. 对弧长的(第一型)曲线积分

(1) 平面情形

9.1.1 计算 $\int_c (x^2+y^2)^n ds$，c 为圆周 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解
$$\int_c (x^2+y^2)^n ds=\int_0^{2\pi} a^{2n}\sqrt{x'^2+y'^2}dt$$
$$=\int_0^{2\pi} a^{2n}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=a^{2n+1}\int_0^{2\pi}dt=2\pi a^{2n+1}.$$

9.1.2 计算 $\int_c (x^2+y^2)ds$，c 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 因为 $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=\sqrt{a^2(t\cos t)^2+a^2(t\sin t)^2}dt$ $=atdt$，所以
$$\int_c (x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]atdt$$
$$=a^3\int_0^{2\pi}(1+t^2)tdt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

9.1.3 计算积分 $\int_c yds$，c 是摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 的一拱$(a>0)$.

解 因为 $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt$
$=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}dt$，所以
$$\int_c yds=\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}dt$$
$$=\sqrt{2}a^2\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{t}{2})^{3/2}dt=4a^2\int_0^{2\pi}(\sin\frac{t}{2})^3dt$$
$$=-8a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})d\cos\frac{t}{2}$$

$$= -8a^2\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2.$$

9.1.4 $\int_c y^2 ds$，这里的 c 为摆线 $x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的一拱.

解 因为 $ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt$ $= 2a\sin\frac{t}{2}dt$，所以

$$\int_c y^2 ds = 2a^3\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}(1-\cos t)^2 dt = 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt$$

$$= 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u du = \frac{256}{15}a^3.$$

9.1.5 $\int_c xyds$，其中 c 为双曲线 $x = a\text{ch}t, y = a\text{sh}t, (0 \leqslant t \leqslant t_0)$ 的弧.

解 因为 $ds = \sqrt{a^2\text{sh}^2 t + a^2\text{ch}^2 t}dt = a\sqrt{\text{ch}2t}dt$，所以

$$\int_c xyds = a^3\int_0^{t_0}\text{ch}t \cdot \text{sh}t\sqrt{\text{ch}2t}dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{t_0}\text{sh}2t\sqrt{\text{ch}2t}dt$$

$$= \frac{a^3}{4}\int_0^{t_0}\sqrt{\text{ch}2t}d(\text{ch}2t) = \frac{a^3}{6}(\sqrt{\text{ch}^3 2t_0} - 1).$$

9.1.6 计算 $\int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$，$c$ 是星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 根据对称性可知 $\int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds = 4\int_{\widehat{AB}}(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$.

其中 $\widehat{AB}$ 为星形线在第一象限的部分，下面用两种方法计算.

解法 1 星形线的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，于是

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$
$$= 3a\sin t\cos t dt.$$

从而 $$\int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a\cos t\sin t dt$$

$$= 2a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\sin^6 t - \cos^6 t) = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

解法 2　由隐函数求导法则可得，$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$，所以$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$，从而求出

$$ds=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx=\frac{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{x^{1/3}}dx=a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx,$$

于是
$$\int_c(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds=4\int_0^a[x^{\frac{4}{3}}+(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^2]a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx$$
$$=4a^{\frac{1}{3}}\int_0^a(a^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+2x-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}})dx$$
$$=4a^{\frac{1}{3}}(\frac{3}{2}a^2+a^2-\frac{3}{2}a^2)=4a^{\frac{7}{3}}.$$

9.1.7　$\int_c\frac{1}{y^2}ds$，其中 c 为悬链线 $y=a\text{ch}\,\frac{x}{a}$.

解　因为 $ds=\sqrt{1+\text{sh}^2\,\frac{x}{a}}dx=\text{ch}\,\frac{x}{a}dx$，所以

$$\int_c\frac{1}{y^2}ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{ch}\,\frac{x}{a}}{a^2\text{ch}^2\,\frac{x}{a}}dx=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(\text{sh}\,\frac{x}{a})}{1+\text{sh}^2\,\frac{x}{a}}$$
$$=\frac{1}{a}\Big[\text{arctg}(\text{sh}\,\frac{x}{a})\Big]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{a}.$$

9.1.8　$\int_c yds$，其中(1) c 为抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上从点(x_0,y_0)到点(0,0)的一段；(2) c 为同一抛物线上从点(x_0,y_0)到点$(x_0,-y_0)$的一段.

解　以下仅讨论 $y_0>0$ 的情况，($y_0<0$ 的情况留给读者练习).

(1) 如要将所给积分化为对 x 的定积分，可把抛物线的参数方程看作是 $x=x,y=\sqrt{2px}$，则 $(\frac{dx}{dx})^2+(\frac{dy}{dx})^2=1+\frac{p}{2x}$，且 $x_0>0$，于是，

$$\int_c yds=\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx=\frac{\sqrt{p}}{3}[(2x_0+p)^{3/2}-p^{3/2}].$$

如要将所给积分化为对 y 的定积分，可把 c 的参数方程看作是 $x=\frac{y^2}{2p},y=y$，则 $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2=\frac{y^2}{p^2}+1$，且 $y_0>0$，于是，

$$\int_c y ds = \int_0^{y_0} y \cdot \sqrt{\frac{y^2}{p^2}+1} dy = \frac{1}{3p}[(y_0^2+p^2)^{3/2}-p^3]$$

$$= \frac{1}{3p}[(2px_0+p^2)^{3/2}-p^3] = \frac{\sqrt{p}}{3}[(2x_0+p)^{3/2}-p^{3/2}].$$

两种算法的繁简程度相近.

(2) 如果把 y 看作是 x 的函数(而 $x = x$),曲线应分为两段(如图).

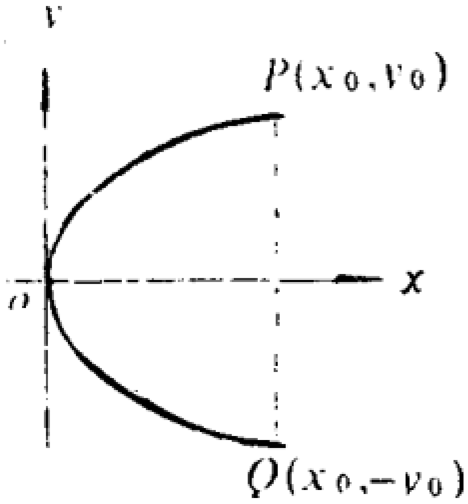
$\overset{\frown}{OP}: y = \sqrt{2px}\ (0 \leqslant x \leqslant x_0)$, $\overset{\frown}{OQ}: y = -\sqrt{2px}\ (0 \leqslant x \leqslant x_0)$

于是 $\int_c y ds = \int_{\overset{\frown}{OP}} y ds + \int_{\overset{\frown}{OQ}} y ds$

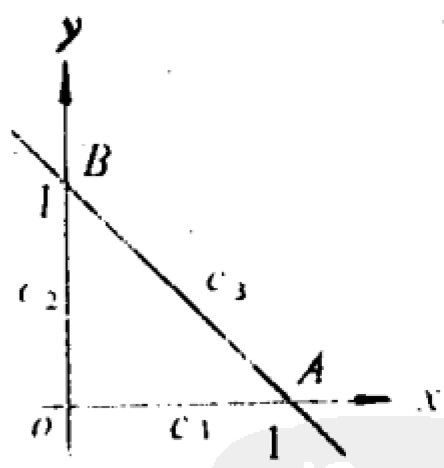
$$= \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1+\frac{p}{2x}} dx + \int_0^{x_0} (-\sqrt{2px}) \cdot \sqrt{1+\frac{p}{2x}} dx = 0.$$

如果把 x 看作是 y 的函数(而 $y = y$),曲线不须分段,这时 $x = \frac{y^2}{2p}$, $(-y_0 \leqslant y \leqslant y_0)$ 于是 $\int_c y ds = \int_{-y_0}^{y_0} y \cdot \sqrt{\frac{y^2}{p^2}+1} dy = 0$,

(因为被积函数关于积分变量是奇函数,且积分区间关于原点 O 对称).



9.1.8 题图



9.1.9 题图

9.1.9 计算 $\int_c (x+y) ds$, c 为以 $O(0,0)$, $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形.

解 三条边 OA, AB, BO 的方程依次为 $x = 0, y = 1-x, y = 0$,于是

$$\int_c (x+y) ds = \int_{c_1} (x+y) ds + \int_{c_2} (x+y) ds + \int_{c_3} (x+y) ds$$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1 ydy+\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+[(1-x)']^2}dx$$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1 ydy+\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}$$

$$=1+\sqrt{2}.$$

9.1.10　计算$\int_c(x^2+y^2)ds$，c是以$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(0,1)$为顶点的三角形.

解　三条边OA,AB,BO的方程依次为$y=0$，$y=1-\frac{x}{2}$，$x=0$.

于是　$\int_c(x^2+y^2)ds$

$$=\int_{OA}(x^2+y^2)ds+\int_{AB}(x^2+y^2)ds+\int_{BO}(x^2+y^2)ds$$

$$=\int_0^2(x^2+0^2)\sqrt{1^2+0^2}dx$$

$$+\int_0^2\left[x^2+(1-\frac{x}{2})^2\right]\sqrt{1+(-\frac{1}{2})^2}dx$$

$$+\int_0^1(0^2+y^2)\sqrt{0^2+1^2}dy$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{3}=3+\frac{5}{3}\sqrt{5}.$$

9.1.11　计算$\int_c\sqrt{x^2+y^2}ds$，c为圆周$x^2+y^2=ax$.

解　因为c的极坐标方程为$r=a\cos\theta$，$(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，所以

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2(-\sin\theta)^2}d\theta=\sqrt{a^2}\,d\theta=ad\theta.$$

故　$\int_c\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}rds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot ad\theta$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=2a^2.$$

9.1.12　$\int_c xds$，其中c为对数螺线$r=ae^{k\varphi}(k>0)$在圆$r=a$的内部.

解　因为$ds=ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi\ (-\infty<\varphi<0)$，所以

$$\int_c xds=\int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi}\cos\varphi\cdot ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}d\varphi$$

$$= a^2\sqrt{1+k^2}\left[\frac{2k\cos\varphi+\sin\varphi}{1+4k^2}e^{2k\varphi}\right]_{-\infty}^{0}=\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}.$$

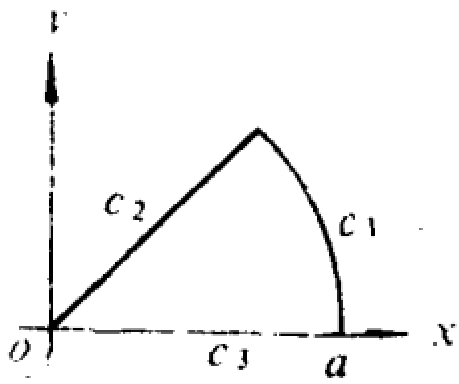
9.1.13 计算$\int_c |y|ds$，c为双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$的弧.

解 因为双纽线的极坐标方程是$r^2=a^2\cos2\theta$，所以$ds=\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos2\theta}}d\theta$，故

$$\int_c |y|ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos2\theta}}d\theta$$

$$=4a^2[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=2a^2(2-\sqrt{2}).$$

9.1.14 计算$\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，$c$为由圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限中所围成图形的边界.



9.1.14 题图

解 如图所示，

$$\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{c_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{c_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{c_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$$

采用极坐标

$$\int_{c_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^r\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=ae^a\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}ae^a.$$

$$\int_{c_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^r dr=[e^r]_0^a=e^a-1.$$

$$\int_{c_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=e^{a-1}.$$

所以 $\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a.$

(2) 空间情形

9.1.15 计算$\int_c zds$，其中c为圆锥螺线$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

解 因为

$$ds = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt = \sqrt{2 + t^2}dt.$$

于是 $\int_c zds = \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}dt. = \frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$

9.1.16 计算 $\int_c \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$，$c$ 为螺线 $x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = at$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

解 因为 $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$

$$= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + a^2}dt = a\sqrt{2}\,dt.$$

所以 $\int_c \frac{z^2}{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi} \frac{a^2t^2}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}a\sqrt{2}\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2}\,t^2dt = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3 a.$$

9.1.17 计算 $\int_c x^2ds$，其中 c 为圆周 $x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z = 0$.

解法 1 作代换 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$，$v = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$，

$$w = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z),$$

则圆周 c 变成 $u^2+v^2+w^2 = a^2$，$w = 0$. 于是

$$\int_c x^2ds = \int_c \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2ds$$

$$= \int_c \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}}\right)^2ds$$

$$= \frac{1}{6}\int_c (3u^2+v^2)ds + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_c uvds$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3\cos^2\varphi d\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} a^3\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

解法 2 利用对称性，$\int_c x^2ds = \int_c y^2ds = \int_c z^2ds$ 由此有，

$$\int_c x^2ds = \frac{1}{3}\int_c (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{a^2}{3}\int_c ds = \frac{2\pi}{3}a^3.$$

9.1.18 $\int_c (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 c 是

(1) $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) 曲面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

解 (1) 根据螺线的参数方程，有

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}dt=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+b^2}dt$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}dt.$$

于是

$$\int_c(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2t+a^2\sin^2t+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt$$

$$=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}.$$

(2) 解法 1　曲线 c 的方程可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x+z=1\end{cases}$$

如果以 x 作为参数，则上述方程又可改写为参数方程

$$\begin{cases}x=x,\\ y=\pm 2\sqrt{1-\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}{2}},\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\\ z=1-x,\end{cases}$$

于是 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x}{y}$, $\dfrac{dz}{dx}=-1$，因此有

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{y}\right)^2+(-1)^2}dx=\frac{2\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{4-2(x-\frac{1}{2})^2}}.$$

又由对称性可得到

$$\int_c(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{2}} (x^2+y^2+z^2)\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2(x-\frac{1}{2})^2}}dx$$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{2}} \frac{9}{2}\cdot\frac{2d\sqrt{2}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{4-2(x-\frac{1}{2})^2}} = 18\pi.$$

解法 2　曲线 c 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}+\sqrt{2}\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta, \qquad\qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \\ z = \frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta. \end{cases}$$

于是

$$ds = \sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}d\theta = 2d\theta.$$

因而　$\int_c (x^2+y^2+z^2)ds = \int_0^{2\pi}\frac{9}{2}\cdot 2d\theta = 18\pi.$

上述两种计算方法虽不同，但被积函数却有共同特点：沿所给曲线都恒等于$\frac{9}{2}$，其运算的实质是计算曲线 c 的弧长.

解法 3　不难算出，曲线 c' 是球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 被平面 $x+z=1$ 所截出的半径为 2 的圆周（只要将坐标系绕 y 轴旋转$\frac{\pi}{4}$即可）. 从而它的周长等于 4π，因此有

$$\int_c (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{9}{2}\int_{c'} ds = \frac{9}{2}\cdot 4\pi = 18\pi.$$

由本题可以看出：空间曲线方程若由两曲面方程联立给出时，化为参数方程的形式不是唯一的，可有多种形式.

9.1.19　计算 $\int_c z ds$，其中 c 为曲线 $x^2+y^2=z^2, y^2=ax$ 上从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(a,a,\sqrt{2}a)$ 的弧.

解　由已知的曲线方程得

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^4}{a^2}+y^2}=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

因而，曲线的参数方程可写为

$$x=\frac{y^2}{a},y=y,z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}.$$

所以

$$ds=\sqrt{(\frac{2y}{a})^2+1+(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}})^2}dy=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}dy.$$

故 $$\int_c zds=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\cdot\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}dy$$

$$=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}dy$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^a\sqrt{(y^2+\frac{9a^2}{16})^2-\frac{17}{16^2}a^4}\cdot d(y^2+\frac{9a^2}{16})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\Big[\frac{y^2+\frac{9a^2}{16}}{2}\cdot\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{a^4}{4}}-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln(y^2+\frac{9a^2}{16}+\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{a^4}{4}})\Big]_0^a$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\Big[(\frac{25a^4}{64}\sqrt{\frac{19}{2}}-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16})-(\frac{9a^4}{64}-\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{17a^2}{16})\Big]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\frac{25a^4\sqrt{38}-18a^4}{128}+\frac{\sqrt{2}}{a^2}\frac{17a^4}{2\cdot 16^2}\ln\frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2+8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}}$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\Big[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\Big].$$

9.1.20 计算空间曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{ch}(\mathrm{arctg}\frac{y}{x})=a$ 从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(x,y,z)$ 的弧长.

解　令 $x=\sqrt{a^2-z^2}\cos\varphi, y=\sqrt{a^2-z^2}\sin\varphi$. 不妨设 $z>0$，于是有 $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{a^2(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi})}=a\mathrm{th}\varphi$.

又因 $\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{a^2(1-\mathrm{th}^2\varphi)}=\frac{a}{\mathrm{ch}\varphi}$，所以得到曲线的参数方程为

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\mathrm{ch}\varphi},\ y=\frac{a\sin\varphi}{\mathrm{ch}\varphi},\ z=a\mathrm{th}\varphi,$$

故

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{d\varphi})^2+(\frac{dy}{d\varphi})^2+(\frac{dz}{d\varphi})^2}d\varphi$$

$$=a\sqrt{\frac{\mathrm{ch}^2\varphi+\mathrm{th}^2\varphi+1}{\mathrm{ch}^4\varphi}}d\varphi=\sqrt{2}a\frac{d\varphi}{\mathrm{ch}\varphi}.$$

于是 $s=\int_0^\varphi\sqrt{2}a\frac{1}{\mathrm{ch}\varphi}d\varphi=\sqrt{2}a\int_0^\varphi\frac{2}{e^\varphi+e^{-\varphi}}d\varphi$

$$=2\sqrt{2}a\int_0^\varphi\frac{1}{1+(e^\varphi)^2}de^\varphi=2\sqrt{2}a[\mathrm{arctg}e^\varphi]_0^\varphi$$

$$=2\sqrt{2}a\left(\mathrm{arctg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a\,\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$ 不难

证明，当 $z<0$ 时，$s=\sqrt{2}a\mathrm{arctg}\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}$

综上所述，有 $s=\sqrt{2}a\mathrm{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$

注　由 $z=a\mathrm{th}\varphi$ 知 $z(e^\varphi+e^{-\varphi})=a(e^\varphi-e^{-\varphi})$，$z(e^{2\varphi}+1)=a(e^{2\varphi}-1)$，于是 $e^{2\varphi}=\frac{a+z}{a-z}$ 或 $e^\varphi=\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

另一方面

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4})=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}})=\frac{a-\sqrt{a^2-z^2}}{z}.$$

因而在其主值范围内，有

$$\mathrm{arctg}\frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

9.1.21　计算$\int_c \sqrt{2y^2+z^2}ds$，其中c为$x^2+y^2+z^2=a^2$与$y=x$的交线.

解法1　c为空间一圆周，其在xoz平面上的投影为一椭圆周$2x^2+z^2=a^2$，即

$$\frac{x^2}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

将椭圆改为参数式，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ z=a\sin\theta. \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

由于$y=x$，故c的参数式方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta, \\ z=a\sin\theta. \end{cases} \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

$$ds=\sqrt{\frac{a^2}{2}\sin^2\theta+\frac{a^2}{2}\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}d\theta=ad\theta.$$

因此　$\int_c \sqrt{2y^2+z^2}ds=a\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}d\theta=a^2\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi a^2.$

解法2　以x为参数，则c在平面$z=0$上下两部分分别可表达为参数式

$$c_1:\begin{cases} x=x, \\ y=x, \\ z=\sqrt{a-2x^2}. \end{cases} \quad (|x|\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}) \text{ 及 } c_2:\begin{cases} x=x, \\ y=x, \\ z=-\sqrt{a-2x^2}. \end{cases}$$

考虑到对称性，有$\int_c=\int_{c_1}+\int_{c_2}=2\int_{c_1}$，故

$$\int_c \sqrt{2y^2+z^2}ds=2\sqrt{2}a\int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{a^2-2x^2}}=2\pi a^2.$$

2. 对坐标的(第二型)曲线积分

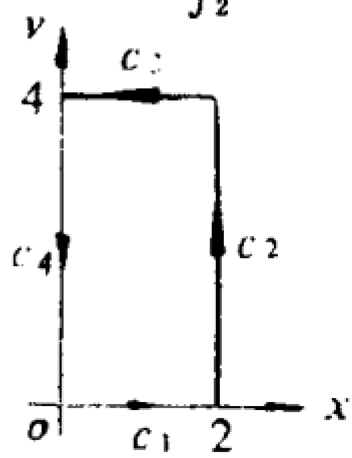
(1) 平面情形

9.1.22　计算 $\int_c ydx$，其中 c 是由直线 $x=0, y=0, x=2, y=4$ 所围成的正向矩形回路.

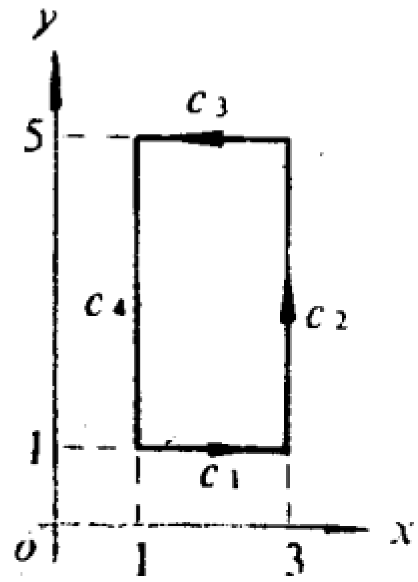
解　如图所示，有

$$\int_c ydx = \int_{c_1} ydx + \int_{c_2} ydx + \int_{c_3} ydx + \int_{c_4} ydx$$

$$= 0 + 0 + \int_2^0 4dx + 0 = -8.$$



9.1.22 题图



9.1.23 题图

9.1.23　计算 $\int_c (x^2+y^2)dy$，其中 c 是由直线 $x=1, y=1, x=3, y=5$ 构成的正向矩形回路.

解　如图所示，

$$\int_c (x^2+y^2)dy = \int_{c_1}(x^2+y^2)dy + \int_{c_2}(x^2+y^2)dy + \int_{c_3}(x^2+y^2)dy + \int_{c_4}(x^2+y^2)dy$$

$$= 0 + \int_1^5 (9+y^2)dy + 0 + \int_5^1 (1+y^2)dy$$

$$= \int_1^5 (9+y^2-1-y^2)dy = 8\int_1^5 dy = 32.$$

9.1.24　计算下列曲线积分：

(1) $\int_c xdx$；　(2) $\int_c xdy + ydx$

其中 c 是由两坐标轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 构成的逆时针方向的三角回路.

解　(1) 如图所示，OA：$y=0, dy=0$；AB：$x=2(1-\frac{1}{3}y)$，

$dx = -\frac{2}{3}dy$，或 $y = 3(1-\frac{1}{2}x)$，$dy = -\frac{3}{2}dx$；　$BO: x = 0, dx = 0$.

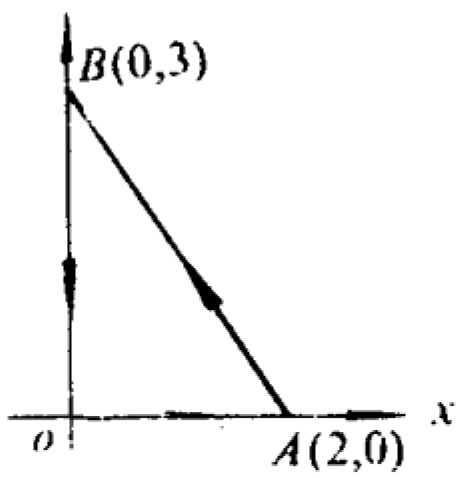
因此 $I = \int_c xdy = \int_{OA} xdy + \int_{AB} xdy + \int_{BO} xdy$

$$= \int_0^0 xdy + \int_0^3 2(1-\frac{1}{3}y)dy + \int_3^0 0\cdot dy = 3$$

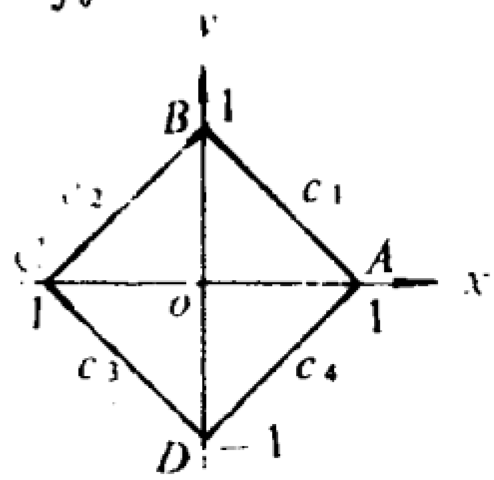
(2) 利用(1) 的方法和结果，有

$$\int_c xdy + ydx = 3 + \int_{OA} ydx + \int_{AB} ydx + \int_{BO} ydx$$

$$= 3 + \int_0^2 0\cdot dx + \int_2^0 3(1-\frac{1}{2}x)dx + \int_0^0 ydx = 0$$



9.1.24 题图



9.1.25 题图

9.1.25　计算 $\int_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 $ABCDA$ 为以点 $A(1,0)$、$B(0,1)$、$C(-1,0)$、$D(0,-1)$ 为顶点的正方形

解　如图所示，正方形的方程为 $|x|+|y|=1$，或

$c_1: x+y=1$　$c_2: -x+y=1$　$c_3: -x-y=1$　$c_4: x-y=1$，

所以，$\int_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_{c_1} dx+dy + \int_{c_2} dx+dy$

$$+ \int_{c_3} dx+dy + \int_{c_4} dx+dy$$

$$= \int_1^0 (1-1)dx + \int_0^{-1}(1+1)dx + \int_{-1}^0 (1-1)dx + \int_0^1 (1+1)dx$$

$$= 2\int_0^{-1} dx + 2\int_0^1 dx = 2\times(-1) + 2\times 1 = 0.$$

9.1.26　求曲线积分 $\int_c (1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$ 的值，其中积分路线 c 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,\pi^2)$ 的一

段弧.

解 抛物线的参数方程为 $x = x, y = x^2$,则

$$\int_c (1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$$

$$= \int_0^\pi [(1 - x^2\cos x) + (\sin x + x\cos x)2x]dx$$

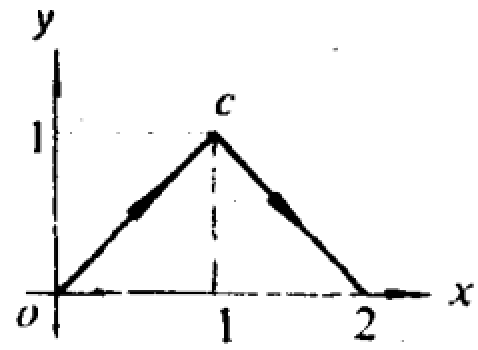
$$= \int_0^\pi [1 + 2x\sin x + x^2\cos x]dx = [x + x^2\sin x]_0^\pi = \pi.$$

9.1.27 计算 $\int_c (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, c 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ 上对应于 x 从 0 到 2 的一段弧.

解 如图所示, $c = c_1 + c_2$,

$c_1: y = x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$,

$c_2: y = 2 - x,\ 1 \leqslant x \leqslant 2$,因此



9.1.27 题图

$$\int_{c_1} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$$

$$= \int_0^1 [(x^2 + x^2) + (x^2 - x^2) \cdot 1]dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$\int_{c_2} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$$

$$= \int_1^2 [x^2 + (2 - x)^2]dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x)^2] \cdot (-1)dx$$

$$= 2\int_1^2 (2 - x)^2 dx = [-\frac{2}{3}(2 - x)^3]_1^2 = \frac{2}{3}.$$

故 $\int_c (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = \frac{4}{3}.$

9.1.28 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y - x)dy$ 沿曲线 $(a) y = x$; $(b) y = x^2$; $(c) y^2 = x$; $(d) y = x^3$ 的值.

解 (a) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y - x)dy = \int_0^1 [x \cdot x + (x - x) \cdot 1]dx$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

(b) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y - x)dy = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + \int_0^1 (x^2 - x) \cdot 2xdx$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 2x^2)dx = [\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

(c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y-x)dy$

$$= \int_0^1 [y^2 \cdot y \cdot 2y + (y - y^2)]dy$$

$$= \int_0^1 [2y^4 - y^2 + y]dy$$

$$= [\frac{2}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2]_0^1 = \frac{17}{30}.$$

(d) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx + (y-x)dy = \int_0^1 [x \cdot x^3 + (x^3 - x) \cdot 3x^2]dx$

$$= \int_0^1 (x^4 + 3x^5 - 3x^3)dx$$

$$= [\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{4}x^4]_0^1 = -\frac{1}{20}.$$

9.1.29 计算 $\int_c (x+y)dx + (x-y)dy$，其中 c 是以逆时针方向为正向的第一象限内的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$，$(a > 0)$.

解 圆的参数方程为：$x = a\cos t, y = a\sin t, (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$，所以

$$\int_c (x+y)dx + (x-y)dy = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t - \sin 2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}[\sin 2t + \cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -a^2.$$

9.1.30 计算第二型曲线积分 $\int_c \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2}$，其中 c 为依逆时针方向的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 c 的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta. \end{cases}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$，所以

$$\int_c \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2}{a}\cos\theta\sin\theta d\theta = 0.$$

9.1.31 求 $\lim\limits_{R \to +\infty} \oint_c \frac{xdy - ydx}{(x^2 + xy + y^2)^2}$，这里 c 是 $x^2 + y^2 = R^2$ 的正向，即沿逆时针的方向.

解 把 c 化为参数方程的形式：$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，于是

$$\oint_c \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(-R^2\sin^2 t - R^2\cos^2 t)}{R^4(\cos^2 t + \sin t\cos t + \sin^2 t)^2} dt$$

$$= -\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}\sin 2t)^2} dt,$$

因为 $\frac{1}{(1 + \frac{1}{2}\sin 2t)^2}$ 在区间$[0,2\pi]$上连续，故

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_c \frac{xdy - ydx}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}\sin 2t)^2} dt\right] = 0.$$

9.1.32　计算 $\int_c (x+y)dx + (x-y)dy$，c 为按椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的边界逆时针方向转一周的路径.

解　椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，所以

$$\int_c (x+y)dx + (x-y)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (a\cos t + b\sin t)\cdot(-a\sin t)dt + \int_0^{2\pi}(a\cos t - b\sin t)b\cos t dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(-a^2\sin t\cos t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2\sin t\cos t)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}[(a^2+b^2)\sin t\cos t - ab(\cos^2 t - \sin^2 t)]dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}[(a^2+b^2)\cdot\frac{1}{2}\sin 2t - ab\cos 2t]dt$$

$$= -\left[(a^2+b^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}\cos 2t) - \frac{1}{2}ab\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 0.$$

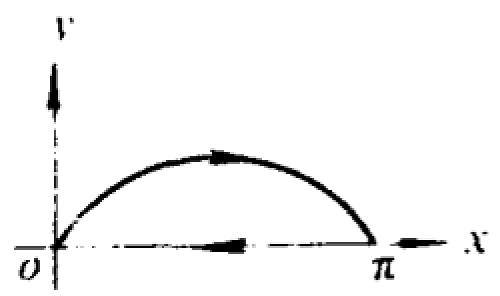
9.1.33　计算第二型曲线积分 $\int_c ydx + \sin xdy$，其中 c 为 $y = \sin x$，$(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴所围的闭曲线，依顺时针方向.

解　如图所示，

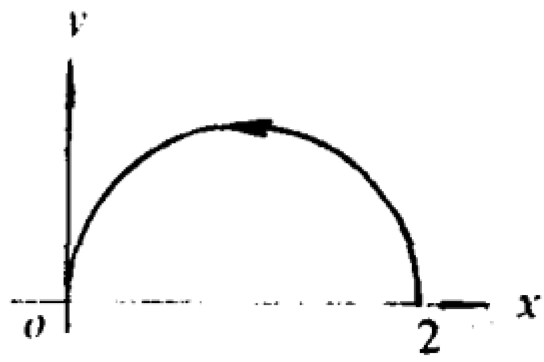
$$\int_c ydx + \sin xdy = \int_0^{\pi}(\sin x + \sin x\cos x)dx + \int_{\pi}^{0} 0dx = 2.$$

9.1.34　计算曲线积分 $\int_c -ydx + xdy$，式中 c 是沿曲线 $y =$

$\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $A(2,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的有向弧段.



9.1.33 题图



9.1.34 题图

解 曲线积分的方向如图,因 $y=\sqrt{2x-x^2}$,故

$dy=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$,所以

$$\int_c -ydx+xdy$$

$$=\int_2^0\left(-\sqrt{2x-x^2}+x\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)dx=-\int_2^0\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

$$=\int_0^2\frac{(x-1)+1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx$$

$$=\left[-\sqrt{2x-x^2}\right]_0^2+\left[\arcsin(x-1)\right]_0^2=\pi.$$

9.1.35 设闭曲线 c 为 $x=\cos t, y=2\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$,求曲线积分 $\oint_c\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 的值.

解 由已知条件得,$dx=-\sin tdt, dy=2\cos tdt$,因此

$$\oint_c\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{2(\cos^2t+\sin^2t)}{\cos^2t+4\sin^2t}dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+4\mathrm{tg}^2t}d(\mathrm{tg}t)$$

$$=4\mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi.$$

9.1.36 计算第二型曲线积分 $\int_c(2a-y)dx+dy$,其中 c 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 沿 t 增加方向的一段.

解 因为 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t).\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,所以

$$\int_c(2a-y)dx+dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \{[2a - a(1-\cos t)]a(1-\cos t) + a\sin t\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a\cos t)dt = \pi a^2.$$

9.1.37 计算曲线积分 $I = \oint_c \frac{-ydx + (x+a)dy}{(x+a)^2 + y^2}$，其中 c 为心形线 $r = a(1-\cos\theta)$ 的正向.

解 由于函数 $P(x,y) = \frac{-y}{(x+a)^2+y^2}$ 与 $Q(x,y) = \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}$ 在点 $(-a,0)$ 处不连续. 则由心形线的参数方程

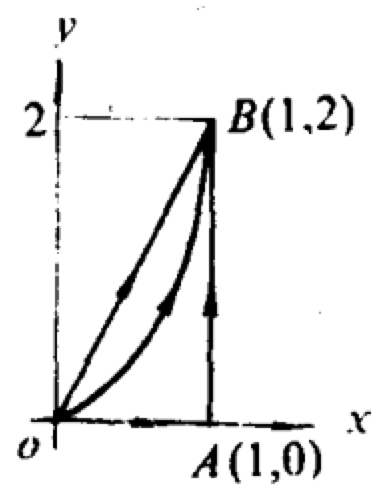
$$\begin{cases} x = a(1-\cos\theta)\cos\theta, \\ y = a(1-\cos\theta)\sin\theta. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

得 $$I = \oint_c \frac{-ydx + (x+a)dy}{(x+a)^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\theta + \sin^2\theta}{1+\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \frac{\cos\theta}{1+\sin^2\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{d(\sin\theta)}{1+\sin^2\theta} = 2\pi.$$

9.1.38 计算第二型曲线积分 $\int_{OB} xdy - ydx$，其中 OB 沿图中三种不同的路线.

解 三种不同的路线如图所示.



9.1.38 题图

(1) OB 为直线：$y = 2x$，$(0 \leqslant x \leqslant 1)$，这时

$$\int_{OB} xdy - ydx = \int_0^1 (x \cdot 2 - 2 \cdot x)dx = 0.$$

(2) OB 为抛物线 $y = 2x^2$，$(0 \leqslant x \leqslant 1)$，这时

$$\int_{OB} xdy - ydx = \int_0^1 (x \cdot 4x - 2x^2)dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

(3) OB 为折线段 OAB，$OA: y = 0 (0 \leqslant x \leqslant 1)$；$AB: x = 1 (0 \leqslant y \leqslant 2)$，在这种情况下，

$$\int_{OB} xdy - ydx = \int_{OA} xdy - ydx + \int_{AB} xdy - ydx$$

$$= 0 + \int_0^2 1 \cdot dy = 2.$$

9.1.39 计算 $\oint_{c^+} \frac{xdy - ydx}{[(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^n}$，$(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$，

其中 c 为椭圆 $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$.

解　由于 $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$，故可引入参数 t，设

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y=\cos t,\\ \gamma x+\delta y=\sin t.\end{cases}\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

又因 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. 故令 $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma=\dfrac{1}{A}$，于是，

$$\begin{cases}x=A(\delta\cos t-\beta\sin t),\\ y=A(\alpha\sin t-\gamma\cos t).\end{cases}$$

代入积分，得

$$\oint_{c^+}=\int_0^{2\pi}A(\delta\cos t-\beta\sin t)dA(\alpha\sin t-\gamma\cos t)$$
$$-A(\alpha\sin t-\gamma\cos t)dA(\delta\cos t-\beta\sin t).$$

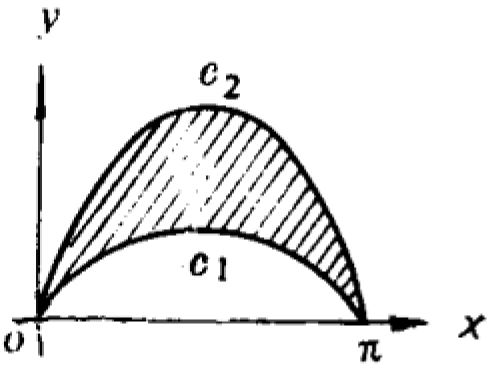
其中一些项的积分为零，故得

$$\oint_{c^+}=\int_0^{2\pi}A^2[\alpha\delta\cos^2t-\beta\gamma\sin^2t+\alpha\delta\sin^2t-\beta\gamma\cos^2t]dt$$
$$=A^2\int_0^{2\pi}(\alpha\delta-\beta\gamma)dt=2\pi A.$$

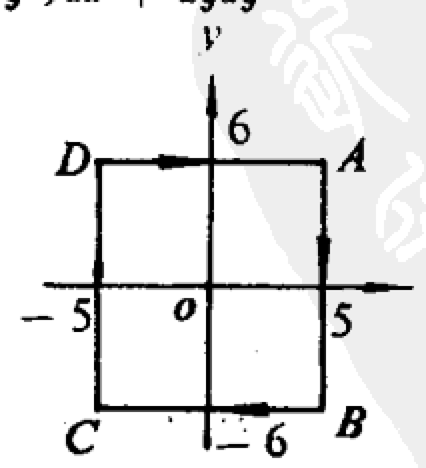
9.1.40　设 c 为由曲线 $y=\sin x$ 及 $y=2\sin x$，$(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 所围成的闭曲线，其正向为逆时针方向，求曲线积分 $\oint_c(1+y^2)dx+xydy$.

解　因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y\neq y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分路线分为两段 $c=c_1+c_2$（如图），c_1 是 $y=\sin x$ 上从 0 到 π 的一段；c_2 是 $y=2\sin x$ 上从 0 到 π 的一段. 故

$$\oint_c(1+y^2)dx+xydy$$
$$=\int_{c_1}(1+y^2)dx+xydy+\int_{c_2}(1+y^2)dx+xydy$$



9.1.40 题图



9.1.41 题图

$$= \int_0^\pi (1 + \sin^2 x + x\sin x\cos x)dx + \int_\pi^0 (1 + 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x)dx$$

$$= \int_0^\pi (-3\sin^2 x - 3x\sin x\cos x)dx$$

$$= [-\frac{3}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + \frac{3}{2}(6\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x)]_0^\pi = -\frac{3}{4}\pi.$$

9.1.41　计算 $I = \oint_c (\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y-4}{(x-3)^2+(y-4)^2})dx - (\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x-3}{(x-3)^2+(y-4)^2})dy$,其中 c 为以点 $A(5,6)$、$B(5,-6)$、$C(-5,-6)$、$D(-5,6)$ 为顶点的矩形(方向为顺时针方向).

解　$I = \oint_{c^-} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} + \oint_{c^-} \frac{(y-4)dx - (x-3)dy}{(x-3)^2+(y-4)^2}$

$$= \oint_{c^+} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \oint_{c^+} \frac{(x-3)dy - (y-4)dx}{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

$$= \oint_{x^2+y^2=1} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \oint_{(x-3)^2+(y-4)^2=1} \frac{(x-3)dy - (y-4)dx}{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

$$= 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

注　不能从题中条件立即得出判断 $\oint_c = 0$. 因为被积函数在其所围的区域内有两个"洞"(即不连续点)(0,0) 与(3,4),但积分理论告诉我们:绕包含这两个洞在内的任一闭曲线,其线积分值均相等. 为此据被积函数的形状选择最方便的积分路线,即两个积分进行计算.

(2) 空间情形

9.1.42　计算 $\int_c (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$,其中 c 为曲线 $x = t$,$y = t^2, z = t^3$ 上从 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的一段弧.

解　$\int_c (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$

$$= \int_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2)dt$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt = [\frac{3}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5]_0^1 = \frac{1}{35}.$$

9.1.43　计算 $\int_c ydx + zdy + xdz$, c 为曲线 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ 上从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

解　$\int_c ydx + zdy + xdz$

$$= \int_0^{2\pi}[a\sin t(-a\sin t) + bta\cos t + ba\cos t]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t + abt\cos t + ab\cos t)dt$$

$$= -a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} + ab[t\sin t + \cos t]_0^{2\pi} + ab[\sin t]_0^{2\pi}$$

$$= -a^2\pi.$$

9.1.44 计算第二型曲线积分 $\int_c xdx + ydy + zdz$，其中 c 为从(1,1,1)到(2,3,4)的直线段.

解 c 的方程为 $x = t + 1,\ y = 2t + 1,\ z = 3t + 1.\quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$，所以

$$\int_c xdx + ydy + zdz$$

$$= \int_0^1[(t+1) + (2t+1)\cdot 2 + (3t+1)\cdot 3]dt$$

$$= \int_0^1(14t + 6)dt = 7 + 6 = 13.$$

9.1.45 计算 $\int_c \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$，其中 c 是从点(1,1,1)到点(4,4,4)的一段直线.

解 c 的参数方程可写为 $x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + t\quad (0 \leqslant t \leqslant 3)$，

所以 $$\int_c \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}} = \int_0^3 \frac{3(1+t)}{\sqrt{3(1+t)^2}}dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^3 dt = 3\sqrt{3}.$$

9.1.46 计算沿空间曲线的第二型曲线积分 $\int_c xyzdz$，其中 c 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $y = z$ 相交的圆，其方向沿曲线依次经过1、2、7、8卦限.

解 把圆周 c 分为两段弧，其中

$$c_1:\begin{cases} x = \sqrt{1 - 2z^2}, \\ y = z, \\ z = z \end{cases}\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$c_2:\begin{cases}x=-\sqrt{1-2z^2},\\ y=z,\\ z=z\end{cases}\quad\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant z\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

因而 $\int_c xyzdz=\int_{c_1}xyzdz+\int_{c_2}xyzdz$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z^2\sqrt{1-2z^2}dz+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-z^2\sqrt{1-2z^2}dz$$

$$=4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z^2\sqrt{1-2z^2}dz=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z^2\sqrt{\frac{1}{2}-z^2}dz$$

查积分表得

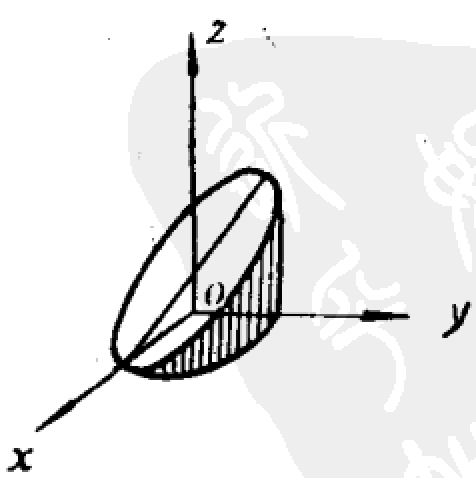
$$\int_c xyzdz=4\sqrt{2}\left[\frac{z}{8}(2z^2-\frac{1}{2})\sqrt{\frac{1}{2}-z^2}+\frac{\frac{1}{4}}{8}\arcsin\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

注　该题也可用 c 的参数方程 $x=\cos\theta,y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 进行计算.

9.1.47　计算 $\int_c(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$,其中 c 为椭圆 $x^2+y^2=1,x+z=1$,若从 x 轴正向看去 c 的方向是顺时针的.

解　空间椭圆曲线 c 的图形如图所示,其参数方程为: $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=1-\cos\theta$, 其中 θ 为椭圆 c 上点 (x,y,z) 在 xoy 坐标面上的投影 $P(x,y,0)$ 的矢径 **OP** 与 x 轴的夹角,且从 2π 变到 0,故



9.1.47 题图

$$\int_c(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\int_{2\pi}^{0}[(\sin\theta-1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$

$$+(1-\cos\theta-\cos\theta)\cos\theta$$

$$+ (\cos\theta - \sin\theta)\sin\theta]d\theta$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (\sin\theta + \cos\theta - 2)d\theta = [-2\theta]_{2\pi}^{0} = 4\pi.$$

9.1.48 计算 $\int_c y^2dx + z^2dy + x^2dz$，式中 c 为维安尼曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ $(z \geqslant 0, a > 0)$，若从 x 轴的正方向($x > a$)看去，此曲线是沿逆时针方向进行的.

解 柱面方程 $x^2 + y^2 = ax$，可改写为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$，若令 $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cos t, y = \frac{a}{2}\sin t, (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，则

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$

$$= \sqrt{a^2 - [\frac{a^2(1 + \cos t)^2}{4} + \frac{a^2\sin^2 t}{4}]} = a\sin\frac{t}{2}.$$

从而，曲线的参数方程为：

$$x = \frac{a(1 + \cos t)}{2},\ y = \frac{a\sin t}{2}, z = a\sin\frac{t}{2}, (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

故 $\int_c y^2dx + z^2dy + x^2dx$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^3\sin^3 t}{8} + \frac{a^3\sin^2\frac{t}{2}\cos t}{2} + \frac{a^3\cos^3\frac{t}{2}}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{8}(1 - \cos t)d(\cos t) + \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2}\cos t dt$$

$$+ a^3\int_0^{2\pi}(1 - \sin^2\frac{t}{2})d(\sin\frac{t}{2})$$

$$= \frac{a^3}{8}[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t]_0^{2\pi} + \frac{a^3}{4}[\sin t - (\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t)]_0^{2\pi}$$

$$+ a^3[\sin\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}a^3.$$

9.1.49 计算 $\oint_c (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$，$c$ 是曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2ax$ $(0 < a < R, z > 0)$，且 c 按如此方向进行，使它在球的外表面上所围成的小区域 D 在其左方.

解 若空间曲线方程是由两个曲面方程联立的形式给出时，一般先将其化为参数方程，再进行计算.

因此，由 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 及 $x^2+y^2=2ax$ 消去 y，得 $z=\sqrt{2(R-a)x}$，用柱面坐标中 θ 作参数，因 $x^2+y^2=2ax$，柱面坐标方程为 $r=2a\cos\theta$，故曲线 c 的参数方程为

$$x=r\cos\theta=2a\cos^2\theta,$$
$$y=r\sin\theta=2a\cos\theta\sin\theta=a\sin2\theta,$$
$$z=\sqrt{2(R-a)2a\cos^2\theta}=2\sqrt{a(R-a)}\cos\theta$$

于是 $dx=-4a\cos\theta\sin\theta d\theta, dy=2a\cos2\theta d\theta, dz=-2\sqrt{a(R-a)}\sin\theta d\theta$，

所以 $I=\oint_c(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[a^2\sin^2 2\theta+4(R-a)a\cos^2\theta](-4a\cos\theta\sin\theta)d\theta$$
$$+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[4a(R-a)\cos^2\theta+4a^2\cos^4\theta]\cdot 2a\cos2\theta d\theta$$
$$+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[4a^2\cos^4\theta+a^2\sin^2 2\theta](-2\sqrt{a(R-a)})\sin\theta d\theta.$$

上式第一、三两个积分的被积函数为奇函数，故第一、三两个积分值为0，第二个积分的被积函数为偶函数. 因此

$$I=16a^2\int_0^{\pi/2}[(R-a)\cos^2\theta+a\cos^4\theta](2\cos^2\theta-1)d\theta$$
$$=16a^2\int_0^{\pi/2}[-(R-a)\cos^2\theta+(2R-3a)\cos^4\theta+2a\cos^6\theta]d\theta$$
$$=16a^2[-(R-a)\cdot\frac{\pi}{4}+(2R-3a)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$+2a\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}]$$
$$=16a^2\pi[-\frac{R}{4}+\frac{a}{4}+\frac{2}{8}R-\frac{9}{16}a+\frac{15}{48}a]=2a^2R\pi.$$

9.1.50　计算积分 $\int_c(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$，其中 c 是沿螺线 $x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ 从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 的一段弧 $\overset{\frown}{AmB}$.

解法 1　直接计算

$$\int_c(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(a^2\cos^2\varphi - \frac{ah}{2\pi}\varphi\sin\varphi\right)(-a\sin\varphi) + \left(a^2\sin^2\varphi - \frac{ah}{2\pi}\varphi\cos\varphi\right)(a\cos\varphi) + \left(\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi^2 - a^2\sin\varphi\cos\varphi\right) \cdot \frac{h}{2\pi} \right] d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[a^3\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi) - \frac{a^2h}{2\pi}\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \frac{h^3}{8\pi^3}\varphi^2 \right] d\varphi$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi - \frac{a^2h}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(\cos2\varphi + \frac{1}{2}\sin2\varphi\right)d\varphi + \frac{h^3}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

下面分别求 I_1、I_2、I_3.

$$I_1 = a^3 \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi = 0;$$

$$I_2 = -\frac{a^2h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(\cos2\varphi + \frac{1}{2}\sin2\varphi\right)d\varphi$$

$$= -\frac{a^2h}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\varphi\cos2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi\sin2\varphi d\varphi\right]$$

$$= -\frac{a^2h}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi d\sin2\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\varphi d\cos2\varphi\right]$$

$$= -\frac{a^2h}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\varphi\sin2\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin2\varphi d\varphi\right) - \frac{1}{4}\left(\varphi\cos2\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos2\varphi d\varphi\right)\right] = 0;$$

$$I_3 = \frac{h^3}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{h^3}{8\pi^3}\cdot\frac{1}{3}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{h^3}{3}.$$

故　$\int_c (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \frac{h^3}{3}.$

解法 2　以直线段 BA 接于曲线$\overset{\frown}{AmB}$,形成封闭曲线,并利用斯托克斯公式计算. 因直线段AB 所在的直线的参数方程是 $x = a$, $y = 0$, $z = t$,故

$$\int_{\overset{\frown}{AmB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

$$= \oint_{\widehat{AmBA}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

$$- \int_{\overline{BA}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial(z^2 - xy)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2 - xz)}{\partial z}\right]dxdz$$

$$+ \left[\frac{\partial(x^2 - yz)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2 - xy)}{\partial x}\right]dzdx$$

$$+ \left[\frac{\partial(y^2 - xz)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 - yz)}{\partial y}\right]dxdy - \int_h^0 t^2 dt$$

$$= 0 - \frac{1}{3}t^3\Big|_h^0 = \frac{h^3}{3}.$$

注　其中 Ω 是 $\widehat{AmB}$ 和 $\overline{BA}$ 所围成的光滑曲面.

9.1.51　计算沿空间曲线的第二型曲线积分 $\int_c (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$，其中 c 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界曲线，其方向按曲线依次经过 xoy 平面部分，yoz 平面部分和 zox 平面部分.

解　把 c 分为三部分(如图)

$$c_1:\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = 0, \\ z = \sin\theta. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}) \qquad c_2:\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \\ z = 0. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$$

$$c_3:\begin{cases} x = 0, \\ y = \cos\theta, \\ z = \sin\theta. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$$

因而 $\int_{c_1} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^3\theta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cdot 0 + (\cos^2\theta - 0)\cdot\cos\theta]d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^3\theta + \cos^3\theta]d\theta = -\frac{4}{3};$$

$$\int_{c_2} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\sin^3\theta - \cos^2\theta\cdot\cos\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)]d\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^3\theta+\cos^3\theta]d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta d\theta=-\frac{4}{3}$$

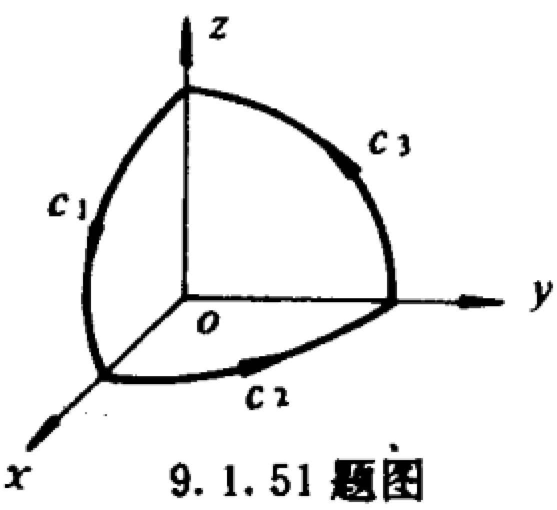
$$\int_{c_3}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\cdot0+(\sin^2\theta-0)\cdot(-\sin\theta)$$
$$+(-\cos^2\theta)\cos\theta]d\theta$$

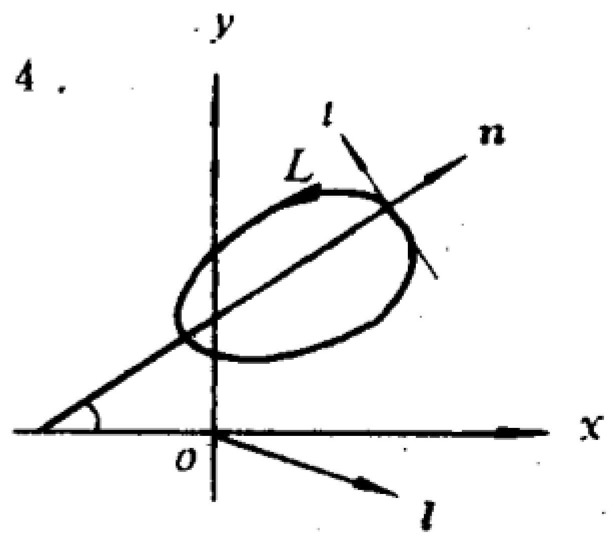
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta+\cos^3\theta)d\theta=-\frac{4}{3}.$$

故$\int_c(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

$$=\int_{c_1}+\int_{c_2}+\int_{c_3}=-4.$$



9.1.51 题图



9.1.52 题图

9.1.52 证明:若 L 为平面上封闭曲线,l 为任意方向向量,则 $\oint_L\cos(l,n)ds=0$,其中 n 为曲线 L 的外法线方向.

证 设 $l=(a,b)$,$n=(\cos(n,x),\cos(n,y))$,先证下面等式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\oint_L[Q\cos(n,x)-P\cos(n,y)]ds. \qquad (*)$$

由上图可知,$\cos(t,x)=-\sin(n,x)=-\cos(n,y)$,

$$\cos(t,y)=\sin(n,y)=\cos(n,x),$$

从而 $\oint_L Pdx+Qdy=\oint_L[P\cos(t,x)+Q\cos(t,y)]ds$

$$=\oint_L[Q\cos(n,x)-P\cos(n,y)]ds.$$

故等式(*)成立,应用(*)式可得

$$\oint_L \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})ds = \oint_L \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{l}\|\cdot\|\boldsymbol{n}\|}ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\oint_L [a\cos(\boldsymbol{n},x)+b\cos(\boldsymbol{n},y)]ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\oint_L -bdx+ady = 0.$$

3. 格林公式与全微分求积

(1) 格林公式

9.1.53　证明：若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在曲线段 c 上连续，L 为 c 的长度. $M=\max\limits_{(x,y)\in c}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$，则

$$\left|\int_c Pdx+Qdy\right| \leqslant L\cdot M,$$

再利用上面的不等式估计积分 $I_R=\oint_{c_R}\frac{(y-1)dx+(x+1)dy}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2}$，其中 c_R 为圆周 $(x+1)^2+(y-1)^2=R^2$ 的正向，并求 $\lim\limits_{R\to+\infty}|I_R|$.

证　因为 $\int_c Pdx+Qdy=\int_c(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 c 上点 (x,y) 处的切线的方向余弦，且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，由曲线积分性质有

$$\left|\int_c Pdx+Qdy\right| \leqslant \int_c |P\cos\alpha+Q\cos\beta|ds$$

又　$(P\cos\alpha+Q\cos\beta)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\cos^2\beta+2PQ\cos\alpha\cos\beta$，

$0\leqslant(P\cos\beta-Q\cos\alpha)^2=P^2\cos^2\beta+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\cos\alpha\cos\beta$，

因此有

$$(P\cos\alpha+Q\cos\beta)^2\leqslant P^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+Q^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) = P^2+Q^2$$

从而 $|P\cos\alpha+Q\cos\beta|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M$.

故 $\left|\int_c Pdx+Qdy\right|\leqslant M\int_c ds=L\cdot M$

又在 I_R 中，$P^2+Q^2=\frac{(x+1)^2+(y-1)^2}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^4}=\frac{R^2}{R^8}=\frac{1}{R^6}$，

即　$M=\frac{1}{R^3}$，

于是 $|I_R| = \left| \oint_{c_R} \frac{(y-1)dx + (x+1)dy}{(x^2+y^2+2x-2y+2)^2} \right| \leqslant \frac{1}{R^3} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi}{R^2}$,

故 $\lim\limits_{R\to+\infty} |I_R| \leqslant \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{2\pi}{R^2} = 0$，所以 $\lim\limits_{R\to+\infty} |I_R| = 0$.

9.1.54 下面的论证是否正确，为什么？

设 $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$，封闭曲线

$C:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

因为
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

设 D 是曲线 C 所围的闭区域，由格林公式有
$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

答 上面结论是错误的. 因为，格林公式成立的条件是函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在区域 D 上连续，并且有连续的一阶偏导数. 在本题的论证中，区域 D 是以原点为中心的椭圆，$P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在原点无意义，从而不满足格林公式成立的条件.

9.1.55 求曲线积分
$$\int_c \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$
的值，其中积分路线 c 为圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 沿逆时针的方向.

解 因为 $P = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}$，$Q = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$,
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x \neq 0)$$

因此，由格林公式有
$$\oint_c \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy = \iint_D 0dxdy = 0,$$
其中 D 是圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 所围成的区域.

9.1.56 计算 $I = \oint_c \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$，其中 C 为任一不包含原点的闭区域的边界线.

解 因为 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，在上述区域 D 上连续且相等，于是

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right]dxdy = 0.$$

由格林公式得 $I = 0$.

注　由此题可知，在格林公式中，若令 $P = -y, Q = x$，则得到一个计算平面面积 D 的公式：

$$D = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx.$$

9.1.57　求积分值 $I = \oint_C [x\cos(n,x) + y\cos(n,y)]ds$，其中 c 为包围有界区域的闭曲线，n 为 c 的外法线方向.

解　利用 9.1.53 题中的等式(*)

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_C [Q\cos(n,x) + P\cos(n,y)]ds,$$

可知

$$I = \oint_c -ydx + xdy = 2\cdot\frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx = 2S,$$

其中 S 为 c 所围的面积.

9.1.58　应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_{x^2+y^2=r^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy).$$

解　因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^{-(x^2-y^2)}[(-2x\sin 2xy + 2y\cos 2xy)$

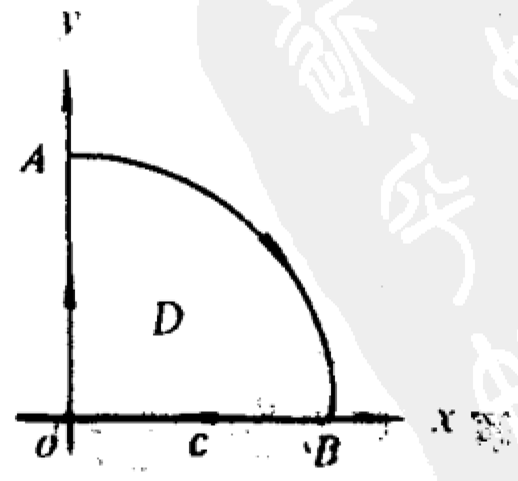
$$-(2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy)] = 0,$$

所以有 $\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx + \sin 2xydy) = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} 0dxdy = 0.$

9.1.59　计算 $\int_c xdy$，其中 c 是半径为 r 的圆在第一象限内的部分与两坐标轴围成的闭曲线.

解　对半径为 r 的四分之一圆域 D(如图)，应用格林公式有

$$-\iint_D dxdy = \oint_{-c} xdy = \int_{OA} xdy + \int_{AB} xdy + \int_{BO} xdy,$$



9.1.59 题图

由于 $\int_{OA} xdy = 0$, $\int_{BO} xdy = 0$.

所以 $\int_c xdy = -\iint_D dxdy = -\frac{1}{4}\pi r^2$.

9.1.60 应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_c e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy],$$

其中 c 为区域 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 的正向的封闭曲线.

解 因为$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^x(\sin y-y)-e^x\sin y=-ye^x$,所以有

$$\oint_c e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\sin x}} ye^x dxdy$$

$$=-\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy=-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\sin^2 xdx=-\frac{1}{4}\left(\int_0^\pi e^x dx-\int_0^\pi e^x\cos 2xdx\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left\{\left[e^x\right]_0^\pi-\left[\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}e^x\right]_0^\pi\right\}=-\frac{1}{5}(e^\pi-1).$$

9.1.61 应用格林公式计算曲线积分 $\oint_c (x+y)dx-(x-y)dy$,式中 c 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的正向.

解法 1 因为 $P=x+y$, $Q=-(x-y)$. 所以有

$$\oint_c (x+y)dx-(x-y)dy=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}(-1-1)dxdy=-2\pi ab.$$

解法 2 如果直接令 $x=a\cos t, y=b\sin t$,则

$$\oint_c (x+y)dx-(x-y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t+b\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-b\sin t)(b\cos t)]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}[(b^2-a^2)\cos t\sin t-ab]dt=-2\pi ab.$$

9.1.62 应用格林公式计算曲线积分 $\oint_c xy^2dy-x^2ydx$,其中 c 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的正向

解法 1 因为 $P=-x^2y$, $Q=xy^2$,故有

$$\oint_c xy^2dy - x^2ydx = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

解法 2 如果直接令 $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi$. 则

$$\oint_c xy^2dy - x^2ydx = a^4\int_0^{2\pi}(\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi)d\varphi$$
$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}.$$

注 若本题的其它条件不变，仅将被积表达式改为 $xy^2dx - x^2ydy$，则所得到的结果是 0.

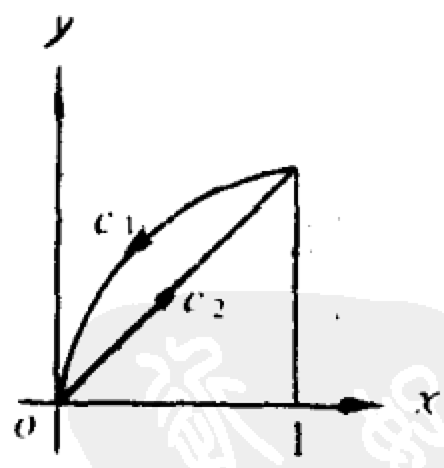
9.1.63 应用格林公式计算 $\oint_c (x+y)dx - (x-y)dy$，式中 c 为依逆时针方向绕椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 一周的路线.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$，所以

$$\oint_c (x + y)dx - (x - y)dy = \iint\limits_D (-2)dxdy$$
$$= -2\iint\limits_D dxdy = -2\pi ab.$$

其中 D 为 c 所围成的区域.

9.1.64 计算 $\oint_c x^2ydx + y^3dy$，其中 c 是沿着由 $y^3 = x^2$，和 $y = x$ 所构成的封闭曲线的正向.



9.1.64 题图

解 利用格林公式，有

$P(x,y) = x^2y$，$Q(x,y) = y^3$.

在封闭曲线 c 所围的区域 D 上具有连续一阶偏导数

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

故由格林公式有

$$\oint_c x^2ydx + y^3dy = \iint\limits_D (0 - x^2)dxdy = \int_0^1 dx\int_x^{x^{\frac{2}{3}}}(-x^2)dy = -\frac{1}{44}.$$

9.1.65 利用格林公式把曲线积分

$$I=\oint_c \sqrt{x^2+y^2}dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$$

变为曲线c所围区域D上的二重积分，式中的c依逆时针方向，且D不含原点.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}]=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以 $$\oint_c \sqrt{x^2+y^2}dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$$

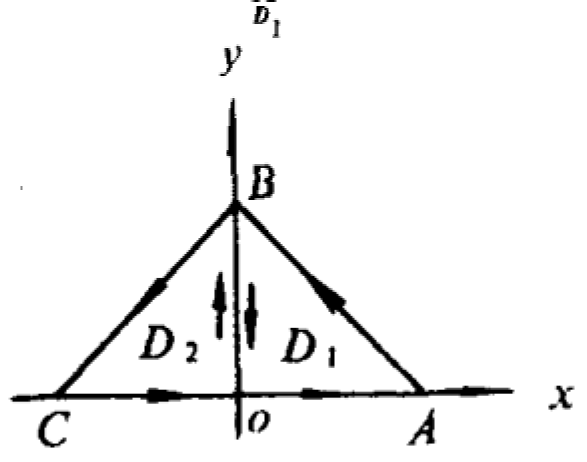
$$=\iint_D(y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dxdy=\iint_D y^2dxdy.$$

9.1.66 求曲线积分 $\oint_C |y|dx+|x|dy$，其中c为以$A(1,0)$、$B(0,1)$及$C(-1,0)$为顶的三角形的正向边界曲线.

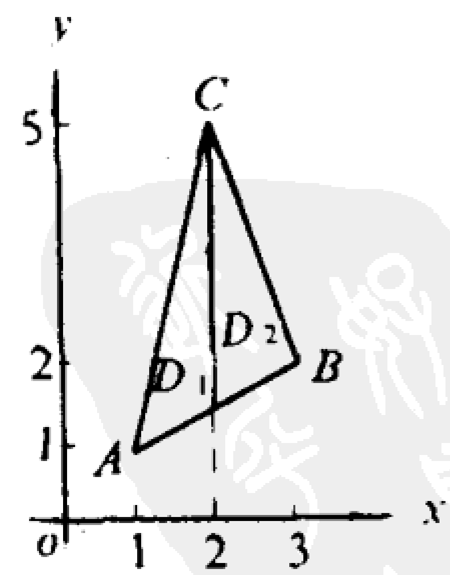
解 设$\triangle ABO$的边界正向曲线记为c_1，所围的区域记为D_1；$\triangle OBC$的边界正向曲线记为c_2，所围的区域记为D_2，由曲线积分的性质及格林公式有

$$\oint_c |y|dx+|x|dy=\oint_{c_1} ydx+xdy+\oint_{c_2} ydx-xdy$$

$$=\iint_{D_1}(1-1)dxdy+\iint_{D_2}(-1-1)dxdy=-1.$$



9.1.66 题图



9.1.67 题图

9.1.67 应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_c (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy,$$

其中c是以$A(1,1)$,$B(3,2)$,$C(2,5)$为顶点的正向三角形的边界.

解法 1　如图所示．三角形三条边 AB、BC、CA 的方程分别为：

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\quad y=-3x+11,\quad y=4x-3.$$

因为 $P=(x+y)^2,\quad Q=-(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2(x+y)=-4x-2y.$$

由顶点 C 作垂直于 ox 轴的直线，该直线把三角形区域 D 分为两部分 D_1 和 D_2，于是

$$\oint_c (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy=\iint_D(-4x-2y)dxdy$$

$$=\iint_{D_1}(-4x-2y)dxdy+\iint_{D_2}(-4x-2y)dxdy$$

$$=\int_1^2dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)dy+\int_2^3dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)dy$$

$$=\int_1^2(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4})dx+\int_2^3(\frac{21}{4}x^2+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4})dx$$

$$=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\frac{2}{3}.$$

解法 2　如果直接计算，有

$$\oint_c (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$$

$$=\int_1^3\Big[(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4})\Big]dx$$

$$+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)(x^2+9x^2-66x+121)]dx$$

$$+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]dx$$

$$=\int_1^3\Big(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\Big)dx+\int_3^2(34x^2-242x+484)dx$$

$$+\int_2^1(-43x^2+66x-27)dx$$

$$=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-46\frac{2}{3}.$$

9.1.68　已知 c 是平面上任意一条简单闭曲线，问常数 a 等于何值时，曲线积分 $\oint_c \frac{xdx-aydy}{x^2+y^2}=0$. 并说明理由．

解 因为 $P=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$Q=\frac{-ay}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2)^2}$.

(1) 当 c 不包含原点时，$x^2+y^2\neq 0$，$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续，当 $a=-1$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，依格林公式有

$$\int_c \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0.$$

(2) 当 c 包含原点时，以原点 O 为中心，以充分小的 δ 为半径，作圆周曲线 l，则 $x=\delta\cos\theta, y=\delta\sin\theta$，使 l 全部包含在 c 内，c 为逆时针方向，则取 l 为顺时针方向. 设 D 为 c 与 l 所围的区域，在 D 内，当 $a=-1$ 时，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由格林公式有

$$\int_{c+l}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

设 $-l$ 为 l 的反向回路，则有

$$\oint_c\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\oint_{-l}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{\delta\cos\theta(\delta\sin\theta)+\delta\sin\theta(\delta\cos\theta)}{\delta^2}d\theta=0.$$

综合(1)、(2)可知，当 $a=-1$ 时，不管 C 是否包含原点在内，曲线积分 $\oint_c\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2}=0$.

9.1.69 应用格林公式计算曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy,$$

其中 m 为常数，$\widehat{AB}$ 为由 $(a,0)$ 到 $(0,0)$ 经过圆 $x^2+y^2=ax$ 上半部的路线(其中 a 为正数).

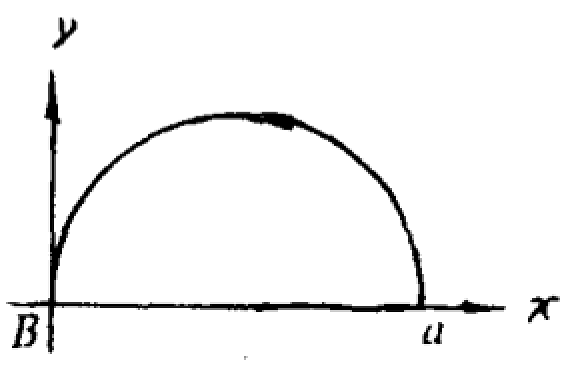
解 因为在 BA：$y=0\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 上，

$$\int_{BA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0,$$

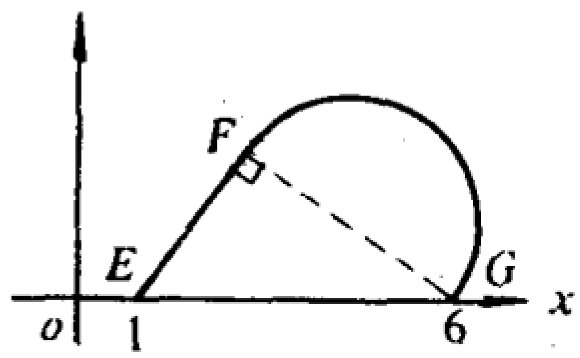
所以 $\int_{\widehat{AB}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$

$$= \int_{ABA} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$$

$$= m \iint_D dxdy = m \frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{8} m\pi a^2.$$



9.1.69 题图



9.1.70 题图

9.1.70　计算 $\int_c (y^3 e^x - my)dx + (3y^2 e^x - m)dy$，其中曲线 c 是从 E 到 F 再到 G，$\overset{\frown}{FG}$ 是以 FG 为直径的半圆弧，半径为 2.

解　由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 e^x - m$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 e^x$，$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = m$.

为了利用格林公式，加上一段直线段 GE，使积分路线 c 闭合，于是

$$\int_c (y^3 e^x - my)dx + (3y^2 e^x - m)dy = \int_c + \int_{GE} - \int_{GE}$$

$$= -\iint_D mdxdy - 0 = -m \iint_D d\sigma = -mS = -(b + 2\pi)m.$$

注　本题中积分路线的正向是逆时针方向，其中 D 是闭曲线 c 所围的区域，S 是区域 D 的面积，格林公式中二重积分前面的负号，表示积分是沿负向进行的.

9.1.71　设 $\overset{\frown}{AB}$ 为连接点 $A(1,2)$ 与 $B(2,3)$ 的一段曲线，又设 $\overset{\frown}{AB}$ 与直线段 AB 所围成的图形的面积等于 k，试计算曲线积分

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x^2}dx + (x - \frac{1}{x})dy.$$

解　因为直线段的方程为：$y = x + 1$，$(1 \leqslant x \leqslant 2)$，设 $\overset{\frown}{AB}$ 与 AB 所围成的区域为 D，如果 $\overset{\frown}{AB}$ 取逆时针方向，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{y}{x^2}dx + \left(x - \frac{1}{x}\right)dy$$

$$= \oint_{\widehat{AB}+BA} \frac{y}{x^2}dx + \left(x - \frac{1}{x}\right)dy - \int_{BA} \frac{y}{x^2}dx + \left(x - \frac{1}{x}\right)dy$$

$$= \iint_D \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dxdy - \int_2^1 \left[\frac{x+1}{x^2} + \left(x - \frac{1}{x}\right)\right]dx$$

$$= \iint_D dxdy - \int_2^1 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx = k + 2.$$

若$\widehat{AB}$取顺时针方向，则

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{x^2}dx + (x - \frac{1}{x})dy$$

$$= \oint_{\widehat{AB}+BA} \frac{y}{x^2}dx + (x - \frac{1}{x})dy - \int_{BA} \frac{y}{x^2}dx + (x - \frac{1}{x})dy$$

$$= - k + 2.$$

9.1.72 设G是平面上光滑闭曲线c所围成的区域，函数$u = u(x, y)$在$G + c$上有直到二阶的连续偏导数，证明：

$$\iint_G \left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\right]dxdy = - \iint_G u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy + \oint_c u\frac{\partial u}{\partial n}ds.$$

证 因为

$$\oint_c u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint_c [\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]dxdy$$

$$= \oint_c (-u\frac{\partial u}{\partial y})dx + u\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

用格林公式，这里$P = -u\frac{\partial u}{\partial y}, Q = u\frac{\partial u}{\partial x}$，

$$\oint_c u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_G [\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial u}{\partial y})]dxdy$$

$$= \iint_G [u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + u(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy$$

$$= \iint_G u(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy + \iint_G [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dxdy,$$

移项，即得要证明的结论.

9.1.73 设函数$u(x,y)$在光滑闭曲线c所围的区域D上具有二阶连续偏导数，证明：

$$\iint_D (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy = \oint_c \frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中$\frac{\partial u}{\partial n}$是$u(x,y)$沿$c$外法线方向$n$的导数.

证　因为$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)$，利用9.1.52题中的(＊)式知

$$\oint_c \frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_c\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)\right]ds$$
$$=\oint_c -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

9.1.74　设D是由分段光滑曲线c围成的平面区域，函数$u(x,y)$、$v(x,y)$在D上有连续的一阶偏微分，证明：

$$\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy=\oint_c uvdy-\iint_D\frac{\partial u}{\partial x}vdxdy$$

其中c的方向这样选取，使沿此方向前进时，区域D始终保持在左侧.

证　由假设知，函数u、v在D上可微，从而由格林公式得

$$\oint_c uvdy=\iint_D\frac{\partial(u,v)}{\partial x}dxdy=\iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy+\iint_D\frac{\partial u}{\partial x}vdxdy.$$

移项，即得所要证的结果.

9.1.75　设$P(x,y)$、$Q(x,y)$及$\eta(x,y)$在平面区域D上有一阶连续偏导数，c是D的边界曲线，证明：

$$\iint_D(P\frac{\partial\eta}{\partial x}+Q\frac{\partial\eta}{\partial y})dxdy=\oint_{c^+}P\eta dy-Q\eta dx-\iint_D\eta(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy.$$

证　利用格林公式，沿闭曲线c的积分为

$$\oint_{c^+}P\eta dy-Q\eta dx=\iint_D\left[\frac{\partial(P\eta)}{\partial x}-\frac{\partial(-Q\eta)}{\partial y}\right]dxdy$$
$$=\iint_D(\eta\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial\eta}{\partial x}+\eta\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial\eta}{\partial y}]dxdy$$
$$=\iint_D(P\frac{\partial\eta}{\partial x}+Q\frac{\partial\eta}{\partial y})dxdy+\iint_D\eta(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy.$$

移项，即得所要证的公式

注　该公式类似于定积分的分部积分公式.

9.1.76　求曲线积分$\oint_c\frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$的值，其中$c$为任一不通过原点的简单光滑逆时针方向的封闭曲线.

解　$P=\frac{-y}{x^2+4y^2},\ Q=\frac{x}{x^2+4y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}$.

(1) 当C不包含原点时，$x^2+4y^2\neq 0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$有一阶连续偏导数，依格林公式，得

$$\oint_c \frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}=0.$$

(2) 当c包含原点在内时，$x^2+4y^2=0$，$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$不连续，故不能用格林公式. 此时，以$O$为中心作曲线$l: x=r\cos\theta, y=\frac{1}{2}r\sin\theta$，使$l$全部包含在$c$内，

$$\oint_c \frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}=\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+4y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\theta(\frac{1}{2}\sin\theta dr+\frac{1}{2}r\cos\theta d\theta)-\frac{r}{2}\sin\theta(\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)}{r^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{r^2}d\theta=\pi.$$

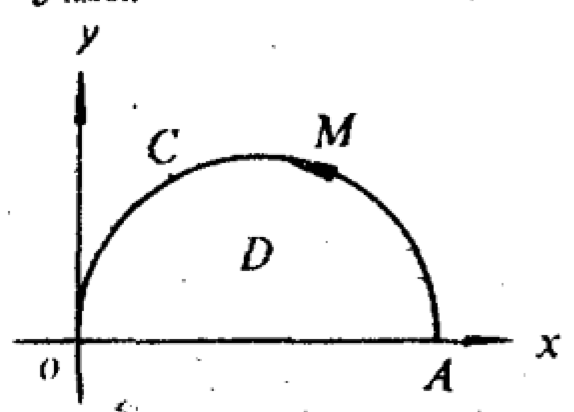
9.1.77　计算$I=\int_c (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中$c$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax, y\geqslant 0$.

解　如图，因为

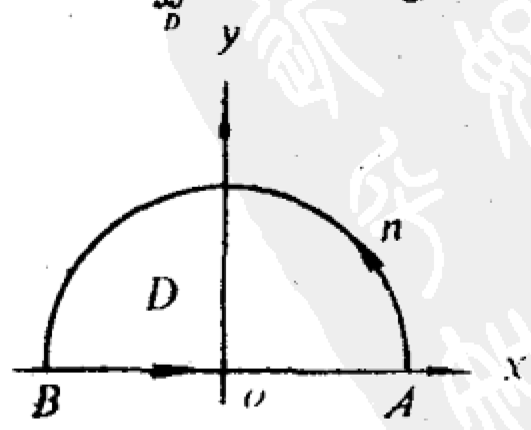
$$\int_c (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$+\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\oint_{\widehat{AMOA}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint_D mdxdy=\frac{m}{8}\pi a^2,$$



9.1.77 题图



9.1.78 题图

又　$\int_{OA}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = 0$，所以

$$I = \int_c (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \frac{m}{8}\pi a^2.$$

9.1.78　计算 $\int_c (e^x\sin 2y - y)dx + (2e^x\cos 2y - 100)dy$，其中 c 为单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 从点 $A(1,0)$ 至点 $B(-1,0)$ 的上半圆周.

解　如图，连接 B、A 得闭曲线 $\widehat{AnBA}$，由格林公式得

$$\oint_{\widehat{AnBA}} (e^x\sin 2y - y)dx + (2e^x\cos 2y - 100)dy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (2e^x\cos 2y - 2e^x\cos 2y + 1)dxdy$$
$$= \iint_D dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

又　$\int_{BA}(e^x\sin 2y - y)dx + (2e^x\cos 2y - 100)dy = 0.$

故　$\int_c (e^x\sin 2y - y)dx + (2e^x\cos 2y - 100)dy$

$$= \int_{\widehat{AnBA}} - \int_{BA} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

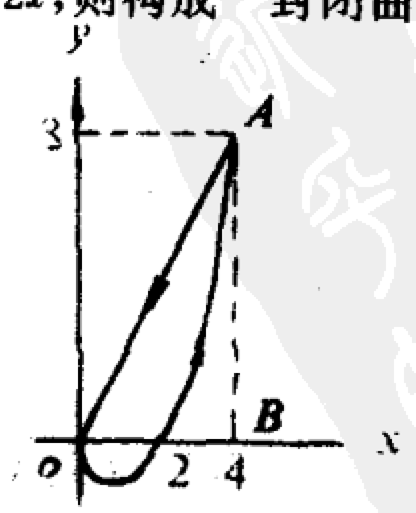
注　该题如将曲线积分化为定积分计算或利用 c 的参数方程：$x = \cos t, y = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 化为定积分计算都是比较困难的.

9.1.79　求曲线积分 $\int_c (3xy + \sin x)dx + (x^2 - ye^y)dy$ 的值，其中 C 是曲线 $y = x^2 - 2x$ 上以 $O(0,0)$ 为始点、$A(4,8)$ 为终点的曲线段.

解　由于积分曲线 c 是抛物线 $y = x^2 - 2x$ 上的一段弧，不是封闭曲线. 因此，不能直接用格林公式计算.

解法1　若加上直线段 OA，其方程为 $y = 2x$，则构成一封闭曲线正向回路(如图)，于是

$$\iint_c (3xy + \sin x)dx + (x^2 - ye^y)dy$$
$$= \oint_{c+AO} (3xy + \sin x)dx + (x^2 - ye^y)dy$$
$$- \int_{AO} (3xy + \sin x)dx + (x^2 - ye^y)dy.$$



9.1.79 题图

上式右端第一个积分可应用格林公式，

且用 D 表示闭曲线 $C+AO$ 所围成的区域. 又$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\frac{\partial P}{\partial y}=3x$,故有

$$\int_c(3xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$$

$$=\iint_D(-x)dxdy-\int_4^0[3x\cdot 2x+\sin x+(x^2-2xe^{2x})2]dx$$

$$=-\int_0^4dx\int_{x^2-2x}^{2x}xdy+\int_0^4(8x^2+\sin x-4xe^{2x})dx$$

$$=\int_0^4[(-x)(2x-x^2+2x)+(8x^2+\sin x-4xe^{2x})]dx$$

$$=\int_0^4(x^3+4x^2+\sin x-4xe^{2x})dx=\frac{448}{3}-\cos 4-7e^8.$$

解法 2 将曲线积分写成

$$\int_c(3xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$$

$$=\int_c(2xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy+\int_c xydx.$$

上式右端第一个积分中因$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x+\frac{\partial P}{\partial y}$,故曲线积分与路线无关. 因此,可选择折线 OBA 为积分路线. 线段OB 的方程为 $y=0,dy=0$;线段BA 的方程为 $x=4,dx=0$. 于是有

$$\int_c(3xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$$

$$=\int_{OB}(2xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$$

$$+\int_{BA}(2xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy+\int_c xydx$$

$$=\int_0^4\sin xdx+\int_0^8(16-ye^y)dy+\int_0^4x(x^2-2x)dx$$

$$=\frac{448}{3}-\cos 4-7e^8.$$

9.1.80 计算$\int_c(f(y)e^x-3y)dx+(f'(y)e^x-3)dy$的值,其中 c 为连接 $A(2,3)$、$B(4,1)$ 的任意路线$\overset{\frown}{AmB}$,且它与直线段 AB 围成的面积为 5.

解法 1 $\int_c(f(y)e^x-3y)dx+(f'(y)e^x-3)dy$

$$=\oint_{\overset{\frown}{AmBA}}(f(y)e^x-3y)dx+(f'(y)e^x-3)dy$$

$$-\int_{BA}(f(y)e^x-3y)dx+(f'(y)e^x-3)dy$$

$$=\pm\iint_D\left[\frac{\partial(f'(y)e^x-3)}{\partial x}-\frac{\partial(f(y)e^x-3y)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$+\int_{AB}(f(y)e^x-3y)dx+(f'(y)e^x-3)dy$$

$$=\pm\iint_D[f'(y)e^x-f'(y)e^x-3]dxdy+\int_2^4[f(-x+5)e^x$$

$$-3(-x+5)+(f'(-x+5)e^x-3)(-1)]dx$$

$$=\pm\iint_D 3dxdy+\int_2^4[3(x-4)+f(-x+5)e^x-f'(-x+5)]dx$$

$$=\pm 3\sigma+3\int_2^4(x-4)dx+\int_2^4 f(-x+5)de^x-\int_2^4 f'(-x+5)dx$$

$$=\pm 15+3\left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_2^4+\int_2^4 f'(-x+5)dx$$

$$=\pm 15-6+f(1)e^4-f(3)e^2$$

$$=\begin{cases}9+e^2[f(1)e^2-f(3)] & \text{当}\widehat{AmB}\text{在}AB\text{的下方时}\\-21+e^2[f(1)e^2-f(3)] & \text{当}\widehat{AmB}\text{在}AB\text{的上方时.}\end{cases}$$

(其中当曲线在直线段 AB 上方时，取负号；在下方时，取正号，直线 AB 的方程为 $y=-x+5$. 而 σ 是闭曲线 $\widehat{AmBA}$ 所围区域的面积，$\sigma=5$)

解法 2　$\int_c[f(y)e^x-3y)]dx+[f'(y)e^x-3]dy$

$$=\int_{\widehat{AmB}}[f(y)e^x-3y]dx+[f'(y)e^x-3x]dy+\int_{\widehat{AmB}}(3x-3)dy$$

$$=\int_3^1[f'(y)e^2-6]dy+\int_2^4[f(1)e^x-3]dx$$

$$+\oint_{\widehat{AmBA}}(3x-3)dy-\int_{BA}(3x-3)dy$$

$$=[f(y)e^2-6y]_3^1+[f(1)e^x-3x]_2^4$$

$$\pm\iint_D\frac{\partial(3x-3)}{\partial x}dxdy+3\int_{AB}(x-1)dy^{[注]}$$

$$=f(1)e^2-f(3)e^2-6+18+f(1)e^4-f(1)e^2-12+6$$

$$\pm 3\iint_D dxdy + 3\int_2^4 (x-1)(-1)dx$$

$$= f(1)e^4 - f(3)e^2 + 6 \pm 3\times 5 - \frac{3}{2}[(x-1)^2]_2^4$$

$$= \pm 15 + 6 + e^2[f(1)e^2 - f(3)] - 12$$

$$= \begin{cases} 9 + e^2[f(1)e^2 - f(3)] & \text{当}\widehat{AmB}\text{在}\overline{AB}\text{的下方时}, \\ -21 + e^2[f(1)e^2 - f(3)] & \text{当}\widehat{AmB}\text{在}\widehat{AB}\text{的上方时}. \end{cases}$$

注　该式中的第三个积分应用格林公式转化为二重积分，当曲线 $\widehat{AmB}$ 在直线段 AB 的下方时，闭曲线 $\widehat{AmBA}$ 为正向，取正号；反之，在上方时，为负向，取负号.

9.1.81　计算曲线积分 $I = \int_c [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$，式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，其中 c 是连接点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 的任意逐段光滑的弧 $\widehat{AnB}$，但与直线段 AB 围成的图形 $AnBA$ 有定面积 S(如图).

解　$I + \int_{BA} = \iint_S \{[\varphi'(y)e^x - [\varphi'(y)e^x - m]\}dxdy = ms.$

又直线段 AB 的方程为

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

所以 $\int_{BA} = \int_{x_2}^{x_1}[\varphi(y)e^x - my]dx + \int_{x_2}^{x_1}[\varphi'(y)e^x - m]\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}dx$

$$= [\varphi(y)e^x]_{x_2}^{x_1} - \int_{x_2}^{x_1}\varphi'(y)e^x\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}dx$$

$$- m\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{(x - x_1)^2}{2} + y_1 x\right]_{x_2}^{x_1}$$

$$+ \int_{x_2}^{x_1}\varphi'(y)e^x\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]dx - m\left[x\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\right]_{x_2}^{x_1}$$

$$= \varphi(y_1)e^{x_1} - \varphi(y_2)e^{x_2} + \frac{1}{2}m(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$- my_1(x_1 - x_2) + m(y_2 - y_1)$$

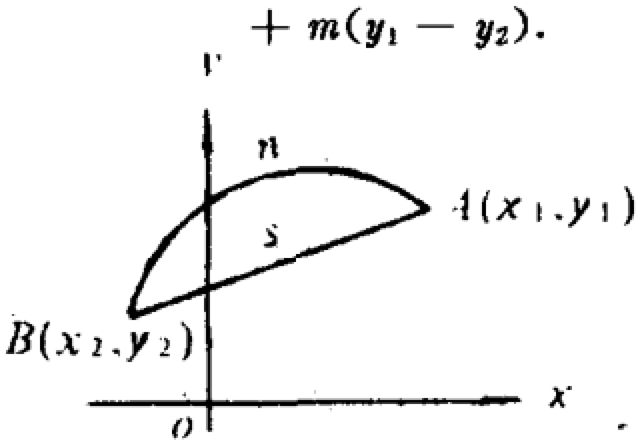
$$= \varphi(y_1)e^{x_1} - \varphi(y_2)e^{x_2} + \frac{1}{2}m(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)$$

$$+ m(y_2 - y_1).$$

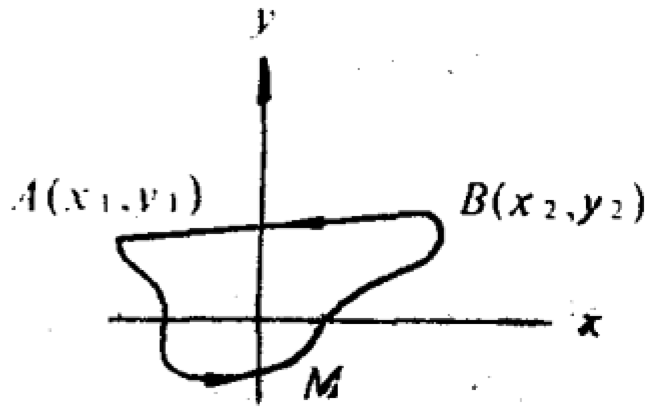
故　$I = ms - \int_{BA}$

$$= ms + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} + \frac{m}{2}(x_1 - x_2)(y_2 + y_1)$$

$$+ m(y_1 - y_2).$$



9.1.81 题图



9.1.82 题图

9.1.82　计算曲线积分 $\int_{AMB}[\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy$，其中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数；AMB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任何路线，但与线段 AB 围成的面积为定值 S.

解　令 $P(x,y) = \varphi(y)e^x - my$，$Q(x,y) = \varphi'(y)e^x - m$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = m.$$

积分路线如上图所示，加上从 B 到 A 的直线段上的积分，利用格林公式即得

$$I = \int_{AMBA} Pdx + Qdy - \int_{BA} Pdx + Qdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \int_{AB}\varphi(y)e^x dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy - m\int_{AB} ydx$$

$$= m\iint_D dxdy + \int_{AB} d[\varphi(y)e^x - my] - m\int_{x_1}^{x_2}\left[y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1)\right]dx$$

$$= m \cdot s + [\varphi(y_2)e^{x_2} - my_2] - (\varphi(y_1)e^{x_1} - my_1)$$

$$- my_1(x_2 - x_1) + \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

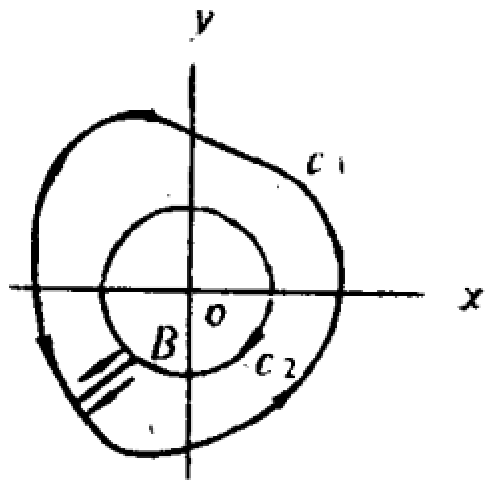
$$= m \cdot s + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} + m(y_1 - y_2)$$

$$- \frac{1}{2}m(x_2 - x_1)(y_1 + y_2).$$

9.1.83　证明曲线积分 $\int_{c_1}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \pi$，其中 c 是包含坐标原点

在内的任意正的光滑封闭的曲线.

证 设 c_1 所围的区域为 D,如图作一个以 O 为心的圆,圆周为 c_2,并作直线段 AB 连结 c_2 与 c_1,则线路 $c=\overline{AB}+(-c_2)+\overline{BA}+c_1$ 构成一闭曲线,这里的 $(-c_2)$ 表示 c_2 的负向闭曲线. 闭曲线 c 不包含原点. 在以 c 为边界的区域上,由



9.1.83 题图

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

有 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因而 $$\oint_c=\int_{AB}+\oint_{-c_2}+\int_{BA}+\oint_{c_1}=0.$$

但 $\int_{AB}=-\int_{BA}$, 故 $\oint_{-c_2}+\oint_{c_1}=0$, $\oint_{c_1}=-\oint_{-c_2}$

而 $\oint_{-c_2}=-\oint_{c_2}$, 因此有 $\oint_{c_1}=\oint_{c_2}$.

设圆周的参数方程为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则

$$\oint_{c_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\theta\cdot r\cos\theta-r\sin\theta(-r\sin\theta)}{r^2}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=2\pi.$$

又由 $\oint_{c_1}=\oint_{c_2}$ 得

$$I=\oint_{c_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{c_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=2\pi.$$

9.1.84 计算 $\oint_c\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$,其中 c 为曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(\frac{1}{\pi})^{\frac{2}{3}}$ 的正向,即逆时针方向.

解 积分曲线为星形线,包含原点在内,取以 O 为中心,充分小的 δ 为半径作圆周曲线 l:$x=\delta\cos\theta, y=\delta\sin\theta$,使其全部包含在 c 内,l 的方向取顺时针方向. 设 D 为 c 与 l 所围的区域,在 D 内,有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$$

由格林公式有，

$$\int_{c+l} \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0.$$

设 $-l$ 表示 l 的反向圆周，则有

$$\int_c \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = \int_{-l} \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} [(\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta) + (\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

(2) 全微分求积

9.1.85　求下列全微分的原函数：

(1) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

(2) $e^x[e^y(x - y + 2) + y]dx + e^x[e^y(x - y) + 1]dy$;

(3) $f(\sqrt{x^2 + y^2})xdx + f(\sqrt{x^2 + y^2})ydy$.

解　(1) 显然，此全微分的第二型曲线积分与路线无关，从而

$$F(u,v) = \int_{(0,0)}^{(u,v)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(u,0)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

$$+ \int_{(u,0)}^{(u,v)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$$

$$= \int_0^u x^2dx + \int_0^v (u^2 - 2uy - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + u^2v - uv^2 - \frac{1}{3}v^3.$$

故原函数为　$F(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 - y^3) + xy(x - y) + c.$

(2) 由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x[e^y(x - y + 1) + 1]$，因而，由曲线积分与路线无关的条件知，此全微分的一个原函数为

$$F(u,v) = \int_{(0,0)}^{(u,v)} e^x[e^y(x - y + 2) + y]dx + e^x[e^y(x - y) + 1]dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(u,0)} + \int_{(u,0)}^{(u,v)} Pdx + Qdy$$

$$= \int_0^u e^x(x+2)dx + \int_0^v e^u[e^y(u-y)+1]dy$$
$$= [(x+1)e^x]_0^u + ue^u\int_0^v e^y dy - e^u\int_0^v ye^y dy + e^u\int_0^v dy$$
$$= (u+1)e^u - 1 + ue^u(e^v - 1)$$
$$- e^u[(v-1)e^v + 1] + ve^u$$
$$= e^{u+v}(u - v + 1) + ve^u - 1.$$

故原函数为 $F(x,y) = e^{x+y}(x - y + 1) + ye^x + c$.

(3) 令 $u = x^2 + y^2$,则原式 $= \dfrac{1}{2}f(\sqrt{u})du$.

故它的原函数为 $F(x,y) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2+y^2} f(\sqrt{u})du + c$.

9.1.86 求全微分 $du = \dfrac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}$ 的原函数.

解 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3y-x}{(x+y)^3}\right) = \frac{3(x+y)^3 - (3y-x)\cdot 3(x+y)^2}{(x+y)^6}$$
$$= \frac{3x+3y-9y+3x}{(x+y)^4} = \frac{6(x-y)}{(x+y)^4}.$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-3x}{(x+y)^3}\right) = \frac{-3(x+y) - (y-3x)\cdot 3}{(x+y)^4} = \frac{6(x-y)}{(x+y)^4}.$$

所以, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x+y) \neq 0$,故积分与路线无关,于是

$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{3y-x}{(x+y)^3}dx + \frac{y-3x}{(x+y)^3}dy$$
$$= \int_0^y \frac{y-3}{(y+1)^3}dy + \int_1^x \frac{3y-x}{(x+y)^3}dx$$
$$= [\frac{-1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)^2}]_0^y + [\frac{-2y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}]_1^x$$
$$= -\frac{1}{y+1} + 1 + \frac{2}{(y+1)^2} - 2 - \frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$+ \frac{2y}{(1+y)^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{1+y}$$
$$= \frac{x-y}{(x+y)^2}.$$

一般解为 $\qquad u(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^2} + c.$

9.1.87　求全微分 $du=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$ 的原函数.

解　因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{3x^2-2xy+3y^2}\right)$

$$=\frac{3x^2-2xy+3y^2-y(-2x+6y)}{(3x^2-2xy+3y^2)^2}$$

$$=\frac{3x^2-3y^2}{(3x^2-2xy+3y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}\right)$$

$$=\frac{-3x^2+2xy-3y^2+x(6x-2y)}{(3x^2-2xy+3y^2)^2}$$

$$=\frac{3x^2-3y^2}{(3x^2-2xy+3y^2)^2}.$$

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$(3x^2-2xy+3y^2\neq 0)$，故

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\int_0^x\frac{ydx}{3x^2-2xy+3y^2}-\int_1^y\frac{0\cdot dy}{3y^2}$$

$$=\frac{y}{3}\int_0^x\frac{d\left(x-\frac{y}{3}\right)}{\frac{8y^2}{9}+\left(x-\frac{y}{3}\right)^2}$$

$$=\left[\frac{y}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}y}\operatorname{arctg}\frac{3\left(x-\frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y}\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

一般解为 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+c.$

9.1.88　选取 n 使 $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 为某一函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

解　因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-(x^2+y^2)^n-(x-y)\cdot n(x^2+y^2)^{n-1}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^{2n}}$

$$=-\frac{x^2+y^2+2nxy-2ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}$$

$$= -\frac{x^2 + 2nxy + (1-2n)y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)^n - (x+y)\cdot n(x^2+y^2)^{n-1}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^{2n}}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2nx^2-2nxy}{(x^2+y^2)^{n+1}} = \frac{(1-2n)x^2-2nxy+y^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}.$$

令 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$$-x^2 - 2nxy - (1-2n)y^2 = (1-2n)x^2 - 2nxy + y^2,$$

得 $n = 1$，也就是说，当 $n = 1$ 时，$\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 是全微分.

即 $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^n}$ 是全微分.

故 $u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} = \int_1^x \frac{xdx}{x^2} + \int_0^y \frac{(x+y)dy}{x^2+y^2}$

$$= [\ln|x|]_1^x + \left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_0^y$$

$$= \ln|x| + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\ln x^2$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

一般解为 $u(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c$.

9.1.89 选取 a,b 使 $\frac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

解 设 $u(x,y)$ 可微，且有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

因此 $P(x,y) = \frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2}$，$Q(x,y) = \frac{-(x^2+2xy+by^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2[x^3+x^2y(1-2a)-3xy^2-y^3]}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2[x^3+3x^2y+(2b-1)xy^2-y^3]}{(x^2+y^2)^3}.$$

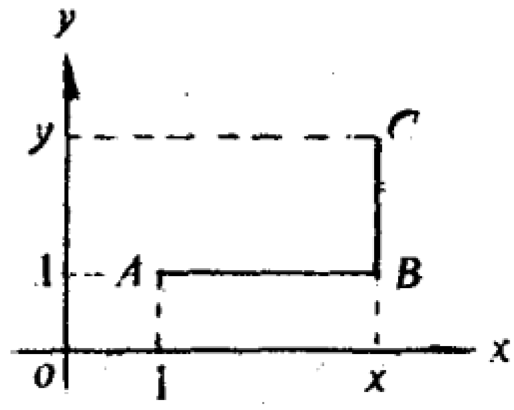
因为 $Pdx + Qdy$ 是全微分，所以 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，从而

$$x^3 + x^2y(1-2a) - 3xy^2 - y^3 = x^3 + 3x^2y + (2b-1)xy^2 - y^3.$$

比较系数，得 $a=-1, b=-1$，故

$$P(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ Q(x,y)=\frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以，积分与路线无关，选取从 $A(1,1)$ 经 $B(x,1)$，到 $C(x,y)$ 的路线进行积分（如图）得



9.1.89 题图

$$u(x,y)=\int_{(1,1)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$$
$$=\int_{(1,1)}^{(x,1)} Pdx+Qdy+\int_{(x,1)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$$
$$=\int_1^x \frac{(1+2x-x^2)}{(x^2+1)^2}dx+\int_1^y \frac{(y^2-2xy-x^2)}{(x^2+y^2)^2}dy=\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

故一般解为 $u(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+c$.

9.1.90　利用全微分计算曲线积分

(1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz$;

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \alpha(x)dx+\beta(y)dy+\gamma(z)dz$，其中 $\alpha(x)$、$\beta(y)$、$\gamma(z)$ 为连续函数；

(3) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$，其中 f 为连续函数.

解　(1) 不难看出，$xdx+y^2dy-z^3dz$ 是全微分，它的原函数是 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}+c$. 因此

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-z^3dz=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{z^4}{4}\right]_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}=-53\frac{7}{12}.$$

(2) 因为 $\alpha(x)$、$\beta(y)$、$\gamma(z)$ 都是连续函数，又

$$d\left[\int_{x_0}^x \alpha(x)dx+\int_{y_0}^y \beta(y)dy+\int_{z_0}^z \gamma(z)dz\right]$$
$$=\alpha(x)dx+\beta(y)dy+\gamma(z)dz.$$

所以 $\alpha(x)dx+\beta(y)dy+\gamma(z)dz$ 为全微分，由此可得

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \alpha(x)dx+\beta(y)dy+\gamma(z)dz$$

$$=\left[\int_{x_0}^{x}\alpha(x)dx+\int_{y_0}^{y}\beta(y)dy+\int_{z_0}^{z}\gamma(z)dz\right]_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=\int_{x_0}^{x_2}\alpha(x)dx+\int_{y_0}^{y_2}\beta(y)dy+\int_{z_0}^{z}\gamma(z)dz$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\alpha(x)dx-\int_{y_0}^{y_1}\beta(y)dy-\int_{z_0}^{z_1}\gamma(z)dz$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\alpha(x)dx+\int_{y_1}^{y_2}\beta(y)dy+\int_{z_1}^{z_2}\gamma(z)dz.$$

(3) 因为 f 为连续函数，故 $d\int_{u_0}^{u}f(u)du=f(u)du$. 令 $u=x+y+z$，则

$$\int_{u_0}^{u}f(u)du=f(x+y+z)(dx+dy+dz),$$

由此可知 $f(x+y+z)(dx+dy+dz)$ 为全微分，于是有

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(x+y+z)(dx+dy+dz)=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(u)du.$$

9.1.91 求证：若 $f(x)$ 为连续函数，则函数沿光滑的任意闭路 c 的曲线积分 $\oint_c f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0$.

证 设 $t=x^2+y^2$, $t_0=x_0^2+y_0^2$，则

$$f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=\frac{1}{2}f(t)dt.$$

由于 f 为连续函数，故 $f(t)$ 的原函数存在，设 $\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}f(t)dt=F(t)$，则 $dF(t)=\frac{1}{2}f(t)dt$，即 $dF(x^2+y^2)=f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$，其中

$$F(x^2+y^2)=\int_{x_0^2+y_0^2}^{x^2+y^2}f(x^2+y^2)(xdx+ydy),$$

所以 $f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$ 为全微分，从而有

$$\oint_c f(x^2+y^2)(xdx+ydy)=0.$$

9.1.92 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，证明：对任何光滑闭曲线 c，有

$$\oint_c f(xy)(ydx+xdy)=0.$$

证 由于 $f(xy)(ydx+xdy)=f(u)du$, $u=xy$. 因而 $F(u)=\int f(u)du$

为全微分的一个原函数. 因此,积分与路线无关,所以有

$$\oint_c f(xy)(ydx + xdy) = 0.$$

4. **平面曲线积分与路线无关的条件**

9.1.93　验证下列积分与路线无关,并求它们的值:

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$;

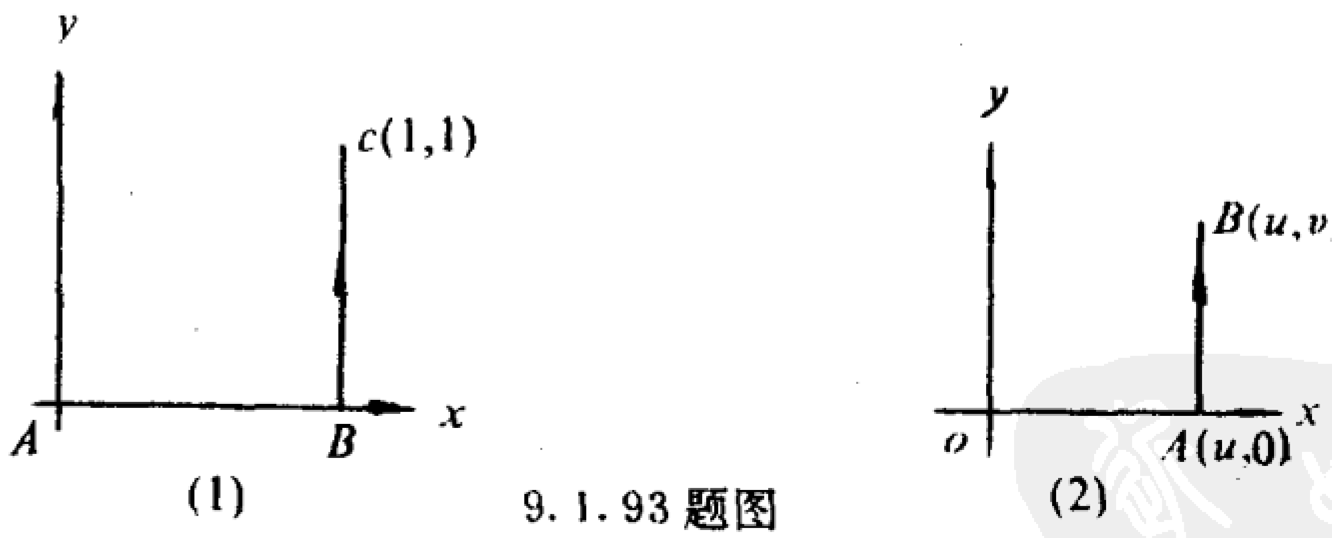
(2) $\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2u\cos v - v^2\sin u)du + (2v\cos u - u^2\sin v)dv$;

(3) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx - xdy}{x^2}$ 沿在右半平面的路线;

(4) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 沿不通过原点的路线;

(5) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx + \psi(y)dy$,其中 φ、ψ 为连续函数.

解　(1) 因为 $P(x,y) = (x-y)$, $Q = -(x-y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -1$. 由曲线积分与路线无关的条件知,此积分与路线无关. 因而,取折线 ABC(如图(1),得



9.1.93 题图

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy) = \int_A^B(x-y)(dx-dy) + \int_B^C(x-y)(dx-dy)$$

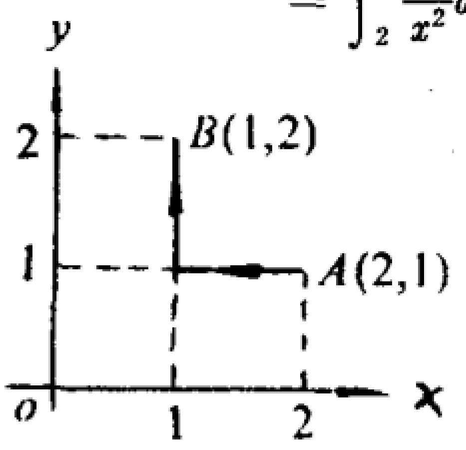
$$= \int_0^1 xdx + \int_0^1 -(1-y)dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

(2) 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2\sin y(x+y)$,由曲线积分与路线无关的条件知,此积分与路线无关,为求其值,取路线 OAB(如图(2)),得

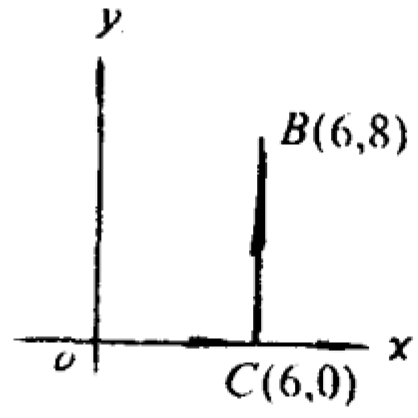
$$\int_{(0,0)}^{(u,v)}(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$$
$$= \int_{OA}(2x\cos y + y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$$
$$+ \int_{AB}(2x\cos y + y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$$
$$= \int_0^u 2xdx + \int_0^v(2y\cdot\cos u - u^2\sin y)dy$$
$$= u^2 + v^2\cos u + u^2(\cos v - 1)$$
$$= u^2\cos v + v^2\cos u.$$

(3) 当 $x>0$ 时，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$. 从而积分与路线无关，为求其值，取如图(3)所示的折线 ACB，得

$$\int_A^B \frac{ydx - xdy}{x^2} = \int_A^C \frac{ydx - xdy}{x^2} + \int_C^B \frac{ydx - xdy}{x^2}$$
$$= \int_2^1 \frac{1}{x^2}dx + \int_1^2(-1)dy = -\frac{1}{2} - 1 = -1\frac{1}{2}.$$



(3)



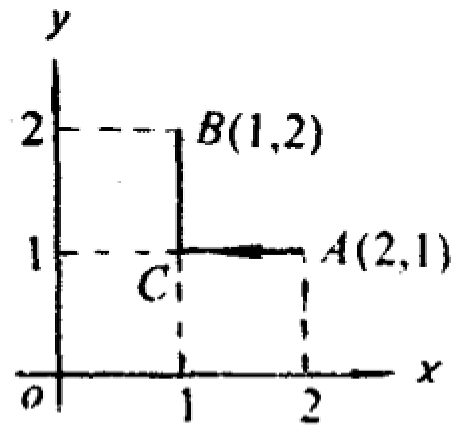
(4)

(4) 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$，从而积分与路线无关，取如图(4)所示的折线 ACB，得

$$\int_A^B \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_A^C \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_C^B \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \int_1^6 dx + \int_0^8 \frac{y}{\sqrt{6^2+y^2}}dy = 5 + \left[\sqrt{6^2+y^2}\right]_0^8 = 9.$$

(5) 因为 $P(x,y)=\varphi(x)$，$Q(x,y)=\psi(y)$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，从而积分与路线无关，为计算其值，选取如图(5)所示的折线 ACB，得

$$\int_A^B \varphi(x)dx + \psi(y)dy$$
$$= \int_A^C \varphi(x)dx + \psi(y)dy$$
$$+ \int_C^B \varphi(x)dx + \psi(y)dy$$
$$= -\int_1^2 \varphi(x)dx + \int_1^2 \psi(y)dy$$
$$= \Phi(1) - \Phi(2) + \Psi(2) - \Psi(1).$$



(5)

这里，$\Phi(x)$、$\Psi(y)$ 分别是连续函数 $\varphi(x)$、$\psi(y)$ 的一个原函数.

9.1.94　计算 $\int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ 其中 c 为曲线 $x = a(t-\sin t) - a\pi$，$y = a(1-\cos t)$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段.

解　因为 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$，所以

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

除原点外 P、Q、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 处处连续，且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，故对所给的曲线积分与路线无关，但是原点除外.

对所给的曲线 c，$a \neq 0$，则当 $y=0$ 时，$t=0$ 或 $t=2\pi$. 这时 $x=-a\pi$ 或 $x=a\pi$，故 c 不过原点. 取积分路线为由点 $A(-a\pi,0)$ 到点 $B(a\pi,0)$ 的半圆弧：$x^2+y^2=a^2\pi^2$. $(y>0)$，即

$$\begin{cases} x = a\pi\cos\theta, \\ y = a\pi\sin\theta. \end{cases} \quad 0 < \theta < \pi.$$

从而
$$\int_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_{\widehat{AB}} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
$$= \int_0^\pi \left[\frac{-a\pi\sin\theta}{a^2\pi^2}a\pi(-\sin\theta) + \frac{a\pi\cos\theta}{a^2\pi^2}\cdot a\pi\cos\theta\right]d\theta$$
$$= \int_0^\pi (\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = \pi.$$

9.1.95　证明曲线积分 $\int_c (\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})dx - \frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy$ 在曲线 c 不经过 x 轴的情况下，积分与路径无关，又如果曲线 c 的两端点为

$A(\pi,1)$ 及 $B(\pi,2)$，计算积分的值.

证 因为 $P=\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$，$Q=-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}$，所以

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^3}\sin\frac{x}{y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

曲线 c 不经过 x 轴时，$y\neq 0$，这时$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 都存在且连续，并有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故知积分与路径无关.

$$\int_{(\pi,1)}^{(\pi,2)}(\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y})dx-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy$$
$$=\int_1^2(-\frac{\pi^2}{y^2}\cos\frac{\pi}{y})dy=\pi\int_1^2\cos\frac{\pi}{y}d(\frac{\pi}{y})=\pi\sin\frac{\pi}{y}\Big|_1^2=\pi.$$

9.1.96 验证曲线积分

$$\int_c(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$$

只与 c 的起终点有关，而与所取路线无关，并求

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$$

的值(其中 c 不经过 y 轴).

证 因为$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与所取路线无关. 不妨取 c 为 $y=\pi$，$1\leqslant x\leqslant 2$，于是

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$$
$$=\int_1^2(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x})dx=[x+\pi\sin\frac{\pi}{x}]_1^2=1+\pi.$$

9.1.97 证明 $\int_c(x-y)(dx-dy)$ 只与 c 的起点有关，而与所取路线无关，并求 $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$ 的值.

证 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故该曲线积分与路线无关，于是可选取 c 为 $x=1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$，这时

$$\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)=\int_{-1}^1(1-y)(-dy)$$
$$=\int_{-1}^1(y-1)dy=[\frac{1}{2}y^2-y]_{-1}^1=-2.$$

9.1.98　为了使曲线积分 $\int_c F(x,y)(ydx+xdy)$ 与积分路线无关，可微函数 $F(x,y)$ 应满足怎样的条件？

解　因为 $P(x,y)=yF(x,y)$，$Q(x,y)=xF(x,y)$，所以有 $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=yF_y(x,y)-xF_x(x,y)$，因此，要使该积分与路线无关，只须 F_x,F_y 连续，且

$$xF_x\equiv yF_y.$$

9.1.99　讨论空间曲线积分 $I=\int_{(A)}^{(B)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 是否与路线无关；并求其值. 其中 A 点与 B 点的坐标分别为 (a_1,a_2,a_3)、(b_1,b_2,b_3)，它们均不在坐标原点，连接 A、B 的任意路线也不过原点.

解　由已知的积分式可知，

$$P(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ Q(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

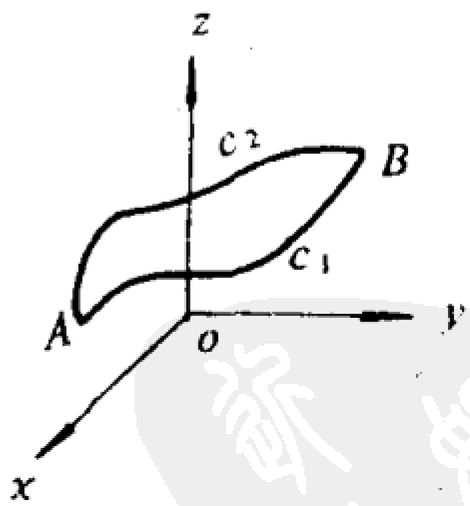
$$R(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

在原点无意义，而在原点以外处处有定义且连续，且其一阶偏导数在原点也无意义，在原点以外处处有定义且连续. 又 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$，$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$ 在除原点外处处成立. 据斯托克斯公式(如图)，有

$$\oint_{\widehat{AC_1BC_2A}}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0,$$

即 $\int_{\widehat{AC_1B}}+\int_{\widehat{BC_2A}}=0.$

从而 $\int_{\widehat{AC_1B}}=\int_{\widehat{AC_2B}}$



9.1.99 题图

这表明，积分与路线无关. 因而，表达式

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=d\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

故 $$I=\int_{(A)}^{(B)}d\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(A)}^{(B)}$$

$$=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=d_B-d_A.$$

这里的 d_B、d_A 分别表示 A 点、B 点到原点的距离.

9.1.100 验证沿分段光滑的任意闭曲线积分 $\oint_c f(xy)(ydx + xdy) = 0$,其中 $f(xy)$ 关于中间变量 $u = xy$ 具有连续的一阶导数.

证 因为 $P(x,y) = f(xy)y$, $Q(x,y) = f(xy)x$,所以

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[f(xy)y] = y\frac{\partial f}{\partial y} + f(xy),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[f(xy)x] = x\frac{\partial f}{\partial x} + f(xy),$$

其中 $f(xy) = f(u)$,$u = xy$,于是

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{df}{du} = yf_u(u),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{df}{du} = xf_u(u).$$

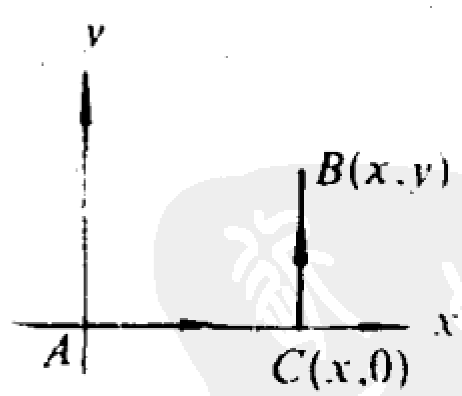
故
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = xyf_u(u) + f(xy).$$

因 $f_u(u)$ 连续,所以 $f(u) = f(xy)$ 及 $xyf_u(u)$ 也连续. 因此,满足曲线积分与路线无关的条件,即

$$\oint_c Pdx + Qdy = \oint_c f(xy)ydx + f(xy)xdy$$
$$= \oint_c f(xy)(ydx + xdy) = 0.$$

9.1.101 试应用曲线积分求 $(2x + \sin y)dx + (x\cos y)dy$ 的原函数.

解 这里 $P = 2x + \sin y$,$Q = x\cos y$,所以 $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y$,$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y$. 并在整个平面上有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 根据平面曲线积分与路线无关的条件可知,对平面上任一光滑曲线 AB,曲线积分



9.1.101 题图

$$\int_{AB}(2x + \sin y)dx + (x\cos y)dy$$

只与起、终点有关,而与路线无关. 为此可取 $A(0,0)$、$B(x,y)$,求沿折线段 AOB(如图)的曲线积分,得

$$u(x,y)=\int_0^x 2udu+\int_0^y x\cos vdv=x^2+x\sin y.$$

9.1.102 设 $\varphi(x)$ 三次可微，$\varphi(1)=1,\varphi'(1)=7$，求 $u(x,y)$，使 $du=[x^2\varphi'(x)-11x\varphi(x)]dy-32y\varphi(x)dx$.

解 由于 $P(x,y)=-32y\varphi(x),Q(x,y)=x^2\varphi'(x)-11x\varphi(x)$，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-32\varphi(x),\dfrac{\partial Q}{\partial x}=x^2\varphi''(x)-9x\varphi'(x)-11\varphi(x)$.

令 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，从而得到

$$x^2\varphi''(x)-9x\varphi'(x)+21\varphi(x)=0.$$

解此微分方程. 设 $x=e^t$，该方程可化为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}-10\frac{d\varphi}{dt}+21\varphi=0.$$

这个方程的通解为 $\varphi=c_1e^{3t}+c_2e^{7t}$，即 $\varphi(x)=c_1x^3+c_2x^7$.
又 $\varphi'(x)=3c_1x^2+7c_2x^6$. 把 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=7$ 代入上述两式得，

$$\begin{cases}c_1+c_2=1,\\3c_1+7c_2=7.\end{cases}$$

故 $c_1=0,c_2=1$，从而求得微分方程的特解为

$$\varphi(x)=x^7.$$

所以 $\qquad du=-4x^8dy-32x^7ydx.$

故 $u(x,y)=\displaystyle\int_{(0,0)}^{(x,y)}-4x^8dy-32x^7ydx=\int_0^y-4x^8dy=-4x^8y.$

一般解为 $u(x,y)=-4x^8y+c$.

9.1.103 若 $\varphi'(x)$ 连续，$\varphi(\pi)=1$，试确定 $\varphi(x)$，使积分 $I=\displaystyle\int_A^B[\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}dx+\varphi(x)dy\ (x\neq0)$ 与路线无关. 并求

$$\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}[\sin x-\varphi(x)]\frac{y}{x}dx+\varphi(x)dy.$$

解 这里 $P=[\sin x-\varphi(x)]\dfrac{y}{x},\ Q=\varphi(x)$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\sin x-\varphi(x)}{x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\varphi'(x).$$

要使积分与路径无关，必须 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即 $\dfrac{\sin x-\varphi(x)}{x}=\varphi'(x)$.

由此可得一阶线性微分方程

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

它的通解为 $\varphi(x) = e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int \frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx} + c\right] = \frac{1}{x}(-\cos x + c)$.

由 $\varphi(\pi) = 1$,得 $c = \pi - 1$,故 $\varphi(x) = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}$.

代入原积分中,则积分变为

$$\int_A^B \left[\sin x - \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}\right]\frac{y}{x}dx + \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}dy.$$

此积分与路线无关,从而

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x\sin x - \pi + \cos x + 1}{x^2}.$$

在 $x \neq 0$ 时成立,即对不过 y 轴的任意曲线均成立.

当 $A(1,0)$、$B(\pi,\pi)$ 取路线 AD、DB,D 为 $(\pi,0)$ 时,

$$\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} \left[\sin x - \frac{\pi - \cos x - 1}{x}\right]\frac{y}{x}dx + \frac{\pi - \cos x - 1}{x}dy$$

$$= \int_1^\pi 0 \cdot dx + \int_0^\pi \frac{\pi - \cos\pi - 1}{x}dy = \int_0^\pi dy = \pi.$$

9.1.104 设 $\varphi(y)$、$\psi(y)$ 二阶连续可导,曲线积分 $\oint_c 2[x\varphi(y) + \psi(y)]dx + [x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)]dy = 0$,这里 c 是平面上任意一条封闭曲线.

(1) 设 $\varphi(0) = -2$,$\psi(0) = 1$,确定 $\varphi(y)$ 与 $\psi(y)$;

(2) 计算从点 $(0,0)$ 到 $(\pi,\frac{\pi}{2})$ 的任意一条曲线的积分.

解 (1) 由已知条件 $\oint_c = 0$ 可知,曲线积分与路线无关,故 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,从而有

$$2[x\varphi'(y) + \psi'(y)] = 2x\psi(y) + 2y^2 - 2\varphi(y).$$

由此得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = \psi(y), \\ \psi'(y) = y^2 - \varphi(y). \end{cases}$$

求导得 $\varphi''(y) = \psi'(y) = y^2 - \varphi(y)$.

这是一个二阶常系数非齐次方程,解之得

$$\varphi(y) = c_1\cos y + c_2\sin y + y^2 - 2.$$

由 $\varphi(0)=c_1-2=-2$ 可得，$c_1=0$，又由 $\psi(y)=\varphi'(y)=c_2\cos y+2y$ 及 $\psi(0)=c_2=1$，于是有

$$\varphi(y)=\sin y+y^2-2,\quad \psi(y)=\cos y+2y.$$

(2) $\int_{(0,0)}^{(\pi,\frac{\pi}{2})}2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]dy$

$$=\int_0^{\pi}2[x\varphi(0)+\psi(0)]dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x^2\psi(y)+2\pi y^2-2\pi\varphi(y)]dy$$

$$=\int_0^{\pi}(2-4x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\pi^2\cos y+2\pi^2 y-2\pi\sin y+4\pi]dy$$

$$=\pi^2+\frac{\pi^4}{4}.$$

9.1.105　已知 $f(0)=1, f(\frac{1}{2})=e^{-1}$，$f''(x)$ 连续，试确定 $f(x)$，使 $\int_c[f'(x)+6f(x)]ydx+f'(x)dy$ 与积分路线无关.

解　积分与路线无关，必需 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，由此得

$$f''(x)=f'(x)+6f(x),$$

即

$$f''(x)-f'(x)-6f(x)=0.$$

其特征方程为 $r^2-r-6=0$. 解之得 $r_1=3, r_2=-2$，故方程的通解为

$$f(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}.$$

由已知条件 $f(0)=1, f(\frac{1}{2})=e^{-1}$ 可求得

$$\begin{cases}c_1+c_2=1,\\ c_1e^{\frac{3}{2}}+c_2e^{-1}=e^{-1}.\end{cases}$$

从而有 $c_1=0, c_2=1$，于是 $f(x)=e^{-2x}$.

9.1.106　设 $\int_c(f'+2f+e^x)ydx+f'dy$ 与路线无关，$f=f(x)$ 且 $f(0)=0, f'(0)=1$，计算

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(f'+2f+e^x)ydx+f'dy.$$

解　曲线积分与路线无关，所以

$$f'+2f+e^x=f''$$

为二阶常系数非齐次线性微分方程，再由 $f(0)=0, f'(0)=1$ 可得，

$$f = \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x}.$$

选积分路线为 $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 及 $x = 1$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$，则

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (f' + 2f + e^{x})y\,dx + f'\,dy = \int_0^1 (\frac{4}{3}e^2 + \frac{1}{6}e^{-1} - \frac{1}{2}e)dy$$

$$= \frac{4}{3}e^2 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{6e}.$$

9.1.107 已知函数 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数，c 为不过 y 轴的任一闭曲线，且曲线积分

$$\oint_c [x\varphi'(x) + \varphi(x) - x]\frac{y}{x^2}dx - \varphi'(x)dy = 0,$$

求函数 $\varphi(x)$.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2}[x\varphi'(x) + \varphi(x) - x]$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\varphi''(x)$,

由沿闭曲线积分为 0 的条件可知，$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故

$$\frac{1}{x^2}[x\varphi'(x) + \varphi(x) - x] = -\varphi''(x)$$

即 $$x^2\varphi''(x) + x\varphi'(x) + \varphi(x) = x \text{（欧拉方程）}$$

令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$，用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\dfrac{d}{dt}$，得

$$D(D-1)y + Dy + y = x,$$

解方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = e^t$，得

$$y = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2}e^t,$$

于是，$\varphi(x) = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) + \dfrac{1}{2}x.$

9.1.108 已知曲线积分 $\int_c [e^x + 2f(x)]y\,dx - f(x)dy$ 与路线无关，且 $f(0) = 0$，求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} [e^x + 2f(x)]y\,dx - f(x)dy.$

解 由积分与路线无关条件，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\{[e^x + 2f(x)]y\} = \frac{\partial}{\partial x}[-f(x)].$$

即
$$-f'(x)=2f(x)+e^x.$$
这是一阶线性非齐次微分方程，其通解为：
$$f(x)=e^{-2\int dx}[(e^x)e^{2\int dx}+c]=ce^{-2x}-\frac{1}{3}e^x$$
又因 $f(0)=0$. 所以 $c=\frac{1}{3}$. 故 $f(x)=\frac{1}{3}(e^{-2x}-e^x)$，于是
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy$$
$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+\frac{2}{3}(e^{-2x}-e^x)]ydx-\frac{1}{3}(e^{-2x}-e^x)dy$$
$$=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\frac{1}{3}[2e^{-2x}+e^x]ydx+\frac{1}{3}[e^x-e^{-2x}]dy$$
$$=\frac{1}{3}\int_{(0,0)}^{(1,1)}d[(e^x-e^{2x})y]=\frac{1}{3}[(e^x-e^{-2x})y]_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{3}(e-e^{-2}).$$

9.1.109　确定参数 λ 的值，使得在不经过直线 $y=0$ 的区域上，线积分 $I=\int_c\frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}dx-\frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}dy$ 与路线无关，并求当 c 为从 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 的路径时 I 的值.

解　$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y}]=\frac{x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}(2\lambda y^2-x^2-y^2),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{-x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2}]=-\frac{2x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}(x^2+y^2+\lambda^2x^2).$$
要使积分与路线无关，则有
$$\frac{x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}[(2\lambda-1)y^2-x^2]=-\frac{2x(x^2+y^2)^{\lambda-1}}{y^2}[(\lambda+1)x^2+y^2],$$
即 $(2\lambda-1)y^2-x^2=-2(\lambda+1)y^2-2y^2$,
或 $(2\lambda+1)y^2+(2\lambda+1)x^2=0$.

已知 $y\neq0$，因而 $x^2+y^2\neq0$，故必有 $2\lambda+1=0$，$\lambda=-\frac{1}{2}$.

取点 $D(0,0)$，选积分路线为折线 ADB，其中 AD 的方程为 $y=1(0\leqslant x<1)$，则 $dy=0$，DB 的方程为 $x=0\ (1\leqslant y\leqslant2)$，则 $dx=0$. 于是得到
$$I=\left(\int_{AD}+\int_{DB}\right)\left(\frac{x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{y^2}dx-\frac{x^2(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{y^2}dy\right)$$
$$=\int_1^0\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_1^2 0dy=1-\sqrt{2}.$$

5. 曲线积分的应用

9.1.110 计算空间曲线 $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$ 上从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 的弧长.

解 因为 $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=3(2t^2+1)dt$,所以

$$s=\int_0^1 3(2t^2+1)dt=5.$$

9.1.111 计算空间曲线 $x=e^{-t}\cos t, y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}$, $(0<t<+\infty)$ 的弧长.

解 因为

$$ds=\sqrt{e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}}dt=\sqrt{3}e^{-t}dt,$$

所以 $$s=\sqrt{3}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\sqrt{3}.$$

9.1.112 计算空间曲线 $x^2+y^2=cz, \frac{y}{x}=\mathrm{tg}\frac{z}{c}$ 上从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长.

解 设曲线的参数方程为 $x=\sqrt{cz}\cos\frac{z}{c}$, $y=\sqrt{cz}\sin\frac{z}{c}$, $z=$ 则弧长的微分为

$$ds=\left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\cos\frac{z}{c}-\sqrt{\frac{z}{c}}\sin\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}\sin\frac{z}{c}+\sqrt{\frac{z}{c}}\cos\frac{z}{c}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=\sqrt{\frac{c}{4z}+\frac{z}{c}+1}dz=\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz.$$

所以

$$s=\int_0^{z_0}\frac{2z+c}{\sqrt{4cz}}dz=\int_0^{z_0}\sqrt{\frac{z}{c}}dz+\int_0^{z_0}\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}}dz=\sqrt{cz_0}\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right).$$

9.1.113 计算空间曲线 $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ 上从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长.

解 因为 $ds=\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2}+\frac{a^4}{4(a^2-x^2)^2}}dx$

$$= \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)}dx, (-a < x_0 < a)$$

所以，当 $x_0 \geqslant 0$ 时，有

$$s = \int_0^{x_0} \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)}dx = \frac{a}{4}\ln\frac{a + x_0}{a - x_0} + x_0 = |z_0| + |x_0|;$$

当 $x_0 < 0$ 时，有

$$s = \int_{x_0}^0 \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)}dx = -\frac{a}{4} \cdot \ln\frac{a + x_0}{a - x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|.$$

综上所述，只要 $|x_0| < a$，就有 $s = |z_0| + |x_0|$.

9.1.114　计算空间曲线 $(x - y)^2 = a(x + y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ 上从 $O(0,0,0)$ 到 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的弧长.

解　根据已知曲线方程可得

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2 \cdot z^4} + \sqrt[3]{\frac{9a}{8} \cdot z^2}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2 z^4} - \sqrt[3]{\frac{9a}{8} \cdot z^2}\right]$$

因为 $(\frac{dx}{dz})^2 + (\frac{dy}{dz})^2 = \frac{8}{9a^2}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4 \cdot z^2} + \frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2 \frac{1}{z^2}}$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt[3]{9az^2} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{3a^2z^{-2}},$$

所以 $s = \int_0^{z_0}[\frac{1}{2a}\sqrt[3]{9az^2} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{3a^2z^{-2}} + 1]^{\frac{1}{2}}dz$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}[\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}\frac{1}{t} + 1]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}[\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a}t^2 + t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}]^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)dt$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right).$$

9.1.115　设曲线 $x = a\cos t, y = b\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 在点 (x,y) 的线密度等于 $\rho = |y|$，求其质量.

解　质量为 $m=\int_c |y|ds$，其中 c 为椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，设 $a>b$，则

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，于是

$$\begin{aligned}m&=\int_0^{\pi}ab\sin t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}dt+\int_{\pi}^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}dt\\&=-ab\int_0^{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}d(\cos t)+ab\int_{\pi}^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}d(\cos t)\\&=ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}du+ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}du\\&=4ab\int_0^1\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}du\\&=\frac{4ab}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\varepsilon u\sqrt{1-\varepsilon^2u^2}+\frac{1}{2}\arcsin(\varepsilon u)\right]_{u=0}^{u=1}\\&=2b^2+2ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

再设 $a<b$，则

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=a\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}dt,$$

其中 $\varepsilon_1=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$，依前，同样有

$$\begin{aligned}m&=\int_0^{\pi}ab\sin t\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}dt+\int_{\pi}^{2\pi}a(-b\sin t)\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2 t}dt\\&=4ab\int_0^1\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}du\\&=\frac{4ab}{\varepsilon_1}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_1 u\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2}+\frac{1}{2}\ln(\varepsilon_1 u+\sqrt{1+\varepsilon_1^2u^2})\right]_{u=0}^{u=1}\\&=2b^2+2ab\frac{\ln(\varepsilon_1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}\end{aligned}$$

若 $a=b$，则椭圆退化成圆，有 $ds=adt$，

$$m=\int_0^{\pi}a^2\sin tdt+\int_{\pi}^{2\pi}(-a\sin t)adt=4a^2.$$

9.1.116　求曲线 $x=at, y=\frac{a}{2}t^2, z=\frac{a}{3}t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧之质

量,其密度按 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 的规律变化.

解　因为 $ds = \sqrt{a^2 + a^2t^2 + a^2t^4}dt = a\sqrt{1 + t^2 + t^4}dt$,密度 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$,作代换 $u = t^2$,其质量为

$$m = \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}}ds = a\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2 + t^4}dt = \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + u + u^2}du$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{u + \frac{1}{2}}{2}\sqrt{1 + u + u^2} + \frac{3}{8}\ln(u + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + u + u^2})\right]_0^1$$

$$= \frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2}\ln\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right].$$

9.1.117　若悬链线 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ 上每一点的密度与该点的纵坐标成反比,且在点 $(0,a)$ 的密度等于 δ,求曲线在横坐标 $x_1 = 0$ 及 $x_2 = a$ 间一段的质量 $(a > 0)$.

解　设 $\mu = \frac{k}{y}$,其中 k 为比例常数,则按题意有 $\mu|_{(0,a)} = \delta$,即 $\frac{k}{a} = \delta, k = a\delta$,故 $\mu = \frac{a\delta}{y}$,于是

$$M = \int_c \mu ds = \int_c \frac{a\delta}{y}ds = \int_0^a \frac{a\delta}{y}\sqrt{1 + y'^2}dx$$

$$= \int_0^a \frac{a\delta}{a\text{ch}\frac{x}{a}}\sqrt{1 + \text{sh}^2\frac{x}{a}}dx = \int_0^a \delta dx = a\delta.$$

9.1.118　已知螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 上每一点的密度等于该点矢径的平方,试求 t 从 0 到 2π 的第一回旋部分的质量.

解　按题意有 $\mu(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$= (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2 = a^2 + b^2t^2,$$

故 $M = \int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)ds$

$$= \int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}dt$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)dt = \sqrt{a^2 + b^2}(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3b^2).$$

9.1.119 如果曲线$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$弧上每点的密度与该点矢径的平方成反比,且在点(1,0,1)处密度为1,求曲线从对应于$t=0$的点到任意点$t=t_0$的一段弧的质量($t_0>0$).

解 按题意有$\mu(x,y,z)=\dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k}{2e^{2t}}$,又$\mu(1,0,1)=\dfrac{k}{2e^{2t}}\Big|_{t=0}=1$,所以$k=2$,故

$$\mu(x,y,z)=e^{-2t},$$

$$ds=\sqrt{e^{2t}[(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1]}=\sqrt{3}\,e^t dt,$$

于是$M=\int_0^{t_0}\sqrt{3}\,e^{-t}dt=\sqrt{3}\,(1-e^{-t_0})$.

9.1.120 有一条空间曲线$x=at, y=\dfrac{1}{2}at^2, z=\dfrac{1}{3}at^3\ (0\leqslant t\leqslant 1, a>0)$其线密度为$\mu(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{2y}{a}}$,求它的质量.

解 在曲线上点(x,y,z)处取微弧ds,则该微弧的质量为

$$dm=\mu(x,y,z)ds=\sqrt{\frac{2y}{a}}\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

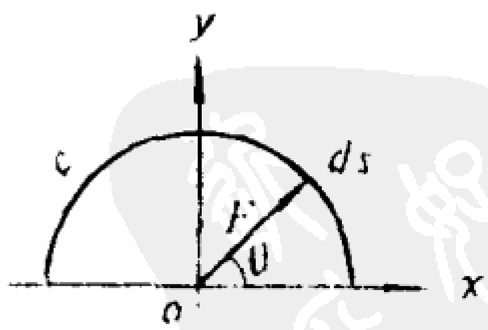
$$=at\sqrt{1+t^2+t^4}dt$$

曲线的质量为

$$M=\int_c dm=\int_0^1 at\sqrt{1+t^2+t^4}dt$$

$$=\frac{a}{2}\left[\frac{3\sqrt{3}-1}{4}+\frac{3}{8}\ln\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\right].$$

9.1.121 有一匀质(线密度为μ)的半圆形金属线,在圆心处有一质量为m的质点,求金属线与质点间的引力大小.



9.1.121题图

解 适当的选择坐标系如图所示,现设引力$F=F_x i+F_y j$,则由对称性知$F_x=0$,而$dF_y=k\dfrac{m\mu ds}{a^2}\sin\theta$,($k$为引力常数),又因半圆$c$的参数方程为$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$,所以

$$F_y=\frac{km\mu}{a^2}\int_c\sin\theta ds=\frac{km\mu}{a^2}\int_0^\pi\sin\theta\cdot a d\theta=\frac{2km\mu}{a}.$$

故引力的大小为$\frac{2km\mu}{a}$.

9.1.122　求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的弧的重心.

解　因为 $ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt$,

所以质量为
$$m=2a\rho_0\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\rho_0.$$

于是,重心坐标为

$$\begin{aligned}x_0&=\frac{1}{m}\int_0^{\pi}\rho_0 a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt\\&=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt\\&=-\left[at\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}+a\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt+\frac{a}{4}\int_0^{\pi}(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2})dt\\&=\frac{4a}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_0&=\frac{1}{m}\int_0^{\pi}\rho_0 a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt\\&=\frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt-\frac{a}{4}\int_0^{\pi}(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2})dt=\frac{4a}{3}.\end{aligned}$$

9.1.123　计算球面上三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2; x>0, y>0, z>0$ 的围线的重心坐标.

解　利用球坐标变换:$x=r\cos\varphi\cos\psi, y=r\sin\varphi\cos\psi, z=r\sin\psi$,球面上三角形三条边的方程分别为

$$x=a\cos\varphi, y=a\sin\varphi, z=0; 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$x=a\cos\psi, y=0, z=a\sin\psi; 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$x=0, y=a\cos\psi, z=a\sin\psi; 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为 $s=3\cdot\frac{a\pi}{2}=\frac{3a\pi}{2}$,所以,其重心的坐标是

$$x_0=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\varphi\cdot ad\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\psi\cdot ad\psi}{\frac{3a\pi}{2}}=\frac{2a^2}{\frac{3a\pi}{2}}=\frac{4a}{3\pi}.$$

根据对称性知 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$.

9.1.124 求均匀弧 $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, z = e^t(-\infty < t \leqslant 0)$ 的重心的坐标.

解 因为

$$ds = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}}dt = \sqrt{3}\,e^t dt,$$

所以质量为

$$m = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{3}\,e^t dt = \sqrt{3}.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0} e^t\cos t \cdot \sqrt{3}\,e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\cos t dt$$

$$= \left[\frac{2\cos t + \sin t}{5}e^{2t}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{2}{5},$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0} e^t\sin t \cdot \sqrt{3}\,e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\sin t dt$$

$$= \left[\frac{2\sin t - \cos t}{5}e^{2t}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{5},$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{0} e^t \cdot \sqrt{3}\,e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt = \frac{1}{2}.$$

9.1.125 求均匀的曲线 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 上从点 $A(0,a)$ 到点 $B(b,h)$ 的弧的重心坐标.

解 因为 $ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx$,故质量为

$$m = \rho_0\int_0^b \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a\rho_0\operatorname{sh}\frac{b}{a} = \rho_0\sqrt{h^2 - a^2}.$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{\rho_0}{m}\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = \frac{\rho_0}{m}\left[ab\operatorname{sh}\frac{b}{a} - a^2\left(\operatorname{ch}\frac{b}{a} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}}\left[b\sqrt{h^2 - a^2} - a^2\left(\frac{h}{a} - 1\right)\right] = b - a\sqrt{\frac{h - a}{h + a}};$$

$$y_0 = \frac{\rho_0}{m}\int_0^b y\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = \frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx$$

$$= \frac{a\rho_0}{m}\int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}}{2}dx = \frac{a\rho_0}{m}\left[\frac{x}{2} + \frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]_0^b = \frac{a\rho_0}{m}\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)$$

$$=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}.$$

注　由 $h=a\text{ch}\,\frac{b}{a}$ 可知，$\text{ch}\,\frac{b}{a}=\frac{h}{a}$，因此

$$\text{sh}\,\frac{b}{a}=\sqrt{\text{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}.$$

9.1.126　求均匀心形线 $r=a(1-\cos\varphi)$ 全弧的重心.

解　$\oint_c ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\varphi}d\varphi$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a,$$

又　$\oint_c xds=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos\varphi}d\varphi$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{2}(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1)d\varphi$$

$$=-8a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{\varphi}{2})(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1)d(\cos\frac{\varphi}{2})=-\frac{32}{5}a^2,$$

所以　$x_c=\frac{\oint xds}{\oint ds}=-\frac{\frac{32}{5}a^2}{8a}=-\frac{4}{5}a.$

由于曲线关于 x 轴对称，所以 $y_c=0$，故全弧重心为 $P(-\frac{4}{5}a,0)$.

9.1.127　求均匀摆线弧 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t),(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的重心

解　$ds=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}dt,$

$\int_c ds=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}dt=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a,$

$\int_c xds=\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}dt$

$$=2a^2\int_0^{\pi}(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2})\sin\frac{t}{2}dt=\frac{16}{3}a^2,$$

$$\int_c yds = \int_0^{\pi} a(1-\cos t)\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}dt$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = -8a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})d(\cos\frac{t}{2}) = \frac{16}{3}a^2.$$

所以 $x_c = \frac{16a^2}{3}/4a = \frac{4}{3}a$，$y_c = \frac{4}{3}a$.

摆线弧的重心为 $P(\frac{4}{3}a,\frac{4}{3}a)$.

9.1.128 求螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ht$ 对应于 $0 \leqslant t \leqslant m$ 的一段弧的重心.

解 $ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + h^2}dt = \sqrt{a^2+h^2}dt$

$$\int_c ds = \int_0^m \sqrt{a^2+h^2}dt = m\sqrt{a^2+h^2},$$

$$\int_c xds = \int_0^m a\cos t\sqrt{a^2+h^2}dt = a\sqrt{a^2+h^2}\sin m,$$

$$\int_c yds = \int_0^m a\sin t\sqrt{a^2+h^2}dt = a\sqrt{a^2+h^2}(1-\cos m),$$

$$\int_c zds = \int_0^m ht\sqrt{a^2+h^2}dt = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2+h^2}m^2.$$

故重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{a}{m}\sin m,\ \bar{y} = \frac{a}{m}(1-\cos m),\ \bar{z} = \frac{1}{2}mh.$$

9.1.129 设圆柱螺线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ 的密度分布与 x,y 无关而与 z 成正比，求这一段螺线的质量和重心.

解 $\rho(x,y,z) = kz$，(k 是比例常数). 故这一段螺线的质量为

$$m = \int_c kzds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} kt\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}dt$$

$$= \sqrt{2}k\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \frac{\sqrt{2}k}{8}\pi^2;$$

这一段螺线的重心坐标为

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_c x\rho ds = \frac{8}{\sqrt{2}k\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\sqrt{2}ktdt$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt = \frac{8}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}-1),$$

$$y_0=\frac{1}{m}\int_c y\rho ds=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=\frac{8}{\pi^2},$$

$$z_0=\frac{1}{m}\int_c z\rho ds=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2dt=\frac{\pi}{3}.$$

9.1.130　设在 xoy 面上有分布着质量的曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$，线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达(1) 曲线对于 x 轴、y 轴、原点 O 的转动惯量 I_x,I_y,I_o；(2) 曲线的重心 $G(\bar{x},\bar{y})$.

解　(1) 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取 ds，则 $dI_x=y^2\mu(x,y)ds$，因此

$$I_x=\int_{\overset{\frown}{AB}}y^2\mu(x,y)ds$$

类似地，可知

$$I_y=\int_{\overset{\frown}{AB}}x^2\mu(x,y)ds,\quad I_o=\int_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+y^2)\mu(x,y)ds.$$

(2) 质量 $m=\int_{\overset{\frown}{AB}}\mu(x,y)ds$，于是

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}}x\mu ds.\quad \bar{y}=\frac{1}{m}\int_{\overset{\frown}{AB}}y\mu ds.$$

9.1.131　设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=\frac{h}{2\pi}t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，线密度为 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求它对 z 轴的转动惯量 I_z.

解　因为 $(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2=a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}$，所以

$$\begin{aligned}I_z&=\int_c\mu(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2)\cdot a^2\cdot\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}dt\\&=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\left[a^2t+\frac{h^2}{12\pi^2}t^3\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{a^2}{3}(3a^2+h^2)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}.\end{aligned}$$

9.1.132　求螺线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=\frac{h}{2\pi}t,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一支对于坐标轴的转动惯量.

解　因为 $ds=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+\frac{h^2}{4\pi^2}}dt=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}dt$，于是，转动惯量为

$$I_x=\int_c(y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2)\frac{\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}}{2\pi}dt$$
$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}\cdot\pi+\frac{h^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$
$$=(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3})\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}$$
$$I_y=\int_c(x^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+\frac{h^2}{4\pi^2}t^2)\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}dt$$
$$=\frac{a^2}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}\cdot\pi+\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$
$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}.$$
$$I_z=\int_c(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}a^2\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}dt$$
$$=a^2\sqrt{4a^2\pi^2+h^2}.$$

9.1.133 设 z 轴与重力的方向一致，求质量为 m 的点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 时重力所作的功.

解 因为 $\boldsymbol{F}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+mg\boldsymbol{k}$，所以重力所作的功为

$$W=\int_{AB}mgdz=\int_{z_1}^{z_2}mgdz=mg(z_2-z_1).$$

9.1.134 设在半平面 $x>0$ 中有 $\boldsymbol{F}=-\frac{K}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 所成的力场，其中 k 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中，场力所作的功与所取路径无关，只与起点终点有关. 并计算由点(1,1)到点(2,2)场力所做的功.

解 沿曲线 C 场力所作的功为

$$W=\int_c\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}=\int_c-\frac{k}{r^3}(xdx+ydy)$$
$$=-k\int_c\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy,$$
$$X=\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ Y=\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}},\ \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{-3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

当 $x>0$ 时，X,Y 及其一阶偏导数均连续，且 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$，所以在此力场中，

场力所作功与所取路径无关，而只与起点终点有关.

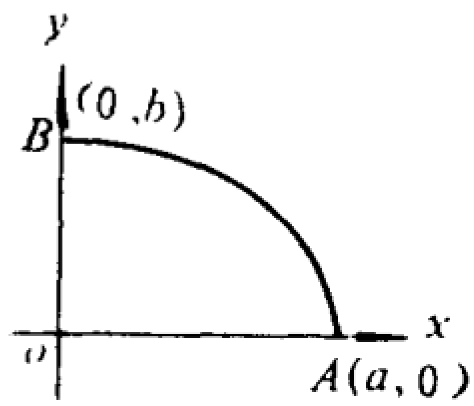
现求由点(1,1)到点(2,2)场力所作的功，取积分路径 c 为连接这两点的直线段，其方程为 $y = x(1 \leqslant x \leqslant 2)$，则

$$W = -k\int_1^2 \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx - k\int_1^2 \frac{x}{(x^2+x^2)^{3/2}}dx = -\frac{\sqrt{2}}{4}k.$$

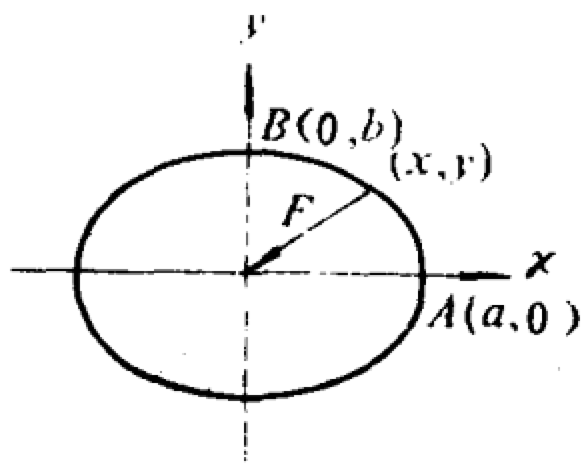
9.1.135　设质点受力作用，力的方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比，若质点由 $(a,0)$ 沿椭圆移动到 $(0,b)$，求力所作的功.

解　如图所示，因为 AB 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta. \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$$



9.1.135 题图



9.1.136 题图

又　$F = k\cdot r(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}) = (kx, ky)$，$(r = \sqrt{x^2+y^2})$，所以

$$\begin{aligned} w &= \int_{AB} kxdx + kydy \\ &= -k\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cdot\cos\theta\cdot a(-\sin\theta) + b\sin\theta\cdot b\cos\theta]d\theta \\ &= k(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}k(b^2-a^2). \end{aligned}$$

这里的 k 为比例系数.

9.1.136　在椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 上每一点 M 有作用力 $F(x,y)$，其大小等于点 M 到椭圆中心的距离，而方向朝着椭圆中心.

(1) 计算质点 P 沿椭圆位于第一象限中的弧从点 $(a,0)$ 移动到点 $(0,b)$ 时力 F 所作的功；

(2) 求点 P 按正方向沿椭圆移动一周时力 F 所作的功.

解　如图，$\boldsymbol{F} = -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$，

(1) $W = \int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\widehat{AB}} -xdx - ydy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(-a\cos t)(-a\sin t) - b\sin t \cdot b\cos t] dt$$

$$= (a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

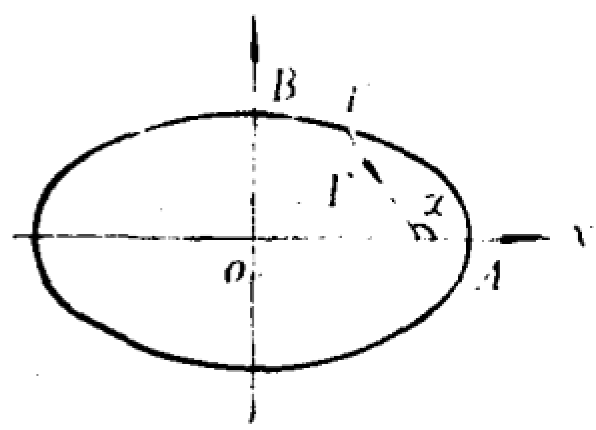
(2) $W = \oint_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_c -x dx - y dy$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 - b^2)\sin t\cos t dt = 0.$$

9.1.137 在椭圆焦点处有一质量为 M 的固定质点，一质点 m 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 正向由点 $A(a,0)$ 到点 $B(0,b)$ 运动，试求引力对质点 m 所作的功(如图).

解 焦点 C 的坐标为 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$，并设 $\sqrt{a^2 - b^2} = d$，$P(x,y)$ 为椭圆上任一点，在点 P 处放一质量为 m 的质点，焦点 C 处放一质量为 M 的质点，两质点的距离 $R = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$. 于是引力的大小为

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{kmM}{R^2},$$



9.1.137 题图

其方向指向点 $C(d,0)$，设 $|\boldsymbol{F}| = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$，则

$$X = -|\boldsymbol{F}|\cos\alpha = -\frac{kmM}{R^2} \cdot \frac{(x-d)}{R} = -\frac{kmM(x-d)}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}.$$

$$Y = -|\boldsymbol{F}|\sin\alpha = -\frac{kmM}{R^2} \cdot \frac{y}{R} = -\frac{kmMy}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}.$$

故 $W = \int_A^B X dx + Y dy$

$$= \int_A^B -\frac{kmM(x-d)}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} dx - \frac{kmMy}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} dy.$$

又因 $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{3kmM(x-d)y}{[(x-d)^2 + y^2]^{5/2}} = \frac{\partial Y}{\partial x}$，故此积分与路线无关，选取折线 AOB 为积分路径，则

$$W = -kmM\left[\int_a^0 \frac{dx}{(x-d)^2} + \int_0^b \frac{ydy}{(d^2 + y^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -kmM\left[\frac{1}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{1}{a}\right].$$

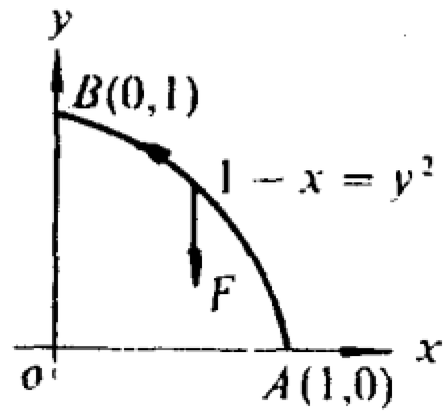
9.1.138　求质点沿 xoy 平面内的椭圆 c 运动一周(逆时针方向)场力作的功，若椭圆的中心在原点，长半轴和短半轴分别是 4 和 3，焦点在 x 轴上；力场 $\boldsymbol{F}=(3x-4y+2z)\boldsymbol{i}+(4x+2y-3z^2)\boldsymbol{j}+(2xz-4y^2+z^3)\boldsymbol{k}$.

解　由题设，椭圆 c 的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1,\\ z=0,\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x=4\cos t,\\ y=3\sin t,\\ z=0,\end{cases}$$

$$W=\int_c(3x-4y+2z)dx+(4x+2y-3z^2)dy+(2xz-4y^2+z^3)dz$$
$$=\int_0^{2\pi}[(12\cos t-12\sin t)(-4\sin t)+(16\cos t+6\sin t)(3\cos t)]dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(48-30\sin t\cos t)dt=96\pi.$$

9.1.139　方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标平方的力构成一力场，求质量为 m 的点沿抛物线 $1-x=y^2$ 从点 $(1,0)$ 移动到点 $(0,1)$ 时场力作的功.



9.1.139 题图

解　如图所示，力在坐标轴上的投影分别为

$$P(x,y)=0, Q(x,y)=-x^2.$$

故场力所作的功是

$$w=\int_{AB}0\cdot dx-x^2dy$$
$$=-\int_0^1(1-y^2)^2dy=-\frac{8}{15}.$$

即场力作负功，大小为 $\dfrac{8}{15}$ 单位.

9.1.140　一力场的力与作用点到 z 轴的距离成反比，方向垂直且朝着该轴，试求当一质点为 m 的动点沿圆周.

$$x=\cos t, y=1, z=\sin t$$

由点 $M(1,1,0)$ 依正向移动到点 $N(0,1,1)$ 时场力所作的功.

解　$|F|=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，故

$$F_x = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{kx}{x^2+y^2},$$

$$F_y = -\frac{ky}{x^2+y^2}, F_z = 0,$$

于是

$$w = \int_c F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\int_c \frac{kx}{x^2+y^2}dx + \frac{ky}{x^2+y^2}dy$$

$$= -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t(-\sin t)}{1+\cos^2 t}dt = -\frac{k}{2}[\ln(1+\cos^2 t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{2}\ln 2.$$

9.1.141 一力场由与力的作用点到平面 xoy 的距离成反比且方向朝原点的力所构成，试确定当质点沿直线

$$x = at, y = bt, z = ct \quad (c \neq 0)$$

从点 (a,b,c) 移动到点 $(2a,2b,2c)$ 时场力所作的功.

解 $|F| = \frac{k}{|z|}$，故

$$F_x = \frac{-xk}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad F_y = \frac{-yk}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$F_z = \frac{-zk}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$w = \int_c F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$= \int_c \frac{-k}{|z|\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx + ydy + zdz)$$

$$= -\frac{k}{|c|\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\int_1^2 (a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{k}{|c|}\sqrt{a^2+b^2+c^2}[\ln t]_1^2 = -\frac{k\ln 2}{c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

9.1.142 设质点 P 所受的作用力为 F，其大小反比于 P 点到坐标原点 O 的距离，比例系数为 k，其方向垂直于 P、O 之连线，且指向如图所示，试求质点 P 由点 $A(0,\frac{\pi}{2})$ 经曲线 $y = \frac{\pi}{2}\cos x$ 到点 $B(\frac{\pi}{2},0)$ 时，力 F 所作的功.

解 设点 $P(x,y)$，$\angle POB = \theta$，则 $\text{tg}\theta = \frac{y}{x}$，

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, |F| = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|F| = Xi + Yj = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} i - \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} j,$$

且　$\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{k(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$.

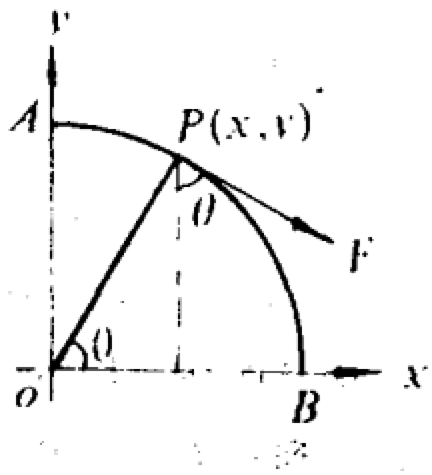
又直线AB方程为：$y = -x + \dfrac{\pi}{2}$. 于是力 F 所作的功

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} Xdx + Ydy = \int_{\overline{AB}} \frac{ky}{x^2+y^2}dx - \frac{kx}{x^2+y^2}dy$$

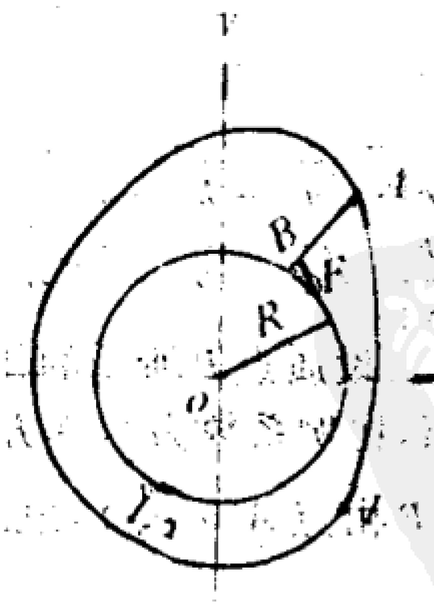
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{k(-x+\frac{\pi}{2})}{x^2+(-x+\frac{\pi}{2})^2} + \frac{kx}{x^2+(-x+\frac{\pi}{2})^2}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\pi}{2} \frac{dx}{2x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}}$$

$$= \frac{kx}{2} - \frac{2}{\sqrt{4\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot 2 - \pi^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{4x-\pi}{\sqrt{4\cdot\frac{\pi^2}{4}\cdot 2 - \pi^2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k\pi}{2}.$$



9.1.142 题图



9.1.143 题图

9.1.143　电流 I 通过直导线，l 为垂直于导线的平面上包围着导

线的任一闭曲线，试证：单位磁荷沿 l 运动一周，磁场所作的功为一常数.

证 设 $P(x,y)$ 为曲线 l 上任一点，则该点处磁场力为

$$F(x,y)=\frac{2I}{r^2}(-y)\boldsymbol{i}+\frac{2I}{r^2}x\boldsymbol{j},$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 为 P 点到 $O(0,0)$ 的距离. 故

$$w=\int_l \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_l\frac{2I}{x^2+y^2}[(-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}]\cdot[dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}]$$

$$=\int_l\frac{-2Iy}{x^2+y^2}dx+\frac{2Ix}{x^2+y^2}dy$$

令 $P=\frac{-2Iy}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{2Ix}{x^2+y^2}$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2I(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2I(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

由于 l 所围成的区域 D 上出现奇点 $O(0,0)$，该点不具有偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，故不能应用格林公式，若取 以 O 为圆心，R 为半径的圆周 l_2，在 l 和 l_2 之间引一条直线段 AB，组成曲线 l'：$l+AB+(-l_2)+BA$. l' 所围成的区域 D' 不含奇点.

$$w'=\int_{l'}dw=\int_l dw+\int_{AB}dw+\int_{-L_2}dw+\int_{BA}dw$$

$$=\int_l dw-\int_{l_2}dw=0$$

所以 $$w=\int_{l_2}dw=\int_{l_2}\frac{-2Iy}{x^2+y^2}dx+\frac{2Ix}{x^2+y^2}dy$$

$$=\frac{2I}{R^2}\int_0^{2\pi}(-R\sin t)(-R\sin t dt)+R^2\cos^2 t dt=4\pi I.$$

§2　曲面积分

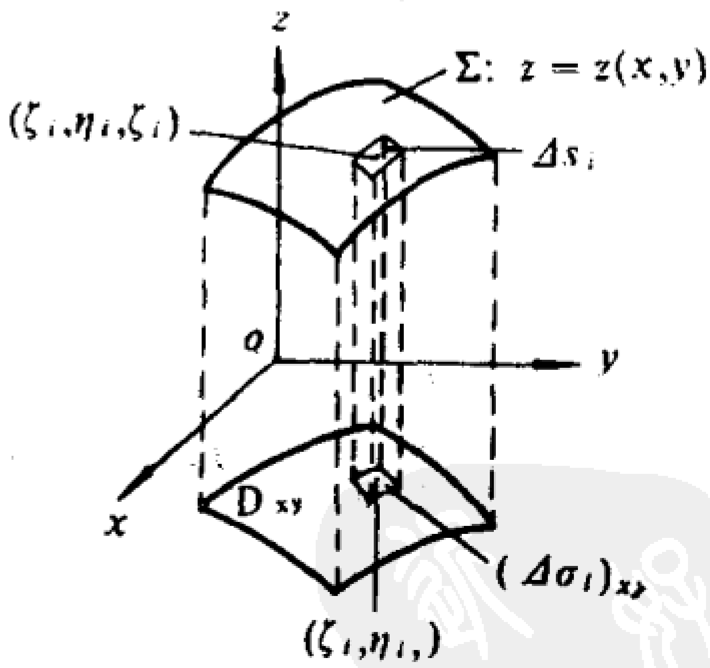
内容提要

1. 对面积的(第一型)曲面积分

(1) 定义　设$\sum$是空间的一块可求面积的光滑有界曲面，函数$f(x,y,z)$是定义在$\sum$上的有界函数. 把$\sum$分成n个可求面积的小块$\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta s_i$同时也代表第$i$个小块的面积，设$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$是$\Delta s_i$上任意取定的一点. 如果不论子块$\Delta s_i$怎样分法，点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$怎样选取，当各子块的最大直径$\lambda\to 0$时，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

存在，这个极限值就叫做函数$f(x,y,z)$在曲面$\sum$上对面积的曲面积分，记作$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds$，即



$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i,$$

其中$f(x,y,z)$叫做被积函数，$\sum$叫做积分曲面.

(2) 计算公式　设积分曲面$\sum$有界，它的边界曲线是逐段光滑的闭曲线，且$\sum$可由单值函数$z=z(x,y)$给出，$\sum$在xoy平面上的投影区域为有面积的D_{xy}，函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，被积函数$f(x,y,z)$在$\sum$上连续，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds$存在，

且 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds$$
$$= \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)] \sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy.$$

2. 对坐标的(第二型)曲面积分

(1) 定义　设$\sum$为一块可求面积的光滑有界且有向的曲面，函数 $R(x,y,z)$ 是定义在$\sum$上的有界函数. 把$\sum$分成 n 块有面积的曲面 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta s_i$ 同时也表示第 i 块小曲面的面积. Δs_i 在 xoy 面上的投影为有面积的 $(\Delta s_i)_{xy}$，(ξ_i,η_i,ζ_i) 是 Δs_i 上任意取定的一点，如果不论小曲面 Δs_i 怎样分法，点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 怎样选取，当各小块曲面的最大直径 $\lambda\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{xy}$$

存在，这个极限值就叫做函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面$\sum$上对坐标 x,y 的曲面积分，记作 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$，即

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{xy},$$

其中 $R(x,y,z)$ 叫做被积函数，$\sum$ 叫做积分曲面.

类似地可以定义函数 $P(x,y,z)$ 在有确定面积的有向有界曲面$\sum$上对坐标 y、z 的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$ 及函数 $Q(x,y,z)$ 在曲面$\sum$上对坐标 z、x 的曲面积分 $\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$ 为

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{yz},$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta s_i)_{zx},$$

同时把 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + \iint\limits_{\Sigma} Qdzdx + \iint\limits_{\Sigma} Rdxdy$ 称为向量场 $F = (P,Q,R)$ 沿曲面 Σ 的第二型曲面积分.

(2) 计算公式

设积分曲面 Σ 是由单值函数 $z = z(x,y)$ 所给出的有向有界曲面，它的边界曲线是逐段光滑的闭曲线，且 Σ 在 xoy 平面上的投影区域为可求面积的 D_{xy}，函数 $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy,$$

上式中当沿曲面 Σ 上侧积分时取正号，沿下侧积分时取负号.

类似地，如果 Σ 由 $x = x(y,z)$ 给出，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz,$$

上式中当沿曲面 Σ 前侧积分时取正号，沿后侧积分时取负号.

如果积分曲面 Σ 由 $y = y(z,x)$ 给出，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx,$$

上式中当沿曲面 Σ 右侧积分时取正号，沿左侧积分时取负号.

3. 两种曲面积分的关系

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的法线向量的方向余弦，关于 Σ 和 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 应满足的条件如前段开头所述，此处从略.

4. 奥斯特洛格拉特斯基 — 高斯(Остроградский-Gauss) 公式

设空间闭区域 Ω 是由分片光滑自身不相交的闭曲面 $\sum$ 所围成，函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}(Pdydz+Qdzdx+Rdxdy),$$

或

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+\cos\gamma)ds.$$

这里曲面积分取在闭曲面 $\sum$ 的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\sum$ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

5. 斯托克斯(stokes)公式

设 Γ 是逐段光滑的空间有向闭曲线，$\sum$ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 $\sum$ 的侧符合右手规则，即当右手除姆指外的四指依 Γ 的绕行方向时，姆指所指的方向与 $\sum$ 上法向量的指向相同. 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在包含曲面 $\sum$ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz.$$

6. 空间曲线积分与路径无关的条件

若函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 及其偏导数在空间单连通区域 V 上连续，则下面四个命题互相等价：

(1) 曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关，只与完全位于 V 中的 $\widehat{AB}$ 起点 A 和终点 B 有关.

(2) 在 V 内存在一个单值函数 $u(x,y,z)$，使

$$du=Pdx+Qdy+Rdz.$$

(3) 对 V 内任意一点 (x,y,z)，有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}.$$

(4) 沿位于 V 内的任意自身不相交的光滑或逐段光滑的闭曲线 c，

有
$$\oint_c Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

问 题 与 解 答

1. 对面积的(第一型)曲面积分

9.2.1　计算 $\iint\limits_{\Sigma} |xyz|ds$，其中 $\sum$ 的方程为 $|x| + |y| + |z| = 1$.

解　曲面 $\sum$ 是中心在坐标原点，顶点都在坐标轴上，且顶点到原点的距离都等于 1 的正八面体的表面. 它在第一象限内的平面记为 s_1，由对称性有

$$\iint\limits_{\Sigma} |xyz|ds = 8\iint\limits_{s_1} |xyz|ds = 8\iint\limits_{s_1} xyzds.$$

s_1 的方程为 $x + y + z = 1$，即 $z = 1 - x - y$.

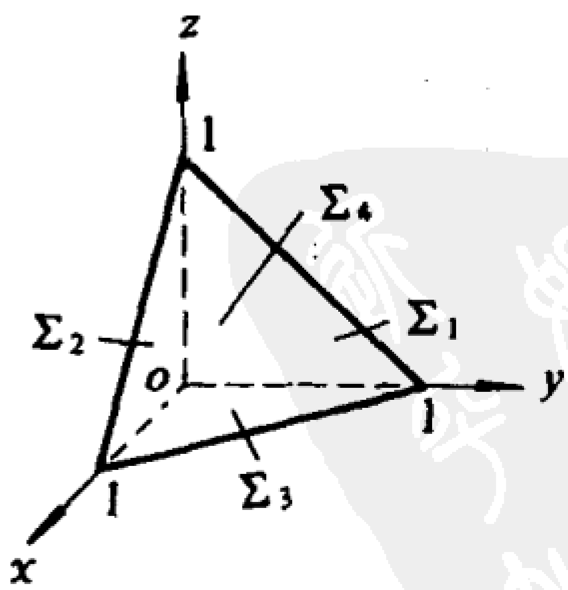
$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{3}\,dxdy.$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma} |xyz|ds = 8\iint\limits_{s_1} xy(1 - x - y) \cdot \sqrt{3}\,dxdy$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} xy(1 - x - y)dxdy = \frac{\sqrt{3}}{15}.$$

9.2.2　计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{ds}{(1 + x + y)^2}$，其中 $\sum$ 为平面 $x + y + z = 1$ 及三个坐标平面所围成的四面体的表面.



9.2.2 题图

解　如图所示，

$$\sum = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4.$$

其中，$\sum_1: x = 0$；$\sum_2: y = 0$；$\sum_3: z = 0$；$\sum_4: z = 1 - x - y$.

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^1 (1 - \frac{1}{2-z}) dz = 1 - \ln 2,$$

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1 - \ln 2,$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}) dx = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$\iint_{\Sigma_4} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{(1+x+y)^2} \sqrt{1+z_x^2+y_y^2} dxdy$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} \ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $$\iint_{\Sigma} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = (1-\ln 2) + (1-\ln 2) + (\ln 2 - \frac{1}{2})$$

$$+ (\sqrt{3} \ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2.$$

9.2.3 计算 $\iint_{\Sigma} (x+y+z) ds$，其中 $\sum$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的上半球面.

解 $\sum: z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$，故

$$ds = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy.$$

又 $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为

$$D: x^2+y^2 \leqslant a^2 \text{ 或 } 0 \leqslant r \leqslant a, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

所以 $$\iint_{\Sigma} (x+y+z) ds$$

$$= \iint_D (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= a\iint_D dxdy + a\iint_D \frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \pi a^3 + a\int_0^{2\pi} (\sin\theta + \cos\theta) d\theta \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = \pi a^3.$$

9.2.4　计算 $\iint\limits_{\Sigma} x ds$，$\Sigma$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限的部分.

解　$\Sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$，$x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$，

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

又 Σ 在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant R^2$，$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，所以

$$\iint\limits_{\Sigma} x ds = \iint_D \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{\pi}{4} R^3.$$

9.2.5　计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{ds}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h (0 < h < a)$ 所截出的顶部.

解　$\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Σ 在 xoy 平面上的投影区域 D_{xy} 是 $x^2 + y^2 \leqslant a^2 - h^2$. 所以

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{ds}{z} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= a\iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{a^2 - x^2 - y^2}$$

采用极坐标计算,得

$$\iint_{\Sigma} \frac{ds}{z} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{rdr}{a-r^2} = 2\pi a \ln \frac{a}{h}.$$

9.2.6 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{ds}{r^2}$,其中 $\sum$ 是界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant R^2$ 的侧面,r 为 $\sum$ 上的点到原点的距离.

解 $\sum$ 在 yoz 平面上的投影 D_{yz} 为矩形区域

$$-R \leqslant y \leqslant R, 0 \leqslant z \leqslant H.$$

由 $x^2+y^2=R^2$ 可得 $x=\sqrt{R^2-y^2}$,从而

$$ds = \sqrt{1+x_z^2+x_y^2}dydz = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz,$$

又 $r^2=x^2+y^2+z^2=R^2+z^2$,由对称性,得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \frac{ds}{r^2} &= 2\iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2+z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}dydz \\ &= 4R\int_0^R \frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}} \int_0^H \frac{dz}{R^2+z^2} = 4R \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{R}\text{arctg}\,\frac{H}{R} \\ &= 2\pi \text{arctg}\,\frac{H}{R}.\end{aligned}$$

9.2.7 计算 $\iint_{\Sigma} |xyz|ds$,其中 $\sum$ 是曲面 $z=x^2+y^2$,$(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

解 $\sum$ 在第一卦限的部分记为 $\sum_1$,$\sum_1$ 在 xoy 平面上的投影区域 D_{xy} 为:$x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$,据对称性有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} |xyz|ds &= 4\iint_{\Sigma_1} xyzds \\ &= 4\iint_{D_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy \\ &= 4\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta \cdot r^2\sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta\end{aligned}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2}dr = 2\int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2}dr$$

设 $\sqrt{1+4r^2} = u$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} |xyz|ds = 2\int_0^1 r^4 \sqrt{1+4r^2} \cdot rdr$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{u^2-1}{4}\right)^2 \cdot u \cdot \frac{1}{4}udu$$

$$= \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt{5}} (u^2-1)^2u^2du$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{25\sqrt{5}}{84} - \frac{1}{420} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

9.2.8　计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds$，其中 $\sum$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的立体的表面.

解　设 $\sum = \sum_1 + \sum_2$，其中 $\sum_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$；$\sum_2: z=1$，它们的交线在 xoy 平面上的投影区域是 $D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$.

对于 $\sum_1$，有 $ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}\,dxdy$，

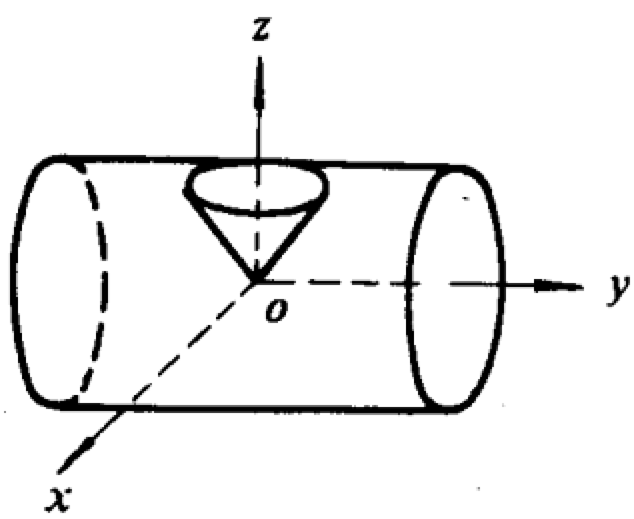
对于 $\sum_2$，有 $ds = 1 \cdot dxdy$.

故有
$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds = \iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)ds + \iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)ds$$

$$= (\sqrt{2}+1)\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy = (\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$= \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1).$$

9.2.9　计算 $\iint\limits_{s}\frac{x^2}{z}ds$，式中 s 为曲面 $x^2+z^2=2az(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割出的部分.



9.2.9 题图

解 圆柱面 $x^2+z^2=2az$ 被圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所割出的部分是在上半圆柱面.

$$z=a+\sqrt{a^2-x^2}$$

上的部分(如图)这两个曲面的交线是

$$\begin{cases}x^2+(z-a)^2=a^2,\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}.$$

消去 z,得到它在 xoy 平面上投影曲线为

$$2x^2+y^2=2a\sqrt{x^2+y^2},$$

这就是积分曲面在 xoy 平面上投影区域 D_{xy} 的边界曲线.

又 $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdy.$

于是 $\displaystyle\iint\limits_{s}\frac{x^2}{z}ds=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^2}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdy$

$$=a\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}-1\right)dxdy.$$

采用极坐标,D_{xy} 的边界曲线的极坐标方程为 $r=\dfrac{2a}{1+\cos^2\theta}$,由对称性,有

$$\iint\limits_{s}\frac{x^2}{z}ds=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\theta}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\theta}}-1\right)rdrd\theta$$

$$=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}d\theta.$$

再令 $\mathrm{tg}\theta=t$,则有

$$\iint\limits_{s}\frac{x^2}{z}ds=8a^3\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(2+t^2)^2}$$

$$=8a^3\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{t}{2+t^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^A$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3.$$

9.2.10　计算 $\iint\limits_{\Sigma} z ds$，$\sum$ 为曲面 $x^2 + z^2 = 2az\ (a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所割出的部分.

解　圆柱面 $x^2 + z^2 = 2az\ (a > 0)$ 与圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的交线为

$$\begin{cases} x^2 + (z - a)^2 = a^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

消去 z，得　$y^2 = 2(a^2 - x^2) + 2a\sqrt{a^2 - x^2}$，

这就是柱面被锥面所割出的部分在 xoy 平面上投影区域的边界曲线.

由 $x^2 + (z - a)^2 = a^2$ 可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z - a}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$，

$$ds = \sqrt{1 + (-\frac{x}{z - a})^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dxdy.$$

又由对称性可知，所求积分等于沿曲面 $\sum$ 在第一卦限部分的积分的 4 倍，所以

$$\iint\limits_{\Sigma} z ds = 4\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{2(a^2 - x^2) + 2a\sqrt{a^2 - x^2}}} (a + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dy}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= 4a\int_0^a \sqrt{2(a^2 - x^2) + 2a\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (a + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

令 $x = a\sin t$，得

$$\iint\limits_{\Sigma} z ds = 4\sqrt{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = \frac{7}{\sqrt{2}}\pi a^3.$$

9.2.11　计算 $\iint\limits_{\Sigma} (xy + yz + zx) ds$，式中 $\sum$ 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下的部分.

解　设 $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 D_{xy}，则 D_{xy} 是由圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所围成的区域.

又 $ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{2}\,dxdy$,所以

$$\iint_{\Sigma}(xy + yz + zx)ds = \sqrt{2}\iint_{D_{xy}}[xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}]dxdy.$$

利用极坐标,D_{xy} 即为由圆 $r = 2a\cos\theta$ 所围成的区域,于是

$$\iint_{\Sigma}(xy + yz + zx)ds$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta + r^2(\sin\theta + \cos\theta)]rdr$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta)d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta + \cos^5\theta)d\theta.$$

因为 $\sin\theta\cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta$ 是奇函数,而 $\cos^5\theta$ 为偶函数,所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta)d\theta = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \sin^2\theta)^2 d\sin\theta = \frac{16}{15}.$$

因此 $$\iint_{\Sigma}(xy + yz + zx)ds = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

9.2.12 空间立体 V 由 $x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0$ 和 $z = 2 + x$ 所围成,S 为 V 的边界曲面,计算 $\iint_S xds$.

解 设 S_1 为 $z = 2 + x$;S_2 为 $x^2 + y^2 = 1$;S_3 为 $z = 0$,则 $S = S_1 + S_2 + S_3$,于是

$$\iint_S xds = \iint_{S_1} xds + \iint_{S_2} xds + \iint_{S_3} xds$$

$$= \iint_{S_{1xy}} x\sqrt{1 + 1 + 0}dxdy + 2\iint_{S_{2zy}} x\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}dxdy$$

$$+\iint_{S_{3xy}} x\sqrt{1+0+0}\,dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{2}\,xdxdy+2\iint_{S_{2xy}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dxdy+\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}xdxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{2}\,xdy+2\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{2+x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dz$$

$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xdy=\pi.$$

9.2.13　设 l 为原点 O 到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的过点 $P(x,y,z)$ 的切平面的垂直距离，求 $\iint_S lds$，式中 S 为上述的椭球面.

解　设切平面上动点的坐标为(X,Y,Z)，则椭球面上的点 $P(x,y,z)$ 的切平面方程为

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

原点 O 到切平面的距离为

$$l=\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{(\frac{x}{a^2})^2+(\frac{y}{b^2})^2+(\frac{z}{c^2})^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}},$$

又 $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+(-\frac{c^2x}{a^2z})^2+(-\frac{c^2y}{b^2z})^2}dxdy$

$$=\frac{c^2}{|z|}\sqrt{\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}dxdy,$$

注意到对称性，有

$$\iint_S lds=8\iint_D\frac{c^2}{|z|}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\cdot\sqrt{\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}dxdy$$

$$=8\iint_D\frac{c^2}{z}dxdy,$$

其中 D 为椭球面在 xoy 平面上投影区域的第一象限部分，再作广义极坐

标变换 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$，则有

$$\iint_S l ds = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{abc}{\sqrt{1-r^2}} r dr = 4abc\pi.$$

9.2.14 计算曲面积分 $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x,y,z)ds$，式中

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2, & 若 z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}; \\ 0, & 若 z < \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

解 圆锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交线记为 l，l 把球面分为两部分，一部分在锥面上方，记为 $\sum_1$，另一部分在锥面下方，记为 $\sum_2$，当点 (x,y,z) 位于 $\sum_1$ 上时，$z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$，$f(x,y,z) = x^2 + y^2$. 而当点 (x,y,z) 位于 $\sum_2$ 上时，$z < \sqrt{x^2+y^2}$，$f(x,y,z) = 0$.

对于曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)ds$ 来说，改变函数 $f(x,y,z)$ 在 l 上的值对它没有影响，故可设 $f(x,y,z)$ 在 l 上的值为零，于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{\Sigma_1} (x^2+y^2)ds.$$

由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z，得到 $\sum_1$ 在 xoy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2 \leqslant (\frac{a}{\sqrt{2}})^2$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} f(x,y,z)ds &= \iint\limits_D (x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \\ &= a\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}} dr d\theta \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \frac{8-5\sqrt{2}}{12} d\theta = \frac{8-5\sqrt{2}}{6}\pi a^4.\end{aligned}$$

9.2.15　计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds$，式中 $\sum$ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及曲面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 所围成的立体的表面.

解　两曲面的交线是

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x^2+y^2+z^2=2Rz.\end{cases}$$

消去 z，得到它在 xoy 平面上的投影曲线为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}R^2$. S_1: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

故 $\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2}(x^2+y^2+R^2-x^2-y^2)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R^3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=R^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=\pi R^4.$$

S_2: $z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $ds=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy.$

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2+z^2)ds=\iint\limits_{S_2}2Rzds$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2}2R(R-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2R^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}-1\right)dxdy$$

$$=2R^3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy-2R^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}R^2}dxdy$$

$$= 2\pi R^4 - \frac{3}{2}\pi R^4 = \frac{\pi}{2}R^4.$$

故 $$\oiint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)ds = \pi R^4 + \frac{\pi}{2}R^4 = \frac{3}{2}\pi R^4.$$

9.2.16 曲面 $z = 13 - x^2 - y^2$ 将球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 分成三部分，求这三部分曲面面积之比.

解 曲面 $z = 13 - x^2 - y^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 的交线分别是

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 4; \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = -3. \end{cases}$$

这两个圆将球面依次分为 S_1、S_2、S_3 三部分，于是

$$S_1 = \iint_{S_1} ds = \iint_{D_1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \iint_{D_1} \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{25 - r^2}}rdr = 10\pi.$$

$$S_3 = \iint_{S_3} ds = \iint_{D_3} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \iint_{D_1} \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - r^2}}rdr = 20\pi.$$

$$S_2 = 4\pi \cdot 5^2 - S_1 - S_3 = 70\pi.$$

所以 $S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 7 : 2.$

9.2.17 已知 s 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，p 为内接于此球面的八面体 $|x| + |y| + |z| = a$ 的表面，求积分 $I_1 = \iint_{s} (x^2 + y^2 + z^2)ds$ 与 $I_2 = \iint_{p} (x^2 + y^2 + z^2)dp$ 相差多少？

解 由对称性可知，

$$I_1 = 8\iint_{s_1} (x^2 + y^2 + z^2)ds_1,$$

$$I_2 = 8\iint_{p_1} (x^2 + y^2 + z^2)dp_1,$$

其中 s_1 和 p_1 分别为 s 和 p 在第一卦限内的部分，即 s_1 为 $x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，

$z \geqslant 0, x^2+y^2+z^2=a^2$, $ds_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$; p_1 为 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, $z \geqslant 0, x+y+z=a$, $dp_1 = \sqrt{3}\,dxdy$.

于是 $$I_1 = 8\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)ds_1 = 8a^3 \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$= 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 4\pi a^4.$$

$$I_2 = 8\iint\limits_{p_1}(x^2+y^2+z^2)dp_1$$

$$= 8\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant a\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\sqrt{3}\,dxdy$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}(2x^2+2y^2+a^2+2xy-2ax-2ay)dy$$

$$= 2\sqrt{3}\,a^4.$$

由此可得 $$I_1 - I_2 = 2(2\pi-\sqrt{3})a^4.$$

即积分 I_1 比 I_2 大 $2(2\pi-\sqrt{3})a^4$.

9.2.18　计算 $\iint\limits_{\Sigma} zds$，其中 Σ 为螺旋面 $x = u\cos v, y = u\sin v$, $z = v$ $(0 < u < a, 0 < v < 2\pi)$ 的一部分.

解　曲面 Σ 是以参数形式给出的，于是

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \sin v & 0 \\ u\cos v & 1 \end{vmatrix} = \sin v,$$

$$\frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & \cos v \\ 1 & -u\cos v \end{vmatrix} = -\cos v,$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u,$$

$$ds = \left[\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dudv$$

$$= \sqrt{1+u^2}dudv,$$

所以　$$\iint\limits_{\Sigma} zds = \int_0^{2\pi} vdv \int_0^a \sqrt{1+u^2}du$$

$$= 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^a$$

$$= \pi^2\left[a\sqrt{a^2+1} + \ln(a+\sqrt{a^2+1})\right].$$

9.2.19　计算 $\iint\limits_{\Sigma} z^2ds$，其中 $\sum$ 为圆锥表面的一部分

$$x = r\cos\varphi\sin\alpha,\ y = r\sin\varphi\sin\alpha,\ z = r\cos\alpha,$$

$(0 \leqslant r \leqslant a, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$，$\alpha$ 为常数$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

解　$\sum$ 由参数形式给出，

$$E = (\frac{\partial x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial y}{\partial r})^2 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2$$

$$= \cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$G = (\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \varphi})^2 + (\frac{\partial z}{\partial \varphi})^2$$

$$= r^2(\sin^2\varphi\sin^2\alpha + \cos^2\varphi\sin^2\alpha) = r^2\sin^2\alpha,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$= -r\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\alpha + r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\alpha = 0,$$

$$ds = \sqrt{EG-F^2}drd\varphi = r\sin\alpha drd\varphi,$$

所以　$$\iint\limits_{\Sigma} z^2ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\cos^2\alpha \cdot r\sin\alpha drd\varphi = \frac{\pi a^4}{2}\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

9.2.20　证明泊松(Poisson)公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)ds = 2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du,$$

其中 $\sum$ 是球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的表面.

证　将坐标系 $oxyz$ 旋转为新坐标系 $ouvw$，且使平面 $ax+by+cz=0$ 成为 vow 面，于是，任一点 $P(x,y,z)$ 到坐标面 vow 的距离为

$$u = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

即　$$ax+by+cz = u\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

由于坐标系的旋转不改变以原点为球心的球面方程，球面$\sum$在新坐标系 $ouvw$ 中的方程为 $u^2+v^2+w^2=1$，从而有

$$w=\pm\sqrt{1-u^2-v^2},\ \sqrt{1+w_u^2+w_v^2}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

又由球面$\sum$关于 vow 平面的对称性及

$$f(ax+by+cz)=f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})$$

关于 w 是偶函数，得

$$\iint\limits_{\sum} f(ax+by+cz)ds=\iint\limits_{\sum} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})ds$$

$$=2\iint\limits_{D_{uv}} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}dudv$$

其中球面$\sum$在 uov 平面上的投影区域 D_{uv} 为：$u^2+v^2\leqslant 1$，把二重积分化为累次积分，并令 $v=\sqrt{1-u^2}\sin\theta$，得

$$\iint\limits_{\sum} f(ax+by+cz)ds=2\int_{-1}^{1}du\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})d\theta$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

9.2.21　设 Ω 是一空间区域，S 是区域 Ω 的边界曲面，函数 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$ 在区域 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数，求证：

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v dv=\oiint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}ds-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dv.$$

其中 $\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$，$\frac{\partial v}{\partial n}$ 代表 v 沿 S 的外法线方向的方向导数.

证　设曲面 S 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与坐标轴 OX、OY、OZ 的夹角分别为 α、β、γ，则

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma,$$

于是

$$\oiint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}ds=\oiint\limits_{S} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma\right)ds$$

$$= \oiint_S u\frac{\partial v}{\partial x}dydz + u\frac{\partial v}{\partial y}dzdx + u\frac{\partial v}{\partial z}dxdy$$

$$= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(u\frac{\partial v}{\partial z})\right]dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}) + u(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2})\right]dv$$

$$= \iiint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dv + \iiint_\Omega u\Delta v dv,$$

移项，得

$$\iiint_\Omega u\Delta v dv = \oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \iiint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})dv.$$

9.2.22　证明：若$\sum$为封闭的简单曲面，l为任何固定的方向，则$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})ds = 0$，式中$\boldsymbol{n}$为曲面$\sum$的外法线向量.

证　因为$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}) = \cos\alpha\cos(\boldsymbol{l},x) + \cos\beta\cos(\boldsymbol{l},y) + \cos\gamma\cos(\boldsymbol{l},z)$，其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为$\boldsymbol{n}$的方向余弦，故

$$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})ds = \iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{l},x)dydz + \cos(\boldsymbol{l},y)dzdx + \cos(\boldsymbol{l},z)dxdy.$$

由于l为固定方向，从而$\cos(\boldsymbol{l},x),\cos(\boldsymbol{l},y),\cos(\boldsymbol{l},z)$均为常数，于是

$$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})ds = \iiint_\Omega \left[\frac{\partial\cos(\boldsymbol{l},x)}{\partial x} + \frac{\partial\cos(\boldsymbol{l},y)}{\partial y} + \frac{\partial\cos(\boldsymbol{l},z)}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$= \iiint_V 0dxdydz = 0.$$

2. 对坐标的(第二型)曲面积分

9.2.23　计算 $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解　把 $\sum$ 分为上半球面 $\sum_1$ 和下半球面 $\sum_2$，$\sum_1$ 的方程为 $z_1=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\sum_2$ 的方程为 $z_2=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，又 $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$，故

$$\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

注　如果只考虑到积分区域是对称的，从而得出积分为 0 的结论是错误的. 但是，如果积分曲面 $\sum$ 取为该球面的上半球面和下半球面的上侧时，则积分为 0，另外，如果 $\sum$ 仍为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，而被积函数取为 z^2，则积分也为 0.

9.2.24　计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，$\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解　由上题，有 $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi a^3$. 再由对称性，有

$$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

所以
$$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\oiint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi a^3.$$

9.2.25 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，$\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的四分之一，取球面的外侧为正侧.

解 $\sum=\sum_1+\sum_2$，其中 $\sum_1$ 为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧，它的外法线与 z 轴正向成锐角；$\sum_2$ 为 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的下侧，它的外法线与 z 轴正向成钝角.

又 $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 D：$x^2+y^2\leqslant R^2$，$x\geqslant 0,y\geqslant 0$，从而

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy+\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy$$

$$=\iint\limits_{D} xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_{D} xy(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D} xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^R r^3\sqrt{R^2-r^2}dr=\frac{2}{15}R^5.$$

9.2.26 计算 $\iint\limits_{S} xz^2dydz$，$S$ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解法1 设 S_1 为前半面 $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ $(z\geqslant 0)$，S_2 为后半面 $x=-\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ $(z\geqslant 0)$. S 在 yoz 平面上的投影区域为 D，则有

$$\iint\limits_{S} xz^2dydz=\iint\limits_{S_1} xz^2dydz+\iint\limits_{S_2} xz^2dydz$$

$$=\iint\limits_{D} z^2\sqrt{R^2-y^2-z^2}dydz-\iint\limits_{D} z^2(-\sqrt{R^2-y^2-z^2})dydz$$

$$=2\iint\limits_{D} z^2\sqrt{R^2-y^2-z^2}dydz$$

$$=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R(r\sin\theta)^2\sqrt{R^2-r^2}rdr=\frac{2}{15}\pi R^5.$$

解法2 设 S 在 xoy 平面上的截面为 S_1，S 与 S_1 所围成的空间区域为 Ω，则由奥—高公式有

$$\iint_S xz^2 dydz = \iiint_\Omega z^2 dxdydz - \iint_{S_1} xz^2 dydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin\varphi dr = \frac{2}{15}\pi R^5.$$

9.2.27　计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2zdxdy$，$\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 下半部分的下侧.

解　$\sum$ 为 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的下侧，它在 xoy 平面上的投影区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$，因此

$$\iint_\Sigma x^2y^2zdxdy = -\iint_D x^2y^2(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$= \iint_D r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{a^2-r^2}\cdot rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^5\sqrt{a^2-r^2}dr = \frac{\pi}{4}\,\frac{8a^7}{105} = \frac{2}{105}\pi a^7.$$

9.2.28　计算 $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy$，

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解　由被积函数关于 x、y、z 的轮换对称性，有

$$\oiint_\Sigma \frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy = 3\oiint_\Sigma \frac{z}{r^3}dxdy$$

$$= 3\left(\iint_{\Sigma_上}\frac{z}{r^3}dxdy + \iint_{\Sigma_下}\frac{z}{r^3}dxdy\right)$$

$$= 3\left(\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a^3}dxdy - \iint_{D_{xy}}\frac{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a^3}dxdy\right)$$

$$= \frac{6}{a^3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = \frac{6}{a^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho$$

$$= \frac{6}{a^3}\cdot\frac{2}{3}\pi a^3 = 4\pi.$$

9.2.29 已知曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，$\sum$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧.

(1) 直接求这个曲面积分的值；

(2) 用奥一高公式验证所求的值.

解 (1) 令 $\sum = \sum_1 + \sum_2$，其中 $\sum_1$ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ 的上侧，$\sum_2$ 为下半球面 $z = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ 的下侧.

又 $\sum$ 在 xoy 平面上投影区域 D 为 $x^2 + y^2 \leqslant R^2$，从而

$$\oiint\limits_{\Sigma} z^3dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} z^3dxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} z^3dxdy$$

$$= \iint\limits_{D} (\sqrt{R^2 - x^2 - y})^3dxdy - \iint\limits_{D} (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D} (R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}dxdy$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2)^{3/2} rdr = \frac{4\pi}{5}R^5.$$

再由对称性，有

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3dxdy = \iint\limits_{\Sigma} y^3dzdx = \frac{4\pi}{5}R^5,$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \frac{12\pi}{5}R^5$

(2) 由奥一高公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint\limits_{V} 3(x^2 + y^2 + z^2)dv$$

$$= 3\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2dr = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

9.2.30 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，$\sum$ 是球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ 的外侧.

解法 1　$\sum=\sum_1+\sum_2$,其中$\sum_1$为上半球面 $z=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 的上侧,$\sum_2$为下半球面 $z=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 的下侧.

$\sum_1$与$\sum_2$在 xoy 平面上的投影区域为 D:

$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2.$$

故
$$\iint_{\Sigma} z^2dxdy=\iint_{\Sigma_1} z^2dxdy+\iint_{\Sigma_2} z^2dxdy$$
$$=\iint_D [c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$
$$-\iint_D [c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$
$$=4c\iint_D \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}dxdy$$
$$=4c\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}rdr=\frac{8}{3}\pi cR^3.$$

由对称性可知

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz=\frac{8}{3}\pi aR^3,\ \iint_{\Sigma} y^2dxdz=\frac{8}{3}\pi bR^3.$$

所以
$$\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3.$$

解法 2　由奥一高公式得

$$\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy=\iiint_{\Omega} (2x+2y+2z)dv$$
$$=2\iiint_{\Omega} [(x-a)+(y-b)+(z-c)+(a+b+c)]dv.$$

由积分区域的对称性,有

$$\iiint_{\Omega} (x-a)dv=0,\iiint_{\Omega} (y-b)dv=0,\iiint_{\Omega} (z-c)dv=0.$$

而
$$\iiint_{\Omega} dv=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy = \frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3.$

9.2.31 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz$，$\sum$ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $x \geqslant 0$ 的部分. 取椭球面外侧为正侧.

解 因为 $x \geqslant 0$，故 $\sum$ 的方程为 $x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$，$\sum$ 在 yoz 平面上的投影区域 D 为：

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

从而
$$\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz = a^3\iint\limits_{D}(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2})^{3/2}dydz.$$

令 $y = br\cos\theta, z = cr\sin\theta$，则 $dydz = bcrdrd\theta$，故

$$\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz = a^3\iint\limits_{D}(1-r^2)^{3/2}bcrdrd\theta$$

$$= a^3bc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)^{3/2}rdr = \frac{2}{5}\pi a^3bc.$$

9.2.32 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$，$\sum$ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面.

解 令 $\sum = \sum_1 + \sum_2$，其中 $\sum_1$ 为上半椭球面 $z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的上侧，$\sum_2$ 为下半椭球面 $z_2 = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的下侧.

$\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 D：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$，从而

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dxdy}{z} = \iint\limits_{\Sigma_1}\frac{dxdy}{z_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{dxdy}{z_2}$$

$$= 2\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = 2\iint\limits_{D}\frac{abrdrd\theta}{c\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c}.$$

同理可得 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}=\frac{4\pi bc}{a}$，　$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dxdz}{y}=\frac{4\pi ac}{b}$.

所以　$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}=4\pi(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}).$$

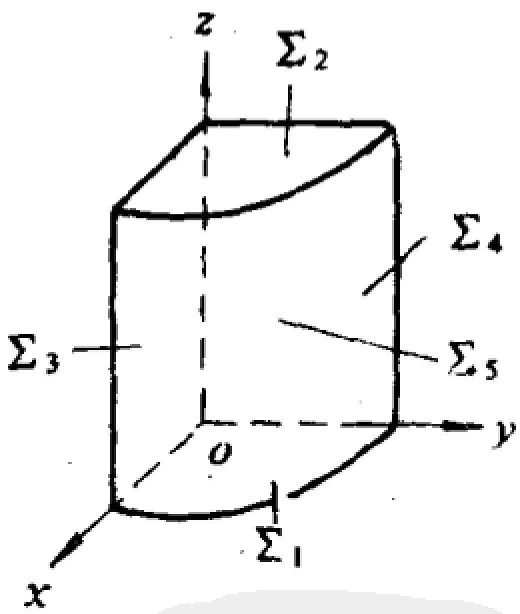
9.2.33　计算 $\iint\limits_{\Sigma}yzdxdy+zxdydz+xydzdx$，$\sum$ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$、平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $z=h$ 所围在第一卦限中的一块立体的表面外侧.

解　如图所示，$\sum=\sum_1+\sum_2+\sum_3+\sum_4+\sum_5$，其中，

$\sum_1:z=0$；$\sum_2:z=h$

$\sum_3:y=0$；$\sum_4:x=0$；

$\sum_5:x^2+y^2=R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0.$



9.2.33 题图

$$\iint\limits_{\Sigma}yzdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}yzdxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}yzdxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}y\cdot 0dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}hydxdy$$

$$=h\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R r^2\sin\theta dr=\frac{h}{3}R^3,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}zxdydz=\iint\limits_{\Sigma_4}zxdydz+\iint\limits_{\Sigma_5}zxdydz$$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}}z\cdot 0dydz+\iint\limits_{D_{yz}}z\sqrt{R^2-y^2}dydz$$

$$=\int_0^R dy\int_0^h z\sqrt{R^2-y^2}dz=\frac{\pi}{8}R^2h^2;$$

$$\iint\limits_{\Sigma}xydzdx=\iint\limits_{\Sigma_3}xydzdx+\iint\limits_{\Sigma_5}xydzdx$$

$$= -\iint_{D_{xz}} x \cdot 0 dzdx + \iint_{D_{zx}} x\sqrt{R^2 - x^2} dzdx$$

$$= \int_0^h dz \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{h}{3}R^3.$$

故 $\iint\limits_{\Sigma} yzdxdy + zxdydz + xydzdx = hR^2(\frac{2R}{3} + \frac{\pi h}{8}).$

9.2.34 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} z\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy$，$\sum$ 是由圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 与平面 $z = h_1, z = h_2 (h_2 > h_1 > 0)$ 所围成的立体表面的外侧.

解 $\sum = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3$，其中 $\sum_1$ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 的外侧，$\sum_2$ 为平面 $z = h_2$ 的上侧，$\sum_3$ 为平面 $z = h_1$ 的下侧.

$\sum_1$ 在 xoy 平面上的投影为圆周 $x^2 + y^2 = ax$，故

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = 0,$$

而 $\sum_2, \sum_3$ 在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant ax$，所以

$$\iint\limits_{\Sigma_2} z\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = h_2 \iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy$$

$$= h_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot rdr$$

$$= h_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$

$$= -\frac{2}{3} a^3 h_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1) d\theta = \frac{1}{9} h_2 (3\pi - 4) a^3.$$

同理可得

$$\iint\limits_{\Sigma_3} z\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy$$

$$= -h_1 \iint\limits_{D} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy = -\frac{1}{9} h_2 (3\pi - 4) a^3.$$

所以 $\oiint\limits_{\Sigma} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$

$$+\iint\limits_{\Sigma_2} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy + \iint\limits_{\Sigma_3} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{9}(h_2-h_1)(3\pi-4)a^3.$$

9.2.35　计算 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$，$\sum$ 是 $z=x^2+y^2$ 在第一卦限中 $0\leqslant z\leqslant 1$ 部分的上侧面.

解　$\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 D_{xy}：

$$x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0.$$

故　$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr = \frac{\pi}{8}.$$

又 $\sum$ 在 yoz 平面上的投影区域为 D_{yz}：$y^2\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，故

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz = -\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}dzdy = -\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2}dz = -\frac{\pi}{8}.$$

最后，$\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 D_{xz}：$x^2\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1$，故

$$\iint\limits_{\Sigma} ydxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{z-x^2}dzdx = -\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \sqrt{z-x^2}dz = -\frac{\pi}{8}.$$

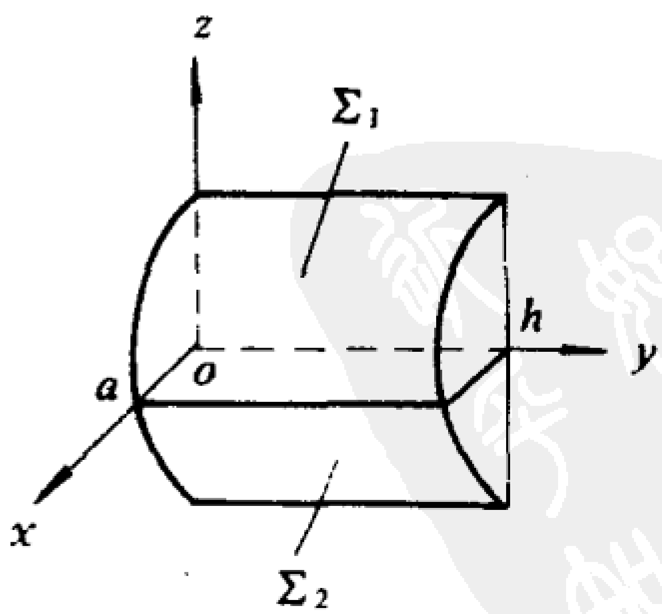
所以　$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$$

$$= -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{8}.$$

9.2.36　计算

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy + ydydz,$$

$\sum$ 是柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 两卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下部分的外侧.



9.2.36 题图

解 先计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$. $\sum$ 可看作由 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 两半片所连成. $\sum_1$ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2}$ 的上侧, $\sum_2$ 为 $z=-\sqrt{a^2-x^2}$ 的下侧, $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant h$, 故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy &= \iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2}dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{a^2-x^2})dxdy \\ &= 2\iint\limits_{D} xy\sqrt{a^2-x^2}dxdy = 2\int_0^a dx\int_0^h y\sqrt{a^2-x^2}dy = \frac{1}{3}a^3h^2.\end{aligned}$$

再计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} ydydz$, 这时 $\sum$ 为 $x=\sqrt{a^2-z^2}$ 的前侧, 它在 yoz 平面上的投影区域 D_{yz} 为: $0\leqslant y\leqslant h, -a\leqslant z\leqslant a$, 故

$$\iint\limits_{\Sigma} ydydz = \iint\limits_{D_{yz}} ydydz = \int_{-a}^a dz\int_0^h ydy = ah^2.$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy + ydydz = \frac{1}{3}a^3h^2 + ah^2.$$

9.2.37 已知 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数, 计算

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy,$$

$\sum$ 为平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的外表面.

解 先计算 $\iint\limits_{\Sigma} h(z)dxdy$, $\sum$ 是由 $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \sum_4, \sum_5, \sum_6$ 六个平面所围成的.

$\sum_1: x=0$ 取后侧; $\sum_2: x=a$ 取前侧;

$\sum_3: y=0$ 取左侧; $\sum_4: y=a$ 取右侧;

$\sum_5: z=0$ 取下侧; $\sum_6: z=a$ 取上侧;

由于 $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \sum_4$ 在 xoy 平面上的投影区域是一线段, 故

$$\iint\limits_{\Sigma_1} h(z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma_2} h(z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma_3} h(z)dxdy = \iint\limits_{\Sigma_4} h(z)dxdy = 0.$$

又 $$\iint\limits_{\Sigma_5} h(z)dxdy = -h(0)\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}} dxdy = -abh(0),$$

$$\iint\limits_{\Sigma_6} h(z)dxdy = h(c)\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}} dxdy = abh(c).$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} h(z)dxdy = [h(c) - h(0)]ab.$$

同理可得 $$\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz = [f(a) - f(0)]bc,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} g(y)dxdz = [g(b) - g(0)]ac.$$

所以 $$\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy$$

$$= abc\left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right].$$

9.2.38 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2dxdz + (y^2 + xz)dxdy$，$\sum$ 为 9.2.37 题中的曲面.

解 组成 $\sum$ 的六个平面 $\sum_1, \sum_2, \cdots, \sum_6$ 如 9.2.37 题.

解法 1 分别计算三个积分 $\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)dydz$，$\oiint\limits_{\Sigma} x^2dxdz$，$\oiint\limits_{\Sigma} (y^2 + xz)dxdy$，然后将所得结果相加.

先计算 $\oiint\limits_{\Sigma} (y^2 + xz)dxdy$，

由于 $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \sum_4$ 在 xoy 平面上的投影是线段，其面积为零，而 $\sum_5, \sum_6$ 在 xoy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a$. 因此

$$\oiint_{\Sigma}(y^2+xz)dxdy=\iint_{\Sigma_5}(y^2+xz)dxdy+\iint_{\Sigma_6}(y^2+xz)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(y^2+0\cdot)dxdy+\iint_{D_{xy}}(y^2+ax)dxdy$$

$$=-\int_0^a dx\int_0^a y^2dy+\int_0^a dx\int_0^a(y^2+ax)dy=\frac{a^4}{2}.$$

同理可得 $\oiint_{\Sigma}y(x-z)dydz=\frac{a^4}{2}$, $\oiint_{\Sigma}x^2dzdx=0$.

所以 $\oiint_{\Sigma}y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy=\frac{a^4}{2}+0+\frac{a^4}{2}=a^4$.

解法 2 分别对每个平面 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_6$ 计算积分

$$\iint_{\Sigma_i}y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy,$$

然后把所得结果相加.

$$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_1}y(x-z)dydz=-\iint_{D_{yz}}y(0-z)dydz$$

$$=\int_0^a ydy\int_0^a zdz=\frac{a^4}{4};$$

$$\iint_{\Sigma_2}=\iint_{\Sigma_2}y(x-z)dydz=\iint_{D_{yz}}y(a-z)dydz$$

$$=\int_0^a ydy\int_0^a(a-z)dz=\frac{a^4}{4};$$

$$\iint_{\Sigma_3}=\iint_{\Sigma_3}x^2dzdx=-\iint_{D_{zx}}x^2dzdx=-\frac{a^4}{3};$$

$$\iint_{\Sigma_4}=\iint_{\Sigma_4}x^2dzdx=\iint_{D_{zx}}x^2dzdx=\frac{a^4}{3};$$

$$\iint_{\Sigma_5}=\iint_{\Sigma_5}(y^2+xz)dxdy=\iint_{D_{xy}}(y^2+0)dxdy=-\frac{a^4}{3};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_6} = \iint\limits_{\Sigma_6}(y^2+xz)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}(y^2+ax)dxdy = \frac{5}{6}a^4.$$

所以 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy = a^4.$

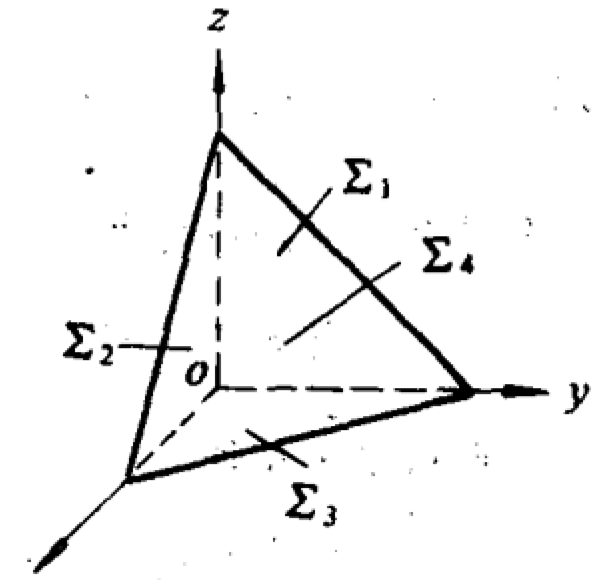
9.2.39　计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$，$\sum$ 是平面 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，及 $z=0$ 所围成的立体表面的外侧.

解　如图所示，$\sum=\sum_1+\sum_2+\sum_3+\sum_4$，其中，

$\sum_1$ 为平面 $x=0$，它在 zox 平面上的投影区域面积为零；

$\sum_2$ 为平面 $y=0$，它在 xoy 平面上的投影区域面积为零；

$\sum_3$ 为平面 $z=0$，它在 yoz 平面上的投影区域面积为零；



9.2.39 题图

$\sum_4$ 为平面 $x+y+z=1$，它在各坐标平面上的投影分别为 D_{xy}，D_{yz}，D_{zx}. 由此可得

$$\iint\limits_{\Sigma_i} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = 0, \quad (i=1,2,3).$$

$$\iint\limits_{\Sigma_4} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$$

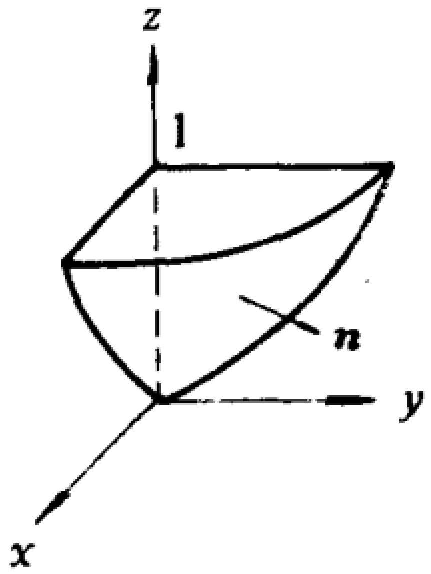
$$= \iint\limits_{D_{xy}} x(1-x-y)dxdy + \iint\limits_{D_{yz}}(1-y-z)ydydz + \iint\limits_{D_{zx}}(1-x-z)zdzdx$$

$$= 3\iint\limits_{D_{xy}} x(1-x-y)dxdy = 3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = \frac{1}{8}.$$

9.2.40 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，$\sum$ 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 在第一卦限中 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 之间部分的下侧.



9.2.40 题图

解 $\sum$ 的法线方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{2y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}},$$

又 $ds = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$，

由两类曲面积分之间的关系有

$$I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \frac{2x^2 + 2y^2 - z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}ds = \iint\limits_{D_{xy}} (2x^2 + 2y^2 - x - y)dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} r^2 \cdot rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8}.$$

9.2.41 计算 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx$，$\sum$ 是曲面 $z = x^2 + y^2$，$z \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 部分的上侧.

解 $\sum$ 在 xoy 平面、yoz 平面、zox 平面上的投影区域分别是 D_1：$x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$；$D_2$：$y^2 \leqslant z \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 和 D_3：$x^2 \leqslant z \leqslant 1$，

$0 \leqslant x \leqslant 1$. 积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdxdy$ 是取在 $\sum$ 的上侧，所以

$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy = \iint\limits_{D_1}(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8};$$

积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz$ 和 $\iint\limits_{\Sigma} ydzdx$ 分别取在 $\sum$ 的后侧和左侧，所以

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz = -\iint\limits_{D_2} \sqrt{z - y^2}dydz = -\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z - y^2}dz = -\frac{\pi}{8};$$

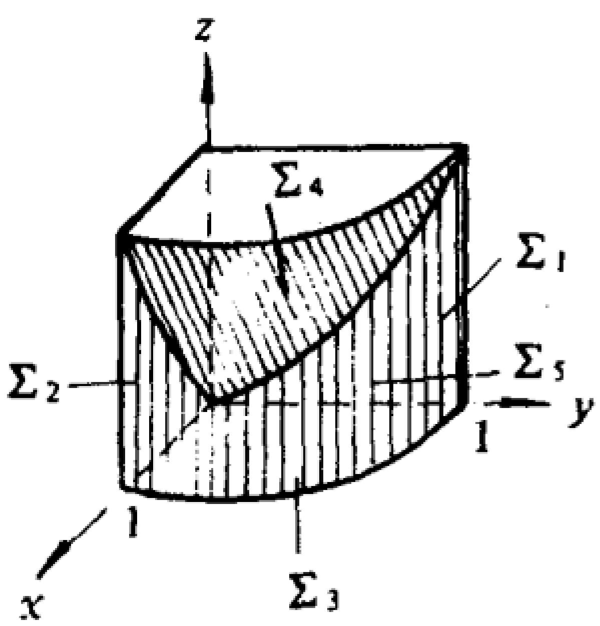
$$\iint\limits_{\Sigma} ydzdx = -\iint\limits_{D_3} \sqrt{z - x^2}dzdx = -\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{z - x^2}dz = -\frac{\pi}{8}.$$

于是
$$\iint\limits_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydzdx = -\frac{\pi}{8}.$$

9.2.42　计算

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz,$$

$\sum$ 是由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$，圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和坐标平面在第一卦限中所围曲面的外侧.



9.2.42 题图

解法1　如图所示，$\sum = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 + \sum_5$，其中，

$$\textstyle\sum_1: x = 0; \sum_2: y = 0; \sum_3: z = 0;$$

$$\textstyle\sum_4: z = x^2 + y^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0;$$

$$\textstyle\sum_5: x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$

相应于 $\sum$ 外侧的确定侧如右图所示. 设 $\sum_4$ 在三个坐标平面上的投影区域分别为 D_{xy}、D_{yz}、D_{zx}，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2 z dx dy = \iint\limits_{\Sigma_4} y^2 z dx dy + \iint\limits_{\Sigma_3} y^2 z dx dy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} y^2(x^2+y^2) dx dy + \iint\limits_{D_{xy}} y^2 \cdot 0 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{\pi}{24};$$

$$\iint\limits_{\Sigma} xz dy dz = \iint\limits_{\Sigma_4} xz dy dz + \iint\limits_{\Sigma_5} xz dy dz + \iint\limits_{\Sigma_1} xz dy dz$$

$$= -\iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{z-y^2} dy dz + \int_0^1 z dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy + \iint\limits_{D_{yz}} 0 \cdot z dy dz$$

$$= -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24};$$

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 y dx dz = \iint\limits_{\Sigma_4} x^2 y dx dz + \iint\limits_{\Sigma_5} x^2 y dx dz + \iint\limits_{\Sigma_2} x^2 y dx dz$$

$$= -\iint\limits_{D_{xz}} x^2\sqrt{z-x^2} dx dz + \int_0^1 dz \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx + \iint\limits_{D_{xz}} x^2 \cdot 0 dx dz$$

$$= \frac{\pi}{24}.$$

故
$$\iint\limits_{\Sigma} y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}.$$

解法 2　设$\sum$在三个坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 及曲面 $z=x^2+y^2$、$x^2+y^2=1$ 上的部分分别为$\sum_1$、$\sum_2$、$\sum_3$、$\sum_4$ 和$\sum_5$，容易得到

$$\iint\limits_{\Sigma_i} y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz = 0, (i=1,2,3),$$

设$\sum_4$在三个坐标面上的投影区域分别为 D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}，则

$$\iint\limits_{\Sigma_4} y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} y^2(x^2+y^2) dx dy - \iint\limits_{D_{yz}} z\sqrt{z-y^2} dy dz - \iint\limits_{D_{zx}} x^2\sqrt{z-x^2} dx dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^5 dr - \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 z\sqrt{z-y^2} dz - \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^1 \sqrt{z-x^2} dz$$

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{48}=-\frac{\pi}{16};$$

又 $$\iint\limits_{\Sigma_4} y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$$

$$=\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy\int_0^1 zdz+\int_0^1 dz\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}=\frac{3\pi}{16}.$$

所以 $$\iint\limits_{\Sigma} y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz=-\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{8}.$$

9.2.43 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$，其中 $\sum$ 为圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面.

解 令 $\sum=\sum_1+\sum_2$，其中 $\sum_1$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的下侧，$\sum_2$ 是平面 $z=h$ 的上侧.

$\sum_1$ 和 $\sum_2$ 在 xoy 平面上有相同的投影区域 $D: x^2+y^2=h^2$. 故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(x-y)dxdy+\iint\limits_{\Sigma_2}(x-y)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D}(x-y)dxdy+\iint\limits_{D}(x-y)dxdy=0.$$

又 $\sum$ 可以分为 S_1、S_2 和 S_3，其中 S_1 为平面 $z=h$ 的上侧，S_2 为圆锥面 $x=\sqrt{z^2-y^2}$ 的前侧，S_3 为圆锥面 $x=-\sqrt{z^2-y^2}$ 的后侧.

S_1 在 yoz 平面上的投影为线段，S_2 和 S_3 在 yoz 平面上有相同的投影区域(三角形)D_1，故

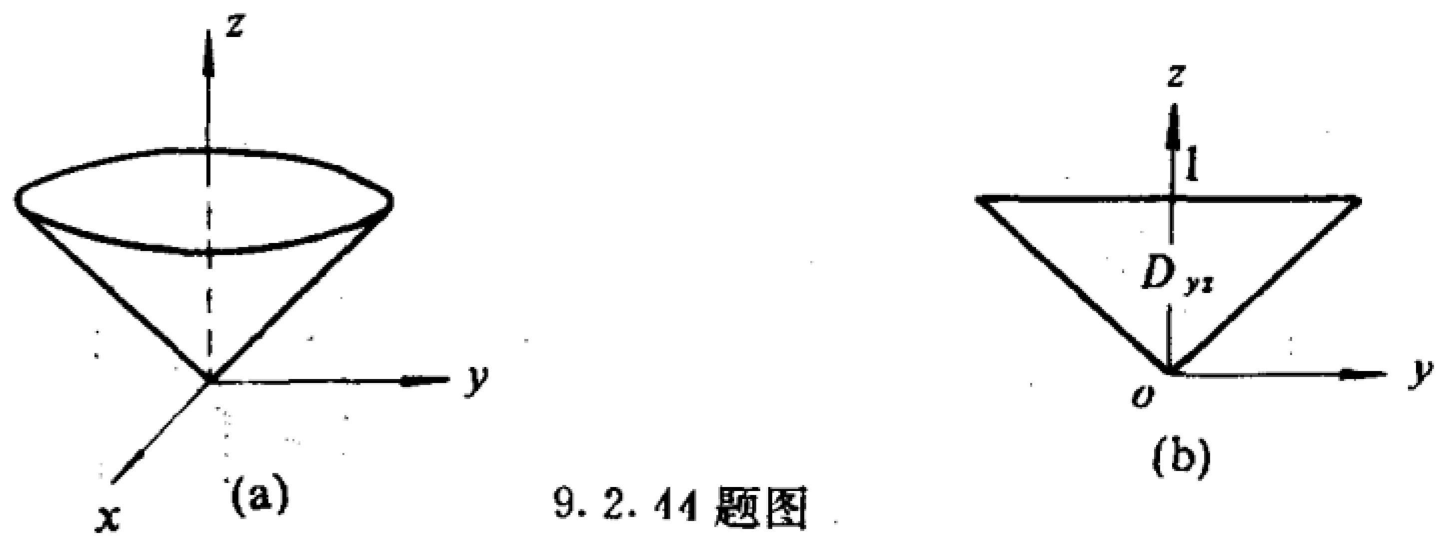
$$\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz$$

$$=\iint\limits_{S_1}(y-z)dydz+\iint\limits_{S_2}(y-z)dydz+\iint\limits_{S_3}(y-z)dydz$$

$$=0+\iint\limits_{D_1}(y-z)dydz-\iint\limits_{D_1}(y-z)dydz=0.$$

同理可得
$$\iint_{\Sigma}(z-x)dxdz=0,$$
所以
$$\iint_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy=0.$$

9.2.44 计算 $\iint_S x^3dydz$，S 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 之间部分的下侧.



9.2.44 题图

解 锥面 S 的方程为 $x=\pm\sqrt{z^2-y^2}$，S 可分为 $S_1:x=\sqrt{z^2-y^2}$ 和 $S_2:x=-\sqrt{z^2-y^2}$ 两部分，其中 $0\leqslant z\leqslant 1, z\geqslant |y|$. 故有
$$\iint_S x^3dydz=\iint_{S_{1下}}x^3dydz+\iint_{S_{2下}}x^3dydz$$
$$=\iint_{D_{yz}}(\sqrt{z^2-y^2})^3dydz+\iint_{D_{yz}}(-\sqrt{z^2-y^2})^3(-dydz)$$
$$=2\iint_{D_{yz}}(z^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dydz=2\int_0^1dz\int_{-z}^{z}(z^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dydz$$
$$=4\int_0^1dz\int_0^z(z^2-y^2)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{3}{20}\pi.$$

9.2.45 计算 $\iint_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，$\sum$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1, z=2$ 所围成的立体表面的外侧.

解 如图所示，$\sum=\sum_1+\sum_2+\sum_3$，其中 $\sum_1$ 为平面 $z=2$ 的上侧，它在 xoy 平面上的投影为圆

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 2.$$

$\sum_3$ 为平面 $z = 1$ 的下侧，它在 xoy 平面上的投影为圆

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 2, \text{法线与 } z \text{ 轴反向},$$

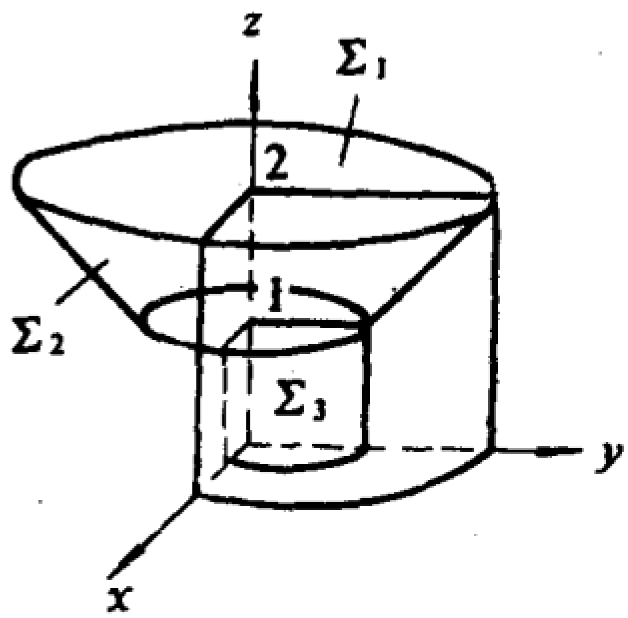
$\sum_2$ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$，它在 xoy 平面上的投影区域为圆环：

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 1 \leqslant r \leqslant 2, \text{法线与 } z \text{ 轴成钝角},$$

于是 $$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = e^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{1}{r} \cdot r dr = 4\pi e^2;$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 e^r dr = -2\pi(e^2 - e);$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = -e \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr = -2\pi e.$$



9.2.45 题图

故 $$\iint\limits_{\Sigma} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = 4\pi e^2 - 2\pi(e^2 - e) - 2\pi e = 2\pi e^2.$$

3. 奥一高公式与斯托克斯公式

(1) 奥 — 高公式

9.2.46　用奥 — 高公式计算 $\iint\limits_{\Sigma} xydxdy + xzdxdz + yzdydz$，$\sum$ 是光滑的闭曲面.

解　设 $\sum$ 包围的有界区域为 V，由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$，故得

$$\iint\limits_{\Sigma} xydxdy + xzdxdz + yzdydz = \iiint\limits_{V} 0 \cdot dxdydz = 0.$$

9.2.47　利用奥 — 高公式计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，

$\sum$ 为平面 $x=0$、$y=0$、$z=0$、$x=a$、$y=a$ 及 $z=a$ 所围成的立体的表面外侧.

解　因 $P=x^2, Q=y^2, R=z^2$，故

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)$$

于是
$$\iint_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$$

$$=2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz=3a^4.$$

9.2.48　利用奥一高公式计算 $\iint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，$\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解　由奥一高公式，有

$$\iint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=3\cdot 2\cdot 2\pi\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

9.2.49　计算

$$\iint_{\Sigma} x(x^2+1)dydz+y(y^2+2)dzdx+z(z^2+3)dxdy,$$

$\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解　因 $P=x(x^2+1), Q=y(y^2+2), R=z(z^2+3)$，故

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2+1, \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2+2, \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2+3.$$

设球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 包围的区域为 Ω，应用奥一高公式并采用球面坐标，有

$$\iint_{\Sigma} x(x^2+1)dydz+y(y^2+2)dzdx+z(z^2+3)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2+6)dxdydz$$

$$= 3\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz + 6\iiint_{\Omega} dxdydz$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr + 6 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{12}{5}\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{52}{5}\pi.$$

9.2.50　计算

$$I = \oiint_{\Sigma} xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy,$$

$\sum$ 是 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = 0$ 所围成的半球域的整个边界(沿曲面的外侧).

解法 1　由奥—高公式,有

$$I = \oiint_{\Sigma} xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} [\frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2xy + y^2z)]dv$$

$$= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dv = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \frac{2}{5}\pi a^5.$$

解法 2　设 $\sum_1$ 是上半球面的外侧,$\sum_2$ 是底($z = 0$) 的下侧,则

$$\iint_{\Sigma_1} xz^2dydz + (x^2y - z^3)dzdx + (2xy + y^2z)dxdy$$

$$= 2\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2 \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}dzdy$$

$$- 2\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} z^2(-\sqrt{a^2 - y^2 - z^2})dydz$$

$$+ 2\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} (x^2\sqrt{a^2 - x^2 - z^2} - z^3)dzdx$$

$$- 2\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} [x^2(-\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}) - z^3]dzdx$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(2xy+y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2})dxdy$$

$$=4\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}z^2\sqrt{a^2-y^2-z^2}dzdy$$

$$+4\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}x^2(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})dzdx$$

$$+4\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=12\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$$

$$=12\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\sin^2\theta\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

9.2.51 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，$\sum$ 为曲面 $z^2=x^2+y^2$，$z=1,z=2$ 所围立体表面的外侧.

解 由奥—高公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$=3\int_1^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z(r^2+z^2)rdr=6\pi\cdot\frac{3}{4}\int_1^2z^4dz=\frac{279}{10}\pi.$$

9.2.52 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，$\sum$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 及 $z=2$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 该积分只有一项，即 $P=0,Q=0,R=\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$，应用奥—高公式并采用柱面坐标，得

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iiint\limits_{\Omega}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}e^zdrd\theta dz=\int_1^2e^zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^zdr=2\pi e^2.$$

9.2.53 利用奥—高公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma} (x-y)dxdy + (y-z)xdydz,$$

$\sum$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,z=3$ 所围成的立体表面外侧.

解　因 $P=x(y-z),Q=0,R=x-y$, 故

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y-z,$$

于是 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (x-y)dxdy+(y-z)xdydz=\iiint\limits_{\Omega} (y-z)dxdydz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^3(r\sin\theta-z)dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(3r^2\sin\theta-\frac{9}{2}r)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\frac{9}{4})d\theta=-\frac{9}{2}\pi.$$

9.2.54　设 $f(u)$ 具有连续导函数,计算曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+\left[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3\right]dzdx+\left[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3\right]dxdy,$$

$\sum$ 为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1,x^2+y^2+z^2=4$ 所围成立体表面的外侧.

解　$P=x^3,Q=\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3,R=\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3$,在所给立体内满足奥－高公式的条件,即

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2$$

在立体内连续,应用奥－高公式,有

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+\left[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3\right]dzdx+\left[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3\right]dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[3x^2+\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2\right]dxdydz$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_1^2\rho^4d\rho$$

$$= 3 \times 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{31}{5} = \frac{93}{5}(2 - \sqrt{2})\pi.$$

9.2.55 设 $f(u)$ 有连续的导数,计算

$$I = \oiint_{\Sigma} \frac{1}{y}f(\frac{x}{y})dydz + \frac{1}{x}f(\frac{x}{y})dzdx + zdxdy.$$

$\sum$ 是由 $y = x^2 + z^2$ 和 $y = 8 - x^2 - z^2$ 所围成的立体的外侧.

解 设 Ω 是 $\sum$ 所围成的区域,它在 xoz 平面上的投影为

$$x^2 + z^2 = 4.$$

由奥 — 高公式,有

$$I = \iiint_{\Omega} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})\right] + \frac{\partial}{\partial z}(z)\right\}dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y}) - \frac{1}{y^2}f'(\frac{x}{y}) + 1\right]dxdydz = \iiint_{\Omega} dxdydz.$$

采用柱面坐标 $z = r\cos\theta, x = r\sin\theta, y = y$,则有

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{r^2}^{8-r^2} rdy = 2\pi \int_0^2 (8 - 2r^3)dr = 16\pi.$$

9.2.56 计算 $\oiint_{\Sigma}\left(\frac{x^2y}{2}\cos\alpha + \frac{y^2z}{2}\cos\beta + \frac{z^2x}{2}\cos\gamma\right)ds$, $\sum$ 是由 $x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z = 0, z = 1$ 所围成的曲面, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是此曲面外法线的方向余弦.

解 由奥 — 高公式,有

$$\oiint_{\Sigma}\left(\frac{x^2y}{2}\cos\alpha + \frac{y^2z}{2}\cos\beta + \frac{z^2x}{2}\cos\gamma\right)ds$$

$$= \iiint_{V} (xy + yz + zx)dxdydz$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\sin\varphi\cos\varphi + zr\sin\varphi + zr\cos\varphi)rd\varphi$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^1 (\frac{r^3}{2} + 2zr^2)dr = \int_0^1 (\frac{1}{8} + \frac{2}{3}z)dz = \frac{11}{24}.$$

9.2.57 计算

$$\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds,$$

$\sum$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2(a > 0)$，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 $\sum$ 的外法线的方向余弦.

解　由奥－高公式，有

$$\iint_{\Sigma}(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds = 3\iiint_{V}(x^2 + y^2 + z^2)dv$$

（其中 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$）

$$= 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^3\sin\varphi dr = 3\pi a^4.$$

9.2.58　应用奥－高公式变换积分

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)ds,$$

$\sum$ 是光滑的闭曲面，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为曲面 $\sum$ 的外法线的方向余弦.

解　由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$，故有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)ds = \iiint_{\Omega}\Delta u dxdydz.$$

这里 Ω 是 $\sum$ 包围的有界区域.

9.2.59　应用奥－高公式变换曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}ds,$$

$\sum$ 是光滑闭曲面，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为曲面 $\sum$ 的外法线的方向余弦.

解　由于

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

从而
$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

于是有
$$\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}ds = 2\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

这里 Ω 是$\sum$包围的有界区域.

9.2.60　计算 $\iint\limits_{\Sigma} xzdydz + yzdxdz + z\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，，$\sum$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=4a^2$ 及 $z\geqslant 0$ 的锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 所围成立体表面的外侧.

解　设 Ω 为所给曲面围成的空间区域，由奥一高公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma} xzdydz + yzdxdz + z\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(z+z+\sqrt{x^2+y^2})dv,$$

采用球面坐标 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$，有

$$\iint\limits_{\Sigma} xzdydz + yzdxdz + z\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2r\cos\varphi + r\sin\varphi)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_a^{2a}r^3(\sin2\varphi+\sin^2\varphi)dr=\frac{15}{8}\pi a^4(1+\frac{\pi}{2}).$$

9.2.61　利用奥一高公式计算

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma\right]ds,$$

$\sum$是任意光滑闭曲面，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为曲面$\sum$的外法线的方向余弦.

解　记 $P^*=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}$, $Q^*=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}$, $R^*=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$,

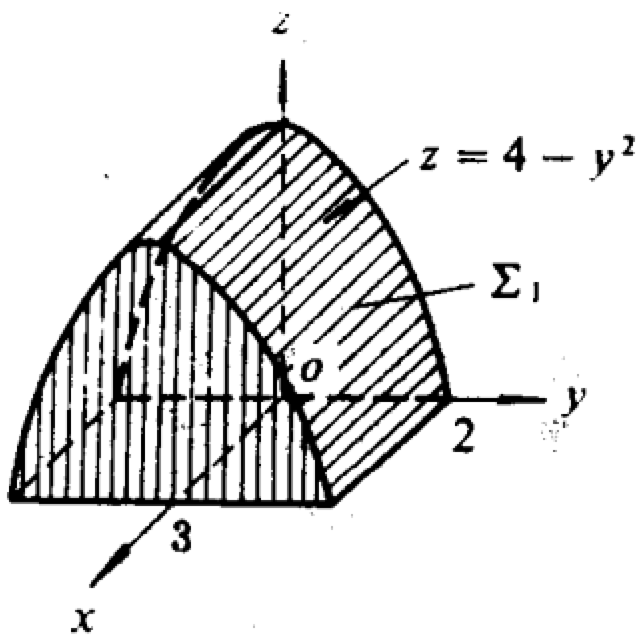
假设 P、Q、R 的二阶混合偏导数连续，则显然有

$$\frac{\partial P^*}{\partial x}+\frac{\partial Q^*}{\partial y}+\frac{\partial R^*}{\partial z}=0.$$

于是，由奥一高公式有

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma\right]ds=0.$$

9.2.62　计算 $\oiint\limits_{\Sigma} F\cdot n ds$，其中 $F=(z^2-x)i-xyj+3zk$，$\sum$ 是由 $z=4-y^2, x=0, x=3$ 和 xoy 面围成的区域 Ω 的表面.



9.2.62 题图

解　$I=\oiint\limits_{\Sigma} F\cdot n ds$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}[(z^2-x)\cos\alpha-xy\cos\beta+3z\cos\gamma]ds,$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为 n 的方向余弦，由奥 — 高公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(z^2-x)}{\partial x}+\frac{\partial(-xy)}{\partial y}+\frac{\partial(3z)}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2-x)dxdydz=\int_0^3(2-x)dx\int_{-2}^2 dy\int_0^{4-y^2}dz=16.$$

9.2.63　证明：由曲面 $\sum$ 所包围的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds,$$

式中的 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

证　由奥 — 高公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_{V}3dxdydz=3V.$$

由此可知　$V=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)ds.$

9.2.64　设 $\sum$ 为一光滑闭曲面，n 为 $\sum$ 上点 (x,y,z) 处的外法线，$r=xi+yj+zk$，就(1) 曲面 $\sum$ 不包含原点；(2) 曲面 $\sum$ 包含原点两种情况，计算

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} ds.$$

解 设 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，则

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma,$$

于是 $$\oiint_{\Sigma} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} ds = \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2}(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma) ds$$

$$= \iint_{\Sigma} (\frac{x}{r^3}dydz + \frac{y}{r^3}dzdx + \frac{z}{r^3}dxdy).$$

(1) $\sum$ 不包含原点时，

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} ds = \iiint_{V} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r^3})\right] dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right] dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right) dxdydz = 0.$$

(2) $\sum$ 包含原点时，在 $\sum$ 内作一球面 $\sum_1: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，则

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2} ds = \oiint_{\Sigma_1} \frac{\cos 0}{a^2} ds = \frac{1}{a^2} \oiint_{\Sigma_1} ds = \frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi.$$

9.2.65 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dxdz + (z-x+y)dxdy,$$

$\sum$ 为曲面 $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$ 的外表面.

解 应用奥—高公式，得

$$\iint_{\Sigma} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dxdz + (z-x+y)dxdy$$

$$= 3\iiint_{\Omega} dxdydz.$$

其中 Ω 是由 $\sum$ 所围成的平行八面体.

令 $u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y$，则

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v+w}{2}, z = \frac{u+w}{2},$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

区域 Ω 变为由 $|u| + |v| + |w| = 1$ 所围成的正八面体 Ω'，其体积等于第一卦限部分体积的八倍，于是

$$\iint\limits_{\Sigma} (x - y + z)dydz + (y - z + x)dxdz + (y - x + y)dxdy$$

$$= 3\iiint\limits_{\Omega'} \frac{1}{4}dudvdw = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

9.2.66 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xz^2dydz + yz^2dzdx + z^3dxdy$，$\sum$ 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2ax$ 的公共部分 Ω 的表面的外侧.

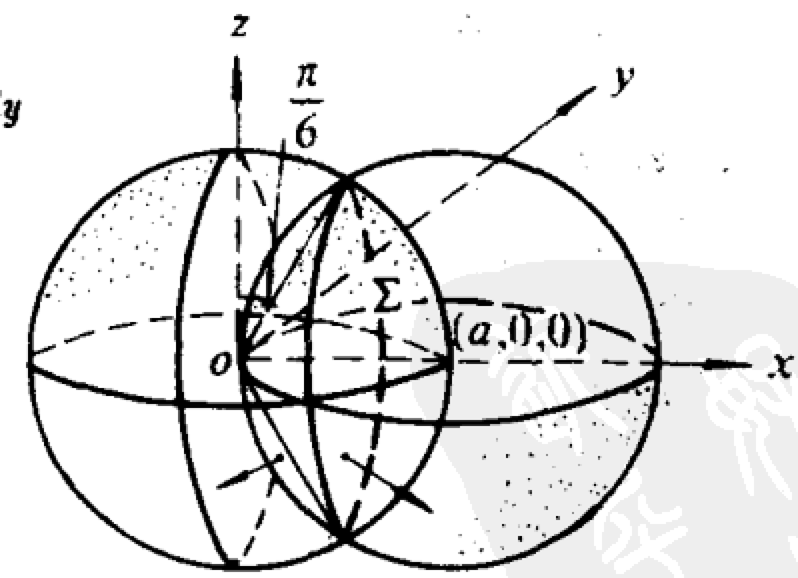
解 由奥一高公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma} xz^2dydz + yz^2dzdx + z^3dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial(xz^2)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$= 5\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$$

$$= 5\iint\limits_{D_{yz}} \left[\int_{a-\sqrt{a^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}} z^2dx\right]dydz$$



9.2.66 题图

$$= 5 \iint\limits_{D_{yz}} z^2(2\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} - a)dydz$$

$$= 5\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} r^2\sin^2\theta \cdot (2\sqrt{a^2 - r^2} - a) \cdot rdr$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 2\pi\left(\frac{47}{240} - \frac{9}{64}\right)a^5 = \frac{53}{192}\pi a^5.$$

9.2.67 计算 $\iint\limits_{\Sigma} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds$，$\Sigma$ 为曲面 $x^2 + y^2 = z^2(0 \leqslant z \leqslant h)$，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

解 Σ 不是封闭曲面，不能应用奥—高公式，若设平面圆域 $z = h, x^2 + y^2 \leqslant h^2$ 的上侧为 S，则 $\Sigma + S$ 成为一个封闭曲面，应用奥—高公式并采用柱面坐标，有

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds$$

$$= \iint\limits_{\Sigma + S} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds - \iint\limits_{S} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)ds$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz - \iint\limits_{S} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$

$$= 3\iiint\limits_{\Omega} (r^2 + z^2)rdrd\theta dz - \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2} h^3dxdy$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h rdr \int_r^h (r^2 + z^2)dz - \pi h^5$$

$$= 3 \cdot 2\pi \int_0^h r(r^2h + \frac{h^3}{3} - r^3 - \frac{r^3}{3})dr - \pi h^5$$

$$= \frac{9}{10}\pi h^5 - \pi h^5 = -\frac{1}{10}\pi h^5.$$

9.2.68 计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma} [(z^n - y^n)\cos\alpha + (x^n - z^n)\cos\beta + (y^n - x^n)\cos\gamma]ds,$$

$\sum$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为球面外法线向量的方向角.

解　$I=\iint\limits_{\Sigma}(z^n-y^n)dydz+(x^n-z^n)dzdx+(y^n-x^n)dxdy.$

$\sum$ 不是封闭曲面，若取 $\sum_1$ 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 的下侧，则 $\sum$ 的上侧与 $\sum_1$ 组成封闭曲面，它所围成的区域为 Ω，由奥—高公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^n-y^n)dydz+(x^n-z^n)dzdx+(y^n-x^n)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(z^n-y^n)}{\partial x}+\frac{\partial(x^n-z^n)}{\partial y}+\frac{\partial(y^n-x^n)}{\partial z}\right]dxdydz=0.$$

由于 $\sum_1$ 在 yoz 平面与 zox 平面上的投影都是线段，所以

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z^n-y^n)dydz+(x^n-z^n)dzdx=0,$$

又由对称性有 $\iint\limits_{\Sigma_1}(y^n-x^n)dxdy=0$，故

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(z^n-y^n)dydz+(x^n-z^n)dzdx+(y^n-x^n)dxdy=0.$$

9.2.69　计算 $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$，$\sum$ 是曲线 $x=e^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的外侧.

解　曲线 $x=e^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的曲面 $\sum$ 不是封闭曲面，不能直接应用奥—高公式，若设平面圆域 $x=e^a,y^2+z^2\leqslant a^2$ 的右侧为 $\sum_1$，则 $\sum+\sum_1$ 组成一个封闭曲面，它围成的立体记为 Ω，于是有

$$\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1} 2(1+x^2)dydz + 8xydzdx - 4xzdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(-4x+8x-4x)dxdydz - \iint_{D_{yz}} 2(1-e^{2a})dydz$$

$$=2(e^{2a}-1)\iint_{y^2+z^2\leqslant a^2} dydz = 2(e^{2a}-1)\pi a^2.$$

9.2.70 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$，$\sum$ 为 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 的上侧.

解 设 $\sum_1$ 为平面 $z=0$ 的下侧，则 $\sum+\sum_1$ 构成封闭曲面，它围成的空间区域为 Ω. 由奥—高公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2)dv$$

$$=2\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr\int_0^{1-r}dz+2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1-r}dz=\frac{2}{3}\pi.$$

又 $$\iint_{\Sigma_1}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy=0,$$

所以 $$\iint_{\Sigma}(x^2-yz)dydz+(y^2-zx)dzdx+2zdxdy=\frac{2}{3}\pi.$$

9.2.71 设 $F(x,y,z)$ 二阶连续可导，且满足

$$F_{xx}+F_{yy}+F_{zz}=0,$$

求证：$$\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]dv=\iint_{\Sigma}F\frac{\partial F}{\partial n}ds,$$

Ω 是光滑封闭曲面 $\sum$ 所围成的区域，$\frac{\partial F}{\partial n}$ 是 F 在曲面 $\sum$ 上沿 $\sum$ 向外的法线方向 n 的方向导数.

证 用 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 表示曲面 $\sum$ 的外法线的方向余弦，则有

$$\frac{\partial F}{\partial n}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma.$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial n}ds=\iint\limits_{\Sigma} F(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma)ds$

$$=\iint\limits_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial x}dydz+F\frac{\partial F}{\partial y}dzdx+F\frac{\partial F}{\partial z}dxdy.$$

应用奥—高公式,有

$$\iint\limits_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial n}ds=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(F\frac{\partial F}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(F\frac{\partial F}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(F\frac{\partial F}{\partial z})\right]dv$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\cdot Fdv$$

$$+\iiint\limits_{\Omega}\left[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2\right]dv,$$

注意到 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$,故等式右边的第一个积分为0,于是

$$\iint\limits_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial n}ds=\iiint\limits_{\Omega}\left[(\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2+(\frac{\partial F}{\partial z})^2\right]dv.$$

9.2.72 设Ω是空间区域,$\sum$是区域Ω的边界面,函数$u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$在闭区域$\bar{\Omega}$上有连续的二阶偏导数,求证:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v d\Omega=\oiint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}ds-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\Omega,$$

其中 $\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$,$\frac{\partial v}{\partial n}$ 代表 v 沿$\sum$的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

证 $\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$,其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为曲面$\sum$的外法线方向的方向余弦,在奥—高公式

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\Omega=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

中,令 $P=u\frac{\partial v}{\partial x}$,$Q=u\frac{\partial v}{\partial y}$,$R=u\frac{\partial v}{\partial z}$,则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]d\Omega=\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}ds.$$

而
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

于是有 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\Omega+\iiint\limits_{\Omega}u\Delta v d\Omega=\oiint\limits_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}ds.$

将上式左端第一个积分移到右端，即得证.

9.2.73 设 $H(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$ 为四次齐次函数，利用齐次函数的性质 $x\frac{\partial H}{\partial x}+y\frac{\partial H}{\partial y}+z\frac{\partial H}{\partial z}=4H$ 求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}H(x,y,z)ds$ 的值，$\sum$ 是以原点为球心的单位球面.

解
$$\iint\limits_{\Sigma}H(x,y,z)ds=\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma}\left(x\frac{\partial H}{\partial x}+y\frac{\partial H}{\partial y}+z\frac{\partial H}{\partial z}\right)ds$$
$$=\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial H}{\partial n}ds=\frac{1}{4}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)dxdydz$$
$$=\frac{3}{2}\iiint\limits_{\Omega}[x^2(2a_1+a_4+a_6)+y^2(2a_2+a_4+a_5)$$
$$+z^2(2a_3+a_5+a_6)]dxdydz$$

采用球面坐标，由于
$$\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\cos^2\theta\sin^3\varphi d\theta d\varphi dr=\frac{4}{15}\pi.$$

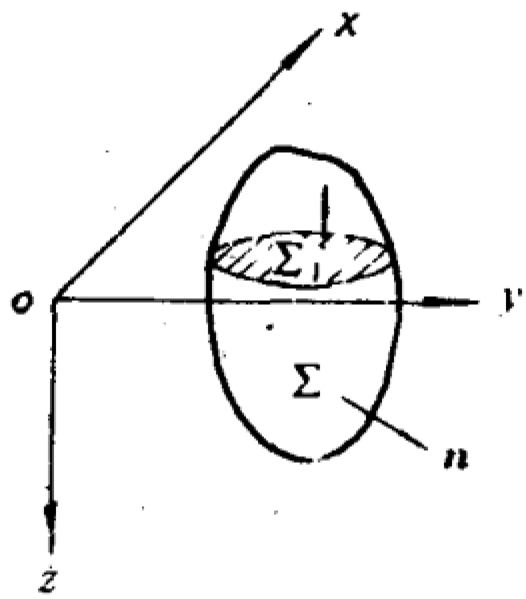
同理 $\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz=\frac{4}{15}\pi$，$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\frac{4}{15}\pi.$

所以 $\iint\limits_{\Sigma}H(x,y,z)ds=\frac{4}{5}\pi(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6).$

9.2.74 利用奥一高公式推证阿基米德原理：浸在液体中的物体所受液体压力的合力（即浮力）的方向铅直向上，大小等于该物体所排

开的液体的重量.

解　选择坐标系如图，xoy 为液面，z 轴铅直向下，用 r_0 记液体的单位体积的重量，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 表示物体浸在水中部分的表面 $\sum$ 在 (x,y,z) 处外法线的方向余弦.



9.2.74 题图

$\sum$ 上点 (x,y,z) 处所受液体压强为

$$-r_0z\cos\alpha\boldsymbol{i}-r_0z\cos\beta\boldsymbol{j}-r_0z\cos\gamma\boldsymbol{k},$$

于是浮力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$ 中的

$$F_x=-r_0\iint\limits_{\Sigma}z\cos\alpha ds,\quad F_y=-r_0\iint\limits_{\Sigma}z\cos\beta ds,$$

$$F_z=-r_0\iint\limits_{\Sigma}z\cos\gamma ds.$$

但 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}z\cos\alpha ds=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial z}{\partial x}dxdydz=0,$

又 $\sum_1$ 的方程为 $z=0$，故 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1}z\cos\alpha ds=0$，于是，有

$$\iint\limits_{\Sigma}z\cos\alpha ds=0,\text{即 }F_x=0.$$

同理可得 $F_y=0$. 又

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}z\cos\gamma ds=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial z}{\partial z}dxdydz=V_\Omega.$$

而 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1}z\cos\gamma ds=0$，故有 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}z\cos\gamma ds=V_\Omega$. 从而 $F_z=-r_0V_\Omega$.

所以 $\boldsymbol{F}=-r_0V_\Omega\boldsymbol{k}$，即浮力铅直向上，大小等于物体所排开液体的重量.

(2) 斯托克斯公式

9.2.75　应用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint ydx+zdy+xdz$,

式中 c 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，从 ox 轴的正方向看时，圆周是依逆时针方向进行的.

解法 1 由斯托克斯公式得

$$\oint_c ydx+zdy+xdz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} ds$$

$$=-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds,$$

其中 s 为圆周 c 所围成的区域. 由 c 和 s 的对应关系可知，s 取在平面 $x+y+z=0$ 的上侧，所以

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是有

$$\oint_c ydx+zdy+xdz=-\sqrt{3}\iint_S ds=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

解法 2 直接计算该积分，由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad 和 \quad x+y+z=0$$

消去 z，得曲线 c 在 oxy 平面上的射影为

$$x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2},$$

作旋转变换 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$，则方程化为 $3x'^2+y'^2=a^2$. 因而，曲线 c 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right), \\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}+\sin t\right), \\ z=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\right). \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \end{cases}$$

于是，曲线积分为

$$\oint_c ydx + zdy + xdz$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}[-(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t)(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t)$$

$$- \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t)]dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}})dt = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

9.2.76　计算 $\int_{AmB}(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$，其中 AmB 是从点 $A(a,0,0)$ 到点 $B(a,0,h)$ 的螺线

$$x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

解　连结线段 AB，则得闭曲线 $AmBA$. 设张在这条闭曲线上的曲面为 S，应用斯托克斯公式得

$$\oint_{AmBA}(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} ds = \iint_S 0ds = 0.$$

又因直线段 AB 的方程为 $x = a, y = 0, 0 \leqslant z \leqslant h$，故

$$\int_{AB}(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \int_0^h z^2dz = \frac{h^3}{3}.$$

于是有 $\int_{AmB}(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \frac{h^3}{3}$.

9.2.77　设 c 为位于平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$（$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为平面的法线的方向余弦）上并包围面积为 s 的封闭围线，求

$$\oint_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中围线 c 是依正方向进行的.

解　记　$P = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix} = z\cos\beta - y\cos\gamma,$

$$Q = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix} = x\cos\gamma - z\cos\alpha,$$

$$R = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix} = y\cos\alpha - x\cos\beta.$$

应用斯托克斯公式,,则有

$$\oint_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint_c Pdx + Qdy + Rdz$$

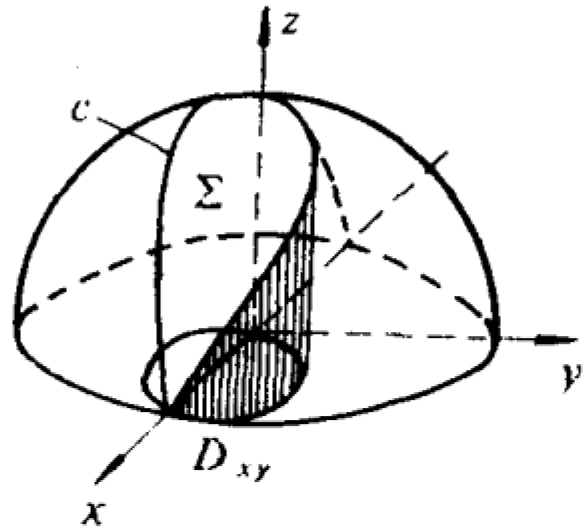
$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 2\iint_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) ds$$

$$= 2\iint_S ds = 2s.$$

9.2.78　计算

$$\oint_c y^2dx + z^2dy + x^2dz,$$

其中 c 为曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 = Rx, (R > 0, z \geqslant 0)$. 从 ox 轴的正方向看时,曲线是依顺时针方向进行的.



9.2.78 题图

解法 1　设 $\sum$ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧被 c 包围的部分(如图),应用斯托克斯公式,注意到曲线 c 的方向与公式中所要求的方向相反,故在曲面积分前面要加一负号,即

$$\oint_c y^2dx + z^2dy + x^2dz$$

$$= -\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} ds = 2\iint_{\Sigma} (z\cos\alpha + x\cos\beta + y\cos\gamma) ds$$

$$= 2\iint_{\Sigma} \left(\frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) ds$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \cdot \frac{x}{R} + \frac{xy}{R} + \frac{y}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} \left(x + \frac{xy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + y \right) dxdy$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \left[r(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] rdr = \frac{1}{4}\pi R^3.$$

解法 2　图及符号规定如上，应用斯托克斯公式，得

$$\oint_c y^2dx + z^2dy + x^2dz = 2\iint_{\Sigma} (z\cos\alpha + x\cos\beta + y\cos\gamma)ds.$$

由于$\sum$关于平面 $y = 0$ 对称，所以 $\iint_{\Sigma} x\cos\beta ds = 0$. 又在$\sum$上，$\cos\alpha = \frac{x}{R}$, $\cos\gamma = \frac{z}{R}$，所以

$$z\cos\alpha = z \cdot \frac{x}{R} = x \cdot \frac{z}{R} = x\cos\gamma.$$

于是有

$$\oint_c y^2dx + z^2dy + x^2dz = 2\iint_{\Sigma} (x + y)\cos\gamma ds$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} (x + y)dxdy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} r(\cos\theta + \sin\theta) \cdot rdr$$

$$= \frac{2}{3}R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)\cos^3\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{4}R^3.$$

其中因 $\cos\theta \cdot \cos^3\theta$ 为奇函数，故 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^3 d\theta = 0$.

9.2.79　计算

$$\oint_c (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz.$$

其中 c 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx, x^2+y^2=2rx\ (0<r<R, z>0)$ 并且曲线的方向为：由它所包围在球 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方.

解 应用斯托克斯公式，并注意到球面的外法线方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\ \cos\beta=\frac{y}{R},\ \cos\gamma=\frac{z}{R}.$$

即得 $\oint_c (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} ds$$

$$=2\iint_S [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]ds$$

$$=2\iint_S [(y-z)(\frac{x}{R}-1)+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}]ds$$

$$=2\iint_S (z-y)ds.$$

这里 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 上由 c 所围成的区域，由于 S 关于 xoy 平面对称，故有 $\iint_S yds=0$. 又

$$\iint_s zds=\iint_D z\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_D z\cdot\frac{R}{z}dxdy=R\cdot\pi r^2.$$

其中 D 是 S 在 xoy 平面上的投影区域，$x^2+y^2=2rx$ 面积为 πr^2. 于是有

$$\oint_c (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz=2\pi Rr^2.$$

9.2.80 计算 $\oint_c (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，式中 c 为依参数 t 增大的方向通过的椭圆.

$$x=a\sin^2 t, y=2a\sin t\cos t, z=a\cos^2 t, [0\leqslant t\leqslant\pi].$$

解法1 应用斯托克斯公式，得

$$\oint_c (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

$$=\iint_s \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} ds = \iint_s 0ds = 0.$$

解法 2　直接计算该积分

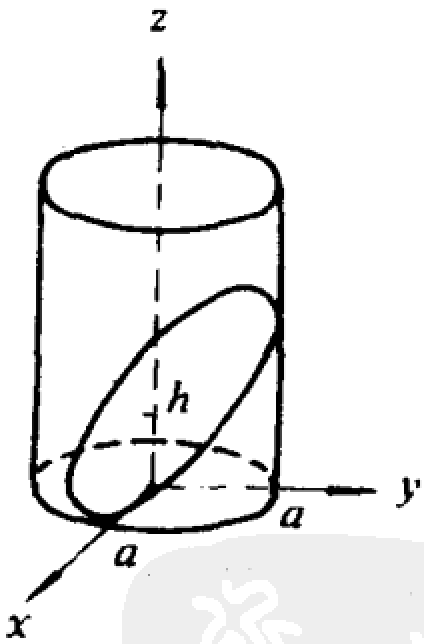
$$\oint_c (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

$$= a^2\int_0^\pi [(\sin 2t+\cos^2 t)\sin 2t + 2\cos 2t + (\sin^2 t+\sin 2t)(-\sin 2t)]dt$$

$$= a^2\int_0^\pi (\cos 2t\sin 2t + 2\cos 2t)dt = a^2\left[\frac{1}{4}\sin^2 2t+\sin 2t\right]_0^\pi = 0.$$

9.2.81　计算 $\oint_c (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 c 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,h>0)$，从 ox 轴的正方向看时，椭圆是依逆时针的方向进行的.

解　应用斯托克斯公式，得



9.2.81 题图

$$\oint_c (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=\iint_s \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} ds$$

$$=-2\iint_s (\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)ds$$

$$=-2\iint_s dydz+dxdz+dxdy.$$

由于 s 在 xoy 平面上的投影为圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$，故

$$\iint_s dxdy = \pi a^2,$$

s 在 xoz 平面上的投影为一线段，故

$$\iint_s dxdz = 0,$$

s 在 yoz 平面上的投影为椭圆域 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{(z-h)^2}{a^2} \leqslant 1$，故

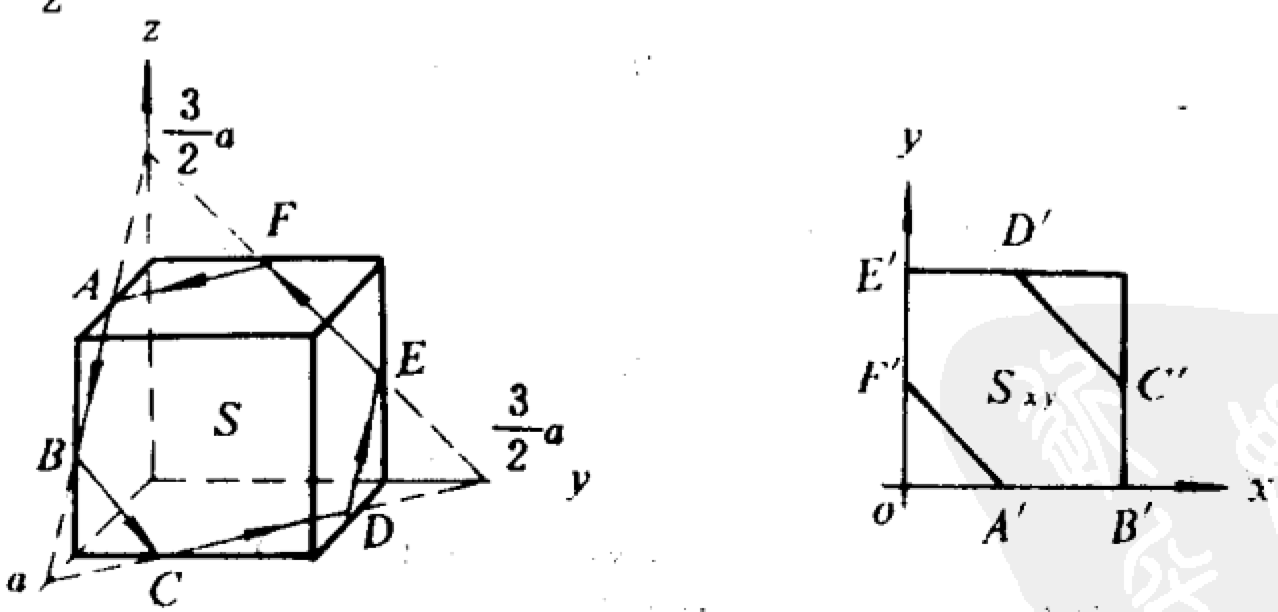
$$\iint_s dydz = \pi ah.$$

从而有

$$\oint_c (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = -2\pi a(a+h).$$

9.2.82 计算 $\oint_c (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$，其中 c 为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体 $0 < x < a$，$0 < y < a$，$0 < z < a$ 的表面所得的切痕，从 x 轴的正方向看时，是依逆时针方向进行的.

解 平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体 $0 < x < a$，$0 < y < a$，$0 < z < a$ 的表面所得的切痕如图(1)中的封闭折线 $ABCDEFA$，它包围的区域为 s，s 在 xoy 平面上的射影为 s_{xy}，其面积显然等于 $\frac{3}{4}a^2$，当平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 取上侧时，



(1) 9.2.82 题图 (2)

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是，由斯托克斯公式得

$$\oint_c (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$
$$= \iint_s \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} ds$$
$$= \iint_s \Big[(-2y - 2z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2z - 2x)\frac{1}{\sqrt{3}} + (-2x - 2y)\frac{1}{\sqrt{3}}\Big]ds$$
$$= -4\iint_s (x + y + z)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}ds = -6a\iint_s \frac{1}{\sqrt{3}}ds$$
$$= -6a\iint_{s_{xy}} dxdy = -6a\cdot\frac{3}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3.$$

9.2.83　计算 $\oint_c y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$，其中 c 为依参数 t 增大的方向进行的封闭曲线

$$x = a\cos t, y = a\cos 2t, z = a\cos 3t, (0 < t < 2\pi).$$

解　设曲线 c 张成的曲面为 s，由斯托克斯公式得

$$\oint_c y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz = \iint_s \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^2 & x^2z^2 & x^2y^2 \end{vmatrix}$$
$$= 2\iint_s x^2(y - z)dydz + y^2(z - x)dxdz + z^2(x - y)dxdy.$$

先计算 $\iint_s z^2(x - y)dx$，因为封闭曲线 c 在 xoy 平面上的投影曲线的参数方程为

$$x = a\cos t, y = a\cos 2t, (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

这是一段抛物线，它没有围成面积，故

$$\iint_s z^2(x - y)dx = 0.$$

同理，曲线 c 在 yox 平面和 zox 平面上的投影分别为半立方抛物线和立

方抛物线的一段，它们也都没有围成面积，故

$$\iint_S x^2(y-z)dydz = \iint_S y^2(z-x)dzdx = 0.$$

由此得 $\oint_c y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz = 0.$

4. 曲面积分的应用

9.2.84 设圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截，试求界于球内的那部分圆柱面的表面积.

解 设所求的面积为 s，并设 s_1 是柱面 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 界于球面内的部分，s_2 是柱面 $y=-\sqrt{ax-x^2}$ 界于球面内的部分，则 $s=s_1+s_2$，由对称性知，$s_1=s_2$.

又圆柱面与球面的交线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=ax, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \end{cases}$$

即 $z^2=a^2-ax$，

s_1 在 xoz 平面上的投影区域为 D_{xz}：$0\leqslant x\leqslant a$，$-\sqrt{a^2-ax}\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-ax}$，于是，

$$s = 2\iint_{s_1} ds = 2\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz$$

$$= 2\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-ax}}^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dxdz = 2a\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-ax}}{\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$= 2a\int_0^a\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx = 4a^2.$$

9.2.85 求抛物线壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的密度按规律 $\mu=z$ 而变更.

解 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 有

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

又抛物线壳在 xoy 平面上投影为 $D: x^2+y^2\leqslant 2$，故

$$M=\iint_{\Sigma}\mu ds=\iint_{\Sigma}zds=\iint_{D}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^3\cdot\sqrt{1+r^2}dr=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

9.2.86　在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，取以 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ 三点为顶点的球面三角形，如果球面密度 $\rho=x^2+z^2$，求此球面三角形块的质量.

解法 1　上半球面方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$ds=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy.$$

球面上大圆弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z-x=0.\end{cases}$$

消去 z，得 $\overset{\frown}{BC}$ 在 xoy 平面上的投影为椭圆

$$\begin{cases}2x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

于是，以 A、B、C 为顶点的球面三角形 s 在 xoy 平面上的投影区域为

$$D: 0\leqslant y\leqslant 1, \sqrt{\frac{1-y^2}{2}}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}.$$

故所求的球面三角形块的质量为

$$M=\iint_{s}(x^2+z^2)ds=\iint_{D}\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{\frac{1-y^2}{2}}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx$$

$$=\int_0^1(1-y^2)(\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}})dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1 - y^2)dy = \frac{\pi}{6}.$$

解法 2 球面三角形块 s 在 xoz 平面上的投影区域为扇形区域

$D_1: 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, z \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - z^2}$.

即 $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant 1.$

故 $\quad M = \iint\limits_s (x^2 + z^2)ds = \iint\limits_{D_1} \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}}dxdz$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2}}rdrd\theta = \frac{\pi}{6}.$$

9.2.87 曲面 $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ 的面密度 μ 为常数，求该曲面在 $0 \leqslant z \leqslant \frac{3}{2}$ 之间部分的质量中心.

解 由对称性，质量中心在 z 轴上，故 $\bar{x} = \bar{y} = 0$,

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iint\limits_s \mu z ds = \frac{\iint\limits_s \mu z ds}{\iint\limits_s \mu ds} = \frac{\iint\limits_s z ds}{\iint\limits_s ds},$$

其中 s 为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \leqslant z \leqslant \frac{3}{2}$，它在 xoy 平面上的投影区域为 D: $x^2 + y^2 \leqslant 3$.

$$\iint\limits_s z ds = \iint\limits_D \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r^3\sqrt{1 + r^2}dr = \frac{58}{15}\pi$$

$$\iint\limits_s ds = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1 + r^2}dr$$

$$= \frac{14}{3}\pi.$$

所以，$\bar{z} = \frac{29}{35}$，于是，质量中心为 $P(0, 0, \frac{29}{35})$.

9.2.88 求密度均匀的曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 所

割下部分的重心坐标.

解　设所割出的曲面为 s,密度为 ρ,它在 xoy 平面上的投影区域 D 为圆:$x^2+y^2=ax$,于是 s 的质量为

$$M=\iint_s \rho ds=\iint_D \rho\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\rho\iint_D dxdy=\sqrt{2}\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}rdr=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\rho a^2,$$

令 $x=r\cos\theta+\frac{a}{2},y=r\sin\theta$,可以求得

$$\iint_s \rho xds=\sqrt{2}\rho\iint_D xdxdy=\sqrt{2}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}(\frac{a}{2}+r\cos\theta)rdrd\theta$$

$$=\sqrt{2}\rho\int_0^{2\pi}(\frac{a^3}{16}+\frac{a^3}{24}\cos\theta)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\rho a^3.$$

$$\iint_s \rho yds=\sqrt{2}\rho\iint_D ydxdy=\sqrt{2}\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}r^2\sin\theta drd\theta=0.$$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,又有

$$\iint_s \rho zds=\sqrt{2}\rho\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}r^2drd\theta$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}\rho a^3.$$

由此得重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_s \rho xdx}{\iint_s \rho ds}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\rho a^3}{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\rho a^2}=\frac{a}{2},\quad \bar{y}=\frac{\iint_s \rho yds}{\iint_s \rho ds}=0,$$

$$\bar{z}=\frac{\iint_s \rho zds}{\iint_s \rho ds}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}\rho a^3}{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\rho a^2}=\frac{16a}{9\pi}.$$

9.2.89　求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant a)$ 的重心坐标.

解 设密度为 ρ,由 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 得

$$ds = \sqrt{1 + (-\frac{x}{z})^2 + (-\frac{y}{z})^2}dxdy = \frac{a}{z}dxdy$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

s 在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant a$,故曲面 s 的质量为

$$M = \iint_s \rho ds = \rho a \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \rho a \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dy$$

$$= \rho a \int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\pi\rho a^2.$$

又 $\iint_s \rho x ds = \rho a \int_0^a x dx \int_0^{a-x} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dy = \frac{\sqrt{2} - 1}{4\sqrt{2}}\rho\pi a^3$

由对称性,有

$$\iint_s \rho y ds = \iint_s \rho x ds = \frac{\sqrt{2} - 1}{4\sqrt{2}}\rho\pi a^3,$$

$$\iint_s \rho z ds = \rho a \iint_s z \cdot \frac{a}{z}dxdy = \rho a \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = \frac{1}{2}\rho a^3,$$

由此可得重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_s \rho x ds}{\iint_s \rho ds} = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_s \rho y ds}{\iint_s \rho ds} = \frac{a}{2\sqrt{2}},$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_s \rho y ds}{\iint_s \rho ds} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\pi}a.$$

9.2.90 有一密度均匀的半球面,半径为 R,面密度为 ρ,求它对位于球心处质量为 m 的质点的引力.

解 以球心为坐标原点建立直角坐标系,上半球面 s 的方程为:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

s 在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant R^2$

设所求的引力 F 在三个坐标轴上的分量分别为 F_x, F_y, F_z，则有

$$F_x = k\iint_s \frac{m\rho}{(x^2+y^2+z^2)}\cos\alpha ds = k\iint_s \frac{m\rho x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}ds$$

$$= km\rho\iint_D \frac{x}{R^3}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= \frac{km\rho}{R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r\cos\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}rdrd\theta = 0,（k\text{ 为引力常数}）.$$

由对称性，显然有 $F_y = 0$，而

$$F_z = k\iint_s \frac{m\rho z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}ds$$

$$= km\rho\iint_D \frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R^3}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$= \frac{km\rho}{R^2}\cdot\pi R^2 = km\rho\pi.$$

故所求的引力大小为 $km\rho\pi$，方向为 z 轴正方向.

9.2.91　设 $\sum$ 是旋转抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 面上方的部分

(1) 计算 $I = \iint\limits_{\sum} f(x,y,z)ds$，其中 1) $f(x,y,z) = 1$；2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$，并给出每种情况以物理解释.

(2) 求匀质（设面密度等于 1）的薄壳 $\sum$ 的重心.

解　(1) $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant 2$.

1) 当 $f(x,y,z) = 1$ 时，

$$I = \iint\limits_{\sum} ds = \iint\limits_D \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr = \frac{13}{3}\pi.$$

这时 I 表示面密度为 1 的曲面 $\sum$ 的质量，I 同时也等于曲面 $\sum$ 的面积.

2) 当 $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ 时，

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)ds = \iint_{D} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + 4r^2}dr = \frac{149}{30}\pi$$

这时 I 表示面密度等于 1 的曲面 $\sum$ 对 oz 轴的转动惯量，或表示具有面密度为 $x^2 + y^2$ 的曲面 $\sum$ 的质量.

(2) 设所求薄壳的重心为 $G(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则由对称性知 $\bar{x} = \bar{y} = 0$，又由 $\iint_{\Sigma} ds = \frac{13}{3}\pi$ 及

$$\iint_{\Sigma} zds = \iint_{D} (2 - x^2 - y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$$

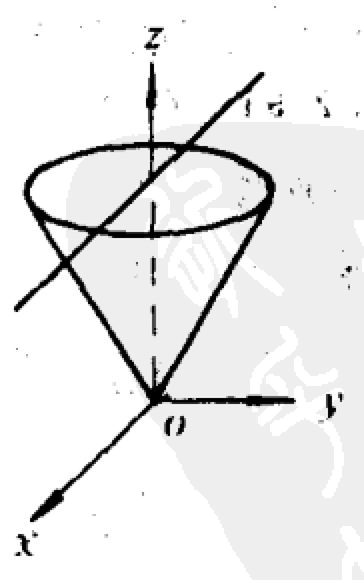
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)\sqrt{1 + 4r^2} \cdot rdr = \frac{37}{10}\pi$$

可知 $\bar{z} = \dfrac{\iint_{s} zds}{\iint_{s} ds} = \dfrac{111}{130}$. 即薄壳 $\sum$ 的重心为 $G(0,0,\frac{111}{130})$.

9.2.92 求密度为 ρ 的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0\ (0 \leqslant z \leqslant b)$$

对直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - b}{0}$ 的转动惯量.



9.2.92 题图

解 空间任一点 $M(x,y,z)$ 到 ox 轴的距离平方为 $y^2 + z^2$，因此，点 M 到直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - b}{0}$$

的距离平方为 $y^2 + (z - b)^2$.

于是，所求的转动惯量为

$$I = \rho \iint_{s} [y^2 + (z - b)^2]ds$$

又在圆锥面 $z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ 上,

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}dxdy,$$

s 在 xoy 平面上的投影区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$,故有

$$I = \rho\iint_D [y^2 + (\frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2] \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}dxdy$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a[r^2\sin^2\theta + (\frac{b}{a}r - b)^2]dr$$

$$= \pi a\rho(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{6})\sqrt{a^2 + b^2}.$$

9.2.93　半径为 R,密度为 ρ 的均匀球壳以角速度 ω 绕其直径而旋转,求此球的动能.

解　以球心为原点建立直角坐标系,取直径为 z 轴,则球壳对 z 轴的转动惯量为

$$I_z = \oiint_s (x^2 + y^2)\rho ds = 2\rho\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= 2\rho\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}Rrdrd\theta = \frac{8}{3}\pi\rho R^4.$$

故该球转动的动能为

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\rho R^4\omega^2 = \frac{1}{3}MR^2\omega,$$

其中 M 为球壳的质量.

9.2.94　$f(r)$ 是连续函数,求力 $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$ 沿弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所做的功.

解　$\boldsymbol{F} = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$,它所作的功为

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})xdx + f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})ydy$$

$$+ f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})zdz,$$

令 $P = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})x$, $Q = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})y$,

$R = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})z$,

则有 $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$,根据斯托克斯公式可以断定,沿任一光滑(或逐段光滑)的闭曲线 c 的积分

$$\oint_c f(r)(xdx + ydy + zdz) = 0,$$

从而积分 $\int_{\widehat{AB}} f(r)(xdx + ydy + zdz)$ 仅与起点 A 及终点 B 的位置有关,而与从 A 到 B 的路径无关.

现在,让点 A 固定,并设点 A 到原点的距离为 r_A,由于

$$f(r)(xdx + ydy + zdz) = f(r)rdr,$$

则 $u(x,y,z) = \int_{r_A}^{r} tf(t)dt$, $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. 于是

$$\int_{\widehat{AB}} f(r)(xdx + ydy + zdz) = \int_A^B du(x,y,z)$$

$$= u(B) - u(A) = \int_{r_A}^{r_B} tf(t)dt.$$

其中 r_B 是点 B 到原点的距离.

9.2.95 球心在原点半径为 R 的球,带有的电荷面密度为常数 ρ,求点 $A(0,0,a)$ 的电位 $(a > 0)$.

解 所求的电位 Φ 为

$$\Phi = \oiint_s \frac{\rho ds}{r} = \oiint_s \frac{\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} ds,$$

其中 s 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,ρ 为电荷面密度.

(1) 沿上半球面 $s_1: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的积分为

$$\Phi_1 = \iint_{s_1} \frac{\rho ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}$$

$$= \rho \iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\sqrt{R^2 - r^2}}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} rdrd\theta$$

$$= \frac{2\pi R\rho}{a}\left(\sqrt{R^2 + a^2} - |R^2 - a|\right).$$

(2) 沿下半球面 $s_2: z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的积分为

$$\Phi_2 = \iint_{s_2} \frac{\rho ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} ds$$

$$= \frac{2\pi R\rho}{a}\left[(R + a) - \sqrt{R^2 + a^2}\right],$$

于是有 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{2\pi R\rho}{a}\left[(R + a) - |R - a|\right]$

若 $a \leqslant R$，则 $\Phi = 4\pi R\rho$；

若 $a > R$，则 $\Phi = \frac{4\pi R^2\rho}{a}$.

§ 3 场论初步

内容提要

1. 场的概念及其表示

经常遇到的物理量有两类:数量和矢量.

(1) 数量场

若空间区域 Ω 的每一点 $M(x,y,z)$ 都对应一个数值 $u(x,y,z)$,则它在此空间区域 Ω 上就构成了一个数量场,用点 $M(x,y,z)$ 的标量函数 $u(x,y,z)$ 来表示. 若 M 的位置用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 确定,则数量 u 可以看作变矢的函数 $u=u(\boldsymbol{r})$.

(2) 矢量场

若空间区域 Ω 的每一点 $M(x,y,z)$ 都对应一个矢量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$,则它在此空间区域 Ω 上就构成了一个矢量场,用点 $M(x,y,z)$ 的矢量函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 来表示,若 M 的位置用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 确定,则矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以看作变矢 $\boldsymbol{r}$ 的矢函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

2. 等值面和梯度

(1) 等值面

在空间区域 Ω 上构成的数量场 $u(x,y,z)$ 中,使函数 $u(x,y,z)$ 具有相同函数值的点所组成的曲面,也就是由方程 $u(x,y,z)=c$(其中 c 为常数)所表示的曲面,叫做数量场的等值面.

(2) 梯度

1) 定义　设 $u(x,y,z)$ 在空间区域 Ω 上是连续可微分的函数,则称向量

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为数量场 $u(x,y,z)$ 在点 M 的梯度,记为 $\mathbf{grad}u$,即

$$\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

2) 性质

1° 沿 l 的方向导数等于梯度在 l 方向上的投影，即

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot \boldsymbol{l}^{0},$$

其中 $\boldsymbol{l}^{\circ}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$ 是方向 l 上的单位向量.

2° 梯度垂直于等值面，且指向函数 $u(x,y,z)$ 增加的方向，对于场内每一点，梯度的模给出函数 u 变化之最大速度的大小.

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^{2}+(\frac{\partial u}{\partial y})^{2}+(\frac{\partial u}{\partial z})^{2}}.$$

3) 运算法则　设 u、v 和 f 都是连续可微函数，则有

1°　$\mathrm{grad}c=\boldsymbol{0}$（$c$ 为常数）；

2°　$\mathrm{grad}(u\pm v)=\mathrm{grad}u\pm\mathrm{grad}v$；

3°　$\mathrm{grad}(cu)=c\mathrm{grad}u$（$c$ 为常数）；

4°　$\mathrm{grad}(uv)=v\mathrm{grad}u+u\mathrm{grad}v$；

5°　$\mathrm{grad}\,\frac{u}{v}=\frac{1}{v^{2}}(v\mathrm{grad}u-u\mathrm{grad}v)$；（设 $v\neq 0$）；

6°　$\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\mathrm{grad}u$.

3. 通量

设有矢量场 $\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\,\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 其中 P、Q、R 具有一阶连续偏导数，$\sum$ 是场内一片有向简单曲面，$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$ 是曲面 $\sum$ 在点 (x,y,z) 处的外法线单位矢量，第二类曲面积分

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 向正侧（外法线方向一侧）穿过曲面 $\sum$ 的通量.

通常对于流速场中的一个闭曲面，总是有流出也有流入，其中 Φ 是总流量，即为流出的流量减去流入的流量.

(1) $\Phi>0$，表示流出多于流入，这时表明 $\sum$ 内部必有源；

(2) $\Phi<0$，表示流入多于流出，这时表明 $\sum$ 内部必有洞；

(3) $\Phi=0$，表示总体来说流出流入达到平衡.

4. 散度

(1) 定义　设有矢量场 $\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，

其中P、Q、R有一阶连续偏导数，$\sum$是场内任一封闭简单曲面，Ω为$\sum$所围成的区域，v为Ω的体积，若当Ω收缩为一点$M(x,y,z)$时，极限$\lim\limits_{\Omega\to M}\frac{1}{v}\oint\!\!\!\oint_{\sum}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$存在，则称该极限值为$\boldsymbol{F}$在点$M$处的散度，记为$\mathrm{div}\boldsymbol{F}$.

矢量场的散度是数量，在M点上，若$\mathrm{div}\boldsymbol{F}>0$，则该点是发散通量的"源"；若$\mathrm{div}\boldsymbol{F}<0$，则该点是吸收通量的"洞"；而$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$则表示该点既不散发也不吸收通量，成者说既不是"源"也不是"洞".

(2) 计算公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

(3) 奥一高公式的散度形式

$$\oint\!\!\!\oint_{\sum}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{F}dv,$$

其中$\boldsymbol{n}$为$\sum$上点$M(x,y,z)$处向外的单位法矢量.

该式表示：向量场穿出任一封闭曲面$\sum$的通量等于$\sum$所包围区域内的散度的总和.

(4) 散度的运算法则

1) $\mathrm{div}(\boldsymbol{F}_1\pm\boldsymbol{F}_2)=\mathrm{div}\boldsymbol{F}_1\pm\mathrm{div}\boldsymbol{F}_2$;

2) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{F})=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{F}+u\mathrm{div}\boldsymbol{F}$.

5. 环量

设有矢量场$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，$c$是场内一条有向单位闭曲线，$\tau$为曲线的单位切矢量，则

$$\Gamma=\oint_c\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}ds=\oint_c Pdx+Qdy+Rdz$$

称为矢量场$\boldsymbol{F}$沿曲线c按所取方向的环量，环量Γ是表示某质点在矢量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$作用下沿曲线c回转速度的一种量度，当矢量$\boldsymbol{F}$的方向越接近切线的方向时，回转的速度就越快.

6. 旋度

(1) 定义　设矢量场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

的分量P、Q、R有一阶连续的偏导数，则矢量

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})i + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})j + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})k$$

称为矢量场 F 的旋度，记作 $\mathrm{rot}F$.

(2) 斯托克斯公式的旋度形式

$$\oint_c F \cdot \tau ds = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot}F \cdot n ds$$

其中 τ 为曲线 c 上的单位切矢量，方向与 c 一致，n 是 c 上任一点 $M(x,y,z)$ 处的单位法矢量.

(3) 运算法则　设 F_1、F_2、F 的各个分量及 u 都具有一阶连续的偏导数，则有

1) $\mathrm{rot}(F_1 \pm F_2) = \mathrm{rot}F_1 \pm \mathrm{rot}F_2$;

2) $\mathrm{rot}(uF) = \mathrm{grad}u \times F + u\,\mathrm{rot}(F)$;

3) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}F) = 0$;

4) $\mathrm{div}(F_1 \times F_2) = F_2 \mathrm{rot}F_1 - F_1 \mathrm{rot}F_2$.

7. 几个重要的场

(1) 有势场

设有矢量场 $F(x,y,z)$，若存在单值函数 $u(x,y,z)$ 满足 $F = \mathrm{grad}u$，则称此矢量场为有势场. 令 $v = -u$，v 称为矢量场 F 的势函数，即

$$F_1 = \mathrm{grad}u$$

注意：有时把 $v = -u$ 也称为 F 的势函数，如在电学中，但在其他学科中. 一般把 u 称为 F 的势函数.

有势场的的势函数不是唯一的，若 u 为 F 的一个势函数，则 F 的全体势函数为 $u + c$，其中 c 为任意常数.

(2) 无旋场

若矢量场 $F(x,y,z)$ 的旋度恒为零矢量，即 $\mathrm{rot}F \equiv 0$，则称 F 为无旋场.

(3) 保守场

设有矢量场 $F(x,y,z)$，c 为场中一条以 P_0 为起点，P 为终点的曲线，若曲线积分 $\int_c F \cdot dr$ 只与起点 P_0 和终点 P 有关，而与路径无关，则 F 称为保守场.

设 V 是空间的线单连域(对于空间区域 V 内的任意简单闭曲线 c，都可以作出一个以 c 为边界且全部位于 V 内的曲面 $\sum$，则称区域 V 为线单连域)，下面五个命题等价：

1) $\boldsymbol{F}$ 为无旋场；

2) $\boldsymbol{F}$ 为保守场；

3) $\oint_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$，其中 c 为场中任意自身不相交的光滑闭曲线；

4) $\boldsymbol{F}$ 为有势场；

5) 表达式 $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=Pdx+Qdy+Rdz$ 是某个单值函数的全微分.

设 $\boldsymbol{F}$ 为有势场，则势函数 u 为

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz.$$

(4) 管量场

在面单连域中，若矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的散度恒为零，即 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}\equiv 0$，则称矢量场 $\boldsymbol{F}$ 为管量场，亦称无源场或无散场.

矢量场 $\boldsymbol{F}$ 为管量场的充要条件是：$\boldsymbol{F}$ 为另一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场，即 $\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$，其中矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的矢势量.

(5) 调和场

若矢量场 $\boldsymbol{F}$ 既是有势场，又为管量场，即 $\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}u,\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为调和场.

调和场的势函数 u 满足拉普斯方程 $\triangle u=0$.

问 题 与 解 答

1. 梯度

9.3.1 求场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在 (1)$O(0,0,0)$；(2)$A(1,1,1)$；(3)$B(2,0,1)$ 诸点梯度的大小和方向，在场内怎样的点上，梯度等于零？

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2,\ \frac{\partial u}{\partial z}=6z-6.$

(1) 在 $O(0,0,0)$ 点，有

$$\mathrm{grad}u=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},\ |\mathrm{grad}u|=7.$$

$$方向:\cos\alpha=\frac{3}{7},\ \cos\beta=-\frac{2}{7},\ \cos\gamma=-\frac{6}{7}.$$

(2) 在 $A(1,1,1)$ 点，有

$$\mathrm{grad}u = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j},\ |\mathrm{grad}u| = 3\sqrt{5},$$

$$\text{方向}:\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma = 0.$$

(3) 在 $B(2,0,1)$ 点，有

$$\mathrm{grad}u = 7\boldsymbol{i},\ |\mathrm{grad}u| = 7,\text{方向}:\cos\alpha = 1,\cos\beta = \cos\gamma = 0.$$

一般地，有

$$|\mathrm{grad}u| = \sqrt{(2x+y+3)^2 + (4y+x-2)^2 + (6z-6)^2},$$

要 $|\mathrm{grad}u| = 0$，只须

$$\begin{cases} 2x+y+3=0, \\ 4y+x-2=0, \\ 6z-6=0. \end{cases}$$

解之，得 $x=-2, y=1, z=1$. 即在点$(-2,1,1)$处梯度为零.

9.3.2　在空间 $oxyz$ 中的哪些点，场 $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 的梯度，(1) 垂直于 oz 轴；(2) 平行于 oz 轴；(3) 等于零？

解　$\mathrm{grad}u = 3(x^2 - yz)\boldsymbol{i} + 3(y^2 - xz)\boldsymbol{j} + 3(z^2 - xy)\boldsymbol{k}$.

(1) 当且仅当梯度在 oz 轴上的投影等于 0 时，梯度垂直于 oz 轴，故当 $z^2 = xy$ 时 $\mathrm{grad}u$ 垂于 oz 轴.

(2) 当且仅当梯度在 ox 轴和 oy 轴上的投影都等于零时，梯度平行于 oz 轴，故当 $x^2 = yz$ 和 $y^2 = xz$ 同时成立时，即当 $x = y = 0$ 或 $x = y = z$ 时，$\mathrm{grad}u$ 平行于 oz 轴.

(3) 当 $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$ 同时成立时，即当 $x = y = z$ 时，$\mathrm{grad}u = 0$.

9.3.3　证明：$\mathrm{grad}u$ 为常向量的充要条件是 u 为线性函数

$$u = ax + by + cz + d\ (a、b、c、d \text{ 均为常数}).$$

证　必要性　设

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

则有 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a, \dfrac{\partial u}{\partial y} = b, \dfrac{\partial u}{\partial z} = c$.

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = a$，得 $u = ax + \varphi(y,z)$，

又由 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = b$，得 $\varphi(y,z) = by + \psi(z)$，

再由 $u = ax + by + \psi(z)$，有 $\frac{\partial u}{\partial z} = \psi'(z) = c$，故

$$\psi(z) = cz + d \quad (d\text{ 为常数}).$$

所以 $u = ax + by + cz + d \quad (a、b、c、d\text{ 均为常数})$.

充分性显然.

9.3.4　已知数量场 $u = \ln\frac{1}{r}$，其中

$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. 在空间 $oxyz$ 中的哪些点，等式 $|\mathrm{grad}u| = 1$ 成立？

解　$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}$,

于是，$|\mathrm{grad}u| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]} = \frac{1}{r}.$$

当且仅当 $r = 1$ 时 $|\mathrm{grad}u| = 1$，即在以点 (a,b,c) 为中心，半径等于 1 的球面上，$|\mathrm{grad}u| = 1$.

9.3.5　求数量场 $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ 的等值线.

解　场的等值线方程为

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) = c, (c\text{ 为常数})$$

即等值线除 $c = 0$ 时为两条直线外，其余都是以 ox 轴为实轴的等轴双曲线.

9.3.6　求数量场 $u = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 的等值面.

解　场的等值面方程为

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c,$$

即 $z^2 = (x^2 + y^2)\sin^2 c$，($c$ 为任意常数). 这是顶点在坐标原点的一簇圆锥面.

9.3.7　作数量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

的等值面，求通过点 $M(9,12,28)$ 的等值面，在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$ 内，

max$u$ 等于什么?

解　等值面的方程是

$$\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=c,$$

移项得

$$c-\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2},$$

两边平方并化简,得

$$c^2-32z=2c\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}.$$

两边再平方并化简,即得等值面方程为

$$\frac{4(x^2+y^2)}{c^2-256}+\frac{4z^2}{c^2}=1.$$

由于 u 的最小值为 16,故 $c\geqslant 16$. 当 $c>16$ 时,这是一个绕 oz 轴旋转的旋转面;当 $c=16$ 时,它退缩为线段 $x=y=0,\ -8\leqslant z\leqslant 8$.

把 $x=9,y=12,z=28$ 代入等值面方程,得

$$\frac{900}{c^2-256}+\frac{3136}{c^2}=1,$$

解之得 $c^2=4096$. 所以,过点 M 的等值面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1.$$

在域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 36$ 内,由于

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2+16z+64}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-16z+64}$$
$$\leqslant\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z},\ (0\leqslant z\leqslant 6),$$

故函数 $f(z)=\sqrt{100+16z}+\sqrt{100-16z}$ 在[0,6]上的最大值即为 u 的最大值,但是

$$f'(z)=8\left(\frac{1}{\sqrt{100+16z}}-\frac{1}{\sqrt{100-16z}}\right)<0,(0<z\leqslant 6),$$

故 $f(z)$ 在[0,6]上是严格减函数,从而

$$\max_{0\leqslant z\leqslant 6}f(z)=f(0)=20,$$

因此, max$u=20$.

9.3.8　求场 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1,2,2)$ 及 $B(-3,1,0)$ 的梯度之间的夹角 φ.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

在 $A(1,2,2)$、$B(-3,1,0)$ 点的梯度分别为

$$\text{grad}u(A)=\frac{7}{81}\boldsymbol{i}-\frac{4}{81}\boldsymbol{j}-\frac{4}{81}\boldsymbol{k},\ \text{grad}u(B)=-\frac{2}{25}\boldsymbol{i}-\frac{3}{50}\boldsymbol{j}.$$

于是 $\cos\varphi=\frac{\text{grad}u(A)\cdot\text{grad}u(B)}{|\text{grad}u(A)|\cdot|\text{grad}u(B)|}=\frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}}=-\frac{8}{9}$.

9.3.9 已知数量场 $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，作出该场的等值面和梯度的等模面.

在域 $1<z<2$ 内，求 $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\text{grad}u|$, $\sup|\text{grad}u|$

解 场的等值面是

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c,(|c|\leqslant 1).$$

当 $c=0$ 时，得 $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$，这是 xoy 平面但需除去坐标原点. 当 $c\neq 0$ 时，等值面的方程化为 $x^2+y^2=\frac{1}{c^2}(1-c^2)z^2$.

由此可见，当 $-1<c<1$ $(c\neq 0)$ 时，等值面是圆锥面，当 $c=\pm 1$ 时，等值面是 oz 轴但需除去原点. 又

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

故有 $|\text{grad}u|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$.

等模面的方程为 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}=c$, $(c\neq 0)$.

这是一个以 oz 轴为旋转轴的旋转面. 令 $y=0$，得

$$x=cx^2+cz^2,\ \text{或}\ (x-\frac{1}{2c})^2+z^2=\frac{1}{4c^2},(c\neq 0),$$

这是 oxz 面上的圆，因此梯度的等模面是一个旋转圆环.

当 $1 < z < 2$ 时，显然有 $0 < u \leqslant 1$；且当 $x = y = 0$ 时，$u = 1$，而当 $x^2 + y^2$ 充分大时 u 可任意小，故

$$\inf_{1<z<2} u = 0,\ \sup_{1<z<2} u = 1.$$

又由于 $|\mathrm{grad}u| \geqslant 0$，且当 $x = y = 0$ 时，$|\mathrm{grad}u| = 0$，故

$$\inf|\mathrm{grad}u| = 0.$$

最后，若令 $\sqrt{x^2 + y^2} = r\ (r \geqslant 0)$，则 $|\mathrm{grad}u| = \dfrac{r}{r^2 + z^2}$.

由不等式 $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$ 有

$$|\mathrm{grad}u| = \frac{r}{r^2 + z^2} \leqslant \frac{1}{2|z|} = \frac{1}{2z} \quad (1 < z < 2),$$

从而，$$\sup|\mathrm{grad}u| = \frac{1}{2}.$$

9.3.10　求证：标量场 $\Phi(x,y,z)$ 的梯度是与曲面 $\Phi(x,y,z) = c$（c 为常量）垂直的向量场.

证　$\Phi(x,y,z)$ 在点 $M(x,y,z)$ 的梯度为

$$\mathrm{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

它的三个分量 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\dfrac{\partial\Phi}{\partial y},\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ 恰好是曲面 $\Phi(x,y,z) = c$ 在 M 点的法线的方向数，故所求得证.

9.3.11　求证下面公式：

(1) $\mathrm{grad}(u + c) = \mathrm{grad}u$（$c$ 为常数）；

(2) $\mathrm{grad}(cu) = c\,\mathrm{grad}u$（$c$ 为常数）；

(3) $\mathrm{grad}(u + v) = \mathrm{grad}u + \mathrm{grad}v$；

(4) $\mathrm{grad}(uv) = v\mathrm{grad}u + u\mathrm{grad}v$；

(5) $\mathrm{grad}(u^2) = 2u\mathrm{grad}u$；

(6) $\mathrm{grad}f(u) = f'(u)\mathrm{grad}u$.

证　(1) $$\mathrm{grad}(u + c) = \frac{\partial(u + c)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(u + c)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(u + c)}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k} = \mathrm{grad}u.$$

(2) $$\mathrm{grad}(cu) = \frac{\partial(cu)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(cu)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(cu)}{\partial z}\boldsymbol{k} = c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = c\mathrm{grad}u.$$

(3) $\mathrm{grad}(u+v) = \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(u+v)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(u+v)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$= (\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}) + (\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k})$$

$$= \mathrm{grad}u + \mathrm{grad}v.$$

(4) $\mathrm{grad}(uv) = \frac{\partial(uv)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$= (v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x})\boldsymbol{i} + (v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y})\boldsymbol{j} + (v\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial v}{\partial z})\boldsymbol{k}$$

$$= v\mathrm{grad}u + u\mathrm{grad}v.$$

(5) 由(4)式得

$$\mathrm{grad}(u^2) = u\mathrm{grad}u + u\mathrm{grad}u = 2u\mathrm{grad}u.$$

(6) $\mathrm{grad}f(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(u)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(u)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= f'(u)\mathrm{grad}u.$$

9.3.12 已知 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求(1) $\mathrm{grad}r$，(2) $\mathrm{grad}r^2$，(3) $\mathrm{grad}\frac{1}{r}$，(4) $\mathrm{grad}f(r)$.

解 (1) $\mathrm{grad}r = \frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k} = \frac{1}{r}\boldsymbol{r}.$

其中 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

(2) $\mathrm{grad}r^2 = 2r\mathrm{grad}r = 2r\cdot\frac{1}{r}\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{r}.$

(3) $\mathrm{grad}\frac{1}{r} = (\frac{1}{r})'\mathrm{grad}r = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{r}\boldsymbol{r} = -\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}.$

(4) $\mathrm{grad}f(r) = f'(r)\mathrm{grad}r = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}.$

9.3.13 证明公式 $\mathrm{grad}f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}v.$

证 由于

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z},$$

故有 $\text{grad}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k})+\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k})$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\text{grad}u+\frac{\partial f}{\partial v}\text{grad}v.$$

9.3.14　求场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x,y,z)$ 沿此点的向径 $\boldsymbol{r}$ 方向的导数.在什么情况下,该导数等于梯度的大小?

解法 1　$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$

其中 $\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

又　$|\text{grad}u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$

要 $|\text{grad}u|=\frac{\partial u}{\partial r}$,只要 $\frac{u}{r}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$

即当 $|a|=|b|=|c|$ 时,方向导数等于梯度的大小.

解法 2　当向径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的方向与梯度

$$\text{grad}u=2(\frac{x}{a^2}\boldsymbol{i}+\frac{y}{b^2}\boldsymbol{j}+\frac{z}{c^2}\boldsymbol{k})$$

的方向一致时,沿此点的向径 $\boldsymbol{r}$ 的方向导数将等于梯度的大小.由此必须有

$$\frac{x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{z}{\frac{z}{c^2}},\text{ 即 }|a|=|b|=|c|.$$

9.3.15　求场 $u=\frac{1}{r}$ (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 在方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上的导数.

在什么情况下,此导数等于零?

解　$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$, 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{x}{r^3}\cos\alpha-\frac{y}{r^3}\cos\beta-\frac{z}{r^3}\cos\gamma$$

$$= -\frac{1}{r^2}[\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma]$$

$$= -\frac{1}{r^2}[\cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha + \cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta + \cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma]$$

$$= -\frac{1}{r^2}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}) = 0.$$

要$\frac{\partial u}{\partial l} = 0$，只要 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}) = 0$，即 $\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{r}$. 故当方向 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 垂直时，$\frac{\partial u}{\partial l} = 0$.

9.3.16 求场 $u = u(x,y,z)$ 在场 $v = v(x,y,z)$ 的梯度方向上的导数. 在怎样的情况下，此导数等于零？

解

$$\text{grad}v = \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= |\text{grad}v|(\cos\lambda\boldsymbol{i} + \cos\mu\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}),$$

其中 $\cos\lambda,\cos\mu,\cos\gamma$ 是 $\text{grad}v$ 的方向余弦.

如果用 $\boldsymbol{l}$ 表示方向$\{\cos\lambda,\cos\mu,\cos\gamma\}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \frac{1}{|\text{grad}v|}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}) = \frac{\text{grad}u \cdot \text{grad}v}{|\text{grad}v|}$$

当 $\text{grad}u$ 与 $\text{grad}v$ 垂直时，$\frac{\partial u}{\partial l} = 0$.

2. 通量

9.3.17 由矢径 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 构成的向量场中，有一圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 及平面 $z = H(H > 0)$ 所围成的封闭曲面 s，试求从 s 内穿出的通量 Q.

解 用 s_1 表示曲面 s 的平面部分，s_2 表示其锥面部分，则

$$Q = \oiint_s \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}ds = \iint_{s_1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}ds + \iint_{s_2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}ds,$$

其中

$$\iint_{s_1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}ds = \iint_{s_1}xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{D_1}Hdxdy$$

$$= H\cdot\pi H^2 = \pi H^3.$$

D_1 为 s_1 在 xoy 平面上的投影区域.

在 s_2 上，$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{n}$，故 $\iint\limits_{s_2} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} ds = 0$. 所以

$$Q = \oiint\limits_{s} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} ds = \pi H^3.$$

9.3.18　设流速 $\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，求流体的流量：

(1) 穿过圆柱 $x^2 + y^2 \leqslant a^2\ (0 \leqslant z \leqslant h)$ 的侧表面；

(2) 穿过该圆柱的全表面.

解　(1) $\Phi_1 = \iint\limits_{\Sigma} yzdydz + zxdzdx + xydxdy$，

其中 $\sum$ 为圆柱 $x^2 + y^2 \leqslant a^2\ (0 \leqslant z \leqslant h)$ 的侧表面. $\sum$ 在 xoy 平面上的投影区域为一圆周，其面积为零，故 $\iint\limits_{\Sigma} xydxdy = 0$；

又 $\sum$ 可分为 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 两部分，$\sum_1$ 为 $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ 的前侧，$\sum_2$ 为 $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$ 的后侧，$\sum$ 在 yoz 平面上的投影区域为 D_{yz}，故

$$\iint\limits_{\Sigma} yzdydz = \iint\limits_{\Sigma_1} yzdydz + \iint\limits_{\Sigma_2} yzdydz = \iint\limits_{D_{yz}} yzdydz - \iint\limits_{D_{yz}} yzdydz = 0.$$

同理可得 $\iint\limits_{\Sigma} zxdzdx = 0$. 于是有 $\Phi_1 = 0$.

(2) 用 $\sum_3$ 表示平面 $z = 0$ 的下侧，$\sum_4$ 表示平面 $z = h$ 的上侧，则 $\sum + \sum_3 + \sum_4$ 表示圆柱的全表面. 由

$$\iint\limits_{\Sigma_3} yzdydz + zxdzdx + xydxdy = 0 + 0 - \iint\limits_{D_{xy}} xydxdy;$$

和
$$\iint\limits_{\Sigma_4} yzdydz + zxdzdx + xydxdy = 0 + 0 + \iint\limits_{D_{xy}} xydxdy$$

以及(1)的结果，可以得出

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} yzdydz + zxdzdx + xydxdy = 0.$$

即穿过圆柱全表面的流量等于零.

9.3.19 求向径 r 穿过曲面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的流量.

解 设 s_1 为锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}, 0\leqslant z\leqslant 1$, 并取上侧, 则流量

$$Q=\iint_{s_1} x dydz + y dzdx + z dxdy.$$

添加平面圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 作为 s_2, 并取下侧, 则 s_1 和 s_2 组成封闭曲面 s 并取外侧, 由奥—高公式, 得

$$Q=\iint_{s} x dydz + y dzdx + z dxdy - \iint_{s_2} x dydz + y dzdx + z dxdy$$

$$=\iint_{s} x dxdy + y dzdx + z dxdy = 3\iiint_{\Omega} dxdydz = 3\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot 1}{3}=\pi.$$

9.3.20 求向量 $F=yi+zj+xk$ 穿过由诸平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ $(a>0)$ 所包围的四面体的全表面的流量, 并利用奥—高公式验证所得结果.

解 设由平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a$ 所围成的四面体的表面为 s, 并取 s 的外侧作为正侧. 又设四面体的各表面依次为 s_1, s_2, s_3, s_4, 则穿过 s 的流量为

$$Q=\iint_{s} y dydz + z dzdx + x dxdy.$$

由对称性知

$$Q=3\iint_{s} x dxdy = 3\left(\iint_{s_1} x dxdy + \iint_{s_2} x dxdy + \iint_{s_3} x dxdy + \iint_{s_4} x dxdy\right).$$

由于 s_1 和 s_2 在 xoy 平面上的投影区域的面积为零, 故

$$\iint_{s_1} x dxdy = \iint_{s_2} x dxdy = 0.$$

又 $$\iint_{s_3} x dxdy = -\iint_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}} x dxdy,\quad \iint_{s_4} x dxdy = \iint_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}} x dxdy,$$

由以上结果可得

$$Q = \iint_{s} ydydz + zdzdx + xdxdy = 0.$$

用奥—高公式来验证这个结果，

$$Q = \oiint_{s} ydydz + zdzdx + xdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}\right)dxdydz = 0.$$

9.3.21　求向量 $A = i + zj + \dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}k$ 穿过由 $z = \sqrt{x^2+y^2}$，$z = 1$ 及 $z = 2$ 所围成圆台的外侧面(不包括上、下底)的流量.

解　设圆台外侧面为 s，上底面为 s_1，下底面为 s_2，s_1 取上侧，s_2 取下侧. 圆台的全表面的外侧为 s'，所围成的区域为 Ω，则所求的流量为

$$\Phi = \iint_{s} A \cdot ds = \iint_{s} \left(\cos\alpha + z\cos\beta + \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\gamma\right)ds$$

$$= \oiint_{s'} - \iint_{s_1} - \iint_{s_2}.$$

但 $$\oiint_{s'} A \cdot ds = \oiint_{s'} dydz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{e^z}{r} rdrd\theta dz = 2\pi e^2,$$

$$\iint_{s_1} A \cdot ds = \iint_{s_1} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_{x^2+y^2\leqslant 4} \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= e^2\int_0^{2\pi}\int_0^2 drd\theta = 4\pi e^2,$$

$$\iint_{s_2} A \cdot ds = \iint_{s_2} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = -\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= -e\int_0^{2\pi}\int_0^1 drd\theta = -2\pi e.$$

故　$\Phi = 2\pi e^2 - 4\pi e^2 + 2\pi e = 2\pi e(1 - e).$

9.3.22　求向量 $r = xi + yj + zk$ 的流量：

(1) 穿过圆锥形 $x^2 + y^2 \leqslant z^2\ (0 \leqslant z \leqslant h)$ 的侧表面；

(2) 穿过此圆锥形的底.

解法1　(1) 记圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2\ (0 \leqslant z \leqslant h)$ 为 $\sum_1$，则流向 $\sum_1$ 外侧的流量为

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} d\sigma,$$ 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\sum_1$ 上向外侧的单位法向量.

$\sum_1$ 的方程可写为

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

故

$\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\} = \{2x,2y,-2z\}$ 为指向 $\sum_1$ 外侧的一个法向量，于是单位法向量

$$\boldsymbol{n} = \{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\}$$

故有

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \frac{x^2+y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\sigma.$$

又因为在 $\sum_1$ 上，$x^2+y^2-z^2 \equiv 0$，所以 $\Phi_1 = 0$.

解法2 设 $\sum_1$ 为满足方程 $x^2+y^2=z^2(0 \leqslant z \leqslant h)$ 的指定侧为外侧的有向曲面，则流量为

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

设 $\sum_1$ 在三个坐标面上的投影区域分别为 D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}，则

$$\iint_{\Sigma_1} xdydz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{z^2-y^2}dydz - \iint_{D_{yz}}(-\sqrt{z^2-y^2})dydz$$

$$= 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{z^2-y^2}dydz = 2\int_0^h dz \int_{-z}^{z} \sqrt{z^2-y^2}dy = \frac{1}{3}\pi h^3.$$

同样可以求得

$$\iint_{\Sigma_1} ydzdx = 2\iint_{D_{zx}} \sqrt{z^2-x^2}dzdx = \frac{1}{3}\pi h^3,$$

$$\iint_{\Sigma_1} zdxdy = -\iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r \cdot rdr = -\frac{2}{3}\pi h^3.$$

因此 $\Phi_1 = \frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{1}{3}\pi h^3 - \frac{2}{3}\pi h^3 = 0.$

(2) 设$\sum_2$为圆锥形的底，且指定侧为上侧，在$\sum_2$上，$z=h$，$\sum_2$在xoy平面上的投影区域为D_{xy}，则穿过$\sum_2$的流量为

$$\Phi_2=\iint_{\sum_2} zdxdy=\iint_{D_{xy}} hdxdy=\pi h^3.$$

9.3.23　设流速$v=xyi+yzj+zxk$，求流体穿过球面$x^2+y^2+z^2=1$在第一卦限部分$\sum$的流量Φ.

解　$\Phi=\iint_{\sum} xydydz+yzdzdx+zxdxdy.$

先计算$\iint_{\sum} zxdxdy.$

$\sum: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，它在xoy平面上的投影区域为$D: x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 所以

$$\iint_{\sum} zxdxdy=\iint_D x\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\sqrt{1-r^2}\cdot rdr=\frac{\pi}{16}.$$

类似地可以算出

$$\iint_{\sum} xydydz=\iint_{\sum} yzdzdx=\frac{\pi}{16}.$$

故　$\Phi=\frac{\pi}{16}\cdot 3=\frac{3}{16}\pi.$

9.3.24　设$u(x,y)$和$v=v(x,y)$为液体的速度分量，求在单位时间内流过以围线c为界的域s的液体的量(即液体流出量与流入量的差)，若液体不能压缩且在域s内没有源和洞，则函数u和v满足怎样的方程式？

解　设液体的速度为w，则$w=ui+vj$，又$ds=dx\cdot i+dy\cdot j$，于是，所求的液体量

$$Q=\oint_c w\cdot nds=\oint_c[u\cos(n,x)+v\sin(n,x)]ds$$

$$=\oint_c udy-vdx=\iint_s\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示曲线 c 的外法线上的单位向量，并且此处已假定流体的面密度等于1，若液体是不可压缩的，且在域 s 内没有源和洞，则液体流出量与流入量的差 Q 应等于零，即

$$\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

又由于对任意围线 c，上述结果均成立，于是，连续函数 u,v 应满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

9.3.25 设向量场 $\boldsymbol{A}=(1+x^2)\varphi(x)\boldsymbol{i}+2xy\varphi(x)\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k}$，其中 $\varphi(x)$ 是可微函数，且 $\varphi(0)=0$，求函数 $\varphi(x)$，使通量 $\Phi=\iint\limits_{\sum}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$ 只依赖于闭曲线 c，其中 $\sum$ 是张在空间闭曲线 c 上的光滑曲面.

解 在闭曲线 c 上任意作两个光滑曲面 $\sum_1$ 和 $\sum_2$，只要确定 $\varphi(x)$，使

$$\iint\limits_{\sum_1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint\limits_{\sum_2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

即可，其中法线 $\boldsymbol{n}$ 指向同一侧，为此，只要使通过曲线 c 的任一闭曲面 $\sum$ 上的通量为零. 即 $\oiint\limits_{\sum}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds=0$，亦即 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A}&=\frac{\partial}{\partial x}[(1+x^2)\varphi(x)]+\frac{\partial}{\partial y}[2xy\varphi(x)]+\frac{\partial}{\partial z}(-3z)\\&=4x\varphi(x)+(1+x^2)\varphi'(x)-3=0,\end{aligned}$$

又 $\varphi(0)$，故可求得 $\varphi(x)=\dfrac{x(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$，即当 $\varphi(x)=\dfrac{x(x^2+3)}{(1+x^2)^2}$ 时，Φ 值只依赖于闭曲线 c，此时，

$$\boldsymbol{A}=\frac{x(x^2+3)}{1+x^2}\boldsymbol{i}+\frac{2x^2y(x^2+3)}{(x^2+1)^2}\boldsymbol{j}-3z\boldsymbol{k},$$

$$\Phi=\iint\limits_{\sum}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iint\limits_{\sum}\frac{x(x^2+3)}{x^2+1}dydz+\frac{2x^2y(x^2+3)}{(x^2+1)^2}dzdx-3zdxdy.$$

3. 散度

9.3.26 证明：

(1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$,

(2) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\operatorname{grad}u$ ($\boldsymbol{c}$ 为常向量,u 为数量)

(3) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}u$.

证　(1) 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 则

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{\partial}{\partial x}(a_x+b_x)+\frac{\partial}{\partial y}(a_y+b_y)+\frac{\partial}{\partial z}(a_z+b_z)$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}+\frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$,其中 c_x,c_y,c_z 是常数,则

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\frac{\partial}{\partial x}(c_xu)+\frac{\partial}{\partial y}(c_yu)+\frac{\partial}{\partial z}(c_zu)$$

$$=c_x\frac{\partial u}{\partial x}+c_y\frac{\partial u}{\partial y}+c_z\frac{\partial u}{\partial z}=\boldsymbol{c}\cdot\operatorname{grad}u.$$

(3) $$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}(a_xu)+\frac{\partial}{\partial y}(a_yu)+\frac{\partial}{\partial z}(a_zu)$$

$$=u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)+a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}u.$$

9.3.27　求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$.

解　$\operatorname{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, 故

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\triangle u.$$

9.3.28　求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在什么情况下,$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$?

解　因为 $\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\operatorname{grad}r=f'(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, 故

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}f'(r)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r}f'(r)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r}f'(r)\right]$$

$$=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)$$

$$=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r).$$

要 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$,只要 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$. 把该方程改写成

$$rf''(r)+2f'(r)=0,$$

或
$$[rf''(r)+f'(r)]+f'(r)=0.$$

积分之,得 $rf'(r)+f(r)=c$,(c 为常数).

再积分,得 $rf(r)=cr+c_1$,(c_1 为常数).

故当 $f(r)=c+\frac{c_1}{r}$ 时, $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$.

9.3.29 计算:(1) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$;(2) $\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$;(3) $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{c}$ 为常向量.

解 (1) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$,

(2)
$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)$$
$$=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

(3) $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{c}\operatorname{grad}f(r)=\boldsymbol{c}\cdot f(r)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{f(r)}{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$.

9.3.30 求 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$,在什么情况下,该向量的散度为零?

解
$$\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}f(r)$$
$$=3f(r)+\boldsymbol{r}\cdot f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=3f(r)+rf'(r).$$

要 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$,只要 $3f(r)+rf'(r)=0$,即 $\frac{f'(r)}{f(r)}=-\frac{3}{r}$. 积分之,

得 $f(r)=\frac{c}{r^3}$,(c 为常数),故当 $f(r)=\frac{c}{r^3}$ 时,$\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$.

9.3.31 求由引力中心的有限系统所产生的动力场的散度.

解 设引力中心位于点 $M(x,y,z)$,具有质量 m,它吸引着坐标为 $M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,\cdots,n)$ 的 n 个质量分别为 $m_i(i=1,\cdots,n)$ 的质点,则引力场为 $\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}k\frac{mm_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i$,其中 k 是引力常数,$\boldsymbol{r}_i$ 是由点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$ 引向点 M 的向量,则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=km\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_i}{r_i^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_i}{r_i^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_i}{r_i^3}\right)\right]$$

$$= km\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\frac{3}{r_i^3} - \frac{3(x-x_i)^2}{r_i^5} - \frac{3(y-y_i)^2}{r_i^5} - \frac{3(z-z_i)^2}{r_i^5}\right] = 0.$$

9.3.32　质点 $P(x,y,z)$ 以一定的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 按逆时针方向绕 oz 轴旋转,求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{a}$ 的散度.

解　设向径 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \omega\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j},$$

其中 $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$,所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 0.$$

又因为 $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}) = -\omega\dfrac{dy}{dt}\boldsymbol{i} + \omega\dfrac{dx}{dt}\boldsymbol{j}$

且　$\dfrac{dx}{dt} = v_x = -\omega y,\ \dfrac{dy}{dt} = v_y = \omega x,$

所以 $\boldsymbol{a} = -\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$.

从而 $\mathrm{div}\boldsymbol{a} = -\omega^2\mathrm{div}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -2\omega^2$.

4. 环量

9.3.33　求向量场 $\boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c 为常数) 沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ 的环量.

解　环量 $\Gamma = \oint_c \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}dl = \oint_c -ydx + xdy + cdz$. 圆周 $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ 的参数方程为

$$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta, z = 0,$$

于是　$\Gamma = \int_0^{2\pi}[R^2\sin\theta + R^2\cos^2\theta + c\cdot 0]d\theta = 2\pi R^2$.

9.3.34　求向量 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, ($c$ 为常数) 的环量:

(1) 沿圆周 $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$;

(2) 沿圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0$;.

解　(1) 环量 $\Gamma = \oint_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_c -ydx + xdy + cdz$,其中 c 的参数方程为

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

故有

$$\Gamma = \int_0^{2\pi}[(-\sin t)(-\sin t) + \cos t\cdot\cos t]dt = \int_0^{2\pi}dt = 2\pi.$$

(2) 环量 $\Gamma = \oint_c - ydx + xdy + cdz$，其中 c 的参数方程为

$$x = 2 + \cos t, y = \sin t, z = 0 (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

故 $\Gamma = \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + (2 + \cos t)\cos t] dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t) dt = 2\pi.$

9.3.35 求向量 $F = \mathrm{grad}(\mathrm{arctg}\frac{y}{x})$ 沿着围线 c 的环量：

(1) c 不围绕 oz 轴；(2) c 围绕 oz 轴.

解 $F = \mathrm{grad}(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\boldsymbol{j}$，

故 $\Gamma = \oint_c F \cdot ds = \oint \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}dy$

$$= \oint_c d(\mathrm{arctg}\frac{y}{x}) = \theta|_c$$

(1) 当曲线 c 不围绕 oz 轴时，曲线上的点绕 c 一周时，θ 值没有变化，故得 $\Gamma = 0$.

(2) 当曲线 c 按右手系围绕 oz 轴转 n 圈时，由于曲线上的点每绕 c 一周，θ 增加 2π，故得 $\Gamma = 2n\pi$.

9.3.36 求向量场 $\boldsymbol{A} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ 沿闭曲线 c：

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \\ 2x + 2y - 1 = z \end{cases}$$

正向的环量以及 $\boldsymbol{A}$ 在任一点处的最大环量密度和取得最大环流密度的方向.

解 环量

$$\Gamma = \oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \oiint_{\Sigma} rot\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} ds.$$

其中 $\sum$ 为平面 $2x + 2y - 1 = z$ 含于 c 内的部分，$\boldsymbol{n}$ 为 $\sum$ 的单位法向量，即

$$\boldsymbol{n} = \frac{-2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\boldsymbol{k},$$

而 $\mathrm{rot}A = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，于是

$$\Gamma = \oiint_{\Sigma} \mathrm{rot}A \cdot \boldsymbol{n} ds = \oiint_{\Sigma} (-1) ds = -\iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} dxdy$$

$$= -3\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -3\pi.$$

$\boldsymbol{A}$ 在任意一点的最大环量密度为 $|\mathrm{rot}\boldsymbol{A}| = \sqrt{3}$，取得最大环量密度方向的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. 旋度

9.3.37　证明

(1) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\boldsymbol{b}$;

(2) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{a}) = u\mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}u \times \boldsymbol{a}$.

证　(1) 设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$，则有

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{rot}\boldsymbol{b}.$$

(2) 由 $\dfrac{\partial}{\partial x}(uv) = u\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}v$，有

$$\mathrm{rot}(u\boldsymbol{a}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ua_x & au_y & ua_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u\dfrac{\partial}{\partial x} & u\dfrac{\partial}{\partial y} & u\dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$= u\mathrm{rot}\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}u \times \boldsymbol{a}.$$

故　　$\mathrm{rot}[\boldsymbol{c} \times f(r)\boldsymbol{r}] = 2f(r)\boldsymbol{c} + \dfrac{f'(r)}{r}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{r}]$.

9.3.38 求(1)rot$\boldsymbol{r}$； (2)rot$[f(r)\boldsymbol{r}]$； (3)rot$\boldsymbol{c}f(r)$；(4)rot$[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$，($\boldsymbol{c}$ 为定向量)．

解 (1) 由 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 得

$$\text{rot}\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0.$$

(2) $\text{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\text{rot}\boldsymbol{r}+\text{grad}f(r)\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}+\dfrac{f'(r)\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r}=0.$

(3) $\text{rot}\boldsymbol{c}f(r)=f(r)\text{rot}\boldsymbol{c}+\text{grad}f(r)\times\boldsymbol{c}=\dfrac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}).$

(4) $\text{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\text{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})+\text{grad}f(r)\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})$，

但是

$$\text{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_yz-c_zy & c_zx-c_xz & c_xy-c_yx\end{vmatrix}$$
$$=2(c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{c}.$$

$$\text{grad}f(r)\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{r})$$
$$=\frac{f'(r)}{r}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}].$$

9.3.39 求(1)rot(grad$u$)；(2)div(rot$\boldsymbol{a}$)．

解 (1) 如果 u 具有对 x、y、z 的二阶连续混合偏导数，则它们与求导次序无关，故有

$$\text{rot}(\text{grad}u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0.$$

(2) 假定 a_x,a_y,a_z 具有对 x、y、z 的二阶连续混合偏导数，则有

$$\mathrm{divrot}a=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})$$

$$=\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z}=0.$$

9.3.40　物体以一定的角速度 ω 围绕轴 $l(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 旋转，求速度向量 v 在空间的点 $M(x,y,z)$ 和在已知时刻的旋度.

解　由 $v=v_0+\omega\times r$ 有

$$v_x=v_{0x}+\omega_y z-\omega_z y,\ v_y=v_{0y}+\omega_z x-\omega_x z,$$
$$v_z=v_{0z}+\omega_x y-\omega_y z.$$

又由

$$\mathrm{rot}_x v=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\omega_x,\quad \mathrm{rot}_y v=2\omega_y,\quad \mathrm{rot}_z v=2\omega_z.$$

可得　$\mathrm{rot}v=2\omega.$

这说明，在刚体旋转的线速度场中，任一点 M 处的旋度，除去一个常数因子外，恰好等于刚体旋转的角速度.

9.3.41　证明：$\mathrm{div}(a\times b)=b\cdot\mathrm{rot}a-a\cdot\mathrm{rot}b.$

证　$\mathrm{div}(a\times b)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z-a_z b_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x-a_x b_z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y-a_y b_x)$$

$$=b_x(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})+b_y(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})+b_z(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})$$
$$-a_x(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z})-a_y(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x})-a_z(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y})$$

$$=b\cdot\mathrm{rot}a-a\cdot\mathrm{rot}b.$$

9.3.42　求证：矢量场 $F(x,y,z)$ 的旋度的散度恒为零.

证　设 $F(x,y,z)=F_x i+F_y j+F_z k$，则

$$\mathrm{rot}F=(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z})i+(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x})j+(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y})k$$

故有

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$
$$= 0.$$

6. 几个重要的场

9.3.43　试证：向量场 $\boldsymbol{A} = (2x+y)\boldsymbol{i} + (4y+x+2z)\boldsymbol{j} + (2y-z)\boldsymbol{k}$ 是有势场，而 $\boldsymbol{B} = (xy+y^2)\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ 不是有势场，并求一数量函数 $u(x,y,z)$，使 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}u(x,y,z)$.

证　因为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & 4y+x+2z & 2y-z \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，而 $\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = (2xy - x - 2y)\boldsymbol{k} \neq 0$，所以 $\boldsymbol{B}$ 不是有势场.

现求 $u(x,y,z)$，使 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}u(x,y,z)$.

方法 1　求 $u(x,y,z)$，使

$$\begin{aligned} du &= (2x+y)dx + (4y+x+2z)dy + (2y-z)dz \\ &= (2xdx + 4ydy - zdz) + (ydx + xdy) + 2(zdy + ydz) \\ &= d(x^2 + 2y^2 - \frac{z^2}{2}) + d(xy) + 2d(yz) \\ &= d(x^2 + 2y^2 - \frac{z^2}{2} + xy + 2yz). \end{aligned}$$

所以　$u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - \frac{z^2}{2} + xy + 2yz.$

方法 2　因为 $\boldsymbol{A}$ 是有势场，在场内沿曲线积分与路径无关，所以

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_0^x 2xdx + \int_0^y (4y+x)dy + \int_0^z (2y-z)dz \\ &= x^2 + 2y^2 + xy + 2yz - \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

方法 3　有势场必存在函数 $u(x,y,z)$，使

$$du = (2x+y)dx + (4y+x+2z)dy + (2y-z)dz,$$

即　$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x + 2z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2y - z.$

于是　$u(x,y,z) = \int (2x+y)dx = x^2 + xy + c_1(y,z).$

又因为 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + \dfrac{\partial}{\partial y}c_1(y,z) = 4y + x + 2z,$

所以 $\quad \dfrac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = 4y + 2z$,于是

$$c_1(y,z) = \int (4y + 2z)dy = 2y^2 + 2yz + c_2(z),$$

即 $\quad u(x,y,z) = x^2 + xy + 2y^2 + 2yz + c_2(z).$

但是 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2y + c'_2(z) = 2y - z,$

所以 $c'_2(z) = -z,\ c_2(z) = -\dfrac{z^2}{2} + c,$

从而 $u(x,y,z) = x^2 + xy + 2y^2 + 2yz - \dfrac{1}{2}z^2 + c.$

9.3.44　确定下列向量场是否为保守场?若是,则求其势函数.

(1) $\boldsymbol{F} = (xz - y, x^2y + z^3, 3xz^2 - xy)$;

(2) $\boldsymbol{F} = (yz(2x + y + z), xz(x + 2y + z), xy(x + y + 2z))$.

解　(1) $P = xz - y, Q = x^2y + z^3,\ R = 3xz^2 - xy$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -x - 3z^2 \not\equiv 0,\ \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 不是保守场.

(2) $P = yz(2x + y + z),\ Q = xz(x + 2y + z),$

$R = xy(x + y + 2z).$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = (x^2 + 2xy + 2xz) - (x^2 + 2xy + 2xz) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = (2xy + y^2 + 2yz) - (2xy + y^2 + 2yz) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (2xz + 2yz + z^2) - (2xz + 2yz + z^2) = 0.$$

即　$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = 0.$

所以 $\boldsymbol{F}$ 是保守场,设势函数为 $u(x,y,z)$,求法如下:

方法 1　因为$\dfrac{\partial u}{\partial x} = P = yz(2x + y + z)$,所以

$$u(x,y,z) = \int yz(2x + y + z)dx + \varphi(y,z)$$
$$= x^2yz + xy^2z + xyz^2 + \varphi(y,z).$$

另一方面,由$\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q = xz(x + 2y + z)$,有

$$x^2z + 2xyz + xz^2 + \varphi'_y(y,z) = xz(x + 2y + z),$$

即 $\varphi'_y(y,z) = 0$. 所以有 $\varphi(y,z) = \psi(z)$.

再由 $\dfrac{\partial u}{\partial z} = R = xy(x + y + 2z)$,有

$$x^2y + xy^2 + 2xyz + \psi'(z) = xy(x + y + 2z).$$

即 $\psi'(z) = 0$, 所以 $\psi(z) = c$. 于是,有

$$u(x,y,z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + c.$$

方法 2 因为 $\mathrm{rot}F = 0$,所以积分与路线无关.

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz + c \\ &= \int_0^x P(x,0,0)dx + \int_0^y Q(x,y,0)dy + \int_0^z R(x,y,z)dz + c \\ &= \int_0^z xy(x + y + 2z)dz + c = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + c. \end{aligned}$$

9.3.45 设向量场 $F = (x^3 + 3y^2z)\boldsymbol{i} + 6xyz\boldsymbol{j} + f(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 为有势场,$f(x,y,z)$ 满足$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, f(0,0) = 0$,求函数 $f(x,y,z)$ 和场 F 的势函数,并证明对于这样的函数 $f(x,y,z)$,F 不是管量场.

解
$$\mathrm{rot}F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + 3y^2z & 6xyz & f(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial f}{\partial y} - 6xy)\boldsymbol{i} + (3y^2 - \frac{\partial f}{\partial x})\boldsymbol{j} + (6yz - 6yz)\boldsymbol{k},$$

因为 F 是有势场,所以 $\mathrm{rot}F = 0$,于是

$$\frac{\partial f}{\partial y} - 6xy = 0, 3y^2 - \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

即 $$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy, \frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2.$$

从而 $f(x,y,z) = \int 6xydy = 3xy^2 + p(x,z)$,

对 x 求偏导数,得 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 3y^2$,由此 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, 故

$$\varphi(x,z) = c_1 + \psi(z),$$

于是 $f(x,y,z) = 3xy^2 + c_1 + \psi(z)$. 再由题设 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ 及 $f(0,0,z) = 0$,有

$$\begin{cases} \psi'(z) = 0, \\ \psi(z) + c_1 = 0, \end{cases}$$

即 $\psi(z) = -c_1$，所以 $\varphi(x,z) = 0$. 故 $f(x,y,z) = 3xy^2$.

$$u(x,y,z) = \int_0^x x^3 dx + \int_0^y 0 \cdot dy + \int_0^z 3xy^2 dz = \frac{1}{4}x^4 + 3xy^2 z.$$

于是，场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数为

$$v(x,y,z) = -u + c = -\frac{1}{4}x^4 - 3xy^2 z + c.$$

对于 $f(x,y,z) = 3xy^2$，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla[(x^3 + 3y^2 z)\boldsymbol{i} + 6xyz\boldsymbol{j} + 3xy^2\boldsymbol{k} = 3x^2 + 6xz \not\equiv 0,$$

所以，场 $\boldsymbol{F}$ 不是管量场.

第十章　级　　数

//

§1　常数项级数

内 容 提 要

1. 一般概念

对于常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$，如果前$n$项部分和$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$所组成的数列$\{s_n\}$收敛，即$\lim_{n\to\infty}s_n = s$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛．$s$叫做该级数的和，反之，称级数发散．

级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty}a_n = 0$．

级数收敛的柯西(Cauchy)准则：

级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件为：对于任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得当$m > n \geqslant N$时，有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon;$$

或者，对于任意的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得当$n > N, p = 1,2,\cdots$时，有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

2. 正项级数敛散性的判别法

(1) 比较判别法

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，若 $a_n \leqslant b_n$，则当级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定收敛；当级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 一定发散；

若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda\neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时收敛或同时发散.

(2) 达朗贝尔(D'Alembert) 比值判别法

设有正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，则当 $q<1$ 时，级数收敛；当 $q>1$ 时，级数发散.

(3) 柯西(Cauchy) 根值判别法

若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$，则当 $q<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $q>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(4) 柯西(Cauchy) 积分判别法

若 $f(x)$ $(x>0)$ 是非负的不增函数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同时收敛或同时发散.

(5) 拉阿伯(Raabe) 判别法

当 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=p$，则当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $p<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3. 任意项级数敛散性的判别法

(1) 交错级数的莱布尼兹(Leibniz) 判别法

对于交错级数 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n+\cdots$ $(a_n>0,$ $n=1,2,\cdots)$，如果 1) $a_n\geqslant a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则交错级数收敛.

(2) 绝对收敛与条件收敛

若任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$各项的绝对值所组成的级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，并说级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，而任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则说级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为条件收敛.

问 题 与 解 答

1. 常数项级数的一般概念

判断下列各题是否正确(10.1.1—10.1.17题)：

10.1.1 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则必有$\lim_{n\to\infty}u_n \neq 0$.

非. 例如调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 其中$u_n=\frac{1}{n}$，而$\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

10.1.2 若$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛.

非. 如调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{1}{n}$，$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

10.1.3 若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必发散.

是. 事实上，若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由级数收敛的必要条件，有$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，与已知条件不符. 故知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必发散.

10.1.4 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是前n项之和所构成的数列$\{s_n\}$有界.

非. 如级数$1-1+1-1+\cdots$的前n项之和构成的数列为$1,0,1,0,\cdots$，它是有界的数列，但是级数$1-1+1-1+\cdots$发散.

正确的命题是：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，则其收敛的充分必要条件是前 n 项之和所构成的数列$\{s_n\}$有界.

10.1.5 若$u_n \geqslant 0, u_n \geqslant u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛.

非. 如调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$满足$u_n = \frac{1}{n} > 0, u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

正确的命题应是：若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足$u_n \geqslant u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛(此命题称为莱布尼兹判别法).

10.1.6 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必收敛.

非. 如交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛，此时，$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，而$|u_n| = \frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$为调和级数，它发散.

10.1.7 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)^2$必收敛.

非. 如交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，此时，$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$(u_n)^2 = \frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

有必要指出，若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n)^2$必定收敛.

10.1.8 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛.

非. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

10.1.9 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定发散.

是. 事实上，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则由级数的性质知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(u_n+v_n)-u_n]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也必定收敛，这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散相矛盾.

10.1.10 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定发散.

非. 如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n})$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

10.1.11 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$必定发散.

非. 如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，易知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$也收敛.

又如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$发散，此时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

10.1.12 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$必定发散.

非. 如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n=$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛.

10.1.13 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$必定收敛.

非. 如级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}]$是一个收敛级数与一个发散级数之和，由反证法易知，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散. 事实上，设$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛，故由级数的性质可知，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$也必收敛，这是不可能的，因而$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$必定发散，但$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$.

正确的命题应为：若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是正项级数，则当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$时，必有$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

10.1.14 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必有$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=r<1$.

非. 如级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛，此时$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$u_{n+1}=(-1)^n\frac{1}{n+1}$，$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\lim_{n\to\infty}|-\frac{n}{n+1}|=1$.

有时甚至$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$却不存在，如$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$为两个收敛级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$之和，因而所给级数收敛，而

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^{n+1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2} = +\infty.$$

因而$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$不存在.

其逆命题正确,即若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = r < 1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,这即是级数收敛性的比值判别法.

10.1.15 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = r < 1$.

非.如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛,此时$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$,但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.其逆命题正确,即若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = r < 1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,这即是级数收敛性的根值判别法.

10.1.16 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则加括号后所得的新级数亦发散.

非.如$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$发散,但加括号所得的新级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$却是收敛的.

10.1.17 若加括号后的级数发散,则原级数必发散.

是.事实上,设原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则由级数的性质可知,加括号后所成的新级数仍收敛,此与命题条件不符,故知所给命题正确.

10.1.18 求下列有限项的和:

(1) $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$;

(2) $s_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)$;

(3) $s_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

解 (1) 由于$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,所以

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(2) 由于 $k(k+1) = \dfrac{(k+1)(k-1)k}{3} - \dfrac{k(k-2)(k-1)}{3}$，所以

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(k+1)k(k-1)}{3} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3}\right]$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

(3) 因为

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

将上面各式两边分别相加，得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n,$$

注意到 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，则有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10.1.19 直接证明下列级数的敛散性并求和：

(1) $\dfrac{1}{1 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$；

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$；

(3) $\sin\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{2\pi}{6} + \cdots + \sin\dfrac{n\pi}{6} + \cdots$；

(4) $1 + \dfrac{m-1}{m} + \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^3 + \cdots$.

解 (1) 因为$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1})$,所以

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$
$$=\frac{1}{5}[(1-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{11})+\cdots+(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1})]$$
$$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1}).$$

于是,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})=\frac{1}{5}$.因此级数收敛且其和为$\frac{1}{5}$.

(2) 因为
$$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),$$

所以
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1).$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1)]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}.$$

因此级数收敛,且其和为$1-\sqrt{2}$.

(3) 因为$2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}=\cos\frac{(2n-1)\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}$,所以

$$S_n=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\sin\frac{n\pi}{6}$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}[(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12})+(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12})+\cdots+(\cos\frac{(2n-1)\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{2})]$$
$$=\frac{\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{12}},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，故级数发散.

(4) 因为

$$S_n = 1+\frac{m-1}{m}+\cdots+\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^n}{1-\frac{m-1}{m}}$$

$$=m[1-(\frac{m-1}{m})^n],$$

而 $m>1$，所以 $0<\frac{m-1}{m}<1$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}m[1-(\frac{m-1}{m})^n]$ $=m$. 因此级数收敛，且其和为 m.

10.1.20　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\frac{n+1}{n}$，写出该级数.

解　因为

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$
$$S_{n-1}=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1},$$

所以　$$u_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1}=-\frac{1}{n(n-1)}.$$

因此，所求的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n(n-1)}]$.

10.1.21　证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}$.

解　(1) 因为 $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，所以

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$$
$$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$$
$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$.

(2) 因为

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n,$$

所以 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}[\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k]$

$=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1]=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

10.1.22　判断下列级数的敛散性:

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3}-\frac{\ln^n 3}{3^n})$.

解　(1) 通项 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$,因为 $\lim u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq0$,所以级数发散.

(2) 通项 $u_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, 令 $x=\frac{1}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{x\to0}x^x=\lim_{x\to0}e^{x\ln x}=1\neq0.$$

所以此级数发散.

(3) 虽然通项 $u_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\to0(n\to\infty)$,但因为

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，所以此级数发散.

(4) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 为 p— 级数，$p = 3 > 1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛. 又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 3}{3}\right)^n$ 为等比级数，$q = \frac{\ln 3}{3} < 1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{3^n}$ 收敛. 综合上述情况，原级数收敛.

10.1.23 讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{3^2} + (-1) + \frac{1}{5^2} + (-1) + \cdots$；

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} + \cdots.$$

解　(1) 设
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (1-1) + \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) + \left(\frac{1}{5^2} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - 1\right) + \cdots,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - 1\right) = -1 \neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，根据级数的性质可知，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 设
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right) + \cdots,$$

由于通项 $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} = \frac{2}{n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为发散级数. 根据级数的性质可知，原级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$ 发散.

10.1.24 证明:级数 $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots$ 收敛并求其和.

解 设 $S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,则

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{7}{16} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

将上面两式相加,得

$$\frac{3}{2}S_n = 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

于是,

$$3S_n = 2 - 2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-2}}{1-(-\frac{1}{2})} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty} 3S_n = \frac{2}{3}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{9}$,因此原级数收敛,且其和为$\frac{2}{9}$.

10.1.25 证明:调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证法 1 利用拉格朗日中值定理,得

$$\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{\xi}(k+1-k) = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{k}, \quad (k < \xi < k+1).$$

即 $\ln 2 - \ln 1 < 1$,

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

……

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

故 $\quad \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = +\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = +\infty$，

于是，级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证法 2　利用函数不等式 $\ln(1+x) < x$, $(x > 0)$，可得

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k},\ (k = 1,2,\cdots,n).$$

故 $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1) = +\infty$，

所以 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = +\infty.$

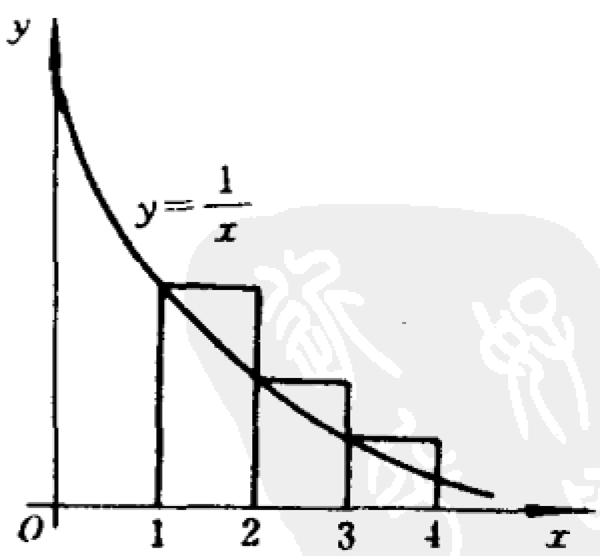
于是，级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证法 3　利用正项级数的比较判别法，因为 $0 < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, $(n = 1,2,\cdots)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1) - \ln n]$ 发散，所以，级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证法 4　利用定积分.

作曲线 $y = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$. 取 $x = 1,2,3,\cdots,n$，过这些点作 x 轴的垂线与曲线 $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ 相交，作阶梯形（如图），则

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \cdots \frac{1}{n} > \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n.$$



10. 1. 25 题图

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n = +\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=+\infty,$$

于是，级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法 5　利用积分判别法.

因为 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间$[1,+\infty]$上为正的连续递减函数，且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散，又 $f(n)=\frac{1}{n}$，$(n=1,2,3,\cdots)$，所以，由积分判别法知 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法 6　反证法.

若级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})=a,$$

a 为有限数. 于是，$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=a-a=0$. 另一方面，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)&=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.\end{aligned}$$

由以上矛盾可得，级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法 7　反证法.

若级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})=a,$$

于是，$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=a-a=0$，另一方面，由

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

知，$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \neq 0$. 由上面矛盾可知，级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证法 8　反证法.

若级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 收敛，则级数

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}) + \cdots \quad (*)$$

也收敛. 但

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n-1}}} + \frac{1}{1+\frac{2}{2^{n-1}}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2 \neq 0,$$

所以级数(＊)发散，这与级数(＊)收敛矛盾，故级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 发散.

证法 9　反证法

若级数 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 收敛，则级数

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}) + \cdots$$

也收敛. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) = 0.$$

又由 $\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} \geqslant \frac{2^{n-1}}{2\times 2^{n-1}} = \frac{1}{2}$

可知，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right)\neq 0.$$

由上面矛盾可知，级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法 10 用"若加括号后所成的级数发散，则原级数也发散"的性质.

因为 $\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\geqslant\frac{1}{2}$，所以，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right)\neq 0.$$

故级数 $\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}})+\cdots$ 发散，从而级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法 11 记 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

于是，不论 N 多么大，只要 $n>N$，就有 $|S_{2n}-S_n|\geqslant\frac{1}{2}$.

由数列极限存在的充要条件可知，当 $n\to\infty$ 时，S_n 的极限不存在. 所以级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证法 12 利用分组放缩不等式.

因为 $1=1$,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$

……………………

而级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}$ 发散，所以级数 $1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$

$+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots$ 发散，故级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

10.1.26　证明：由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证　设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$，其中 d 为公差，当 $d>0$ 时，总存在正整数 n_0，使 $a<(n_0-1)d$，则当 $n>n_0$ 时，总有 $a+(n-1)d<2(n-1)d$，于是

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$ 发散，因而级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 也发散；当 $d=0$ 时，a 不可能为零，此时级数 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}+\cdots$ 显然发散；当 $d<0$ 时，将此级数各项乘以 -1，即化为 $d>0$ 时的情形，于是，这级数也发散.

综上所述，不论 d 为何值，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

10.1.27　证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 也收敛，且有相同的和，其中 $A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\ (p_1=1,p_1<p_2<\cdots)$，反之不真，举出例子.

证　设级数的 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 部分和数列为 $c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$，则 $c_n=\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1}a_i$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故其部分和数列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的和，但反之不真，例如级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

10.1.28 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的各项是正的，而把这级数的项经过组合而得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

证 因$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，设其和为S. 考虑原级数的部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，并注意到$a_k>0$，$(k=1,2,\cdots)$，故存在n_0，使$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{m=1}^{n_0}A_m<S$. 显然$S_n<S_{n+1}$对一切$n$成立，于是$\{S_n\}$单调上升且有界. 因此，极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

10.1.29 证明：若数列$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$发散；

(2) 当$b_n\neq 0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}$.

证 (1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$的部分和

$$S_n=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1,$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty$，所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$发散.

(2) 因为$b_n\neq 0$时，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$. 故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2})+(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3})+\cdots+(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})\\&=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}},\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$ 收敛，且其和为 $\frac{1}{b_1}$.

10.1.30 利用柯西审敛准则，判断下列级数的敛散性：

(1) $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots$，$(|a_n|<10)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$；

(5) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 (1) 因为对于任何自然数 p，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|=|\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}}|$$

$$\leqslant\frac{|a_n|}{10^n}+\frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}$$

$$<\frac{1}{10^{n-1}}(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{p-1}})<\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9\cdot10^{n-2}},$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，要 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$，只须 $\frac{1}{9\cdot10^{n-2}}<\varepsilon$，于是 $n>2+\lg\frac{1}{9\varepsilon}$. 取 $N=2+[\lg\frac{1}{9\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$ 对一切正整数 p 皆成立. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

(2) 因为对任何自然数 p，都有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$$
$$=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n},$$

于是对任意给定的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = \left[-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$，则当 $n > N$ 时，对任何自然数 p，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

据柯西审敛准则可知，所给级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

(3) 因为对任何自然数 p，都有

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \left| \frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2) - \cos(n+3)x}{n+2} \right. \\
&\qquad \left. + \cdots + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p} \right| \\
&= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \cos(i+1)x \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\cos(n+p+1)}{n+p} x \right| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n},
\end{aligned}$$

于是，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，只要取 $N = [\frac{2}{\varepsilon}]$，则当 $n > N$ 时，对任何自然数 p，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

据柯西审敛准则可知，所给级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ 是收敛的.

(4) 不论 N 取得多么大，只要取 $n = N+1, p = N+1$，就有

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \frac{1}{(N+1)+1} + \frac{1}{(N+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(N+1)+(N+1)} \\
&> \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+1)} + \cdots + \frac{1}{2(N+1)} \\
&= (N+1) \cdot \frac{1}{2(N+1)} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

由此可见，对 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$，便找不到一个自然数 N，当 $n > N$ 时，使得对于任何自然数 p，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon_0 = \frac{1}{2}.$$

由柯西审敛准则可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

(5) 取 $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{1}{6}$，不论 n 多么大，若令 $p = 3n$，则有

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n} \\
&> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{6} > \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

由柯西审敛准则可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2} - \dfrac{1}{3n-3}\right)$ 发散.

10.1.31　判别下列级数的敛散性，若收敛则求其和.

(1) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24} + \cdots$;

(2) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{3^3}{2^3} - \dfrac{3^4}{2^4} + \cdots$;

(3) $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln^2 2}{2^2} + \dfrac{\ln^3 2}{2^3} + \cdots$.

解　(1) 这是首项为$\dfrac{2}{3}$，公比 $q = \dfrac{1}{2}$ 的等比级数，因为 $|q| < 1$，所以级数 $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \cdots$ 是收敛的，且其和 $S = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{4}{3}$.

(2) 这是首项为$\dfrac{3}{2}$，公比 $q = -\dfrac{3}{2}$ 的等比级数，因为 $|q| > 1$，因此级数 $\dfrac{3}{2} - \dfrac{3^2}{2^2} + \dfrac{3^3}{2^3} - \dfrac{3^4}{2^4} + \cdots$ 是发散的.

(3) 这是首项为$\dfrac{\ln 2}{2}$，公比 $q = \dfrac{\ln 2}{2}$ 的等比级数，因为 $|q| < 1$，所以级

数 $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^3 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$ 是收敛的.

10.1.32 试证:若数列$\{a_n\}$收敛于 a,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a.$$

证 设 $S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$

$$=a_1-a_{n+1}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-a$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a.$$

10.1.33 试证:如果$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]=\lim_{n\to\infty}f(n)-f(1),$$

并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的和.

证 设 $S_n=[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\cdots+[f(n+1)-f(n)]$

$$=f(n+1)-f(1),$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}[f(n+1)-f(1)]=\lim_{n\to\infty}f(n)-f(1),$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(f(n+1)-f(1)]$收,且其和为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)-f(1)$.

令 $f(n)=-\frac{1}{n}$,则

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}=f(n+1)-f(n),$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n})=0$. 因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}f(n)-f(1)=0-(-1)=1,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$

10.1.34　求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln[(1+\frac{1}{n})^{n}(n+1)]}{\ln n^{n}\cdot\ln(n+1)^{n+1}}$ 的和.

解　因为 $\frac{\ln[(1+\frac{1}{n})^{n}(n+1)]}{\ln n^{n}\cdot\ln(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)\cdot n\ln n}$

$$=\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},$$

所以

$$S_{n}=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(1+\frac{1}{k})^{k}(k+1)}{\ln k^{k}\ln(k+1)^{k+1}}$$

$$=\left(\frac{1}{2\ln2}-\frac{1}{3\ln3}\right)+\left(\frac{1}{3\ln3}-\frac{1}{4\ln4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2\ln2}-\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)},$$

由于 $\lim_{n\to\infty}S_{n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2\ln2}-\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}]=\frac{1}{2\ln2}$,

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln[(1+\frac{1}{n})^{n}(n+1)]}{\ln n^{n}\cdot\ln(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{2\ln2}.$

10.1.35　求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$, $(m\geqslant1)$.

解　(1) 由待定系数法,可得

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{-1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2},$$

注意到上式右端三项系数之和为零,所以

$$S_n = (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2})$$
$$+ (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+2})$$
$$+ (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2}) + \cdots$$
$$+ (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2})$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2},$$

因此，$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

(1) 的另解　用拆项相消法.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}],$$

故
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

于是 $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

(2) 用拆项相消法

$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)}$$
$$= \frac{1}{m}[\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}],$$

故

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m}\left[\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right]$$
$$= \frac{1}{m}\{[\frac{1}{m!} - \frac{1}{2\cdot 3\cdots(m+1)}] + [\frac{1}{2\cdot 3\cdots(m+1)}$$
$$- \frac{1}{3\cdot 4\cdots(m+2)}] + [\frac{1}{3\cdot 4\cdots(m+2)} - \frac{1}{4\cdot 5\cdots(m+3)}]$$
$$+ \cdots + [\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}]$$
$$= \frac{1}{m}\{\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\},$$

所以 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{m\cdot m!}$.

10.1.36 求下列级数的和:

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\cdots$;

(2) $1+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}+\cdots$.

解 (1) 设 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$, (1)

则
$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}. \quad (2)$$

(1) 式减(2) 式,得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})+(-1)\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$
$$=1+\frac{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

所以 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$.

(2) 由自然数列的前 n 项和的公式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

有
$$S_n=\frac{2}{1(1+1)}+\frac{2}{2(2+1)}+\frac{2}{3(3+1)}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=2(1-\frac{1}{n+1}).$$

所以 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$.

注 这是一种直接求和法,这种方法是计算部分和 S_n 的极限,仅当 S_n 的通式易于求得时,才能应用此法.

10.1.37 证明:级数$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot n^2}+\cdots$ 收敛,并求其和.

解 设 $S_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\cdot 2^n}$,则

$$S_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 2^2}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2^2}}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

及 $$S_3=S_2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 3^2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 3^2}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4},$$

用数学归纳法，设

$S_{k-1}=\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}$ 成立（k 为任意整数，且 $k\geqslant 2$），则

$$S_k=S_{k-1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot k^2}=\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot k^2}$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{k(2k^2-2k+1)}{2k^3-k+1}=\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1},$$

于是 $S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$，$(n=1,2,\cdots)$，从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，其和为 $\frac{\pi}{4}$.

2. 正项级数敛散性的判别法

(1) 比较判别法

10.1.38 利用比较判别法，判定下列级数的敛散性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots$;

(4) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$;

(5) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$.

解 (1) 因 $u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}=v_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所

以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散.

(2) 因$u_n=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}=v_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ($p=2>1$) 收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛.

(3) 因$u_n=\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}=v_n$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛.

(4) 因$u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}=v_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$也发散.

(5) 因$u_n=\frac{n}{2n-1}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=v_n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$是发散的，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$也发散.

10.1.39 用比较判别法,判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ ($a>0$) 的敛散性.

解 因$u_n=\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=(\frac{1}{a})^n=v_n$，当$\frac{1}{a}<1$,即$a>1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$收敛,所以,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛.

当$0<a\leqslant 1$时,$0<a^n\leqslant 1$,故$u_n=\frac{1}{1+a^n}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$发散,所以,当$0<a\leqslant 1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

综上所述,当$a>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$收敛,

当$0<a\leqslant 1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$发散.

10.1.40 运用比较判别法,判断下列级数的敛散性:

(1) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$,

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

解 (1) 因 $u_n=\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}=v_n$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,所以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散.

(2) 因当 $n>1$ 时,$\ln n<n$,于是 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}v_n$,而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散(因 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$),因此,级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;也发散.

(3) 因 $u_n=\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 也收敛.

(4) $u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\leqslant\frac{3}{2^n}=v_n$,因为 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是以公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数,收敛,故所给级数收敛.

10.1.41 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$;

解 (1) 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{(\frac{\pi}{n})^2}=1$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{n})^2=\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n})$也收敛.

(2) 因 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{2}{n}$,又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{2}{n}}=1,$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2}{\sqrt{n}}$也发散.

10.1.42 讨论下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}$; (3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.

解 (1) 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2^n}/\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,由比较判别法知,所给级数收敛.

(2) 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2^n}/(\frac{2}{3})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(\frac{4}{3})^n}=0$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$收敛,故所给级数也收敛.

(3) 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=+\infty$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故所给级数发散.

研究下列级数的敛散性(10.1.43——10.1.53题):

10.1.43 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{n^a}$.

解 由于

$$0<\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}{n^a}=\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}\bigg/\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}=2,$$

又级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$仅当$a+\frac{1}{2}>1$时收敛，故原级数仅当$a>\frac{1}{2}$时收敛.

10.1.44　$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1})$.

解　$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1})$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-1)+(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1})],$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2})$ 及$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1})$ 都是正项级数，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2})$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1})$收敛.

从而，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1})$发散.

10.1.45　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$.

解　先设$a>2$，利用斯特林格公式$n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$，$(0<\theta_n<1)$，即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^a}=\frac{\ln 2\pi}{2n^a}+\frac{\ln n}{2n^a}+\frac{\ln n}{n^{a-1}}+\frac{\theta_n}{12n^{a+1}}-\frac{1}{n^{a-1}},$$

显然，当$a>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a-1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^{a+1}}$以及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$均收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^a}$收敛.

现设 $a\leqslant 2$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty$, 因此

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^a}\Big/\dfrac{1}{n^{a-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty$,再注意到此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{a-1}}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^a}$ 发散.

10.1.46 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$.

解

$$u_n=\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}},$$

其中 $\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\to 0,(n\to\infty)$. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}\pi x-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\operatorname{sh}\pi x+\pi\sin\pi x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi x+\pi^2\cos\pi x}{2}=\pi^2,$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{\dfrac{1}{n^2}}\cdot\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$$=1\cdot\pi^2\cdot 1=\pi^2.$$

于是存在常数 $k>0$，当 n 充分大时，有 $\left|\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^2}}\right|\leqslant k$，即 $|u_n|\leqslant k\cdot\dfrac{1}{n^2}$，

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

10.1.47　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解　由于 $n!>(\frac{n}{e})^n$，故有 $\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}>\dfrac{1}{e^n}n^{n-\sqrt{n}}=b_n$，但

$$\sqrt[n]{b_n}=\frac{1}{e}n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\to+\infty,\ (n\to\infty),$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，从而原级数也发散.

10.1.48　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

解　$u_n=\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=\dfrac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n\ln\ln n}}=e^{-[n\ln\ln n-\ln^2 n]}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln\ln n-\ln^2 n}{n}=+\infty$，故存在 n_0 使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$n\ln\ln n-\ln^2 n\geqslant An,$$

其中 A 为大于零的常数，从而有

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{e^{n\ln\ln n-\ln^2 n}}\leqslant\frac{n^2}{e^{An}}\to 0,(n\to\infty).$$

于是，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

10.1.49　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^{\alpha}}-1)$.

解 当 $a \geqslant 0$ 时，$u_n = n^{n^a} - 1 \to +\infty, (n \to \infty)$. 故级数发散.

当 $-1 \leqslant a < 0$ 时，由于

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{\frac{1}{x^{|a|}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{|x|^a}} - 1}{\frac{1}{x^{|a|}}} = \lim_{x \to +\infty} \left\{ \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|a| \cdot \frac{1}{x^{|a|+1}}} \right\}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}(\ln x - |a|^{-1}) = +\infty,$$

故对于 $u_n = n^{n^a} - 1$，当 $n \to \infty$ 时，有 $\frac{u_n}{\frac{1}{n^{|a|}}} \to +\infty$，因此，存在常数 $k > 0$，

使 $u_n \geqslant k \cdot \frac{1}{n^{|a|}}$，但当 $|a| \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|a|}}$ 发散，从而当 $-1 \leqslant a < 0$ 时，原级数发散；当 $a < -1$ 时，选取 β，使 $a < \beta < -1$，于是 $|a| > |\beta| > 1$，由于

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|\beta| \cdot \frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\left|\frac{a}{\beta}\right|\right) \frac{\ln x}{x^{|a|-|\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|a|-|\beta|}}) = 0.$$

故有 $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛，从而当 $a < -1$ 时，原级数收敛.

10.1.50 $\sum_{n=1}^{\infty} [\ln \frac{1}{n^a} - \ln(\sin \frac{1}{n^a})]$.

解 $u_n = \ln \frac{1}{n^a} - \ln(\sin \frac{1}{n^a})$.

若 $a < 0$，则对于某些 n，$\ln(\sin \frac{1}{n^a})$ 可能无意义，故必须设 $a \geqslant 0$.

当 $a = 0$ 时，$u_n = -\ln\sin 1 = 常数 > 0, (n = 1, 2, \cdots)$，故此时级数发散；当 $a > 0$ 时，将 u_n 改写为

$$u_n=\ln\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}=\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}-\sin\frac{1}{n^a}}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^a}{\sin x^a}-1}{x^{2a}}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\frac{y}{\sin y}-1}{y^2}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y-\sin y}{y^2\sin y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y-\sin y}{y^3}$

$$=\lim\limits_{y\to0}=\frac{1-\cos y}{3y^2}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{6y}=\frac{1}{6}.$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{2a}}}=\frac{1}{6}$. 由此可知,当 $2a>1$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

而当 $2a\leqslant1$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

10.1.51 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}},(a>0,b>0)$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}\Big/\frac{1}{n^{a+b}}$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{a}{n})^{n+b}(1+\frac{b}{n})^{n+a}}=\frac{1}{e^a\cdot e^b}=e^{-(a+b)}.$$

故当 $a+b>1$ 时,级数收敛;而当 $a+b\leqslant1$ 时,级数发散.

10.1.52 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

解 由公式 $\alpha-\beta=\frac{\alpha^4-\beta^4}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}$ 可得

$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$

$$= \frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})},$$

由此可知，不论 $a = \frac{1}{2}$ 还是 $a \neq \frac{1}{2}$，当 n 充分大时，上式右端均保持定号，故原级数可当成正项级数处理.

若 $a = \frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \frac{a^2-b}{4},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故原级数收敛；

若 $a \neq \frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})} \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{2a-1}{4} \neq 0.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故原级数发散.

10.1.53　(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

解　(1) 当 $x \neq 0$ 及 $-1 < x < +\infty$ 时，有 $\ln(1+x) < x$，利用上式即得

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

即　$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$，于是

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{3/2}},$$

但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛,故原级数也收敛.

(2) 当 x 充分大时,有 $e^x\geqslant Bx^7$ ($B>0$ 为常数),故存在 n_0,使当 $n>n_0$ 时,有

$$0<n^2e^{-\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{B}n^{-\frac{7}{2}+2}=\frac{1}{B}n^{-\frac{3}{2}},$$

但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$收敛,故原级数也收敛.

10.1.54 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,且对一切自然数 n,等式 $a_n<c_n<b_n$,成立,证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛.

证 因为 $a_n<c_n<b_n$,所以 $0<c_n-a_n<b_n-a_n$.
级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$为正项级数,又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,所以,正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛,而 $c_n-a_n<b_n-a_n$,所以正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛.

又因 $c_n=(c_n-a_n)+a_n$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛.

10.1.55 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数,证明:

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,且当 $n>n_0$ 时,$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散,且当$n>n_0$时,$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\frac{v_{n+1}}{v_n}$,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

证 (1) 由题设有

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}<\frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}},\quad \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}<\frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}},\quad \cdots,\quad \frac{u_n}{u_{n-1}}<\frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

将上面各不等式两边分别相乘得,$u_n<\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}v_n$,于是,由比较判别法知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 用类似(1)的方法可证明之.

10.1.56 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛,证明级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$都收敛.

证 (1) 由于$|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$,由比较原理知,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛.

(2) 因$0\leqslant(a_n+b_n)^2\leqslant a_n^2+2|a_nb_n|+b_n^2$,故由比较原理知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛.

(3) 在(1)中取$b_n=\frac{1}{n}$,即得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛.

10.1.57 设$\{a_n\}$为单调上升趋于无穷的正数列,记$u_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^pa_{n+1}}$,证明当$p>0$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;$p\leqslant0$时,该级数发散.

证 $p=1$时,$u_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$,$s_n=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$. 所以$s_n\to\frac{1}{a_1}\ (n\to\infty)$,故此时级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

$p>1$时,由题设知,当n充分大时,有$a_n\geqslant1$,因此n充分大时,$a_n^2\geqslant a_n$,从而

$$0 \leqslant \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^2 a_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}}.$$

由比较原理和 $p = 1$ 时的结论知，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$0 < p < 1$ 时，有 $1 - x^p > p(1 - x)$，对于任意的 $x \in (0,1)$，在 $[0,1]$ 上对函数 $f(x) = x^p$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$f(1) - f(x) = f'(\xi)(1 - x),\ 0 < x < \xi < 1.$$

即 $\qquad 1 - x^p = p\xi^{p-1}(1 - x) > p(1 - x).$

在上述不等式中，取 $x = \frac{a_n}{a_{n+1}}$，即得 $0 \leqslant \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^2 a_{n+1}} < \frac{1}{p}(\frac{1}{a_n^p} - \frac{1}{a_{n+1}^p})$.

注意此不等式，无论 a_{n+1} 与 a_n 是否相等，都是成立的，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p}(\frac{1}{a_n^p} - \frac{1}{a_{n+1}^p})$ 显然收敛，故由比较判别法知，当 $0 < p < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$p = 0$ 时，取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，对任意的 N，由 $a_m \to \infty (m \to \infty)$ 知，总可以取 m 充分大，使 $m > N$，且 $\frac{a_{N+1}}{a_{m+1}} < \frac{1}{2}$，从而

$$\sum_{k=N+1}^{m} u_k = \sum_{k=N+1}^{m} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}} \geqslant \frac{1}{a_{m+1}}(a_{N+1} - a_N) = 1 - \frac{a_{N+1}}{a_{m+1}} > \frac{1}{2}.$$

故此时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，

$p < 0$ 时，由题设知，当 n 充分大时，有 $a_n \geqslant 1, a_n^p \leqslant 1$，从而 n 充分大时，

$$u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^p a_{n+1}} \geqslant \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \geqslant 0.$$

由 $p = 0$ 时的结论知，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

10.1.58 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证明：必有收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 存在，使 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

证 令 $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$，则 $s_n \to s, (n \to +\infty)$. 再设 $a_n = \frac{1}{s - s_n}$，则 a_n

是单调上升的正数列，且 $a_n \to \infty (n \to \infty)$，令

$$v_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^p a_{n+1}},\ 0 < p < 1,$$

由 10.1.38 题知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，但

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{s - s_{n+1}} - \frac{1}{s - s_n} = \frac{u_n}{(s - s_{n+1})(s - s_n)},$$

于是 $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{1-p} = +\infty.$$

10.1.59 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，证明必有发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，使 $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.

证 令 $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，则 $\{s_n\}$ 为单调上升数列，且 $s_n \to +\infty$，$(n \to \infty)$，因此令 $v_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n}$，由 10.1.36 题知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，而 $u_n = s_n - s_{n-1}$，故 $$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = 0.$$

10.1.60 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，利用不等式 $(x - y)^2 \geqslant 0$ 证明：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 也收敛.

证 由 $0 \leqslant (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}$，有 $\sqrt{a_n b_n} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + b_n)$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ 收敛，故由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 收敛.

若令 $b_n = \frac{1}{n^2}$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故由上面已证得的结果知，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}\ 收敛.$$

(2) 比值判别法

10.1.61 利用比值判别法,判定下列级数的敛散性:

(1) $\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots$;

(2) $\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\cdots$;

(5) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots$.

解 (1) 因 $u_n=\frac{n+2}{2^n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2(n+2)}=\frac{1}{2}<1,$$

所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$收敛.

(2) 因 $u_n=\frac{5^n}{n!}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}=0<1,$$

所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$收敛.

(3) 因 $u_n=\frac{n!}{10^n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=+\infty,$$

所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$发散.

(4) 因 $u_n=\frac{n^2}{3^n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}<1,$$

所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$是收敛的.

(5) 因 $u_n=\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1,$$

所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 发散.

10.1.62 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

(2) $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\cdots+\dfrac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}+\cdots$;

(3) $\dfrac{3}{4}+2(\dfrac{3}{4})^2+3(\dfrac{3}{4})^3+4(\dfrac{3}{4})^4+\cdots$;

(4) $\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\dfrac{4^4}{4!}+\cdots$;

(5) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\dfrac{1}{5\cdot 2^3}+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$.

解 (1) 因 $u_n=\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1,$$

所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 收敛.

(2) 因 $u_n=\dfrac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)(4n+1)}\cdot\frac{1\cdot 5\cdots(4n-3)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\frac{3}{4}<1,$$

所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdots(4n-3)}$ 收敛.

(3) 因 $u_n = n(\frac{3}{4})^n$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{3}{4})^{n+1}}{n(\frac{3}{4})^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{3}{4})^n$ 收敛.

(4) 因 $u_n = \frac{n^4}{n!}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot(\frac{n+1}{n})^4,$$
$$= 0 < 1,$$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ 收敛.

(5) 因 $u_n = \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)2^{2n-1}}{(2n+1)2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1,$$

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ 收敛.

(6) 因 $u_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$，故

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^n}{(n+3)\cdots(2n+2)} < (\frac{n+2}{n+3})^n,$$

于是 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n+2})^{n+2-2}]^{-1} = \frac{1}{e} < 1$，

所以原级数收敛.

10.1.63 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$；

(2) $\frac{1000}{1} + \frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3} + \frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$.

解 (1) 因 $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$，故

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=2\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{3^n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin 3t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{3t}=\frac{1}{3}$,(令 $t=\frac{\pi}{3^{n+1}}$).

所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<1$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$收敛.

(2) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$,故级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot 1001\cdot\cdots\cdot(1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$收敛.

10.1.64 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n/3^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^\alpha\beta^n$,其中 α 为任意实数,β 为非负实数.

解 (1) $0<n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n/3^n\leqslant n^3(\sqrt{2}+1)^n/3^n$,

对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3(\sqrt{2}+1)^n/3^n$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{3}(1+\frac{1}{n})^3=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1,$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3(\sqrt{2}+1)^n/3^n$收敛.

从而可知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3[(\sqrt{2}+(-1)^n]^n/3^n$也收敛.

(2) $u_n=n^\alpha\beta^n$,由比值判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha\beta^{n+1}}{n^\alpha\beta^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^\alpha\beta,$$

故当 $0\leqslant\beta<1$,α 为任意实数时,级数收敛;

当 $\beta>1$,α 为任意实数时,级数发散;

当 $\beta=1$ 时,比值判别法失效.此时 $u_n=n^\alpha$,由 p 级数的敛散性知道,

当 $\alpha < -1$ 时,级数收敛;当 $\alpha \geqslant -1$ 时,级数发散.

10.1.65 证明:$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

证 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$,因 $u_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$,故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n = 0 \cdot e = 0 < 1.$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛,由级数收敛的必要条件知,$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

10.1.66 判断级数 $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$ 的敛散性.

解 可用比值判别法判定,但计算较繁.为此先将 u_n 变形化简,即将各项表示为三角函数的值.

$$u_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{2^2},$$

$$u_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{4})}$$
$$= \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2^3}} = 2\sin\frac{\pi}{2^3},$$

$$u_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$$
$$= \sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^3}} = 2\sin\frac{\pi}{2^4},$$

利用数学归纳法可证得通项为 $u_n = 2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$,故级数化为

$$2(\sin\frac{\pi}{2^2} + \sin\frac{\pi}{2^3} + \sin\frac{\pi}{2^4} + \cdots + \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} + \cdots) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\dfrac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{1}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故原级数收敛.

(3) 根值判别法

10.1.67 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$.

解 (1) 因为 $u_n=\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}>0$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}}=\dfrac{1}{2}$ <1,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛.

(2) 因为 $0<\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\dfrac{n}{2^n}$,对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也收敛.

10.1.68 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$,其中 $a_n\to a(n\to\infty)$,$a_n,a,b>0$,且 $a\neq b$.

解 (1) $u_n=\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$,

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$,所以此级数收敛.

(2) $u_n=\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$,所以 $\sqrt[n]{u_n}=\dfrac{b}{a_n}\to\dfrac{b}{a}$,$(n\to\infty)$.

当 $a > b$ 时，$\frac{b}{a} < 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$ 收敛；

当 $a < b$ 时，$\frac{b}{a} > 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{a_n})^n$ 发散.

10.1.69 判断下面级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n - 1}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{n}{2}}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\frac{1}{n})^n}$.

解 由根值判别法

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{e^n - 1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{e^n - 1}}\cdot\sqrt[n]{\frac{n}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n}{e^n - 1}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{e} = 1\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

所以，原级数收敛.

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{3n+1})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1,$$

所以，原级数收敛.

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{n+\frac{1}{n}} = 0,$$ 所以，原级数收敛.

10.1.70 判断级数

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \cdots$$

的敛散性，$(a > 0, b > 0)$.

解 该级数的通项可表为

$$u_n = \begin{cases} a^kb^k, & n = 2k+1; \\ a^{k+1}b^k, & n = 2k+2. \end{cases}$$

所以，$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\sqrt[2k+1]{a^kb^k} = \sqrt{ab}, & n = 2k+1; \\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[2k+2]{a^{k+1}b^k} = \sqrt{ab}, & n = 2k+2, \end{cases}$$

由根值判别法知，当 $ab < 1$ 时，原级数收敛；当 $ab > 1$ 时，级数发散；当 $ab = 1$ 时，原级数为 $1 + a + 1 + a + 1 + a + \cdots$，发散.

10.1.71 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p$ 为实数）的敛散性.

解　当 $p\leqslant 0$ 时,因 $\frac{1}{n^p}$ 不趋于零,故级数发散.

当 $p>0$ 时,易见 $\frac{1}{n^p}$ 是单调递减的,因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2^n)^p}}=\frac{1}{2^p}\begin{cases}<\frac{1}{2}, & 当\ p>1\ 时;\\ =\frac{1}{2}, & 当\ p=1\ 时;\\ >\frac{1}{2}, & 当\ p<1\ 时.\end{cases}$$

故 $p>1$ 时收敛;$p<1$ 时发散;$p=1$ 时失效. 但用其它方法可判断此时亦发散.

所以,$p>1$ 时级数收敛;$p\leqslant 1$ 时级数发散.

注　此题利用了第二根值法:

设给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$,　　(A)

若级数(A)的项单调递减,且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_{2^n}}=p$,则当 $p<\frac{1}{2}$ 时,级数(A)收敛,$p>\frac{1}{2}$ 时,级数(A)发散.

10.1.72　用根值法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解　$$\rho_1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1,$$

$$\rho_2=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2},$$

所以应使用第三根值法,因为

$$\rho_3=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2^n}u_{2^{2^n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2^n}\frac{1}{2^{2^n}}}=1>\frac{1}{2},$$

所以,此级数发散.

注　第三根值法为:

设给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$,　　(A)

若级数(A) 的项单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2^n}u_{2^{2^n}}}=\rho$，则当$\rho<\dfrac{1}{2}$时，级数(A)收敛，$\rho>\dfrac{1}{2}$时，级数(A) 发散.

10.1.73　判断$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$的敛散性.

解　$\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n\ln^2 n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n\ln^2 n)^{\frac{1}{n}}}$,

令 $y=(n\ln^2 n)^{\frac{1}{n}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln(n\ln^2 n)}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n\ln^2 n)}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2\ln n\cdot\frac{1}{n}+\ln^2 n}{n\ln^2 n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\ln n}{n\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{n\cdot\frac{1}{n}+\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1+\ln n)}=0,$$

于是 $y=e^0=1$，所以 $\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$.

$$\rho_2=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[2^n(\ln 2^n)^2]^{\frac{1}{n}}},$$

令 $y=[2^n(\ln 2^n)^2]^{\frac{1}{n}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln[2^n(\ln 2^n)^2]}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln[2^n(\ln 2^n)^2]}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\ln 2^n\cdot\frac{2^n\ln 2}{2^n}+(\ln 2^n)^2\cdot 2^2\cdot\ln 2}{2^n(\ln 2^n)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln 2+\ln 2^n\cdot\ln 2}{\ln 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2\cdot\frac{2^n\ln 2}{2^n}}{\frac{2^n\ln 2}{2^n}}=\ln 2.$$

于是，$y=e^{\ln 2}=2$，所以 $\rho_2=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_{2^n}}=\dfrac{1}{2}$，而

$$\rho_3=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2^n}u_{2^{2^n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{2^n}(\ln 2^{2^n})^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[2^{2^n}\cdot(\ln 2^{2^n})^2]^{\frac{1}{n}}},$$

令 $y=[2^{2^n}\cdot(\ln 2^{2^n})^2]^{\frac{1}{n}}$,则

$$\ln y=\frac{\ln 2^{2^n}+2\ln(\ln 2^{2^n})}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln y=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2^{2^n}+2\ln(\ln 2^{2^n})}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{2^n}\ln 2^2}{2^{2^n}}+\frac{2\cdot\frac{2^{2^n}\cdot\ln 2^2}{2^{2^n}}}{\ln 2^{2^n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\ln 2^2+\frac{2\ln 2^2}{\ln 2^{2^n}}\right]=\ln 2^2=\ln 4,$$

于是 $y=e^{\ln 4}=4$,所以 $\rho_3=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2^n}u_{2^{2^n}}}=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$,故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$收敛.

10.1.74 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$的敛散性.

解法1 用比较判别法.

因为 $\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{2}{n^2}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛,所以,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛.

解法2 用比值判别法.

因为$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1,$$

所以,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛.

解法3 用根值判别法.因为

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=e^{\ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}}=e^{\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})=\int_0^1\ln x\,dx$$

$$=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=e^{-1}<1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛.

10.1.75 研究$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{5})^n$的敛散性.

解法 1 用比值法求解

因为$\frac{u_{n+1}}{u_n}=(n+1)(\frac{3}{5})^n/n(\frac{3}{5})^n=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{5}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{5}\frac{n+1}{n}=\frac{3}{5}$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{5})^n$收敛.

解法 2 用根值法求解

因为$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{(n\frac{3}{5})^n}=\frac{3}{5}\sqrt[n]{n}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{5}\sqrt[n]{n}=\frac{3}{5}$，所以，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{5})^n$收敛.

解法 3 用比较判别法求解

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以，存在自然数$N$，当$n>N$时，有$\sqrt[n]{n}<\frac{3}{2}$. 故当$n>N$时有

$$n(\frac{3}{5})^n=(\sqrt[n]{n}\ \frac{3}{5})^n<(\frac{3}{2}\times\frac{3}{5})^n=(\frac{9}{10})^n.$$

而$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}(\frac{9}{10})^n$收敛，所以，级数$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}n(\frac{3}{5})^n$收敛. 从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{5})^n$收敛.

解法 4 用敛散性的定义求解. 令$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k(\frac{3}{5})^k$，则

$$\frac{3}{5}s_n=\sum_{k=1}^{n}k(\frac{3}{5})^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(k-1)(\frac{3}{5})^k+n(\frac{3}{5})^{n+1},$$

而式相减，得

$$(1-\frac{3}{5})s_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{5})^k-n(\frac{3}{5})^{n+1}=\frac{\frac{3}{5}-(\frac{3}{5})^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}-n(\frac{3}{5})^{n+1},$$

故　　$s_n = \frac{25}{4}[\frac{3}{5} - (\frac{3}{5})^{n+1}] - \frac{5}{2}n(\frac{3}{5})^{n+1}$.

而　　$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{5})^{n+1} = 0$,　$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{3}{5})^{n+1} = 0$.

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$，于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\frac{3}{5})^n$ 收敛.

10.1.76　研究$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a > 0)$的敛散性.

解法1　用比值法求解.因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{a^n \cdot n!} = \frac{an^n}{(n+1)^n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an^n}{(n+1)^n} = \frac{a}{e}$，所以，当 $0 < a < e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛，当 $a > e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散，又当 $a = e$ 时，$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{en^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} > \frac{e}{e} = 1$，所以，$\{u_n\}$ 为单调上升数列，故 $u_n > u_1 = e$，$(n = 2,3,\cdots)$. 于是，$u_n \not\to 0$，$(n\to\infty)$，所以，当 $a = e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散.

综上所述，当 $0 < a < e$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛；当 $a \geqslant e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散.

解法2　用根值法求解. 因为 $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{a^n n!}{n^n}} = a\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{a}{e}$，所以，当 $0 < a < e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛；当 $a > e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散；

又当 $a = e$ 时，$u_n \not\to 0$，$(n\to\infty)$. 所以，当 $a = e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散.

综上所述，当 $0 < a < e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 收敛，当 $a \geqslant e$ 时，该级数发

散.

(4) 积分判别法

10.1.77 判断 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 考虑级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$,令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^n\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}[\ln\ln n-\ln\ln 2]=\infty,$$

故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散. 而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$. 由比较判别法知,$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\sin(\frac{1}{n})$ 发散.

10.1.78 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$,当 $p>1$ 时收敛,当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时发散,试证明之. 并判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

证 取 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}$,则 $f(x)$ 单调递减. 且

$$\int_2^n\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\begin{cases}\ln\ln x\Big|_2^n, & p=1;\\ \frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{(\ln x)^{p-1}}\Big|_2^n, & p\neq 1.\end{cases}$$

由积分判别法,此题得证.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n\ln n}=1$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

10.1.79 判别级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ 的敛散性.

解 易知函数 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$(不论 p、q 为何实数)的导函数当 x 充分大时是负的,故当 x 充分大时,$f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p=1$,则

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\Big|_3^{+\infty}, & q\neq 1;\\ \ln\ln\ln x\Big|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散. 故由柯西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散.

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q},$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$，使 $p-\eta>1$. 由于(不论 q 为何实数)

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln)^q}$ 收敛. 从而原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$，使 $p+\tau<1$，由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 发散. 从而原级数发散.

综上所述，原级数仅当 $p=1,q>1$ 及 $p>1,q$ 任意时收敛.

(5) 拉阿伯判别法

利用拉阿伯判别法，研究下列级数的敛散性(10.1.80—10.1.86 题)：

10.1.80 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$，$(p>0,q>0)$.

解 (1) $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{\frac{n!e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}-1\Big/\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x} = p-\frac{1}{2},$$

故当 $p-\frac{1}{2}>1$ 即 $p>\frac{3}{2}$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$收敛.

(2) $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$,由于

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$收敛.

(3) $\frac{u_n}{u_{n+1}}=(\frac{n+1}{n})^p(1+\frac{q}{n+1})$,,由于

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n[(1+\frac{1}{n})^p(1+\frac{q}{n+1})-1]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p(1+\frac{qx}{1+x})-1}{x}=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$收敛.

10.1.81 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q},(p>0,q>0)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}]^p\cdot\frac{1}{n^q}$, $(p>0,q>0)$;

解 (1) $\frac{u_n}{u_{n+1}}=(\frac{n+1}{n})^q\cdot\frac{1+n}{p+n}$,由于

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n[(1+\frac{1}{n})^q\frac{1+n}{p+n}-1]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px} - 1}{x} = q + 1 - p.$$

故当 $q + 1 - p > 1$，即 $q > p$ 时，原级数收敛.

(2) $\frac{u_n}{u_{n+1}} = (\frac{2n+2}{2n+1})^p(\frac{n+1}{n})^q$，由于

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n[(\frac{2n+2}{2n+1})^p(\frac{n+1}{n})^q - 1]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\frac{2+2x}{2+x})^p(1+x)^q - 1}{x} = q + \frac{p}{2},$$

故当 $q + \frac{p}{2} > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^p \cdot \frac{1}{n^q}$ 收敛.

10.1.82　(1) $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots, (a > 0, b > 0, d > 0)$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

解　(1) $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$，由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{b+nd}{a+nd} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)n}{a+nd} = \frac{b-a}{d},$$

故当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$ 收敛.

(2) 由于

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n[\frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^n - 1] = n \cdot \frac{1}{e}[(1+\frac{1}{n})^n - e]$$

$$= \frac{1}{e} \frac{(1+\frac{1}{n})^n - e}{\frac{1}{n}},$$

应用洛比达法则，有

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)]\}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0}\left[\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right]$$

$$= e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x+2(1+x)} = -\frac{e}{2}.$$

故 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n - e}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}(-\frac{e}{2}) = -\frac{1}{2} < 1,$

所以,原级数发散。

10.1.83 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

解 由于 $n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1) = n(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1)$

$$= \frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} \cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}),$$

而 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} = 0,$$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\cdot n$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} = +\infty,$$

利用 $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$,即得 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1) = +\infty$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

10.1.84 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

解 先设 $c\neq 0$,若 $bc-ad\neq 0$,则

$$n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1) = n\left[e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}-\frac{a\ln(n+1)+b}{c\ln(n+1)+d}}-1\right]$$

$$= n\left\{e^{\frac{(bc-ad)\ln(1+\frac{1}{n})}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}-1\right\}$$

$$= \frac{e^{\frac{(bc-bd)\ln(1+\frac{1}{n})}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}-1}{\frac{(bc-ad)\ln(1+\frac{1}{n})}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}} \cdot \frac{(bc-bd)\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$\cdot \frac{1}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]},$$

当 $n\to\infty$ 时,上面等式右端的第一个因子趋于 1, 第二个因子趋于 $bc-ad$,第三个因子趋于零. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=0$,从而级数发散;若 $bc-ad=0$, 此时 $u_n=$ 常数 >0, $(n=1,2,\cdots)$,故级数发散; 若 $c=0$, 则 $n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)=e^{\frac{a\ln(1+\frac{1}{n})}{d}}-1/[-\frac{a}{d}\ln(1+\frac{1}{n})]\cdot(-\frac{a}{d})\cdot\ln(1+\frac{1}{n})/\frac{1}{n}\to-\frac{a}{d}(d\neq0),(n\to\infty)$. 于是,如果 $-\frac{a}{d}>1$,即$\frac{a}{d}<-1$, 则级数收敛;如果 $-\frac{a}{d}<1$,则级数发散;如果 $-\frac{a}{d}=1$,则 $u_n=\frac{c}{n}(c>0$ 是常数),从而级数发散.

10.1.85 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}),(a>0,b>0,c>0)$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2})/\frac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}(\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{c^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}})]$$

$$=\ln a-\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}},$$

当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时, $\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\neq0$,且当 n 充分大时,级数的项不变号,故当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2})$ 发散.

当 $a=\sqrt{bc}$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}]$,由于当 $n\to\infty$ 时,有

$\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}/\frac{1}{n^2}\to\frac{1}{8}(\ln b-\ln c)^2$,且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.故原级数

$\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}]$收敛.即当$a=\sqrt{bc}$时,原级数收敛.

10.1.86 $\sum_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$, $(a>0)$.

解 $u_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$,

当$a=1$时,显然$u_n=1$,因而级数发散;

当$a\neq 1$时,考虑$\ln\frac{1}{u_n}/\ln n=(b+c\ln n)\ln a$,由对数判别法可知:

(1) 当$c=0$,$b\ln a>1$,即$a^b>e$时,原级数收敛,而当$c=0$,$b\ln a\leqslant 1$,$a^b\leqslant e$时,原级数发散.

(2) 当$c\neq 0$,$c\ln a>0$,即$a^c>1$时,原级数收敛,而当$c\neq 0$,$c\ln a<0$,即$a^c<1$时,原级数发散.

综上所述,仅当$c=0$,$a^b>e$及$a^c>1$时,原级数收敛.

(6) 综合问题

10.1.87 求出通项u_n减小的阶,从而研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

(1) $u_n=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$,其中$n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$;

(2) $u_n=\log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$,$(a>0,b>0)$.

解 (1) 由于$u_n=o(\frac{1}{n^{q-p}})$,故当$q-p>1$,即$q>1+p$时,级数收敛.

(2) 显然$b\neq 1$,(否则,u_n无意义),由于

$$u_n=\frac{\ln(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n})}{n\ln b}\sim\frac{1}{\ln b}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}=o(\frac{1}{n^2}),$$

故级数收敛.

10.1.88 求出通项减少的阶.从而研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

(1) $u_n = [e - (1 + \frac{1}{n})^n]^p$;

(2) $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

解 (1) $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^3})]} = e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})}$,

由于 $u_n > 0$,且

$$u_n = [e(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})})]^p \sim e^p[\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})]^p = o(\frac{1}{n^p}),$$

故仅当 $p > 1$ 时,级数收敛.

(2) 由于 $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = o(\frac{1}{n})$,故级数发散.

10.1.89 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 + \cdots$,下列命题是否正确?如果正确,试说明之;如果不正确,试举反例.

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 收敛;

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散;

解 (1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,于是对于 $\varepsilon = 1$,存在 $N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $a_n < 1$,从而当 $n > N$ 时,也有 $0 < a^3 < a_n < 1$,于是由比较判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 收敛.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 不一定发散,例如,熟知的 p- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 0)$,当 $p = 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数,发散. 当 $p \geq 1$,如 $p = 3$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 却收敛.

10. 1. 90　证明：$a>0$ 时，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}$ 收敛.

证　令 $f(x)=x^{-a}(x>0)$，用中值定理，得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，$(a<\xi<b)$. 取 $a=n-1,b=n$，则存在 ξ $(n-1<\xi<n)$，使

$$\frac{n^{-a}-(n-1)^{-a}}{n-(n-1)}=-a\xi^{-a-1},$$

由此可得，当 $n\geqslant 2$ 时，有 $\frac{1}{a}[\frac{1}{(n-1)^a}-\frac{1}{n^a}]=\frac{1}{\xi^{1+a}}\geqslant\frac{1}{n^{1+a}}$.

取 $c_1=0,\ c_n=\frac{1}{a}[\frac{1}{(n-1)^a}-\frac{1}{n^a}]\ (n\geqslant 2)$，把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}$ 比较，因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的部分和为

$$s_n=\frac{1}{a}[\frac{1}{1^a}-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}-\frac{1}{3^a}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^a}-\frac{1}{n^a}]$$
$$=\frac{1}{a}(1-\frac{1}{n^a})\to\frac{1}{a},\ (n\to\infty)$$

即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}$ 对 $a>0$ 均收敛.

10. 1. 91　设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 都是正项级数，即 $c_n>0,a_n>0$，证明：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，并且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{c_{n+1}}{c_n},n=0,1,2,\cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证　由题设可得 $\frac{a_1}{a_0}\leqslant\frac{c_1}{c_0},\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{c_2}{c_1},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{c_n}{c_{n-1}}$，

把上列不等式连乘起来，便得 $\frac{a_n}{a_0}\leqslant\frac{c_n}{c_0}$，所以，$a_n\leqslant\frac{a_0}{c_0}c_n$，由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛，$\frac{a_0}{c_0}$ 为常数，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{c_0}c_n$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

10. 1. 92　证明：设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调减小，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证 设 $s_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}$，则因

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{2^n} > a_{2^n+1} > \cdots > 0,$$

故得 $0 < s_{2^n} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1})$

$$< a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}, \tag{1}$$

且有 $s_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}-1} + \cdots + a_{2^n})$

$$> \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n}$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n} > 0. \tag{2}$$

由(1)式知：若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；由(2)式知，若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散．

注 在此命题中，用作比较的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 可以用更普遍的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_{m^n}$ 来代替，其中 m 为任一自然数，证法类似．

10.1.93 设 $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$，$x_n = \sin x_{n-1}$，$(n = 2,3,\cdots)$，证明：当 $p \leqslant 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 发散．

证 易知 x_n 单调递减，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，据施笃兹定理和洛比达法则有

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x - 2\sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{2 - 2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{24x}{4\sin 2x} = 3.$$

因此，$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, x_n = \sqrt{3}$．从而有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^p}{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}\, x_n)^p = 3^{\frac{p}{2}}.$$

由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ 同敛发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ 在 $p>2$ 时收敛，$p \leqslant 2$ 时发散，于是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ 在 $p>2$ 时收敛，$p \leqslant 2$ 时发散.

10.1.94 证明：若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q\ (a_n \geqslant 0)$，则

(1) 当 $q<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 当 $q>1$ 时，级数发散(柯西判别法的推广).

证 (1) 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-q)$，由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$，故存在 n_0，使当 $n>n_0$ 时，有 $0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon$，从而

$$0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2},(n \geqslant n_0)\ \text{或}\ 0<a_n<(\frac{q+1}{2})^n,(n \geqslant n_0),$$

由于 $0 \leqslant q<1$，故 $0<\frac{q+1}{2}<1$，又因级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(\frac{q+1}{2})^n$ 收敛，故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由于 $q>1$，故对于序列 $\{a_n\}$，必有无穷多个 a_n，能使不等式 $\sqrt[n]{a_n}>1$ 成立，从而 $a_n>1$. 于是当 $n\to\infty$ 时，a_n 不可能趋于零，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10.1.95 设 $a_n \neq 0\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$；证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$ 皆收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - a_{n+1}|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}|$ 同敛散.

证 (1) 因 $s_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1 - a$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛. 同理可证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$

收敛.

(2) 因$\dfrac{|a_n - a_{n+1}|}{\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right|} = |a_n a_{n+1}|$,又$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a \neq 0$,所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - a_{n+1}|}{\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right|} = a^2 > 0.$$

由比较判别法的推论可知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right|$ 同敛散.

10.1.96 设数列$\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$有界,证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛.

证 因为数列$\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$有界,所以存在$M > 0$,使$|na_n| < M$,从而可知,$0 \leqslant a_n^2 < \dfrac{M^2}{n^2}$,又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{M}{n^2}$收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛.

10.1.97 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为收敛的正项级数,$\{a_n - a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$严格单调递减,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) = +\infty$.

证 因为正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,所以,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$,又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 - a_{n+1}) = a_1 > 0$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$收敛.又$(a_n - a_{n+1}) > (a_{n+1} - a_{n+2})$,所以$a_n > a_{n+1} > 0$,$(n = 1, 2, \cdots)$,又

$$0 < \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} < \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2 - a_{k+1}^2)$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_n^2 - a_{k+1})}{a_n - a_{n+1}},$$

所以,$\dfrac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1})$,故

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n})\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})}=+\infty.$$

10.1.98 设 $u_n=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}\right)^2$,考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

解 因$(\frac{2n-1}{2n})^2=(1-\frac{1}{2n})^2=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}$,所以$(\frac{2n-1}{2n})^2>\frac{n-1}{n}$,从而有

$$(\frac{3}{4})^2>\frac{1}{2},\ (\frac{5}{6})^2>\frac{2}{3},\ \cdots,\ (\frac{2n-1}{2n})^2>\frac{n-1}{n},\ \frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

把 n 个式子相乘得

$$u_n>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4n}.$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$发散,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

10.1.99 设 $a_n>0,s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}$收敛.

证 因 $a_n>0,s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,所以 $0<\frac{a_n}{s_n^2}<\frac{a_n}{s_ns_{n-1}}=\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}$,

$$\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{s_{k-1}}-\frac{1}{s_k})=\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_n},$$

因$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散,所以$\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\to+\infty$,于是$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n})=\frac{1}{s_1}$,从而可知,级数$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n})$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^2}$也收敛.

10.1.100 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,$\lim_{n\to\infty}n^p[(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1$,($p>1$) 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性.

解 因$\lim_{n\to\infty}n^p[(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1$,所以存在 N_1,使当 $n>N_1$ 时,有

$|n^p[(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]-1|<\frac{1}{2}$,所以 $\frac{1}{2}<|n^p[(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]|<\frac{3}{2}$, 又 $a_n>0$,所以 $\frac{1}{2}<n^p[(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]<\frac{3}{2}$. (1)

令 $f(x)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,$(1<x<+\infty)$,则

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})-1,\ f''(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}>0.$$

所以 $f'(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上是增函数,又

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}[e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})-1]=0,$$

所以 $f'(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上恒小于零,从而可知 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上是减函数.

$$\text{又 } f(1)=e-1>\frac{3}{2},\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1,$$

所以 $1\leqslant f(x)<e-1$, $(1\leqslant x<+\infty)$,从而 $1\leqslant n(e^{\frac{1}{n}}-1)<e-1$,于是存在 N_2,使 $n>N_2$ 时,有

$$\frac{1}{2}<n(e^{\frac{1}{n}}-1)<\frac{3}{2}, \tag{2}$$

故存在 $N=\max\{N_1,N_2\}$,使 $n>N$ 时,(1)、(2) 两式恒成立,将(1)、(2)两式相除,有 $\frac{1}{3}<n^{p-1}<3$,由 p-级数的敛散性可知,当 $p>2$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,当 $1<p\leqslant 2$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

10.1.101 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}dx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

解 (1) 取 $v_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

而 $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,dx = v_n$ 由比较判别法可知，

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 收敛.

(2) $\frac{1}{u_n} = \int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx \geqslant \int_0^n x dx = \frac{n^2}{2}$，故 $u_n \leqslant \frac{2}{n^2} = v_n$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx}$ 也收敛.

(3) 取 $v_n = (\frac{6}{7})^n$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}\cdot\frac{7^n}{6^n} = 1$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{7^n-5^n}$ 也收敛.

(4) $u_n \leqslant \frac{n!+n!+\cdots+n!}{(2n)!} = \frac{n\cdot n!}{(2n)!} = \frac{n}{2^n}$，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛，

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$ 也收敛.

10.1.102 (1) 证明：当 $x > e^2$ 时，不等式 $\ln^2 x < x$ 成立；

(2) 利用(1)的结果讨论 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$ 的敛散性.

解 (1) 欲证 $\ln^2 x < x$，即需证 $\frac{\ln^2 x}{x^2} < 1$，令 $F(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$，则 $F(e^2) = \frac{\ln^2 e^2}{e^2} = \frac{2^2}{e^2} < 1$，又 $F'(x) = \frac{2x\ln x\cdot\frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$，故当 $x > e^2$ 时，$F'(x) < 0$，这时 $F(x)$ 单调下降，故有 $\frac{\ln^2 x}{x} < 1$ 或 $\ln^2 x < x$.

(2) 当 $x > e^2$ 时，$\ln^2 x < x$，即 $\frac{1}{\ln^2 x} > \frac{1}{x}$，从而，当 $n > 9$ 时，有

$$\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}, n = 9, 10, 11, \cdots$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 也发散.

10.1.103 (1) 设 $f(x)$ 在 $x \geqslant 1$ 上是正的连续单调递减函数，证

明：$\sum_{k=1}^{\infty}f(k)$ 与 $\int_1^{\infty}f(x)dx$ 同敛散.

(2) 不论上述级数与广义积分是否收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)dx\right)$ 有一个确定的极限 d，且 $0\leqslant d\leqslant f(1)$.

证　(1) 由

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)dx$$
$$=\int_1^{n+1}f(x)dx\geqslant 0,$$

其中 $f(x)$ 是在 $x\geqslant 1$ 上单调递减的正连续函数，故

$$f(k)\geqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\geqslant f(k+1),$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}f(k).\tag{1}$$

由比较判别法知，(1) 的结论为真.

(2) 由 (1) 式知，

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=2}^{n+1}f(k)$$
$$=[f(1)+\cdots+f(n)]-[f(2)+\cdots+f(n)+f(n+1)]$$
$$=f(1)-f(n+1)\leqslant f(1).\tag{2}$$

记 $s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)dx$，由 (2) 式知，$\{s_n\}$ 有界，又注意到

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx,$$

及在 $[k,k+1]$ 上有 $f(k)\geqslant f(x)$，故有

$$\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx\geqslant 0,$$

因此，$\{s_n\}$ 是正项级数的部分和，$\{s_n\}$ 是单调的，单调有界数列必有极限，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)dx\right)=d.$$

由 (2) 式知，$0\leqslant d\leqslant f(1)$.

10.1.104 已知无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$,($c_n>0$)收敛,证明:无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$也收敛.

证 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}\right)$,因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n^2}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+n^2}+\int_1^2\frac{dx}{x^2+n^2}+\cdots+\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2+n^2}+\cdots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2+n^2}.$$

由定积分的几何意义,可知

$$\frac{1}{k^2+n^2}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2+n^2},(k=1,2,\cdots)$$

所以$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n^2}=\frac{\pi}{2n}$.

因此,不等式

$$0<c_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}<c_n\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n^2}=c_n\frac{\pi}{2n},(n=1,2,\cdots)$$

成立,于是,已知无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$收敛,所以无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\pi}{2n}$也收敛,由正项级数的比较判别法,得无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2}\right)$收敛.

10.1.105 试证:若$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在,则有$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)-f(1)$,并据此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$和$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$的和.

证 级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$的部分和

$$s_n=[f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\cdots+[f(n+1)-f(n)]$$
$$=f(n+1)-f(1),$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在,所以

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}[f(n+1)-f(1)]=\lim_{n\to\infty}f(n)-f(1).$$

令 $f(n) = -\frac{1}{n}$,则

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = f(n+1) - f(n);$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}) = 0$,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1) - f(n)]$$
$$= \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1) = 0 - (-1) = 1.$$

令 $g(n) = -\frac{1}{n^2}$,则

$$u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} = g(n+1) - g(n),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n^2}) = 0$,因此有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}[g(n+1) - g(n)] = \lim_{n\to\infty} g(n) - g(1)$$
$$= 0 - (-1) = 1.$$

10.1.106 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}$.

解 当 k 固定时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\Big/\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n} = 1$,故对于任意的 $\varepsilon > 0$,当 n 充分大时,有

$$\left|\frac{\dfrac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}}{\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n}} - 1\right| < \varepsilon,\text{即}\left|\frac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}} - \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}\right| < \varepsilon\cdot\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n},$$

从而 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n}\right| < \varepsilon\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x dx=e-1$，所以，数列$\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\}$有界，设 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\leqslant M$. 则由上面不等式进一步可得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}\right|<\varepsilon M.$$

这说明数列$\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\}$与数列$\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}\}$有相同的极限，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{2k+1}{2n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}=e-1.$$

10.1.107 已知某级数的部分和为：

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}.$$

(1) 求证此级数收敛；(2) 求出其和．

解 由级数各项分子所构成的序列为：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…，这是优选法中常用的一个序列，它的通项为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

考虑
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$
$$=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

因为 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n=0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，且

等于$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

（1）设 $u_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，则 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}<1$，于是所给级数收敛．

（2）由递推公式 $u_n=\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2^n}=\dfrac{1}{2}u_{n-1}+\dfrac{1}{4}u_{n-2}$ 可得

$$u_3=\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{4}u_1,u_4=\frac{1}{2}u_3+\frac{1}{4}u_2,\cdots,\ u_n=\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{4}u_{n-2},$$

将上面各等式的两端分别相加，得

$$s_n-u_1-u_2=\frac{1}{2}s_{n-1}-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{4}s_{n-2},$$

其中 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，令$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$s-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}s.$$

所以，$s=2$.

10.1.108　证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+5}{3^n}$收敛，并求其和．

证　设 $s_n=\dfrac{8}{3}+\dfrac{11}{9}+\dfrac{14}{27}+\cdots+\dfrac{3(n-1)+5}{3^{n-1}}+\dfrac{3n+5}{3^n}$,

则　$\dfrac{1}{3}s_n=\dfrac{8}{9}+\dfrac{11}{27}+\dfrac{14}{3^4}+\cdots+\dfrac{3(n-1)+5}{3^n}+\dfrac{3n+5}{3^{n+1}}$,

两式相减，得

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}s_n&=\frac{8}{3}+3\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3n+5}{3^{n+1}}\\&=\frac{8}{3}+3\,\frac{\frac{1}{3^2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3n+5}{3^{n+1}}\\&=\frac{8}{3}+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)-\frac{3n+5}{3^{n+1}},\end{aligned}$$

所以，$s_n=4+\dfrac{27}{4}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3n+5}{3^{n+1}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=4+\dfrac{3}{4}=$

$\frac{19}{4}$,故所给级数收敛,且其和为$\frac{19}{4}$,即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{3^n}=\frac{19}{4}$.

10.1.109 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x+5}dx$的敛散性.

解 利用积分中值定理,有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x+5}dx=\frac{\sqrt[3]{\xi}}{\xi^2+2\xi+5}\cdot\frac{1}{n},\ (0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{n}).$$

因 $$\frac{\sqrt[3]{\xi}}{\xi^2+2\xi+5}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\sqrt[3]{\xi}}{(\xi+1)^2+4}\cdot\frac{1}{n}<\frac{\sqrt[3]{\xi}}{4}\cdot\frac{1}{n}$$

$$<\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{4}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4n^{\frac{4}{3}}},$$

又因$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x+5}dx>0$,故由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$的收敛性可推知,

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x+5}dx$也是收敛的.

注 此题先利用积分中值定理转化级数的通项式,再用比较法判定原级数的敛散性.

10.1.110 证明:若存在$a>0$,使当$n\geqslant n_0$时,$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\geqslant 1+a$

$(u_n>0)$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,(u_n>0)$收敛;若$n\geqslant n_0$时,$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\leqslant 1$,则该级数发散(对数判别法).

证 若$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\geqslant 1+a$,则$\frac{1}{u_n}>n^{1+a}$或$u_n\leqslant\frac{1}{n^{1+a}}$,由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

若$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\leqslant 1$,则$\frac{1}{u_n}\leqslant n$或$u_n\geqslant\frac{1}{n}$,由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

10.1.111 设 $u_1 = 1, u_2 = 2$，当 $n \geqslant 3$ 时，$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$，证明：

(1) 不等式 $\frac{3}{2}u_{n-1} < u_n < 2u_{n-1}$ 恒成立；

(2) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 的敛散性.

证 (1) 因 $u_n > 0$，$u_n - u_{n-1} = u_{n-2} \geqslant 0$，所以 $\{u_n\}$ 为递增数列，于是 $u_{n-2} \leqslant u_{n-1}$，故 $u_n \leqslant 2u_{n-1}$. 由于 $2u_{n-1} \geqslant \frac{1}{2}u_n$，$u_{n-2} \geqslant \frac{1}{2}u_{n-1}$，所以 $u_n \geqslant \frac{1}{2}u_{n-1} + u_{n-1} = \frac{3}{2}u_{n-1}$，(1) 得证.

(2) 由 $u_n \geqslant \frac{3}{2}u_{n-1} \geqslant (\frac{3}{2})^2 u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant (\frac{3}{2})^{n-1}u_1 = (\frac{3}{2})^2$ 可得，$0 < \frac{1}{u_n} \leqslant (\frac{2}{3})^{n-1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛.

3. 任意项级数敛散性的判别法

10.1.112 判断下面级数的敛散性：

(1) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \cdots;$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

证 (1) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}$；即 $u_n > u_{n+1}$，又由 $(2n)^2 > (2n)^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$ 有，

$$[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)]^2 > 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdots \cdot (2n-1)^2(2n+1),$$

即 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n) > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)\sqrt{2n+1}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0,$$

由莱布尼兹判别法知,级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0,$

令 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$,则

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}}<0,$$

故有 $\quad u_{n+1}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}<u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

由莱布尼兹判别法可知,原交错级数收敛.

10.1.113 判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

解 因为

$$(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1}$$

$$=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

由莱布尼兹判别法可知,级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 收敛,而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散.因此所给级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 发散.

10.1.114 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

证法 1 因为 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big/\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}=\dfrac{2n+2}{2n+1}>1$,所以

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}>\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$,故由交错级数收敛的判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

证法 2 设 $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,则

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n(\frac{2n+2}{2n+1} - 1) = \frac{n}{2n+1},$$

所以 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \frac{1}{2}$,于是,存在 N,当 $n > N$ 时,$a_n > a_{n+1}$ 又 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,故由交错级数收敛的判别法知,$\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

10.1.115 证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}$ 收敛.

证法 1 因为

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}\Big/\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{1}{e} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e},$$

而 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调增加且极限为 e,所以 $\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < 1$,故

$$\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}.$$

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\frac{1}{e^n} = 0$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\cdot\frac{n^n}{e^n}$ 收敛.

证法 2 设 $a_n = \frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}$,则 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = n(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} - 1)$,

而 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} - 1) = \frac{1}{2}$,于是存在 N,当 $n > N$ 时,$a_n > a_{n+1}$,又 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,故级数 $\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}\frac{1}{e^n}$ 收敛.

10.1.116 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.

解法 1 因为 $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} > \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 0$. 所以，由交错级数的莱布尼兹判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛.

解法 2 因为 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}\right|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛.

解法 3 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = 0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}\right|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛.

解法 4 因为 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ $(x>0)$ 为正的连续递减函数，且 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，又 $f(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}\right|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛.

解法 5 令 $s_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$，则

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{2}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{2}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) \\
&\quad + \cdots + \frac{2}{n+1}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}) \\
&= 2[\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n+1}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})] \\
&= 2(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}),
\end{aligned}
$$

所以 $\lim_{n\to\infty}s_n = 1$. 由收敛性的定义知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}\right|$ 收敛，

于是,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$收敛.

10.1.117 证明超越几何级数$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n+1)}x^n$$

(α,β,γ为实数,且γ不为负整数和零),当$x=-1$且$\gamma-\alpha-\beta>-1$时收敛,当$x=-1$且$\gamma-\alpha-\beta<-1$时发散.

证法1 设$u_0=1$,

$$u_n=(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)},$$

$(n=1,2,\cdots)$,则$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=-\dfrac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$,所以,当$n>\max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\}$时,$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}<0$,这说明当$n>\max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\}$时,$u_n$与$u_{n+1}$异号,也说明此时$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$为交错级数.

而$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}-1\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{(n+1)(\gamma+n)-(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\gamma-\alpha-\beta+1)n+\gamma-\alpha\beta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}=\gamma-\alpha-\beta+1.$$

由此可知,当$\gamma-\alpha-\beta>-1$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,且存在自然数$N>\max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\}$,当$n>N$时,$|u_n|>|u_{n+1}|$.故级数$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$收敛.

当$\gamma-\alpha-\beta<-1$时,有$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)<0$,故$u_n\nrightarrow0\ (n\to\infty)$,所以,级数$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$发散.

证法2 参见Г.М.菲赫金哥尔茨:微积分学教程,二卷二分册.

10.1.118 判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$为条件收敛.

解 因$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{9n^2-4}}=0,$

又 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\ln(2+\frac{1}{n+1})}{\sqrt{(3n+1)(3n+5)}}\cdot\frac{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}{\ln(2+\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{\ln(2+\frac{1}{n+1})}{\ln(2+\frac{1}{n})}\cdot\frac{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}{\sqrt{(3n+1)(3n+5)}}<1,$$

即 $u_n>u_{n+1}$. 由交错级数的莱布尼兹判别法知，此级数收敛，但因

$$\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}>\frac{\ln 2}{\sqrt{9n^2}}=\frac{\ln 2}{3n}=\frac{\ln 2}{3}\cdot\frac{1}{n},$$

而级数$\frac{\ln 2}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知，原级数的绝对值级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$发散. 从而原级数条件收敛.

判定已给级数是否收敛，如果收敛，是绝对收敛，还是条件收敛？(10.1.119—10.1.125 题)

10.1.119 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$.

解 因为 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0, (n\to\infty)$, 且 $\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛.

又 $|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛.

10.1.120 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

解 因为 $u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$, $|u_n|=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，然而 $u_n=\frac{1}{2n-1}\to 0,(n\to\infty)$，且 $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n+1}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ 条件收敛.

10.1.121 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$；

(2) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+\cdots$.

解 (1) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$，

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{n}\to\frac{1}{3}<1,(n\to\infty),$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛.

(2) 因 $u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$，$|u_n|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$，

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot 3\cdot 2^n=\frac{1}{2}<1,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$ 绝对收敛.

(3) $u_n=\frac{n^3}{2^n}(-1)^{n+1}$，

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\to\frac{1}{2}<1,$$
$$(n\to\infty),$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$ 绝对收敛.

10.1.122 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{10}}{2^n}=\frac{1^{10}}{2}-\frac{2^{10}}{2^2}-\frac{3^{10}}{2^3}+\frac{4^{10}}{2^4}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\pi^4}\sin\frac{\pi}{4}-\cdots$.

解 (1) 因为 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{10}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\to\frac{1}{2}<1,(n$

$\to \infty$),所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{10}}{2^n}$ 绝对收敛.

(2) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\frac{\pi}{n+1}, |u_n| = \frac{1}{\pi^{n+1}}\sin\frac{\pi}{n+1}$,

因为 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\pi^{n+1}}{\pi^{n+2}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n+2}}{\sin\frac{\pi}{n+1}} \to \frac{1}{\pi} < 1, (n \to \infty)$,所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\frac{\pi}{n+1}$ 绝对收敛.

10.1.123 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$, α、β 为常数.

解 $u_n = \sin\frac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi = \sin[n\pi + (\alpha + \frac{\beta}{\pi})\pi]$

$= (-1)^n\sin(\alpha + \frac{\beta}{n})\pi$,

当 n 充分大时,$\sin(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi$ 保持定号,所以该级数从某项起,以后各项组成交错级数.

当 α 不为整数时,不论 β 为何值,总有

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}|\sin(\alpha+\frac{\beta}{n})\pi| = |\sin\alpha\pi| \neq 0,$$

故级数发散;

当 α 为整数时,有 $u_n = (-1)^{n+\alpha}\sin\frac{\beta}{n}\pi$,因而 $|u_n| = |\sin\frac{\beta}{n}\pi|$,显然 $|u_n| = |\sin\frac{\beta}{n}\pi|$ 总是非增地趋于零,故由莱布尼兹判别法知,所给级数收敛,但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\sin\frac{\beta}{n}\pi|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}|\beta\pi|\left|\frac{\sin\frac{\beta}{n}\pi}{\frac{\beta}{n}\pi}\right| = |\beta\pi|,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故当 $\beta \neq 0$ 时,由比较判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\sin\frac{\beta}{n}\pi|$ 发散,故所给级数条件收敛;当 $\beta = 0$ 时,级数显然收敛.

10.1.124 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+5}+\frac{1}{a+6}+\frac{1}{a+7}-\frac{1}{a+8}+\cdots,\ (a\neq 0)$

解　这是任意项级数，考虑每三项加一括号所成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+3n-3}+\frac{1}{a+3n-2}-\frac{1}{a+3n-1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n^2+6n(a-1)+a^2-2a-1}{(a+3n-3)(a+3n-2)(a+3n-1)},$$

此级数显然是发散的，故由级数的基本性质可知，所给的级数发散．

10.1.125 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$;　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

解　(1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=e^0=1$，

从而，当 $n\to\infty$ 时，通项 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$ 不趋于零，故原级数发散．

(2) 由于当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\ln n}$ 单调下降且趋于零，又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{2}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{12}}{2\cdot\sin\frac{\pi}{24}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界，故级数收敛．

但是 $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}$，而级数

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$ 发散，从而，原级数仅为条件收敛．

10.1.126　研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的绝对收敛和条件收敛．

解　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，$0<p\leqslant 1$ 时

发散. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 是交错级数，因 $\frac{1}{n^p}\to 0$，$(n\to\infty)$，且 $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$，$(0<p\leqslant 1)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时绝对收敛；$0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，设 $q=-p\geqslant 0$，当 $n\to\infty$ 时，$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=(-1)^{n-1}n^q$ 不趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$ 在 $p\leqslant 0$ 时发散.

10.1.127 证明：级数 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$ 收敛并求其和.

解 显然该级数绝对收敛，从而它是收敛的，记其和为 s，考虑特殊的部分和

$$s_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得 $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}$.

10.1.128 研究级数 $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$ 的敛散性.

解 易证原级数与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}$$
$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}[2+\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n^2})]-\frac{1}{(2n)^p}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2n})^p}$$
$$=\frac{1}{(2n)^p}(\frac{1}{2^{p-1}}-1)+\frac{1}{2^p}(\frac{p}{2^p}-\frac{p}{2})\cdot\frac{1}{n^{p+1}}+o(\frac{1}{n^{p+2}}).\qquad(1)$$

当 $p>1$ 时，级数显然绝对收敛，当 $0<p<1$ 时，由(1)式第一项组成的级数发散，而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，从而当 $0<p<1$ 时，原级数发散.

当 $p=1$ 时，原级数条件收敛. 事实上，此时(1)式中第一项及第二项为零，而由第三项所组成的级数收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而原级数收敛，但级数 $1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{5}+\cdots$ 是发散的，当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

10.1.129 证明级数 $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots$ 收敛并求其和.

解 设 $s_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，则

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\frac{7}{2^4}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}$$

将上两式相加，得

$$\frac{3}{2}s_n=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

于是，

$$3s_n=2-2+\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-2}}{1-(-\frac{1}{2})}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\to\frac{2}{3},\ (n\to\infty).$$

即 $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{2}{9}$，因此，原级数收敛，其和为$\frac{2}{9}$.

10.1.130 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$的敛散性.

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

而当 $p>1$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛,故当 $p>1$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$绝对收敛,当 $p\leqslant 0$ 时,原级数显然发散.

下面研究$0<p\leqslant 1$时原级数的敛散性,将通项改写成$\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$当$0<p\leqslant 1$时条件收敛,而序列$\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$为一单调上升且趋于 1 的序列,故由阿伯耳判别法即知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛,但因级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$当$0<p\leqslant 1$时发散,故当$0<p\leqslant 1$时,原级数仅为条件收敛.

10.1.131 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$的敛散性.

解 设$u_n=(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$,由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2}\sin x)^2}{\sqrt[n]{n}}=(\sqrt{2}\sin x)^2$$

可知,当$\sqrt{2}\sin^2x<1$,即$|x-n\pi|<\frac{\pi}{4}$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

当$\sqrt{2}\sin^2x=1$,即当$|x-n\pi|=\frac{\pi}{4}$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,它为条件收敛.

当$\sqrt{2}\sin^2x>1$时,例如可选取a,使$\sqrt{2}\sin^2x>a>1$,当n充分大时,有$\sqrt[n]{|u_n|}>a$或$|u_n|\geqslant a^n>1$,上式表明,当$n\to\infty$时,a_n不趋于

零，故此时原级数发散.

10.1.132 研究级数 $1+[m(m-1)+\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}+\cdots] \tag{1}$$

的敛散性，其中 $m\neq 0,1,2,\cdots$.

解法 1 令 $a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!}$，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{m-n-1}. \tag{2}$$

所以，当 m 给定时，级数(1)从某一项开始以后为交错级数.

下面对 m 分两种情形进行讨论：

(1) 当 $m<0$ 时，由(2)式知，当 $n\to\infty$ 时，$a_n\nrightarrow 0$，所以级数(1)当 $m<0$ 时发散.

(2) 当 $m>0$ 时，由(2)式知 $|a_n|>|a_{n+1}|$， (3)

因 $m>0$，所以对给定的 m，存在自然数 k_1 使 $k_1m>1$. 而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n^{k_1}|}{|a_{n+1}^{k_1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{(n+1)^{k_1}}{(n+1-m)^{k_1}}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{(n+1)^{k_1}-(n+1-m)^{k_1}}{(n+1-m)^{k_1}}=k_1m,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{k_1}$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}a_n^{k_1}=0$. 从而可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{4}$$

由(3)式及(4)式知级数(1)收敛.

解法 2 当 m 给定时，级数(1)从某一项开始以后为交错级数，又

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left|\frac{n+1}{m-n-1}\right|-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{|n+1|-|n+1-m|}{|n+1-m|}=m,$$

所以，当 $m>0$ 时，级数(1)收敛；当 $m<0$ 时，级数(1)发散.

解法 3 因级数(1)可变为

$$1-m+m\left[1+(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}+\cdots\right],$$

而 $1+(m-1)x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2$

$$+\cdots+\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}x^n+\cdots$$

是二项式$(1+x)^{m-1}$的泰勒级数，所以，当$m-1>-1$，即$m>0$时，级数(1)收敛；当$m-1<-1$，即$m<0$时，级数(1)发散．

10.1.133 证明级数

(1) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots$；

(2) $\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots$

在区间$(0,\pi)$内不绝对收敛．

证 (1) $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}$，

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散到$+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛（这是因为$\frac{1}{2n}$单调趋于零，且$\sum_{n=1}^{N}\cos 2nx$有界，故由狄利克雷判别法即获证），故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$在$(0,\pi)$内发散，至于原级数的收敛性是显然的，因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛．

(2) 可用(1)的方法证明．事实上，由

$$\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|$在$(0,\pi)$内发散，至于原级数的收敛性是显然的，因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛．

10.1.134 判定级数$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$是绝对收敛、条件收敛，还是发散的．

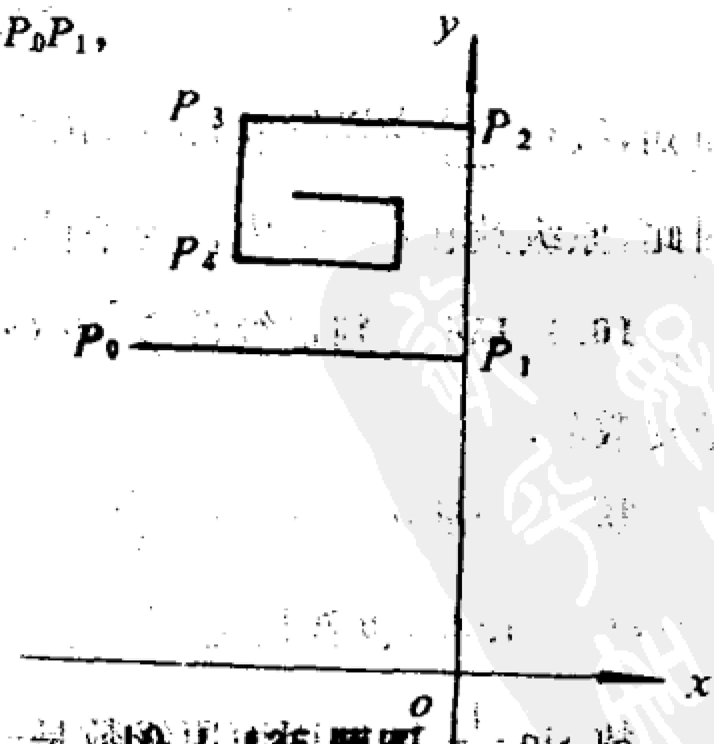
解 因通项$\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$，若$0<\frac{1}{\ln n}<\frac{\pi}{2}$，只须$n>e^{\frac{2}{\pi}}=1.89$，也就是说，当$n\geqslant 2$时，有$0<\frac{1}{\ln n}<\frac{\pi}{2}$．

故$\sin\frac{1}{\ln n}>0$，因而原级数是一个交错级数．

为考察原级数是绝对收敛、条件收敛，还是发散的，先考虑 $\sum_{n=2}^{\infty}|\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})|=\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$ 的敛散性，利用正项级数的比较原则，由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}}=1$ 得知，$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 有相同的敛散性，利用正项级数的比较原则，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=+\infty$ 可知，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，因而 $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$ 发散，故原级数非绝对收敛.

为讨论级数是条件收敛还是发散，设 $f(x)=\sin\frac{1}{\ln x}$，由于 $f'(x)=\cos\frac{1}{\ln x}\cdot(-\frac{1}{\ln^2 x})\cdot\frac{1}{x}$，而当 $x\geqslant 2$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减，故 $u_n=f(n)=\sin\frac{1}{\ln n}$ 为单调递减数列，且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，原级数满足莱布尼兹审敛准则，故原级数收敛，由于原级数的绝对值级数发散，故原级数条件收敛.

10.1.135 一动点从点 $P_0(-1,1)$ 出发，沿路线 $P_0P_1P_2\cdots P_n\cdots$ 前进（如图），其中 $P_0P_1=1$，$P_1P_2=\frac{2}{3}P_0P_1$，$P_{n-1}P_n=\frac{2}{3}P_{n-2}P_{n-1}$，…，试求动点极限位置的坐标.



10.1.135 题图

解 设动点 P 的坐标为 (x,y) 显然 $x<0,y>0$，所以 $P_0P_1=1$，

$$P_1P_2=\frac{2}{3}P_0P_1=\frac{2}{3},$$

$$P_2P_3=\frac{2}{3}P_1P_2=(\frac{2}{3})^2,$$

$$P_3P_4=\frac{2}{3}P_2P_3=(\frac{2}{3})^3\cdots,$$

$$P_{n-1}P_n = (\frac{2}{3})^{n-1}, \cdots,$$

$$x = -P_2P_3 + P_4P_5 - P_6P_7 + \cdots + (-1)^n P_{2n}P_{2n+1} + \cdots$$
$$= -(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^4 - (\frac{2}{3})^6 + \cdots + (-1)^n(\frac{2}{3})^{2n} + \cdots,$$

这是公比 $q = -(\frac{2}{3})^2$ 的几何级数,故得

$$x = \frac{-(\frac{2}{3})^2}{1-[-(\frac{2}{3})^2]} = -\frac{4}{13},$$

$$y - 1 = P_1P_2 - P_3P_4 + P_5P_6 - \cdots + (-1)^{n-1}P_{2n-1}P_{2n} + \cdots$$
$$= \frac{2}{3} - (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^5 - (\frac{2}{3})^7 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}(\frac{2}{3})^{2n-1} + \cdots,$$

这是公比 $q = -(\frac{2}{3})^2$,首项为 $\frac{2}{3}$ 的几何级数,故得

$$y - 1 = \frac{\frac{2}{3}}{1-[-(\frac{2}{3})^2]} = \frac{6}{13},$$

所以 $y = 1 + \frac{6}{13} = \frac{19}{13}$,故动点 P 的极限位置的坐标是 $P(-\frac{4}{13},\frac{19}{13})$.

10.1.136 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n - u_n)$ 是绝对收敛级数,又 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是正项收敛级数,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$ 绝对收敛,故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在,这是因为,若设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = s$,则

$$s_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0$$
$$\lim_{n\to\infty}u_n = s + u_0\text{(存在)}.$$

由收敛数列的性质可知,存在 $M > 0$,对于任何 n,有 $|u_n| < M$. 因而

$|u_nv_n| < Mv_n$，再根据正项级数的比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛，因而级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

10.1.137 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为条件收敛，且$P_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i| + a_i}{2}$，$Q_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i| - a_i}{2}$，试求$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{P_n}$.

解 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = +\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i| - \sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \sum_{i=1}^{n}a_i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}} = 1.$$

10.1.138 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，证明下列级数也绝对收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1 + a_n}$ $(a_n \neq -1)$.

证 (1) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，所以$\lim_{n\to\infty}a_n = 0$，当n充分大时，$a_n^2 < |a_n|$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$也绝对收敛.

(2) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，所以$\lim_{n\to\infty}a_n = 0$，从而$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1 + a_n} = 1$，因此当$n$充分大时，$0 < \frac{1}{1 + a_n} < 2$，于是

$$\left|\frac{a_n}{1 + a_n}\right| = |a_n| \cdot \frac{1}{|1 + a_n|} < 2|a_n|,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$ 是绝对收敛的，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 也绝对收敛.

10.1.139 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在点 $x=0$ 的一个邻域内连续，且 $f(0)=1, f''(0)=2$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛.

证 由假设条件知，$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻近可表为一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2, (0<\theta<1)$$

又因 $f(x)$ 为偶函数，因此有 $f'(0)=0$，于是

$$f(x)=1+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2, \text{即 } f(x)-1=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2.$$

由于 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $f''(0)=2>0$，若令 $x=\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty} f''(\frac{\theta}{n})=f''(0)=2$，由极限的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在整数 $N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，有 $|f''(\frac{\theta}{n})-2|<\varepsilon$，即

$$2-\varepsilon<f''(\frac{\theta}{n})<2+\varepsilon,$$

于是当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f(\frac{1}{n})-1|=|\frac{f''(\frac{\theta}{n})}{2}\frac{1}{n^2}|<(1+\frac{\varepsilon}{2})\frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{\varepsilon}{2})\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛.

10.1.140 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛，且它们的乘积等于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$.

证 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{|a|^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|}{n+1}=0$，

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a|^n}{n!}$ 收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 绝对收敛，同理可证，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 绝对收

敛.

按照对角线顺序,它们的乘积的各项为 $c_0 = 1 = \frac{(a+b)^0}{0!}$,

$c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}$,即 $c_n = \frac{(a+b)^n}{n!}$,$(n = 1,2,\cdots)$,所以

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

10.1.141 举出具有下面性质的级数的例子来:

(1) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,但 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在;

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,但交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 却是发散的.

解 (1) 取 $u_{2m-1} = \frac{1}{2^m}, u_{2m} = \frac{1}{3^m}$,则级数为:$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$,易知它是收敛的,但当 n 为奇数时,$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2m}}{u_{2m-1}} = \frac{\frac{1}{3^m}}{\frac{1}{2^m}} = \left(\frac{2}{3}\right)^m$,当 n 为偶数时,$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2m+1}}{u_{2m}} = \frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{\frac{1}{3^m}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m$,故当 $n \to \infty$ 时,前者趋于零,而后者趋于 $+\infty$,因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在.

(2) 在级数 $\frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \cdots$ $(a,b > 0)$ 中,当 $a \neq b$ 时,虽满足 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 却是发散的. 又如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$,它满足 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$,但也是发散的.

§ 2 函数项级数与幂级数

内 容 提 要

1. 收敛半径、收敛域与和函数

设函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 在区间 (a,b) 上有定义，则式子

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \tag{1}$$

叫做函数项级数，并称

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad x \in (a,b)$$

为级数(1)的前 n 项的部分和，如果对于某个 $x \in (a,b)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ 存在，则称级数(1)在点 x 处收敛，使级数(1)收敛的所有点的全体称为级数(1)的收敛域，在收敛域上，级数(1)的和是 x 的函数，并称它为(1)的和函数，记为 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

特别地，对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{2}$$

其收敛域一般是一个以原点为中心，半径为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{3}$$

的收敛区间 $(-R, R)$. R 叫幂级数(2)的收敛半径，至于在端点 $x = \pm R$ 处，幂级数(2)的收敛性要分别讨论.

2. 一致收敛

设给定函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ($x \in (a,b)$，(a,b) 是其收敛域)，如果对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在着与 x 无关的正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon \qquad (x \in (a,b)),$$

则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛于 $s(x)$.

3. 一致收敛的充要条件(柯西准则)

函数项级数(1) 在其收敛域(a,b) 上一致收敛的充要条件为：任取$\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $m > n > N$ 时，总有

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon,\ (x \in (a,b))$$

4. 一致收敛的判别法

(1) 维尔斯特拉斯(Weierstrass) 判别法

如果存在收敛的常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$，使得

$$|f_n(x)| \leqslant M_n, (x \in (a,b); n = 1,2,\cdots),$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在(a,b) 上绝对并一致收敛.

幂级数(2) 在其收敛域内任一闭区间上一致收敛.

(2) 阿贝尔(Abel) 判别法

如果 1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间$(a\ ,b)$ 内一致收敛；2) 函数 $b_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 全体是有界的，亦即对(a,b) 内任一 x 和任一正数 n，都有 $|b_n(x)| \leqslant k$，并对每一个 x 形成一单调的序列，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间(a,b) 内一致收敛.

(3) 狄利克雷(Dirichlet) 判别法

如果 1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的；2) 序则 $b_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的，并且当 $n \to \infty$ 时在(a,b) 内一致地趋于零，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间(a,b) 内一致收敛.

5. 和函数的性质

(1) 连续性　在(a,b) 上一致收敛且各项连续的函数项级数的和函数 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在(a,b) 上是连续的.

(2) 逐项求极限　设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在(a,b) 上一致收敛，且

有有限极限$\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n\ (n = 1,2,\cdots)$存在，则常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$收敛，且有

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\lim_{x\to x_0} f_n(x)\},\ x_0 \in (a,b).$$

(3) 逐项求导　设级数(1)的收敛域为(a,b)，每一项$f_n(x)$在(a,b)上可导，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$在$(a,b)$上一致收敛，则和函数$s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$(a,b)$上可导，且有$s'(x) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$，$(x \in (a,b))$。此时，称函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$可逐项求导.

(4) 逐项求积　设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛，且每一项$f_n(x)$在该区间上连续，则和函数$s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$(a,b)$上可积，且有

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

(5) 泰勒(Taylor)级数

设函数$f(x)$在$x = x_0$处各阶导数存在，且在区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$内(其中$\delta > 0$)有$|f^{(n)}(x)| \leqslant M$，$(n = 1,2,\cdots)$，则在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$内有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots,$$

此时，称函数$f(x)$在点x_0的邻域内可以展开为泰勒级数.

特别地，若$x_0 = 0$时，称$f(x)$在原点附近可以展开为马克劳林(Maclaurin)级数，即

$$f(x) = f(0)x + \frac{f'(0)}{1!}x^2 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

下面是几个常见函数的马克劳林展开式：

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,\ x \in (-\infty, +\infty)$；

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!} + \cdots,$
$x \in (-\infty, +\infty)$；

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + \cdots,$
$x \in (-\infty, +\infty)$；

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$
$x \in (-1, 1]$；

5) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$
$x \in [-1, 1]$；

6) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2\,!}x^2 + \cdots$
$+ \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots,\ x \in (-1, 1)$；

特别地，有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,\ x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,\ x \in (-1, 1).$$

问 题 与 解 答

1. 函数项级数的一般概念

10.2.1　讨论下列函数项级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$；　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n + y^n}, (x>0, y>0)$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}(\frac{3+2x}{3-x})^n$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\frac{1-x}{1+x})^n$.

解　(1) 令$\frac{1}{x}=y$,则有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n$,

显然,上式右端级数的收敛半径为 1，因此，仅当 $|y|=|\frac{1}{x}|<1$，即 $|x|>1$ 时,原级数绝对收敛.

(2) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}=1$，故仅当 $|\frac{x}{2x+1}|<1$ 时,即 $x^2<4x^2+4x+1$ 时级数绝对收敛,解该不等式得,$x>-\frac{1}{3}$ 或 $x<-1$,这即为所求的绝对收敛域,当 $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=-1$ 时,原级数的通项不趋于零,故发散.

(3) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1$,故仅当 $|\frac{2x}{1+x^2}|<1$ 时,级数绝对收敛,解此不等式,$4x^2<1+2x^2+x^4$，$(x^2-1)^2>0$，即 $|x|\neq 1$. 于是,当 $|x|\neq 1$ 时,级数绝对收敛. 当 $x=-1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，它是条件收敛的. 当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,它是发散的.

(4) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2=\frac{1}{2}$,

故仅当 $|\sin x|<\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛. 解之,得 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}$,($k=0$，± 1，± 2,…).

当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{6}$ 时,由绝对值组成的级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,它是收敛的.

因此,当 $|x - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{6}$,(($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时,级数绝对收敛.

(5) 对于任意的 x,只要 n 足够大,级数的项就为正,因此,它可以看成正项级数.由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x,$$

故利用正项级数的判别法知,当 $x > 1$ 时,级数收敛,且绝对收敛;当 $x \leqslant 1$ 时,级数发散.

(6) 若 $x < 1$,将原级数写成 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+(\frac{y}{x})^n}$,由于

$0 < \frac{x^n}{1+(\frac{y}{x})^n} \leqslant x^n$,而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛,故原级数绝对收敛.

同理,当 $y < 1$ 时,原级数绝对收敛.

于是,当 $0 < \min(x,y) < 1$ 时,原级数绝对收敛.

(7) 令 $y = \frac{3+2x}{3-x}$,则原级数变成 y 的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{n} y^n$,容易求出它的收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}\cdot\frac{n+1}{2^{-\sqrt{n+1}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = 1,$$

所以收敛区间为 $(-1,1)$,当 $y = \pm 1$ 时,幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$,取 $v_n = \frac{1}{n^2}$,因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}/\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0$,由比较判别法的极限形式可知,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}$ 收敛,从而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{n}y^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$,而原级数的收敛域,则由满足不等式 $-1 \leqslant \frac{3+2x}{3-x} \leqslant 1$

的所有 x 所组成，而这些 x 的全体为$[-6,0]$.

(8) 用根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=e\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

故当 $e\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$，即 x 在区间$(\frac{e-1}{e+1},\frac{e+1}{e-1})$ 内时，级数绝对收敛，在这个区间外发散.

当 $e\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=1$ 时，因

$$(1+\frac{1}{n})^{n^2}e^{-n}=e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}\to e^{-\frac{1}{2}},(n\to\infty),$$

故级数发散.

10.2.2 讨论函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$的敛散性.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}\right|}=2|\sin x|^2$，因此，根据柯西判别法，当 $2|\sin x|^2<1$ 时，级数绝对收敛. 当 $2|\sin x|^2>1$ 时，级数发散.

解不等式 $|\sin x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$，得

$$-\frac{\pi}{4}+2m\pi<x<\frac{\pi}{4}+2m\pi,$$

$$\frac{3\pi}{4}+2m\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2m\pi,$$

或
$$-\frac{\pi}{4}+(2m+1)\pi<x<\frac{\pi}{4}+(2m+1)\pi,$$

$$(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

由此可得，$-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，即级数在区间$(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi)$ 内绝对收敛.

考察 $2|\sin x|^2=1$ 的情形，此时级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

易知该级数条件收敛.

解 $2|\sin x|^2 = 1$ 得，$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$，$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. 即级数在点集 $\{k\pi \pm \frac{\pi}{4} \mid \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 上条件收敛，在区间 $(k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4})$，$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 上发散.

10. 2. 3　讨论级数

$$x + x(1 - \sin x) + x(1 - \sin x)^2 + x(1 - \sin x)^3 + \cdots$$

的敛散性.

解　将原级数改写为

$$x[1 + (1 - \sin x) + (1 - \sin x)^2 + (1 - \sin x)^3 + \cdots],$$

令 $1 - \sin x = q$，则当 $q < 1$ 时，级数

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

收敛，故当 $|1 - \sin x| < 1$ 时，原级数收敛，解不等式 $|1 - \sin x| < 1$，得 $\sin x > 0$，于是当 $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时级数收敛；

当 $x = 0$ 时级数收敛；

当 $x \neq 0$，而 $\sin x = 0$ 时级数发散.

当 $\sin x < 0$，即 $(2n + 1)\pi < x < (2n + 2)\pi$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时级数发散.

10. 2. 4　函数项级数的收敛域必为一区间.

解　非. 例如，

$$u_n(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理点；} \\ 0, & x \text{ 为无理点，} \end{cases}$$

则易知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为集合 $\{x \mid x \text{ 为无理点}\}$，这并非区间.

有必要指出：幂级数的收敛区域必为一区间.

10. 2. 5　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3n} \left(\frac{3 + x}{3 - 2x}\right)^n$ 的收敛域.

解　$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{3(n + 1)}}{\sin \frac{1}{3n}} \cdot \left|\frac{3 + x}{3 - 2x}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n+3}\left|\frac{3+x}{3-2x}\right| = \left|\frac{3+x}{3-2x}\right|.$$

由 $\left|\frac{3+x}{3-2x}\right| < 1$ 解得，$x < 0$ 或 $x > 6$.

当 $x = 0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{3n}$，因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{3n}}{\frac{1}{3n}} = 1$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 发散，故 $x = 0$ 时所给级数发散.

当 $x = 6$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{3n}$，因 $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{3n} = 0$，$\sin\frac{1}{3(n+1)} < \sin\frac{1}{3n}$，由莱布尼兹判别法知，此交错级数收敛. 故当 $x = 6$ 时，所给级数收敛，因此原级数收敛域为 $(-\infty, 0)$，$[6, +\infty)$.

10.2.6 确定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{2n}x^n(1-x)^n$ 的收敛域.

解 令 $y = x(1-x)$，则级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{2n}y^n$，故当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{2(n+1)}|y|^{n+1}}{n2^{2n}|y|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}2^2|y| = 4|y| < 1,$$

即当 $|y| < \frac{1}{4}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{2n}y^n$ 收敛，当 $y = \pm\frac{1}{4}$ 时，均发散. 故收敛域为 $-\frac{1}{4} < y < \frac{1}{4}$. 于是，当 $-\frac{1}{4} < x(1-x) < \frac{1}{4}$，即 $0 < (x-\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$ 时，原级数收敛，由此解得

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2}, \text{ 或 } \frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{2n}x^n(1-x)^n$ 的收敛域为

$$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

10.2.7 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sqrt[3]{\sin^n x}$ 的收敛域.

解 一般项 $u_n = n\sqrt[3]{\sin^n x}$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |\sqrt[3]{\sin x}|$,所以,当 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,(k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$ 时,$|\sqrt[3]{\sin x}| < 1$,于是级数收敛;

当 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,(k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots)$ 时,级数成为 $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ 或 $-1 + 2 - 3 + \cdots + (-1)^n n + \cdots$,显然这两个级数都是发散的.

所以,已给级数的收敛域是除去点 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的整个数轴.

10.2.8 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

解 设 $a_n = \frac{1}{2n+1}$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$,故当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$,即 $x > 0$ 时级数绝对收敛;当 $x < 0$ 时级数发散;当 $x = 0$ 时,级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$,显然发散,于是,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 $(0, +\infty)$.

10.2.9 确定 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$ 的收敛域.

解 对 x 分下述三种情况讨论.

(1) 当 $x > 0$ 时,由于 $\sqrt[n]{\frac{1}{e^{nx}}} = \frac{1}{e^x} < 1$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}$ 收敛,又因为 $\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \leqslant \frac{1}{e^{nx}}$,所以 $x > 0$ 时,原级数绝对收敛.

(2) 当 $x = 0$ 时,恒有 $\frac{\cos nx}{e^{nx}} = 1,(n = 1,2,\cdots)$,从而可知原级数发散.

(3) 当 $x < 0$ 时,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{nx}} = +\infty$,以及 $n\to\infty$ 时 $\cos nx \nrightarrow 0$,由此可知,$n\to\infty$ 时,$\frac{\cos nx}{e^{nx}} \nrightarrow 0$,故级数发散.

10.2.10 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域.

解 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n}=1$,故

当 $|x^2+x+1|<1$,即 $-1<x^2+x+1<1$ 时,级数收敛.

当 $x^2+x+1<1$ 时,$(x+\frac{1}{2})^2<\frac{1}{4}$,由此可得,$|x+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$,于是,$-1<x<0$.

当 $x^2+x+1>-1$ 时,得 $(x+\frac{1}{2})^2>-\frac{7}{4}$,对一切 x 该不等式成立,故级数在 $(-1,0)$ 内收敛.

当 $x=0$ 或 $x=-1$ 时,级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$,收敛,故原级数的收敛域为 $[-1,0]$.

10.2.11 求函数项级数 $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{1}{1+x^6}+\cdots$ 的收敛域.

解 当 $|x|<1$ 时,$u_n=\dfrac{1}{1+x^{2n}}\to1\neq0\ (n\to\infty)$. 级数发散.

当 $|x|=1$ 时,级数成为发散级数:$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$;

当 $|x|>1$ 时,$u_n=\dfrac{1}{1+x^{2n}}<(\dfrac{1}{x^2})^n$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{x^2})^n$ 是公比 $q=\dfrac{1}{x^2}<1$ 的等比级数,它是收敛的,因此所给级数收敛,故级数的收敛域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

10.2.12 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$ 的收敛域.

解 级数为

$$\frac{(x-1)^2}{1^1}+\frac{(x-1)^6}{2^2}+\frac{(x-1)^{12}}{3^3}+\cdots+\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}+\cdots,$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{n}=\begin{cases}0, & |x-1|\leqslant1;\\ \infty, & |x-1|>1.\end{cases}$$

所以,当且仅当 $|x-1|\leqslant1$ 时,级数收敛,故级数收敛域为 $[0,2]$.

10.2.13　证明：级数$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos kx$对一切$x\in(-\infty,+\infty)$发散.

证　先证明对任意的x，当$n\to\infty$时，恒有$\cos nx\nrightarrow 0$.

采用反证法，假若$\cos nx\to 0$，则对恒等式$\cos 2nx=2\cos^2 nx-1$的两端分别取$n\to\infty$时的极限，将得到$0=-1$的荒谬结论. 由此可知，级数不符合收敛的必要条件，因此，级数对一切$x\in(-\infty,+\infty)$皆发散.

10.2.14　求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$的收敛域，并求其和.

解　设$\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2=y$，$\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}=a_n$，则易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$的收敛半径$R=1$.

当$|y|=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$的收敛域是$|y|<1$，由$\frac{2+x}{2-x}\leqslant 1$得，$x\leqslant 0$，这就是原级数的收敛域.

设$|y|<1$，$f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$，则有

$$[yf(y)]''=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}y^{n-1}=\frac{1}{1+y},$$

所以，$f(y)=\frac{(1+y)\ln(1+y)}{y}-1.$

如果认为
$$f(-1)=\lim_{y\to-1^+}f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n,$$
$$f(1)=\lim_{y\to1^-}f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$
则上式对一切$|y|\leqslant 1$都成立，所以当$x\leqslant 0$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{1+\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}\ln\left[1+\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2\right]-1,$$

10.2.15 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$的收敛域及和函数.

解 设 $x^2-1=y$，$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$的收敛半径 $R=1$. 又由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，得级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$当 $|y|=1$ 时也收敛，故原级数的收敛区域为 $|x^2-1|\leqslant 1$，即 $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

设 $f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n$，当 $|y|<1$ 时，由于

$$[yf(y)]''=\sum_{n=1}^{\infty}y^{n-1}=\frac{1}{1-y},$$

所以 $f(y)=\frac{(1-y)\ln(1-y)}{y}+1$.

如果认为 $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{y\to1^-}f(y)$，

$$f(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n=\lim_{y\to1^+}f(y),$$

则上式对一切 $|y|\leqslant 1$ 都成立，所以当 $|x|\leqslant\sqrt{2}$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}=\frac{(2-x^2)\ln(2-x^2)}{x^2-1}+1.$$

10.2.16 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2[x])^n$对于怎样的 x 值收敛？并求其和.

解 据柯西判别法易见，使级数收敛的 x 值，应满足不等式

$$|x-2[x]|<1,$$

即
$$-1<x-2[x]<1 \text{ 或 } -1<\{x\}-[x]<1$$

$$-1+\{x\}<[x]<1+\{x\} \tag{1}$$

其中$\{x\}=x-[x]$为 x 的小数部分，$\{x\}\geqslant 0$，

解不等式(1)，因为 $1+\{x\}\geqslant 1$，所以不等式$[x]<1+\{x\}$的解是 $x<2$ 并且 $x\neq 1$；又因为 $-1+\{x\}<0$，所以 $-1+\{x\}<[x]$的解是 $x\geqslant 0$，由上述结果可知 $-1+\{x\}<[x]<1+\{x\}$ 的解是 $0\leqslant x<1$ 及 $1<x<2$.

级数的和为

$$s(x)=\frac{x-2[x]}{1-x+2[x]}=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x}, & 0\leqslant x<1;\\ \dfrac{x-2}{3-x}, & 1<x<2.\end{cases}$$

10.2.17　证明:对一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 2\sqrt{\pi}.$$

证　先证予备知识. 设 m,n 为正整数, $n>m$,又 $x\neq 2l\pi,(l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,则有

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{1}$$

证明
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n}\sin kx\right|&=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=m}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2}\right|\\&=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{2}\left[\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x\right]\right|\\&=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\frac{1}{2}\left|\cos(m-\frac{1}{2})x-\cos(m+\frac{1}{2})x\right|\\&\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\frac{1}{2}\left[\left|\cos(m-\frac{1}{2})x\right|+\left|\cos(m+\frac{1}{2})x\right|\right]\\&\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.\end{aligned}$$

于是(1)式得证,下面证明本题.

先考虑 $0<x<\pi$ 的情形.

对每个 $x\in(0,\pi)$,必有非负整数 m 适合

$$m\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{x}<m+1, \tag{2}$$

于是有
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|. \tag{3}$$

如果 $m=0$,(3)式右端第一项就没有了,如果 $m\geqslant n$,(3)式右端第

二项就没有了，这两种情形，对全部论证无影响.

据 $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$ 容易推得

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{kx}{k}=mx\leqslant\sqrt{\pi}. \tag{4}$$

由(1)有 $\left|\sum_{k=1}^{s}\sin kx\right|\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}$，$(s=m+1,m+2,\cdots,n)$，

由阿贝尔引理，有

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\frac{1}{m+1}. \tag{5}$$

又因为当 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $\sin t>\dfrac{2}{\pi}t$，所以，当 $0<x<\pi$ 时，有

$$\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}. \tag{6}$$

据(2)、(5)、(6)得

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\frac{1}{\frac{x}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{x}}=\sqrt{\pi}. \tag{7}$$

据(3)、(4)、(7)即得知，当 $0<x<\pi$ 时，欲证的不等式成立，当 $x=-\pi,0,\pi$ 时，欲证的不等式显然成立，因为 $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，从而，易见 $-\pi<x<0$ 时，欲证的不等式成立.

综上所述，当 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时，欲证的不等式成立. 由正弦函数以 2π 为周期可知，欲证的不等式对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立.

10.2.18 利用 $\dfrac{\sin nx}{n}=\int_0^x\cos nx\,dx$ 证明：对 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 和一切自然数 n，有

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\geqslant 0.$$

证 首先，易证对一切实数 α，恒等式

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

成立，由此推知，$\sigma_n\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sigma_n\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$. 这表示 $\sigma_n(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，所以，只要证明在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有 $\sigma_n(x)\geqslant 0$，即可.

用数学归纳法或三角函数的和差化积公式，容易证明

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)t=\frac{\sin 2nt}{2\sin t},\quad (0<t\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

将上式两端从 0 到 x 积分，利用题设的等式，即可得到

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dx.$$

作变换 $u=2nt$，得

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{4n}\int_0^{2nx}\frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2n}}du$$

$$=\frac{1}{4n}\left[\sum_{i=0}^{k}\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2n}}du+\int_{k\pi}^{2nx}\frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2n}}du\right],$$

其中 $k=[\frac{2nx}{\pi}]$，作变换 $u=z+i\pi$，得

$$\int_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2n}}du=(-1)^i\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{\sin\frac{z+i\pi}{2n}}dz=(-1)^iI_i.\tag{1}$$

作变换 $u=z+k\pi$，得

$$\int_{k\pi}^{2nx}\frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2n}}du=(-1)^k\int_0^{2nx-k\pi}\frac{\sin z}{\sin\frac{z+k\pi}{2n}}dz.\tag{2}$$

由(1)、(2) 即得

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{4n}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^iI_i+(-1)^k\int_0^{2nx-k\pi}\frac{\sin z}{\sin\frac{z+k\pi}{2n}}dz\right).\tag{3}$$

注意到 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant k\leqslant\frac{2nx}{\pi}\leqslant\frac{2n}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=n$，并且，当 $0\leqslant z\leqslant\pi$ 时，有

$$0\leqslant\frac{z}{2n}\leqslant\frac{z+\pi}{2n}\leqslant\frac{z+2\pi}{2n}\leqslant\cdots\leqslant\frac{z+(k-1)\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2}.\tag{4}$$

因为正弦函数在$[0,\frac{\pi}{2}]$上非负，且单调增加，所以，据(4) 式可推得

$$I_i\geqslant 0,(i=0,1,2,\cdots,k-1),$$

$$I_i\geqslant I_{i+1},(i=0,1,2,\cdots,k-2).$$

如果 k 为偶数，由(1) 知，

$$\sigma_n(x) = (I_0 - I_1) + (I_2 - I_3) + \cdots + (I_{k-2} - I_{k-1}) + \int_0^{2nx-k\pi} \frac{\sin z}{\sin\frac{z+k\pi}{2n}} dz,$$

右端每项非负，故有 $\sigma_n(x) \geqslant 0$.

如果 k 为奇数，仍由(1) 知，

$$\sigma_n(x) = (I_0 - I_1) + (I_2 - I_3) + \cdots + (I_{k-3} - I_{k-2}) + (k_{k-1} - \int_0^{2nx-k\pi} \frac{\sin z}{\sin\frac{z+k\pi}{2n}} dz),$$

右端除最后一项外，均为非负，考虑最后一项，其中

$$I_{k-1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{\sin\frac{z+(k-1)\pi}{2n}} dz,$$

当 $0 \leqslant z \leqslant 2nx - k\pi$ 时，有

$$0 \leqslant \frac{z+(k-1)\pi}{2n} \leqslant \frac{z+k\pi}{2n} \leqslant \frac{2nx - k\pi + k\pi}{2n} = x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

故有，$I_{k-1} > \int_0^{2nx-k\pi} \frac{\sin z}{\sin\frac{z+k\pi}{2n}} dz$，所以，$\sigma_n(x) \geqslant 0$.

10.2.19　设 $f_0(x)$ 在区间$[0,a]$上连续，$a > 0$，而且 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x)dx, x \in [0,a], (n = 1,2,\cdots)$，证明：无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在区间$[0,a]$上是绝对收敛的.

证　已知 $f_0(x)$ 在区间$[0,a]$上连续，故存在 $M > 0$，使

$$|f_0(x)| \leqslant M,\ x \in [0,a]$$

成立，又 $|f_1(x)| = |\int_0^x f_0(x)dx| \leqslant \int_0^x |f_0(x)|dx \leqslant Mx$,

$$|f_2(x)| = |\int_0^x f_1(x)dx| \leqslant \int_0^x Mx dx = \frac{1}{2}Mx^2,$$

利用数学归纳法，可以证明 $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}Mx^n, x \in [0,a], (n = 1,2,\cdots)$ 成立.

因为$\frac{1}{n!}Mx^n \leqslant \frac{1}{n!}Ma^n, x \in [0,a]$. 显然，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}Ma^n$收敛，由

比较判别法得，$\sum_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|$ 在区间$[0,a]$上收敛，即$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 在区间$[0,a]$上绝对收敛.

2. 幂级数的收敛区间

求下列幂级数的收敛区间(10.2.20--10.2.29 题)：

10.2.20 $1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\cdots$.

解 因为$a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2}$,所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

当$x=-1$时,级数$1+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$是$p$级数.且$p=2>1$,故收敛；

当$x=1$时,级数为$1-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots$,因$u_n=\frac{1}{n^2}\to 0,(n\to\infty)$,且$\frac{1}{n^2}>\frac{1}{(n+1)^2}$,所以也收敛.

从而收敛区间为$[-1,1]$.

10.2.21 $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$.

解 因为$a_n=\frac{2^n}{n^2+1}$,所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}.$$

当$x=-\frac{1}{2}$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}(-\frac{1}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$收敛；

当$x=\frac{1}{2}$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}(\frac{1}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$也收敛.

所以,收敛区间为$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

10.2.22 $1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots$.

解 因为$u_n=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots 2n}x^{2n}$,用比值判别法,

有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n\cdot(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}|x|^2 = |x|^2.$$

故当 $|x|^2<1$，即 $|x|<1$ 时，原级数收敛.

当 $x=\pm1$ 时，原级数为交错级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} = 0. \tag{1}$$

关于(1)的证明如下：

当 $a>0$ 时，有不等式 $\dfrac{a-1}{a^2}<\dfrac{1}{a+1}$，由此有

$$\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4^2}\cdots\frac{2n-1}{(2n)^2}<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdots\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

即 $\dfrac{1^2\cdot3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot4^2\cdots(2n)^2}<\dfrac{1}{2n+1}$，故

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{2}$$

由不等式(1)和(2)及 $a_n>a_{n+1}$ 可知，$x=\pm1$ 时，级数收敛，故原级数的收敛区间为$[-1,1]$.

10.2.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$.

解 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

当 $x=-e$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!e^n}{n^n}$，这是交错级数，因为 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}>1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，故级数发散.

当 $x=e$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!e^n}{n^n}$，显然发散. 故所给幂级数的收敛半径 $R=e$，收敛区间为$(-e,e)$.

10.2.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n^3+1}$.

解 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^2}=1.$

在 $x=-1$ 处,级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+1}$这是交错级数,易证它收敛;

在 $x=1$ 处,级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$,因为$\frac{n^2}{n^3+1}\geqslant\frac{1}{n+1}$,故该级数发散.于是级数的发敛半径 $R=1$,收敛区间为$[-1,1)$.

10.2.25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$.

解 该级数没有偶次幂的项,由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{3^{n+1}(2n+3)}\cdot(-1)^n\frac{3^n(2n+1)}{x^{2n+1}}\right|$$
$$=\frac{1}{3}|x|^2$$

可知,当$\frac{1}{3}|x|^2<1$,即 $|x|<\sqrt{3}$ 时,该级数收敛,收敛半径 $R=\sqrt{3}$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时,级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{2n+1}$,收敛.

当 $x=\sqrt{3}$ 时,级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2n+1}$,收敛.

于是,幂级数的收敛区间为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

10.2.26 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-3)^n$;

(2) $x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}-\cdots$.

解 (1) 因 $a_n=1$,所以 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$.由 $|x-3|<1$ 知,$2<x<4$.

当 $x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散；当 $x=4$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ 发散，因此，收敛区间为(2,4).

(2) 由于

$$\left|\frac{\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)\,!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)\,!}}\right|=\left|\frac{(2n+1)^2}{2n-1}x^2\right|\to+\infty,(n\to\infty),$$

所以，收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

10.2.27 $\lg x+(\lg x)^2+(\lg x)^3+\cdots$

解 因 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，故当 $-1<\lg x<1$，即当$\dfrac{1}{10}<x<10$ 时级数收敛.

当 $x=\dfrac{1}{10}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg\dfrac{1}{10})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$，发散；

当 $x=10$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg 10)^n=\sum_{n=1}^{\infty}1^n$，发散.

因此，该级数的收敛区间为$(\dfrac{1}{10},10)$.

10.2.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n4^n}x^{2n-1}$.

解 因为 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n4^n}x^{2n-1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{x^2}{4}\begin{cases}>1, & |x|>2\text{ 时；}\\=1, & |x|=\pm 2\text{ 时；}\\<1, & |x|<2\text{ 时.}\end{cases}$$

由比值判别法知，当 $|x|<2$ 时，原级数绝对收敛；当 $x=2$ 或 $x=-2$ 时，原级数为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$，由莱布尼兹判别法知，这两个级数收敛，故原级数的收敛区间为[−2,2].

10.2.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

解 记 $a_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$，由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{3}$，故级数收敛

半径为 $R=\frac{1}{3}$.

在端点 $x=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$ 处,级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+(\frac{2}{3})^n}{n},$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n$ 都收敛,所以当 $x=-\frac{4}{3}$ 时,原级数收敛.

当 $x=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$ 时,级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot(\frac{1}{3})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{n},$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n$ 收敛,故当 $x=-\frac{2}{3}$ 时,原级数发散,故原级数的收敛区间为 $[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$.

10.2.30　求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\ (a>0,b>0)$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}x^n$.

解　(1) 应用比值判别法

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n+1}{2n+3}|x^2|\to|x|^2,(n\to\infty).$$

当 $|x|^2<1$,即 $-1<x<1$ 时,级数收敛.

当 $x=\pm1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$,它是收敛的,故收敛区间为 $[-1,1]$.

(2) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}|x|^2 \to 0 \cdot |x|^2, (n \to \infty)$,
故收敛区间为$(-\infty, +\infty)$.

(3) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2n+1}{2(2n-1)}|x|^2 \to \frac{1}{2}|x|^2, (n \to \infty)$.

当$\frac{1}{2}|x|^2 < 1$,即$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$时,级数收敛.

当$x = \pm\sqrt{2}$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$是发散的,所以原级数的收敛区间为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(4) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|x-5| \to |x-5|, (n \to \infty)$.

当$|x-5| < 1$,即$4 < x < 6$时,级数收敛;

当$x = 4$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,它满足交错级数的收敛条件,是收敛的.

当$x = 6$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,它是$p = \frac{1}{2} < 1$的$p$-级数,是发散的.因此收敛区间是$[4,6)$.

(5) 令$c = \max(a,b)$,则有$\sqrt[n]{c^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant \sqrt[n]{2c^n}$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2c^n} = c$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n + b^n} = c$,由根值判别法,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}}|x| = \frac{1}{c}|x|.$$

当$\frac{1}{c}|x| < 1$,即$-c < x < c$时,级数收敛.

当$x = \pm c$时,级数的一般项不趋于0,所以是发散的,故收敛区间为$(-c,c)$.

(6) 用根值判别法,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}\, n^{1/n^2}}|x|$,

令$y_n = n^{1/n^2}$,则$\ln y_n = \frac{\ln n}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2} = 0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n^2} = 1$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = |x|$.

当 $|x|<1$,即 $-1<x<1$ 时,级数收敛.

当 $x=1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$,它满足交错级数的收敛条件,是收敛的.

当 $x=-1$ 时,原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n}}{n\sqrt[n]{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{n}}=1$,可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

所以级数的收敛区间为 $(-1,1]$.

10.2.31　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})x^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}x^n$ 的收敛半径.

解　对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})x^n$,　　(1)

因为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$

$$=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n+1},$$

故
$$1\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\frac{1}{n+1},$$

当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$,故级数(1)的收敛半径为 1.

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}x^n$,有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{n!}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=(n!)^{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}},$$

而 $\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\leqslant(n^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=n^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}},$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1$ 可得，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n+1}}=1$.

因而，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[n]{n!}}$ 的收敛半径为 1.

10.2.32　求下列幂级数的收敛半径和收敛区间，并研究其在收敛区间端点的性质.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\cdot(\frac{x-1}{2})^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})x^n$，$(a>0,b>0)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{\ln n}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\mathrm{tg}^n x$.

解　(1) 记 $a_n=\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{2^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2(\frac{2n+1}{2n+2})^p=2,$$

故收敛半径 $R=2$；收敛区间为$(-2+1,2+1)$，即$(-1,3)$.

当 $x-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p$，显然，该级数在 $p>2$ 时绝对收敛；在 $0<p\leqslant2$ 时条件收敛；在 $p\leqslant0$ 时发散.

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p$，它在 $p>2$ 时绝对收敛，在 $p\leqslant2$ 时发散.

(2) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$，容易求得，它们的收敛半径分别为 $R_1=\frac{1}{a}$ 及 $R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径 $R=\min(R_1,R_2)=\min(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $x=-R$ 时，若 $a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})(-\frac{1}{b})^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2},$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗贝尔判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(\frac{a}{b})^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\frac{(\frac{a}{b})^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛.

因此，当 $a<b$ 时，级数绝对收敛.

当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})(-\frac{1}{a})^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{1}{n})+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n.$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛(当 $b<a$ 时)或条件收敛(当 $b=a$ 时)，故 $a\geqslant b$ 时，级数条件收敛.

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})(\frac{1}{b})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{a}{b})^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2})(\frac{1}{a})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\frac{b}{a})^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数.

(3) 记 $a_n = \dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$，当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$，由于 $0<\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛. 故级数收敛.

当 $x=-1$ 时，级数绝对收敛，总之，当 $|x|=1$ 时，级数绝对收敛.

(4) 记 $a_n=\dfrac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{\ln n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=3$，故收敛半径 $R=\dfrac{1}{3}$；收敛区间为 $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$，当 $|x|=\dfrac{1}{3}$ 时，对于 $n=8k$，由

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8},$$

及 $\dfrac{1}{\ln k+\ln 8}>\dfrac{1}{k+\ln 8}>0$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k+\ln 8}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln k+\ln 8}$ 发散，不难证明：当 $n=8k+1,8k+2\cdots,8k+7(k=1,2,\cdots)$ 时，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}=\frac{(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{\ln n}(\pm\frac{1}{3})^n\text{ 收敛.}$$

事实上，$\dfrac{1}{\ln n}$ 单调趋于零，且

$$\sum_{n=2}^{m}\left|(1+2\cos\frac{n\pi}{4})^n)\right|\cdot\frac{1}{3^n}$$

$$\leqslant\sum_{n=2}^{m}(\frac{1+\sqrt{2}}{3})^n<\sum_{n=1}^{m}<(\frac{1+\sqrt{2}}{3})^n$$

$$<\frac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{2}}{3}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\leqslant 5.$$

根据狄利克雷判别法可知，级数(1) 收敛，于是当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时，原级数是一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的，因此，它是发散的.

(5) 记 $a_n = \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} = 1,$$

故当 $|\mathrm{tg}x| < 1$ 时，即当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时，级数绝对收敛；当 $|x - k\pi| > \frac{\pi}{4}$ 时，级数发散，当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}(\pm 1)^n,$$

由于 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} < 1$，故 $|a_n| < |a_{n+1}|$，从而 $a_n \nrightarrow 0(n \to \infty)$，级数发散，于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\mathrm{tg}^n x$ 的收敛域为满足不等式 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 的一切 x 值所所成的集合.

3. 函数展开成幂级数及其应用

(1)　函数展开成幂级数

10. 2. 33　若 $f(x)$ 为偶(奇) 函数，则 $f(x)$ 的泰勒级数中必不含奇(偶) 次项.

解　是. 事实上，若

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

则
$$f(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 + \cdots + (-1)^n a_nx^n + \cdots,$$

若 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$，由幂级数展开的唯一性可知，上面两级数的对应系数相等，故有 $a_1 = -a_1$，　$a_3 = -a_3, \cdots, a_{2n+1} = -a_{2n+1}, \cdots$，即

$$0 = a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots,$$

这说明偶函数的泰勒级数中只含偶次项，同理可知奇函数的泰勒级数中只含奇次项.

10. 2. 34　将 $a^x(a > 0, a \neq 1)$ 展开成 x 的幂级数.

解　$a^x = e^{(\ln a)x} = e^y$，其中 $y = (\ln a)x$，当 x 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内变化时，y 也在 $(-\infty, +\infty)$ 内变化，且有

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots, (-\infty < y < +\infty),$$

以 $y = (\ln a)x$ 代入上式，得

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + \cdots,$$
$$(-\infty < x < +\infty)$$

10.2.35　把下列函数展开为 x 的幂级数，并求其收敛区间.

(1) $\dfrac{e^x - e^x}{2}$；　　(2) $\cos^2 x$；

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$；　　(4) $\ln(1 + x - 2x^2)$.

解　(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, (|x| < \infty)$；

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$
$$(|x| < \infty);$$

所以，$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}[2x + 2 \cdot \dfrac{x^3}{3!} + 2 \cdot \dfrac{x^5}{5!} + \cdots]$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, (|x| < \infty).$$

(2) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}[1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots]$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!}, (|x| < \infty).$$

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}} = x[1 + \dfrac{(-\frac{1}{2})}{1!}(-2x) + \dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2} - 1)}{2!}(-2x)^2 + \cdots$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-2x)^n+\cdots]$$

$$=x[1+x+\frac{1\cdot 3}{2!}x^2+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}x^n+\cdots]$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}.$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，级数为一交错级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

它是收敛的；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 无定义，从而

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}).$$

(4) 因 $\ln(1+x-2x^2)$

$$=\ln[(1-x)(1+2x)]=\ln(1-x)+\ln(1+2x),$$

在 $-1\leqslant x<1$ 中，

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}x^n;$$

而在 $-1<2x\leqslant 1$，即 $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$ 中，

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^nx^n}{n},$$

因此，$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

10.2.36 将函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x}}$ 展开成 x 的幂级数，并确定收敛区间.

解 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x}}=\frac{x}{\sqrt{2}}(1-\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{2}}[1-\frac{1}{2}(-\frac{x}{2})+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(-\frac{x}{2})^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(-\frac{x}{2})^3$$

$$+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}(-\frac{x}{2})^n+\cdots]$$

$$=\sqrt{2}[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1\cdot3}{1\cdot4\cdot2^3}x^3$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot2^4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)2^n}x^n+\cdots],$$

当 $x=-2$ 时，这是交错级数，由莱布尼兹判别法知其收敛.

当 $x=2$ 时，它成为正项级数，由拉阿伯判别法可知，该正项级数发散，故其收敛区间为 $[-2,2)$.

10.2.37 把函数 $f(x)=\dfrac{4x^2+30x+68}{(x+4)^2(x-2)}$ 展开成 x 的幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{4x^2+30x+68}{(x+4)^2(x-2)}=\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{2}{(x+4)^2}$,

而 $$\frac{4}{x-2}=-\frac{2}{1-\frac{x}{2}}=-2(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots)$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n},\ (-2<x<2),$$

$$-\frac{2}{(x+4)^2}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{4})^2}$$

$$=-\frac{1}{8}[1-2(\frac{x}{4})+\frac{2\cdot3}{2!}(\frac{x}{4})^2$$

$$+(-1)^n\frac{2\cdot3\cdots(n+1)}{n!}(\frac{x}{4})^n+\cdots]$$

$$=-\frac{1}{8}[1-2(\frac{x}{4})+3(\frac{x}{4})^2-4(\frac{x}{4})^3+\cdots$$

$$+(-1)^n(n+1)(\frac{x}{4})^n+\cdots]$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(\frac{x}{4})^n,\ (-4<x<4).$$

所以 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^{n-1}})x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\frac{1}{2^{2n+3}}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^{n+1}(n+1)\frac{1}{2^{2n+3}}-\frac{1}{2^{n-1}}]x^n,(-2<x<2).$$

10.2.38　把函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解　因为 $\dfrac{x}{1+x-2x^2}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+2x}\right)$，将 $\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\dfrac{1}{1+2x}$ 分别展开为等比级数，然后相减并乘以 $\dfrac{1}{3}$，即得

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot\{(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$
$$-[1-2x+4x^2-\cdots+(-1)^n2^nx^n+\cdots]\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}[1-(-1)^n2^n]x^n.$$

又因 $\dfrac{1}{1-x}$ 及 $\dfrac{1}{1+2x}$ 展成的等比级数分别在 $-1<x<1$ 及 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$ 内收敛，故展开式在 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$ 内收敛.

10.2.39　将 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ 展为 x 的幂级数，并求其收敛区间.

解　$f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$=\begin{cases}\ln4\,\dfrac{1-x^4}{1-x}=\ln(1-x^4)-\ln(1-x), & x\neq1;\\ \ln4, & x=1,\end{cases}$$

所以，由

$$\ln(1-x^4)=-\left[x^4+\frac{x^8}{2}+\frac{x^{12}}{3}+\cdots+\frac{x^{4n}}{n}+\cdots\right],$$

与
$$\ln(1-x)=-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right]$$

的收敛区间分别为 $(-1,1)$，$[-1,1)$ 可知

$$f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x)$$
$$=-\left[x^4+\frac{x^8}{2}+\frac{x^{12}}{3}+\cdots+\frac{x^{4n}}{n}+\cdots\right]$$
$$+\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right]$$
$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\left(\frac{1}{4}-1\right)x^4+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{4k-3}}{4k-3}$$
$$+\frac{x^{4k-2}}{4k-2}+\frac{x^{4k-1}}{4k-1}+\left(\frac{1}{4k}-\frac{1}{k}\right)x^{4k}+\cdots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + (-\frac{3}{4})x^4 + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{4k-3}}{4k-3}$$
$$+ \frac{x^{4k-2}}{4k-2} + \frac{x^{4k-1}}{4k-1} + (-\frac{3}{4k})x^{4k} + \cdots$$

的收敛半径为 1,收敛区间为$(-1,1)$.

10.2.40 把函数 $f(x)=e^x\sin x$ 展开成 x 的幂级数,并指出展开式成立的范围.

解法 1 按泰勒公式展开,因为

$$f'(x) = e^x\sin x + e^x\cos x = \sqrt{2}\,e^x\sin(x+\frac{\pi}{4}),$$

$$f''(x) = \sqrt{2}\,[e^x\sin(x+\frac{\pi}{4}) + e^x\cos(x+\frac{\pi}{4})]$$
$$= 2e^x\sin(x+\frac{2\pi}{4}),\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4}),$$

……

故 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2, \cdots, f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}$,

$n=1,2,3\cdots$

于是
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,$$

又
$$\left|\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\right| \leqslant \frac{(\sqrt{2})^n x^n}{n!},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}x^n$ 的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$,于是级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ 的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{n+1}\sin(\xi + \frac{n+1}{4}\pi)}{(n+1)!}x^{n+1}, (\xi\text{ 在 }0, x\text{ 之间}),$$

因为

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{(\sqrt{2})^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}x^n$ 的收敛区间为$(-\infty, +\infty)$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

由此可知，

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x) = 0.$$

综上所述，

$$e^x\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n, (-\infty < x < +\infty).$$

解法 2　用幂级数的性质展开. 因为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots,$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

故由幂级数的乘法法则有

$$e^x\sin x = (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots)\cdot$$

$$\cdot(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots + \frac{(-4)^n x^{4n+1}}{(4n+1)!} +$$

$$+ \frac{2(-4)^n x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{2(-4)^n x^{4n+3}}{(4n+3)!} + \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty),$$

解法 3　用幂级数的性质及展开式的唯一性展开.

因为 e^x, $\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内均可展开为 x 的幂级数，所以 $e^x\cdot\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内可展开为 x 的幂级数，而 $f(0) = 0, f^{(n)}(0) =$

$(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}$，故根据展开式的唯一性，有

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

解法 4 因 $e^{(1+i)x}=e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cos x+ie^x\sin x$，又

$$\begin{aligned}e^{(1+i)x}&=1+\frac{(1+i)x}{1!}+\frac{(1+i)^2x^2}{2!}+\frac{(1+i)^3x^3}{3!}+\frac{(1+i)^4x^4}{4!}\\&+\cdots+\frac{(1+i)^{4n+1}x^{4n+1}}{(4n+1)!}+\frac{(1+i)^{4n+2}x^{4n+2}}{(4n+2)!}\\&+\frac{(1+i)^{4n+3}x^{4n+3}}{(4n+3)!}+\frac{(1+i)^{4n+4}x^{4n+4}}{(4n+4)!}+\cdots\\&=[1+\frac{x}{1!}-\frac{2}{3!}x^3-\frac{4}{4!}x^4-\frac{4}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-4)^nx^{4n+1}}{(4n+1)!}+\cdots]\\&+[\frac{x}{1!}+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{4}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-4)^nx^{4n+1}}{(4n+1)!}\\&+\frac{(-4)^n\cdot 2\cdot x^{4n+2}}{(4n+2)!}+\frac{(-4)^n\cdot 2\cdot x^{4n+3}}{(4n+3)!}+0\cdot x^{4n+4}+\cdots]i,\end{aligned}$$

比较系数得

$$\begin{aligned}e^x\sin x&=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+\cdots+\frac{(-4)^nx^{4n+1}}{(4n+1)!}\\&+\frac{2(-4)^nx^{4n+2}}{(4n+2)!}+\frac{2(-4)^nx^{4n+3}}{(4n+3)!}+0\cdot x^{4n+4}+\cdots,\end{aligned}$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

10.2.41 利用基本展开式，写出下列函数关于 x 的幂级数展开式：

(1) $\sin^3x$；　　(2) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

(3) $\frac{1}{1-x-x^2}$；　　(4) $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$；

(5) $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

解 (1) $\sin^3x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \ (|x| < +\infty).$$

(2) $$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, (|x| < 1).$$

(3) $$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - (x+\frac{1}{2})} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + (x+\frac{1}{2})}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{\sqrt{5}-1}(1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1}x)^{-1}\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{5}+1}(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1})x^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}\right]x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]x^n,$$

$$(|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}).$$

(4) $$\frac{x\cos a - x^2}{1 - 2x\cos a + x^2}$$

$$= -1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos a + i\sin a}{x - (\cos a + i\sin a)} + \frac{\cos a - i\sin a}{x - (\cos a - i\sin a)}\right]$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - x(\cos a - i\sin a)} + \frac{1}{1 - x(\cos a + i\sin a)}\right]$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos a - i\sin a)^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos a + i\sin a)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha + \cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中 $|x| < \min(\frac{1}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|}, \frac{1}{|\cos\alpha - i\sin\alpha|}) = 1.$

(5) 首先注意到 $e^{x\cos\alpha + ix\sin\alpha} = e^{x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = e^{xe^{i\alpha}}$ 的实部就是 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$，为此 先求 $e^{xe^{i\alpha}}$ 的展开式.

$$e^{xe^{i\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xe^{i\alpha})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n,\ (|x| < +\infty),$$

比较虚部，还可得到

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n,\ (|x| < +\infty).$$

10.2.42 把 $\frac{x}{\sin x}$ 展开成 x 的幂级数.

解 设 $f(x) = \frac{x}{\sin x}$，此函数在 $x = 0$ 处无定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$，因此定义 $f(0) = 1$. $f(x)$ 为偶函数，可设

$$\frac{x}{\sin x} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots,$$

所以 $x = \sin x(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots)$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots)(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots)$$

$$= a_0x + (a_2 - \frac{a_0}{6})x^3 + (\frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4)x^5 + \cdots,$$

比较两端同次幂系数：

$$a_0 = 1,\ a_2 = \frac{a_0}{6} = \frac{1}{6},$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{120} + \frac{a_2}{6} = \frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{7}{360}\cdots,$$

所以 $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots.$

由于与 $x=0$ 最接近的 $\sin x$ 的零点是 π，故级数收敛区间为 $|x|<\pi$.

10.2.43　把函数 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展开成 x 的幂级数.

解　设 $x\neq 1$，将分子分母同乘以 $(1-x)$，得 $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^{16}}$，用除法，得

$$\frac{1-x}{1-x^{16}}=1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\cdots.$$

所以，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\cdots.$$

10.2.44　把 $\operatorname{tg}x$ 展开成 x 的幂级数到含有 x^7 的项为止.

解　$\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，所以把 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式相除，得

$$\frac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{5040}+\cdots}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+\cdots}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots,$$

由于 $\cos x$ 最接近 $x=0$ 的零点是 $\dfrac{\pi}{2}$，因此

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots,\ (|x|<\frac{\pi}{2}).$$

10.2.45　把 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数到含 x^4 的项为止.

解　把 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,\ (-\infty<x<+\infty)$

与 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ (-\infty<x<+\infty)$

相乘，即得

$$\begin{aligned}e^x\cos x&=1+(0+1)x+(-\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{2!})x^2\\&+(0-\frac{1}{2!}+0+\frac{1}{3!})x^3+(\frac{1}{4!}+0-\frac{1}{(2!)^2}+0+\frac{1}{4!})x^4+\cdots\\&=1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

10.2.46　把函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 展开为泰勒级数.

解　由 $\ln(1+x)$ 的泰勒级与 $1+x$ 相乘可得

$$
\begin{aligned}
&(1+x)\ln(1+x)\\
&=(1+x)[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots]\\
&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots+x^2-\frac{x^3}{2}\\
&\quad+\frac{x^4}{3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}+\cdots\\
&=x+(1-\frac{1}{2})x^2-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})x^3\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})x^n+\cdots\\
&=x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)n}x^n+\cdots\\
&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)n}x^n.
\end{aligned}
$$

因 $\ln(1+x)$ 展开的泰勒级数在 $-1<x\leqslant 1$ 上收敛，乘以多项式 $1+x$ 的结果，在 $-1<x\leqslant 1$ 上仍收敛. 于是，函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 在 $-1<x\leqslant 1$ 上展开的泰勒级数为

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)n}x^n.$$

10.2.47　将 $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ 展成 x 的幂级数，并求收敛区间.

解法 1　当 $|x|<1$ 时，有

$$\frac{x}{1-x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1},$$

两端求导，得

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}.$$

解法 2　由 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$|x|<1$，

$$\frac{1}{(1-x^2)}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

及　$\frac{1}{(1+x)^2}=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$

得 $$\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n},\ |x|<1.$$

10.2.48　将函数 $f(x)=\arccos x$ 展开为 x 的幂级数，写出收敛区间，并利用所得级数，导出一个求圆周率 π 的公式.

解　$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\Big[1+\frac{t^2}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots(2n)}t^{2n}+\cdots\Big]dt$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\Big)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big].$$

该展开式当 $-1<x<1$ 时成立

当 $x=\pm1$ 时，由拉阿伯判别法知，当 $n\to\infty$ 时

$$n\left[\frac{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots2n(2n+1)}}{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots(2n+2)(2n+3)}}-1\right]=n\Big[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\Big]$$
$$=\frac{6+\dfrac{5}{n}}{(2+\dfrac{1}{n})^2}\to\frac{3}{2},$$

故此幂级数的收敛区间为$[-1,1]$.

令 $x=1$，即得求圆周率 π 的公式：

$$\pi=2\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}\Big].$$

10.2.49　将下列函数展开成 x 的幂级数.

(1) $\arcsin x$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

解　(1) $\arcsin x = \int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$= \int_0^x [1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots(2n)}t^{2n} + \cdots]dt$$

$$= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots(2n)}\frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot(\frac{x}{2})^{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$

注　利用拉阿伯判别法，可以证明级数在 $x=\pm 1$ 处都收敛.

(2)　由于$(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

$$(-1<x<1)$$

令 $m=-\dfrac{1}{2}$，便有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \cdots,$$

$$(-1<x<1)\quad(1)$$

在 $x=-1$ 处，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ 无意义，故在 $x=-1$ 处，(1) 式不成立.

在 $x=1$ 处，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ 有定义且连续，又

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \cdots$$

收敛，故在 $x=1$ 处，展开式(1) 成立，于是有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots.$$

$$(-1<x\leqslant 1)$$

10.2.50　把函数 $f(x)=(x+1)[\ln(x+1)-1]$ 展成 x 的幂级数，并求它的收敛区间.

解　由于 $f(x)=(x+1)[\ln(x+1)-1]$，$f'(x)=\ln(1+x)$，而 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$(|x|<1)$，由

$$f'(x)=\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},(|x|<1)$$

可得，$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$，　$(|x|<1)$.

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 为收敛的交错级数；

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 收敛，故 $f(x)$ 展成的幂级数的收敛区间为 $[-1,1]$.

10.2.51　展开 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 为 x 的幂级数，并指出它的收敛区间，利用此结果，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

解　先把 $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ 展开为幂级数，然后逐项微分.

定义 $f(0)=1$，因 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，$(|x|<\infty)$，所以

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots,\ (|x|<\infty)$$

从而有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\frac{3}{4!}x^2+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}+\cdots,$$

或　$$\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n-1},\ (|x| < \infty)$$

当 $x = 1$ 时，即得　$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

10.2.52　求函数 $f(x) = \int_0^x \ln(1+2t^2)dt$ 的幂级数展开式，并确定它的收敛半径.

解　在展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,\ (|x| < 1)$$

中，将 x 代以 $2t^2$，得

$$\ln(1+2t^2) = 2t^2 - \frac{(2t^2)^2}{2} + \frac{(2t^2)^3}{3} - \cdots + (-1)\frac{(2t^2)^n}{n} + \cdots,$$

$$(|t| < \frac{1}{\sqrt{2}})$$

所以 $$f(x) = \int_0^x \ln(1+2t^2)dt = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2^2}{2\cdot 5}x^5 + \frac{2^3}{3\cdot 7}x^7 - \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{n\cdot(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots$$

收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.2.53　积分定义的误差函数

$$\mathrm{erf}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

在工程数学中十分重要，试把它展开成 x 的幂级数.

解　因该积分不能用初等函数表示，但通过对被积函数 e^{-x^2} 的展开式逐项积分可求出它的幂级数展开式.

因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,(|x| < \infty)$，

所以，

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,(|x| < \infty)$$

逐项积分得

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5(2!)} - \frac{x^7}{7(3!)}$$

$$+\frac{x^9}{9(4!)}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)}+\cdots,(|x|<\infty)$$

所以　$\mathrm{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\cdots$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\cdots,\ (|x|<\infty).$$

10.2.54　把函数 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 展开成 x 的幂级数.

解　因 $[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

而 $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(x^2)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n},(|x|<1).$$

两边积分得

$$\int_0^x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int_0^x[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^{2n}]dx,$$

即

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1},(|x|<1).$$

10.2.55　将函数 $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{4+x^2}{4-x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

解　$f'(x)=\frac{8x}{16+x^4}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^4}=\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^4}{16})^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n+1},\quad |x|<2.$$

而 $\int_0^x f'(t)dt=\mathrm{arctg}\frac{4+t^2}{4-t^2}\Big|_0^x=\mathrm{arctg}\frac{4+x^2}{4-x^2}-\frac{\pi}{4}$,故

$$f(x)=\mathrm{arctg}\frac{4+x^2}{4-x^2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{4n+1}}\int_0^x x^{4n+1}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(\frac{x}{2})^{4n+2},\ (|x|<2).$$

因为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$收敛，故当$x=\pm 2$时，级数$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$收敛，

即
$$\operatorname{arctg}\frac{4+x^2}{4-x^2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2},\ |x|\leqslant 2.$$

显然，函数$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{4+x^2}{4-x^2}$在点$x=\pm 2$处无定义，但当$x\to 2$与$x\to -2$时，$f(x)$的极限存在，而且为$\frac{\pi}{2}$，故当$x=\pm 2$时，可以补充定义$f(\pm 2)=\frac{\pi}{2}$.

10.2.56 设给定$\int_0^x e^{-x^2}dx=e^{-x^2}y$，

(1) 证明：y满足微分方程$y'-2xy=1$；

(2) 把y展为x的幂级数；

(3) 写出它的收敛域；

解 (1) 对给定的表达式两边求导，得$e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}y+e^{-x^2}y'$，因$e^{-x^2}\neq 0$，故有$y'-2xy=1$.

(2) 将(1)中的微分方程两边连续求导，得
$$y''=2xy'+2y,\ y'''=2xy''+4y',y^{(4)}=2xy'''+6y,\cdots,$$
一般地，有
$$y^{(n)}=2xy^{(n-1)}+2(n-1)y^{(n-2)},(n\geqslant 2).$$

当$x=0$时，由$\int_0^x e^{-x^2}dx=e^{-x^2}y$知，$y=0,y'(0)=1$，
$y''(0)=y^{(4)}(0)=\cdots=y^{(2n)}(0)=0,\ y'''(0)=4=2\cdot 2,$
$y^{(5)}(0)=2^2\cdot 2\cdot 4,\cdots,y^{2n+1}(0)=2^n\cdot 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n),$

所以
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n=x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots.$$

(3) 因$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$，故级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

10.2.57 将函数$f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$展为$x$的幂级数.

解 $\operatorname{arctg}x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}]dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in [-1,1].$$

$$\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1},\ x \in [-1,1].$$

故 $f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n [\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}]x^{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},\ x \in [-1,1].$$

10.2.58 按模 k $(0 \leqslant k < 1)$ 的正整数幂展开第一型完全椭圆积分 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

解 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi + \cdots)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 k^{2n}\}.$$

10.2.59 按模 $k(0 \leqslant k < 1)$ 的正整数幂展开第二型完全椭圆积分 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$.

解 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi\}d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1}\}.$$

10.2.60 把函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 按变量 x 的负幂展开成幂级数.

解　$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n},$

$(|x|>1).$

10.2.61　把函数$f(x)=\ln x$按分式$\frac{x-1}{x+1}$的正整数幂展开成幂级数.

解　$f(x)=\ln x=\ln\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{x-1}{x+1})^{2n+1}.$

这里利用了 10.2.41(2) 题的结果.

10.2.62　把函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按分式$\frac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

解　$f(x)=\frac{x}{1+x}\cdot\sqrt{1+x}=\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}$

$$=\frac{x}{1+x}(1-\frac{x}{1+x})^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{x}{1+x}[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\frac{x}{1+x})^n]$$

$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\frac{x}{1+x})^{n+1},$$

当$|\frac{x}{1+x}|<1$,即当 $x>-\frac{1}{2}$ 时,级数收敛.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,它是条件收敛,因此,级数的收敛域为 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

10.2.63　把函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开为$(x-3)$ 的幂级数.

解　$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\{1-\frac{x-3}{3}+(\frac{x-3}{3})^2$$

$$-\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n+\cdots\}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n.$$

因为 $-1<\frac{x-3}{3}<1$，即 $0<x<6$,故收敛区间为(0,6).

10.2.64　将函数 $\sqrt[3]{x}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数.

解　$\sqrt[3]{x}=-[1-(x+1)]^{\frac{1}{3}}$

$$=-\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}[-(x+1)]^n\right]$$

$$=-1+\frac{x+1}{3}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{1+(n-1)+n}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x+1)^n$$

$$=-1+\frac{x+1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\cdots(3n-4)}{3^n n!}(x+1)^n,$$

因为 $a=\frac{1}{3}>0$,所以 $-1\leqslant-(x+1)\leqslant1$,从而 $0\leqslant-x\leqslant2$,即收敛区间为[0,2].

10.2.65　把函数 $\frac{1}{x^2+7x+6}$ 展成 $x+4$ 的幂级数.

解　$\frac{1}{x^2+7x+6}=\frac{1}{(x+1)(x+6)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+6}\right)$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{-3+(x+4)}-\frac{1}{2+(x+4)}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+4}{2}}\right]$$

$$=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+4}{2}},$$

因　$\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x+4)^n$ 的收敛区域为

$|\frac{x+4}{3}|<1$，即 $|x+4|<3$，

而 $\frac{1}{1+\frac{x+4}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x+4}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x+4)^n$ 的收敛区域为

$|-\frac{x+4}{2}|<1$，即 $|x+4|<2$，所以，所给函数展成 $x+4$ 的幂级数为

$$\frac{1}{x^2+7x+6}=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}(x+4)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x+4)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{3^n\cdot 15}+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 10}](x+4)^n. \qquad (1)$$

它的收敛区域为 $|x+4|<3$ 与 $|x+4|<2$ 的公共部分，即 $|x+4|<2$ 或 $-6<x<-2$.

在 $x=-2$ 处，(1) 式右边的级数成为

$$-\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{3^n\cdot 15}+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 10}]2^n, \qquad (2)$$

而极限 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{3^n\cdot 15}+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 10}]2^n=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(\frac{3}{2})^n}+\frac{(-1)^n}{10}]$ 振荡不存在，所以，级数(2) 发散.

在 $x=-6$ 时，(1) 式右边的级数成为

$$-\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{3^n\cdot 15}+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 10}](-2)^n, \qquad (3)$$

而极限 $\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{3^n\cdot 15}+\frac{(-1)^n}{2^n\cdot 10}](-2)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{(-\frac{3}{2})^n}+\frac{1}{10}]=\frac{1}{10}\neq 0,$$

所以，级数(3) 发散. 故所给函数展成 $x+4$ 的幂级数为(1) 式，收敛区域为 $-6<x<-2$.

10.2.66 把函数 $\sin x$ 展开成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解 因 $\sin x=\sin[(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4})].$$

而 $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x - \frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$(|x| < +\infty)$，

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}, \quad (|x| < +\infty).$$

故 $\sin x$ 展成 $x - \frac{\pi}{4}$ 的幂级数为

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x - \frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],$$
$$(|x| < +\infty).$$

10.2.67 把函数 $f(x) = \ln\frac{x}{1+x}$ 展成 $x-1$ 的幂级数，并指出级数的收敛范围.

解 因为

$$\ln x = \ln[1 + (x - 1)] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}, x \in (0,2]$$

$$\ln(1 + x) = \ln[2 + (x - 1)] = \ln[2(1 + \frac{x-1}{2})]$$

$$= \ln 2 + \ln(1 + \frac{x-1}{2})$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{2})^n, \ x \in (-1,3].$$

由于(0,2]和(-1,3]的公共部分为(0,2]，所以

$$\ln\frac{x}{1+x} = \ln x - \ln(1+x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} - \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{2})^n$$

$$= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(1 - \frac{1}{2^n})(x-1)^n,$$

收敛区间为(0,2].

10.2.68　把级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{4^{2n-2}(2n-1)!}$的和函数展开为$(x-1)$的幂级数.

解　级数的和函数为

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{4^{2n-2}(2n-1)!}$$

$$=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x}{4})^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=4\sin\frac{x}{4},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

再将其展为$(x-1)$的幂级数:

$$s(x)=4\sin\frac{x}{4}=4\sin(\frac{1}{4}+\frac{x-1}{4})$$

$$=4(\sin\frac{1}{4}\cos\frac{x-1}{4}+\cos\frac{1}{4}\sin\frac{x-1}{4})$$

$$=4[\sin\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(\frac{x-1}{4})^{2n}$$

$$+\cos\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}(\frac{x-1}{4})^{2n+1}]$$

$$=4[\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{4}}{4^{2n}(2n)!}(x-1)^{2n}$$

$$+\frac{(-1)^n\cos\frac{1}{4}}{4^{2n+1}(2n-1)!}(x-1)^{2n+1}],\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) 利用幂级数展开式求近似值

求下列各数的近似值(10.2.69—10.2.75 题):

10.2.69　ln3(精确到 0.0001).

解　在公式

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots),$$

$(|x|<1)$中,令$x=\dfrac{1}{2}$,即得

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right].$$

由于 $R_n=2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}}{2n+3}+\cdots\right]$

$$<2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4}+\cdots\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}=\frac{1}{3\cdot 2^{2n-1}},$$

要求 $R_n<5\times10^{-5}$，即 $3\cdot2^{2n-1}>\frac{10^5}{5}$ 或 $2^{2n-1}>\frac{10^5}{5}$，只须 $n\geqslant7$ 即可. 取 $n=7$，且每项都精确到 0.5×10^{-5}，则有

$$\ln 3\approx2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+\frac{1}{160}+\frac{1}{896}+\frac{1}{4608}+\frac{1}{22528}+\frac{1}{106496}\right]$$

$$=1+\frac{1}{12}+\frac{1}{80}+\frac{1}{448}+\frac{1}{2304}+\frac{1}{11264}+\frac{1}{53248}$$

$$\approx1+0.08333+0.01250+0.00223+0.00043+0.00009+0.00002$$

$$=1.09860\approx1.0986.$$

10.2.70　$\frac{1}{e}$（精确到 0.0001）.

解　$\frac{1}{e}=e^{-1}=1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\cdots,$

因 $|R_n(-1)|=\left|(-1)^n\frac{1}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}+\cdots\right|<\frac{1}{n!},$

现要求 $|R_n(-1)|<\frac{1}{n!}<0.5\times10^{-4}$，因此 $n\geqslant8$，取 $n=8$，且每项都精确到 0.5×10^{-5}，于是

$$\frac{1}{e} \approx 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^7}{7!}$$
$$= 1 + (-1) + 0.50000 + (-0.16667) + 0.04167 + (-0.00833) + 0.00139 + (-0.00020)$$
$$\approx 0.36786 \approx 0.3679.$$

10.2.71　$\sqrt{e}$（精确到 0.001）.

解　$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} + \cdots + \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + \cdots,$$

因 $R_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n n!} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} + \cdots$

$$< \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2(n+1)}} + \cdots = \frac{1}{2^{2n}}(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4^2} + \cdots)$$
$$= \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-2}}, (n \geqslant 4),$$

现要求 $R_n(\frac{1}{2}) < \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-2}} < 0.5 \times 10^{-3}$，只须 $n \geqslant 6$ 即可.

取 $n = 6$，每项都精确到 0.5×10^{-4}，则有

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!}$$
$$\approx 1.0000 + 0.5000 + 0.1250 + 0.0208 + 0.0026 + 0.0003$$
$$\approx 1.6487 \approx 1.649.$$

10.2.72　$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$（精确到 10^{-5}）.

解　在展开式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (-\infty < x < +\infty)$ 中，取 $x = -\frac{1}{5}$，便得到

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} = e^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{1!5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \cdots,$$

这是一个满足莱布尼兹定理条件的交错级数，因此如取前 n 项之和作为近似值，其截断误差为 $|r_n| < \frac{1}{n!5^n}$. 因 $\frac{1}{5!5^5} < 10^{-5}$，所以取前五项就可以了，将奇数项与偶数项分别相加，得

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 1.020067 - 0.201333 = 0.818734.$$

10.2.73　$\sqrt[3]{1.015}$（精确到 0.001）.

解　$\sqrt[3]{1.015} = \sqrt[3]{1 + \frac{15}{1000}}$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(\frac{15}{1000}\right) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2!}(\frac{15}{1000})^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1 \cdot 15}{1!3 \cdot 1000} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 15^2}{2!3 \cdot 1000^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 15^3}{3!3^3 \cdot 1000^3}$$

$$- \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots (3n-4)}{n!3^n \cdot 1000^n} \cdot 15^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{5}{1000} - \frac{2}{2!}(\frac{5}{1000})^2 + \frac{2 \cdot 5}{3!}(\frac{5}{1000})^3$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{n!}(\frac{5}{1000})^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{200} - \frac{1}{200^2} + \frac{2 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{1}{200^3} - \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{n!}(\frac{1}{200})^n + \cdots$$

若要求 $|R_n| \leqslant \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{n!}(\frac{1}{200})^n < 0.5 \times 10^{-3}$，只须 $n \geqslant 1$. 取 $n = 1$，且每项都精确到 0.5×10^{-4}，则有

$$\sqrt[3]{1.015} \approx 1 + \frac{1}{200} = 1.0000 + 0.0050 = 1.005.$$

10.2.74　$\sqrt[5]{250}$（精确到 0.001）.

解　$\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243(1 + \frac{7}{243})} = 3\sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}}$,

$$\sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}} = 1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)}{2!}(\frac{7}{243})^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)\cdots(\frac{1}{5} - n + 1)}{n!}(\frac{7}{243})^n + \cdots$$

$$|R_n| < \frac{4 \cdot 9 \cdot \cdots (5n-6)}{5^n \cdot n!}(\frac{7}{243})^n,$$

若要求 $|R_n| < \frac{4 \cdot 9 \cdot \cdots (5n-6)}{5^n \cdot n!} \cdot (\frac{7}{243})^n < 0.5 \times \frac{1}{3} \times 10^{-3}$，只须 $n \geqslant 2$，取 $n = 2$. 且每项都精确到 0.5×10^{-4}，则有

$$\sqrt[5]{250} \approx 3[1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!} \cdot \frac{7}{243}] \approx 3[1 + 0.0058] = 3 \times 1.0058$$
$$= 3.0174 \approx 3.017.$$

10.2.75　$\cos 10°$（精确到 0.0001）.

解　$\cos 10° = \cos \frac{\pi}{18}$

$$= 1 - \frac{1}{2!}(\frac{\pi}{18})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{\pi}{18})^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}(\frac{\pi}{18})^{2n} + \cdots,$$

若要求 $|R_n| \leqslant \frac{1}{(2n)!} \cdot (\frac{\pi}{18})^{2n} < 0.5 \times 10^{-4}$，只须 $n \geqslant 2$. 取 $n = 2$，且每项都精确到 0.5×10^{-5}，则有

$$\cos 10° \approx 1 - \frac{1}{2!}(\frac{\pi}{18})^2 \approx 1 - 0.01523 = 0.98477 \approx 0.9848.$$

10.2.76　利用 $\mathrm{arctg}\,x$ 的幂级数展开式及恒等式　$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$ 近似计算数 π，（准确到三位小数）.

解　因为 $\mathrm{arctg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$，

所以 $\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots)$$
$$+ (\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \cdots)$$
$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3}(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}) + \frac{1}{5}(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5})$$
$$+ \frac{1}{7}(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}) + \cdots,$$

从而 $\pi = 4(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \frac{4}{3}(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}) + \frac{4}{5}(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}) - \frac{4}{7}(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}) + \cdots$，这是交错级数，若取前四项的和作 π 的近似值，则绝对误差为 $|R_4| < \frac{4}{9}(\frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9}) < \frac{1}{2^{10}} < \frac{1}{10^3}$. 符合精度要求. 于是

$$\pi \approx 4(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-\frac{4}{3}(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\frac{4}{5}(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5})-\frac{4}{7}(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7})$$
$$\approx 3.1416.$$

(3) 计算下列定积分的近似值(10.2.77—10.2.84 题)：

10.2.77 $\int_0^{0.5}\frac{\text{arctg}x}{x}dx$ (精确到 0.001).

解 因 $\text{arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ 在 $|x|<1$ 内一致收敛，故

$$\frac{\text{arctg}x}{x}=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots$$

在 $0\leqslant x\leqslant 0.5$ 内一致收敛，因此

$$\int_0^{0.5}\frac{\text{arctg}x}{x}dx=\int_0^{0.5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}\Big|_0^{0.5}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot(\frac{1}{2})^{2n+1}.$$

若要求 $|R_n|<\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}<\frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$，只须 $n\geqslant 3$. 取 $n=3$，且每项应计算到精确度为 0.5×10^{-4}，于是

$$\int_0^{0.5}\frac{\text{arctg}x}{x}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2 2^3}+\frac{1}{5^2\cdot 2^5}$$
$$\approx 0.5000-0.0139+0.0013=0.4874\approx 0.487.$$

10.2.78 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ (精确到 0.0001).

解 因 $e^{\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}+\frac{1}{2!}(\sqrt{x})^2+\cdots+\frac{(\sqrt{x})^n}{n!}+\cdots$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛，因此

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(\sqrt{x})^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}+1}[x^{\frac{n}{2}+1}]\Big|_0^1$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!(n+2)}.$$

若要求

$$R_n=\frac{2}{n!(n+2)}[1+\frac{n+2}{(n+1)(n+3)}$$

$$+\frac{n+2}{(n+1)(n+2)(n+4)}+\cdots$$
$$+\frac{n+2}{(n+1)\cdots(n+p)(n+p+2)}+\cdots]$$
$$<\frac{2}{n!(n+2)}[1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots]=\frac{5}{2\cdot n!\,(n+2)}$$
$$<\frac{1}{2}\times 10^{-4},$$

只须 $n\geqslant 8$. 取 $n=8$,且每项需精确到 0.5×10^{-5},于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx\approx 1+\frac{2}{3}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6}$$
$$+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8}$$
$$=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{15}+\frac{1}{72}+\frac{1}{420}+\frac{1}{2880}+\frac{1}{22680}$$
$$\approx 1.00000+0.66667+0.25000+0.06667+0.01389$$
$$+0.00238+0.00035+0.00004$$
$$\approx 2.00000=2.0000.$$

10.2.79 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ (精确到 0.001).

解 $\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots)dx$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出来的诸项,计算到小数点后第四位,则有

$$0.7473<\int_0^1 e^{-x^2}dx<0.7476,$$

于是,$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0.747$.

10.2.80 $\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx$ (精确到 0.0001).

解 $\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^2\frac{1}{x}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots)dx$

$$=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值,则有

$$1.6051 < \int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx < 1.6054,$$

于是，$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1.605.$

10.2.81 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$（精确到 0.001）.

解　当 $x \geqslant 2$ 时，

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^3} = (\frac{1}{x})^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{x})^{3n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{x})^{3n+3},$$

于是 $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} (\frac{1}{x})^{3n+3} dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} (\frac{1}{2})^{3n+2}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 + \frac{1}{8}(\frac{1}{2})^8 - \frac{1}{11}(\frac{1}{2})^{11} + \cdots,$$

取前两项的近似值计算，得

$$I = 0.119 + \theta,\ (0 < \theta < 0.001)$$

若用直接积分法，则有

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \int_2^{+\infty} (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}) dx$$

$$= (\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}) \Big|_2^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6}\ln 3 \approx 0.119.$$

10.2.82 $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$（精确到 0.001）.

解　当 $10 \leqslant x \leqslant 100$ 时，有

$$\ln(1+x) = \ln[x(1+\frac{1}{x})] = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{1}{x})^n,$$

于是 $I=\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$

$$=\int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{10}^{100}x^{-n-1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln^2 10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cdot\frac{1}{10^n}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln^2 10+\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{4\cdot 10^2}\left(1-\frac{1}{10^2}\right)+\frac{1}{9\cdot 10^3}\left(1-\frac{1}{10^3}\right)+\cdots$$

$$\approx 8.041.$$

10.2.83 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}dx$ (精确到 0.001).

解 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right)dx$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4\cdot 3^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5^2\cdot 2^5}+\cdots,$$

如取前三项计算积分值,则其误差

$$0<R_3<\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2}\cdot\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{7^2\cdot 2^7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}<\frac{1}{10^3},$$

于是 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}dx\approx 0.507.$

10.2.84 $\int_0^1 x^x dx$ (精确到 0.001).

解 注意到

$$x^x=e^{x\ln x}=1+x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln x)^n}{n!}+\cdots,$$

和 $\int_0^1 x^n\ln^n x dx=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$,于是

$$\int_0^1 x^x dx=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}+\cdots,$$

如取前四项计算积分值,则其误差

$$0 < R_4 < \frac{4!}{4!(4+1)^{4+1}} = \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^3},$$

故 $\int_0^1 x^x dx \approx 0.783$.

10.2.85　求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}dx$ 的值.

解　$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x}(1 - e^{-x} + e^{-2x} - \cdots)dx$$

$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{+\infty} - [-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2^2}e^{-2x}]_0^{+\infty} + [-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3^2}e^{-3x}]\Big|_0^{+\infty} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

10.2.86　求正弦曲线 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 一波之弧长，要求精确到 0.01.

解　设弧长为 s，则

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + y'^2}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2!2^2}\cos^4 x + \frac{1\cdot 3}{3!2^3}\cos^6 x - \cdots)dx.$$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}n!\cdot n!}$，则

$$s = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!2!} + \frac{1\cdot 3}{3!2^3}\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!3!} - \cdots)$$

$$= \pi(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \cdots).$$

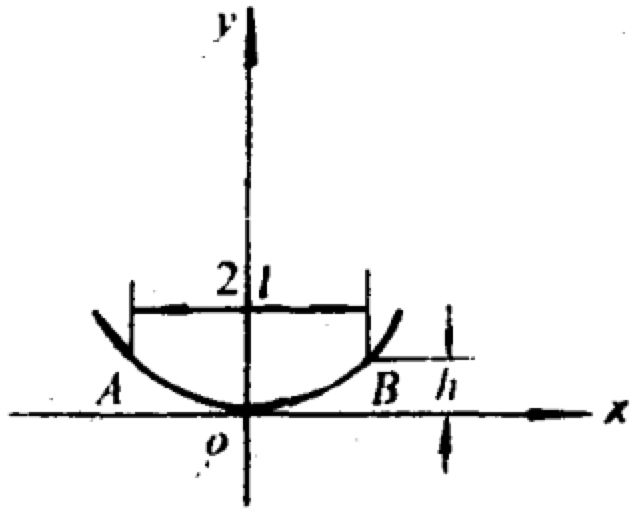
如取写出的诸项计算 s 值，则其误差

$$0 < R_5 < \frac{3\cdot 5\cdot 2\pi}{4!2!}\cdot\frac{8!}{2^9\cdot 4!4!} < \frac{1}{10^2},$$

于是 $S \approx 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \approx 3.83$.

10.2.87　两根电杆之间的电线成抛物线形状，设电杆之间的距离 $2l = 20$ 米，电线凹处的矢 $h = 40$ 厘米，计算电线的长度，要求准确到 1 厘米.

解 先建立抛物线 AOB 的方程，取坐标系如图所示，则方程的标准形式为 $x^2 = 2py$. 由于此抛物线过点 $B(10, 0.4)$，所以 $10^2 = 2p(0.4)$，$p = 125$，于是抛物线的方程为 $y = \frac{1}{250}x^2$，由此可得，所求的电线长为



10.2.87 题图

$$s = 2\int_0^{10}\sqrt{1 + (\frac{1}{125}x)^2}dx$$
$$= 250\int_0^{\frac{2}{25}}\sqrt{1 + t^2}dt$$
$$= 250\int_0^{\frac{2}{25}}(1 + t^2)^{\frac{1}{2}}dt$$
$$= 250\int_0^{\frac{2}{25}}(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2!2^2}t^4 + \frac{1\cdot 3}{3!2^3}t^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4}t^8 + \cdots)dt$$
$$= 250(\frac{2}{25} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{25})^3 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2!2^2}\cdot(\frac{2}{25})^5 + \cdots),$$

如取前两项计算积分值，则其误差

$$0 < R_n < \frac{250}{5\cdot 2!2^2}\cdot(\frac{2}{25})^5 < 10^{-2},$$

因此，$s \approx 250[\frac{2}{25} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{25})^3] = 20 + 0.02 = 20.02$(米). 即所求的电线长为 20.02 米.

10.2.88 已知函数(1) $f(x) = \text{arctg}x$；(2) $f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 (1) 因 $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1}$，故得

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases}(-1)^m(2m)!, & n = 2m+1;\\ 0, & n = 2m.\end{cases}$$

(2) 因 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$，故得 $f^{(n)}(0) = \cos n\alpha$，$(n = 1, 2, \cdots)$.

10.2.89 设 $f(x) = \frac{e^x}{x}$，求 $f^{(n)}(x_0)$，$(x_0 \neq 0)$.

解 将 $f(x)$ 展成为 $(x - x_0)$ 的幂级数，因

$$e^x = e^{x_0}\cdot e^{x-x_0}$$

$$= e^{x_0}\cdot\left[1+\frac{x-x_0}{1!}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0+(x-x_0)}=\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-x_0}{x_0}}$$

$$=\frac{1}{x_0}\left[1-\frac{x-x_0}{x_0}+\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^2-\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^3+\cdots\right],$$

把上面两个幂级数相乘，得$\frac{e^x}{x}=\frac{e^{x_0}}{x_0}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x-x_0)^n\}$，其中

$$c_n=1\cdot\left(-\frac{1}{x_0}\right)^n+\frac{1}{1!}\left(-\frac{1}{x_0}\right)^{n-1}+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{x_0}\right)^{n-2}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot 1$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{x_0}\right)^{n-k}].$$

所以 $f^{(n)}(x_0)=n!\frac{e^{x_0}}{x_0}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{x_0}\right)^{n-k}$

$$=e^{x_0}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\cdot n\cdot(n-1)\cdots(k+1)}{x_0^{n-k+1}}.$$

(3) 利用幂级数展开式求和

10.2.90　求级数 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 3^4}+\cdots$ 的和.

解　先求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$的和函数 $s(x)$.

由于 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，所以，

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x},(|x|<1)$$

从而，$s(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)$，$(|x|<1)$.

令 $x=\frac{1}{3}$，则得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}=-\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)=-\ln\frac{2}{3}$.

10.2.91　求 $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$ 的和.

解　根据二项展开式有

$$\sqrt{1+t}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n,(-1\leqslant t\leqslant 1),$$

所以，$\sqrt{1-x^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}$，$(-1\leqslant x\leqslant 1)$，

$$\sqrt{1+x^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

故 $\quad \frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10.2.92 求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!}$与$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}$的和.

解 可以证明上述各级数都收敛，由所给各级数的特点，利用幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{(m+2)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(m+1)!}-\frac{1}{(m+2)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-1-(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-2)=e-1-(e-2)=1;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-2=e-1+e-2=2e-3;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m+1}{m!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m+1}{m!}+2-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e-3+2-(e-2)=e+1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}=2e^{-2}.$$

10.2.93　求$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$的和.

解法 1　记 $s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,则

$$\begin{aligned}
s_n=&\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^n} && =1-\frac{1}{2^n}\\
&+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^n}) && =2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n})\\
&+2(\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^n}) && =2(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n})\\
&+\cdots && \cdots\\
&+2(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^n}) && =2(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^n})\\
&+\cdots\\
&+2\cdot\frac{1}{2^n} && =2(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n})
\end{aligned}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2(n-1)}{2^n}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}+2(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2(n-1)}{2^n}$$

$$=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=3$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$.

解法 2　设 $s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,则

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

两式相减,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}s_n&=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n})-\frac{2n-1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

故 $s_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=3$.

解法 3　因为当 $|x|<1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n\Big|_{x=\frac{1}{2}},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'-\frac{x}{1-x}$

$$=2x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'-\frac{x}{1-x}=2x(\frac{x}{1-x})'-\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^2},|x|<1.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=3.$

解法 4　因为当 $|x|<\sqrt{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{2^n}x^{2n-1}$ 收敛，且

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{x(2+x^2)}{(2-x^2)^2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}\Big|_{x=1}=\frac{x(2+x^2)}{(2-x^2)^2}\Big|_{x=1}=3.$$

注　利用类似的方法可以求得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)q^n=\frac{q(q+1)}{(1-q)^2},\ |q|<1.$$

10.2.94　求级数 $s=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$ 的和.

解　由于 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2})$.

考虑级数 $\delta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+1}}{3k+1}$ 和 $\rho(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k+2}}{3k+2}$.

$$\delta(x)-\rho(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^{3k}dt-\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^{3k+1}dt$$

$$=\int_0^x\frac{1-t}{1-t^3}dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\Big|_0^x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

因 $\delta(x)-\rho(x)$ 连续，又

$$\delta(1)-\rho(1)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}(1+\frac{1}{2})-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

所以 $s=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

10.2.95　求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解　因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$，$(-\infty<x<+\infty)$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(x+1),\ (-1<x\leqslant 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\operatorname{arctg}x,\ (|x|\leqslant 1),$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{x\to 1}e^x=e,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to 1^-}\ln(x+1)=\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

10.2.96　求级数 $s=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$ 的和函数.

解　设 $s(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$，逐项积分得，

$$\int_0^x s(x)dx=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{x}{1-x},\ (|x|<1)$$

再逐项微分，得

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2},\ (|x|<1).$$

10.2.97 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$在收敛区间上的和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$的值.

解法1 由比值判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$在$(-1,1)$内收敛，令此幂级数的和为$f(x)$，则

$$\int_0^x\left(\int_0^x f(x)dx\right)dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}.$$

于是 $f(x)=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{1-x})''=\frac{1}{2}[\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}]'=\frac{1}{(1-x)^3}$,

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^3},(-1<x<1).$$

求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$之和，即是求当$x=\frac{1}{3}$时，幂级数$\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$之和，由上面结果有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^3}=\frac{9}{4}.$$

解法2 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$的和，可考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$的和函数在$x=\frac{1}{3}$处的值，而幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3},\ (-1<x<1),$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{(1-\frac{1}{3})^3}=\frac{9}{4}.$$

10.2.98 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}$的和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}$的和.

解　由比值判别法，有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+2}{2n}|x| \to \frac{1}{2}|x|,(n\to\infty)$，故级数的收敛半径为 $R=2$.

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)$，发散；

当 $x=-2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)$，发散.

故原级数的收敛区间为$(-2,2)$，在收敛区间$(-2,2)$内将幂级数逐项积分，得

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

再积分一次，得

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x 2(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = 4\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2x^2}{2-x}.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n = \left(\frac{2x^2}{2-x}\right)' = \frac{8x-2x^2}{(2-x)^2}$,

所以，
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}}x^{n-1} = \left[\frac{8x-2x^2}{(2-x)^2}\right]' = \frac{(8-4x)(2-x)+2(8x-2x^2)}{(2-x)^3},$$

当 $x=1$ 时，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = (8-4)(2-1)+2(8-2) = 16.$

10.2.99　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 的收敛区间以及它在收敛区间内的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$.

解　先求收敛区间.

方法1　当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 收敛，当 $x\neq 0$ 时，设 $u_n=\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$，则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}x^2=\frac{1}{2}x^2$. 故当 $0<\frac{1}{2}x^2<1$ 时，即 $0<|x|\leqslant\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 收敛.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n-1}=\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2}}$，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{2}}=+\infty$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n-1}$ 发散.

综上所述，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

方法2　因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(x^2)^{n-1},$$

若令 $x^2=z$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(x^2)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}z^{n-1}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2^{n+1}}\Big/\frac{2n-1}{2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(2n-1)}=\frac{1}{2},$$

又当 $z=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散，且 $z\geqslant 0$，故它的收敛区间为 $[0,2)$，由 $z=x^2$ 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(x^2)^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛区间也为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

方法3　因为 $x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(\frac{x^2}{2})^n$，令 $\frac{x^2}{2}=z$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(\frac{x^2}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^n$，容易求得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^n$ 的收敛区间为 $[0,1)$，而 $z=\frac{x^2}{2}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(\frac{x^2}{2})^n$ 的收敛区间为

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$的收敛区间也为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

再求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$的和函数.

方法 1 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，而

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},\ |x|<\sqrt{2},$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=x\left[\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\right)dt\right]'$$

$$=x\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{x(2+x^2)}{(2-x^2)^2},\ |x|<\sqrt{2}.$$

方法 2
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^{2n-1})'$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'=x\left(\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{2^{n-1}}\right)'=x\left(\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}\right)'$$

$$=x\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=x\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{x(2+x)}{(2-x^2)^2},\ |x|<\sqrt{2}.$$

方法 3 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2^2}x^3+\frac{5}{2^3}x^5+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}+\cdots,$$

所以

$$\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{2^2}x^3+\frac{3}{2^3}x^5+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}x^{2n-3}+\cdots$$

两式相减，得 $(1-\frac{x^2}{2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$

$$=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}x^{2n-1}+\cdots$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{\frac{x^3}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2-x^2},|x|<\sqrt{2},$$

于是，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{2}{2-x^2}(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2-x^2})=\frac{x(2+x^2)}{(2-x^2)^2}$,

$$|x|<\sqrt{2}.$$

最后，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\frac{1}{3})^{2n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{3}}$

$$=\frac{x(2+x^2)}{(2-x^2)^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{57}{289}.$$

10.2.100　求级数 $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}$ 的和函数，$(|x|<1)$.

解　$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(x^{k+1})''-\sum_{k=1}^{\infty}(x^k)'=(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1})''-(\sum_{k=1}^{\infty}x^k)'$$

$$=(\frac{x^2}{1-x})''-(\frac{x}{1-x})'=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

10.2.101　求级数 $s=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ 的和函数. $(|x|<1)$.

解　取 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ 为绝对收敛级数

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,(|x|<1)$$

再取$\sum_{k=0}^{\infty}b_k$为$-\ln(1-x)$的泰勒级数

$$-\ln(1-x)=0+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,(|x|<1)$$

两级数相乘，得

$$c_n=1\cdot\frac{x^n}{n}+x\cdot\frac{x^{n-1}}{n-1}+\cdots+x^{n-1}\cdot x+x^n\cdot 0$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n,$$

故 $$s=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

注 如果级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$与$\sum_{k=0}^{\infty}b_k$都收敛，作这两个级数的乘积$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$，其中$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$. 如$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$也收敛，则必有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}b_k.$$

或者，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$与$\sum_{k=0}^{\infty}b_k$都收敛并且至少有一个绝对收敛，则$\sum_{k=0}^{\infty}c_n$收敛于$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}b_k$.

10.2.102 求下列级数的和函数$s(x)$.

(1)$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$； (2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$.

解 (1) 因为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,(|x|<1),$$

所以，$(\frac{1}{1-x})'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,

$$(\frac{1}{1-x})''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x(\frac{1}{1-x})'',$$

故有 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x(\frac{1}{1-x})''=\frac{2x}{(1-x)^3}$.

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}}=0$，故级数的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$. 设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，$(-\infty<x<+\infty)$，则

$$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\int_0^x x^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x(e^x-1),$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

于是 $s(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x s(x)dx=\frac{d}{dx}[x(e^x-1)]=e^x(x+1)-1$,

$$(-\infty<x<+\infty).$$

10.2.103 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}.$$

设 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则

$$s_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\ (|x|<1),$$

故 $s_1(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$，$(|x|<1)$，又设

$$s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x]$$

$$=-\frac{\ln(1-x)}{x}-1,(-1\leqslant x<1),$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=s_1(x)-s_2(x)=-\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+1$

$$=1+\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x},(-1<x<1).$$

10.2.104　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$ 的收敛区间，并求其在收敛区间内的和函数.

解　因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$，且当 $x-1=\pm 1$ 时级数均发散，故收敛区间为 $|x-1|<1$ 或 $(0,2)$. 下面求幂级数的和.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = \left(\int_1^x \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}dx\right)'$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^x n(x-1)^{n-1}dx\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\right)'$$

$$= \left(\frac{x-1}{1-(x-1)}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

10.2.105　求级数 $\frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{5\cdot 6}x^6 + \cdots + \frac{1}{2n(2n-1)}x^{2n} + \cdots$ 的收敛区间，并求级数的和函数.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)[2(n+1)-1]}\Big/\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}x^2 = x^2,$$

故当 $|x|<1$ 时，级数收敛，而当 $x=\pm 1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$，

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$ 收敛，所以原级数的收敛区间为 $[-1,1]$.

设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$，$(|x|<1)$，显然 $s(0)=0$，

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1},\ s'(0)=0,$$

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + \cdots = \frac{1}{1-x^2},$$

于是 $s'(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^x \ln(1+x)dx - \int_0^x \ln(1-x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}[x\ln(1+x)-\int_0^x\frac{xdx}{1+x}-x\ln(1-x)-\int_0^x\frac{x}{1-x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}[x\ln\frac{1+x}{1-x}-\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}dx]=\frac{1}{2}[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)],$$

$$(|x|<1)$$

故
$$s(\pm 1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2n(2n-1)}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

10.2.106　求级数

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots$$

的收敛区间及其在收敛区间内的和函数.

解　先求收敛区间.

因为 $u_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big/\frac{1}{n(n+1)}\right|=1,$$

所以，收敛半径 $R=1$.

又当 $x=\pm 1$ 时，$|u_n|<\frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故当 $x=\pm 1$ 时，所给级数收敛. 于是，收敛区间为$[-1,1]$.

再求和函数.

方法 1　因为

$$(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots)'$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots=\ln(1+x),$$

故当 $|x|<1$ 时，有

$$\int_0^x(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots)'dx$$
$$=\int_0^x\ln(1+t)dt,$$

即 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots$

$=(x+1)\ln(1+x)-x, |x|<1,$

当 $x=1$ 时,级数$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 收敛,且$(x+1)\ln(1+x)-x$ 在 $x=1$ 处连续,所以

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=2\ln 2-1.$$

又当 $x=-1$ 时,级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 收敛,且其和 1.

综上所述,$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots$

$$=\begin{cases}(x+1)\ln(1+x)-x, & \text{当 } -1<x\leqslant 1 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } x=-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

方法 2　因为当 $-1<t\leqslant 1$ 时,有

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^n+\cdots,$$

故当 $|x|<1$ 时,有

$$\int_0^x\ln(1+t)dt=\int_0^x(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^n+\cdots)dt$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}x^n+\cdots$$

即　$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^n+\cdots$

$=(x+1)\ln(1+x)-x,(|x|<1),$

以下同方法 1.

方法 3　因为当 $-1<x\leqslant 1$ 时,有

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots$$

$$=(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^{n+1}+\cdots)$$

$$+(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots)$$

$$=x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x$$

$$=(x+1)\ln(1+x)-x,$$

又当 $x=-1$ 时，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$，所以

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}+\cdots$$
$$=\begin{cases}(x+1)\ln(1+x)-x, & \text{当 } -1<x\leqslant 1 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } x=-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

10.2.107　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛区间，并求它在收敛区间内的和函数.

解　先求收敛区间.

因为 $u_n=n$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，所以，收敛半径 $R=1$.

又当 $x=\pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\pm 1)^n$ 都发散，于是，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$.

再求和函数.

方法 1　因为 $\int_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，$|x|<1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left[\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt\right]'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$
$$=\frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<1.$$

方法 2　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，

所以　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\frac{x}{(1-x)^2}$.

方法 3　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$，

$$x\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x^2+2x^3+\cdots+(n-1)x^n+\cdots,$$

两式相减，得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{x}{1-x},$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, |x| < 1.$$

10.2.108 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$的和函数,其中 $|x|<1$.

解 设此级数之和为 $s(x)$,前$(n+1)$ 项之和为 $s_{n+1}(x)$,则

$$s_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2^2 \cdot x^{2^2-1}}{1+x^{2^2}} + \cdots + \frac{2^n \cdot x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2^2 \cdot x^{2^2-1}}{1+x^{2^2}} + \cdots + \frac{2^n \cdot x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}},$$

因为 $$-\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = -\frac{2x}{1-x^2},$$

$$-\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{2^2x^{2^2-1}}{1-x^{2^2}},$$

$$-\frac{2^2 \cdot x^{2^2-1}}{1-x^{2^2}} + \frac{2^2 \cdot x^{2^2-1}}{1+x^{2^2}} = -\frac{2^3 \cdot x^{2^3-1}}{1-x^{2^3}},$$

……

一般项 $-\frac{2^n \cdot x^{2^n-1}}{1-x^{2^n}} + \frac{2^n \cdot x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}} = -\frac{2^{n+1} \cdot x^{2^{n+1}-1}}{1-x^{2^{n+1}}}$,所以

$$s_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2^{n+1} \cdot 2^{2^{n+1}-1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

故当 $|x|<1$ 时,$s(x) = \lim_{n\to\infty}s_{n+1}(x) = \frac{1}{1-x}$.

10.2.109 利用等式 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ 求和

$$s(x) = \frac{1}{2}\text{tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\text{tg}\,\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\text{tg}\,\frac{x}{2^n}.$$

解 由于$\frac{d}{dx}\ln\cos ax = -\frac{\sin ax}{\cos ax}\cdot a = -a\text{tg}ax$,故有

$$s(x) = -\frac{d}{dx}\ln\cos\frac{x}{2} - \frac{d}{dx}\ln\cos\frac{x}{4} - \cdots - \frac{d}{dx}\ln\cos\frac{x}{2^n}$$

$$= -\frac{d}{dx}[\ln\cos\frac{x}{2} + \ln\cos\frac{x}{4} + \cdots + \ln\cos\frac{x}{2^n}]$$

$$= -\frac{d}{dx}\ln(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n})$$

$$= -\frac{d}{dx}(\ln\sin x - \ln 2^n\sin\frac{x}{2^n}) = \frac{1}{2^n}\mathrm{ctg}\frac{x}{2^n} - \mathrm{ctg}x.$$

10.2.110　求级数 $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots (0 < x < \pi)$ 的和函数.

解　设 s_n 为部分和，则 $s_n = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}$，给和式 $\sigma_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ 两边同乘以 $2\sin\frac{x}{2}$ 并用三角公式

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x,\ k = 1,2,\cdots,$$

则有　$2\sin\frac{x}{2}\sigma_n = (\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2}) + \sin(\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x) + \cdots$

$$+ [\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x]$$

$$= \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2},$$

所以 $\sigma_n = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$，把 σ_n 取从 x 到 π 的积分，由于

$$\int_x^\pi \cos kx dx = \frac{\sin k\pi}{k} - \frac{\sin kx}{k} = -\frac{\sin kx}{k},$$

故得 $-s_n = \displaystyle\int_x^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx - \int_x^\pi \frac{1}{2}dx$. 所以，

$$s_n = \frac{1}{2}(\pi - x) - \int_x^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx,$$

对最后一个积分用分部积分法，有

$$\int_x^\pi \frac{\sin(x+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx = -\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2(n+\frac{1}{2})\sin\frac{x}{2}}\Bigg|_x^\pi - \int_x^\pi \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x\cos\frac{x}{2}}{4(n+\frac{1}{2})\sin^2\frac{x}{2}}dx$$

由于上式最后两项的分母都含有 $n+\frac{1}{2}$，而其余部分为有界量 $(0 < x \leqslant \pi)$，故当 $n \to \infty$ 时，其极限为零.

于是，无穷级数的和为$\frac{1}{2}(\pi - x)$，即

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots = \frac{1}{2}(\pi - x).$$

10.2.111　求下面级数的和：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$;

(2) $1 + q\cos x + \cdots + q^{n-1}\cos(n-1)x, |q| < 1.$

解　(1) 由于$\frac{1}{k(2k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}, (k = 1,2,\cdots)$，故级数的部分和 s_n 为

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{2k+1}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + 2 - \frac{2}{2n+1} \\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln 2n\right) - 2\ln 2 + 2 - \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2 - 2\ln 2$，所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)} = 2 - 2\ln 2.$

(2) 由于 $\cos kx + \cos(k-2)x = 2\cos x\cos(k-2)x, k = 2,3,\cdots$

故有
$$\begin{aligned}
s + q^2 s &= 1 + q\cos x + q^2(\cos 2x + 1) + q^3(\cos 3x + \cos x) + \cdots \\
&= 1 - q\cos x + 2q\cos x \cdot (1 + q\cos x + q^2\cos 2x + \cdots) \\
&= 1 - q\cos x + 2q\cos x \cdot s
\end{aligned}$$

移项，解得 $s = \frac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}.$

10.2.112　求级数 $y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}(2x)^{2k}$ 的和函数.

解　$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}4k(2x)^{2k-1},$$

$$y''=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}8k(2k-1)(2x)^{2k-2}$$

$$=4+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-2)!]^2}{(2k-2)!}4(k-1)^2(2x)^{2k-2}$$

$$=4+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}4k^2(2x)^{2k}$$

$$xy'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}8kx^2(2x)^{2k-2}$$

$$=-x^2y''+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}16k^2x^2(2x)^{2k-2}$$

$$=-x^2y''+y''-4,$$

由此可得微分方程

$$(1-x^2)y''-xy'-4=0,$$

初始条件为：当 $x=0$ 时，$y=y'=0$．为了求解，令 $x=\sin t$，则

$$1-x^2=\cos^2t,\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\cos t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=y''\cos^2t-y'\sin t=(1-x^2)y''-xy',$$

故得 $\frac{d^2y}{dt^2}-4=0$，初始条件换为当 $t=0$ 时，$y=y'=0$，由此解得 $y=2t^2=2(\arcsin x)^2$.

10.2.113　求和

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\ z=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

解　$$y'=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k\cdot x^{2k-1}}{(2k)!}=-z,$$

$$z'=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}=y,$$

又当 $x=0$ 时，$y=1$，$z=0$，这是微分方程组，化为二阶微分方程，得

$y'' = -z' = -y, y = 1, y' = -z = 0$,(当 $x = 0$ 时) 方程 $y'' = -y$ 的通解是 $y = c_1\cos x + c_2\sin x$,所以 $y' = -c_1\sin x + c_2\cos x$,用 $x = 0$,$y = 1$,$y' = 0$ 代入上面二式,得待定常数 $c_1 = 1$;$c_2 = 0$,即有 $y = \cos x$,从而 $z = -y' = \sin x$.

10.2.114 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta$ 的和.

解 因 $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$,$(z = re^{i\theta}, r = |z| < 1)$,而

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} + i\frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\theta + i\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n\sin n\theta$,所以,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, (0 < r < 1, 0 \leqslant \theta < 2\pi).$$

10.2.115 已知级数 $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$,

(1) 确定其收敛区间;

(2) 求它的和函数 $s(x)$;

(3) 求 $s(x)$ 在 $x = 0$ 处的各阶导数;

(4) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n!} = 0$;

(5) 求 $s(\dfrac{1}{2})$ 的近似值,使其误差准确到 10^{-3}.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2(n+1)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{1} = 0$,

故级数的收敛半径 $R = +\infty$,收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 设 $s(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$,则

$$s'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

于是 $s(x) + s'(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$,

即 $s(x) + s'(x) = e^x$,所以

$$s(x)=e^{-\int dx}\left[\int e^x e^{\int dx}dx+c\right]=e^{-x}\left[\int e^{2x}dx+c\right]=\frac{1}{2}e^x+ce^{-x}.$$

又由 $s(0)=1$ 可得 $c=\frac{1}{2}$，所以，级数的和函数为

$$s(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\operatorname{ch}x.$$

(3) 由 $s(x)=\operatorname{ch}x, s'(x)=\operatorname{sh}x, s''(x)=\operatorname{ch}x,\cdots, s^{(2n)}=\operatorname{ch}x, s^{(2n-1)}(x)=\operatorname{sh}x,(n=1,2,\cdots)$，有 $s^{(2n)}(0)=1, s^{(2n-1)}(0)=0,(n=1,2,\cdots)$.

(4) 若 $a=0$，则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

若 $a\neq 0$，由(1)可知，对任何 x，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x_n^2}{(2n)!}$ 都收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}$ 收敛，亦即不论 a 为任何正数或负数，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(2n)!}$ 都收敛，根据级数收敛的必要条件，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{(2n)!}=0$.

(5) 当 $0<x<1$ 时，

$$|s^{(n)}(x)|\leqslant\left|\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right|<\frac{1}{2}(e+1)<2,$$

由马克劳林公式，以 $x=\frac{1}{2}$ 代入，误差为

$$|R_5|\leqslant\frac{2\times\frac{1}{2^6}}{6!}=\frac{1}{6!2^5}<10^{-3},$$

故所求的近似值为

$$s\left(\frac{1}{2}\right)\approx 1+\frac{\frac{1}{2^2}}{2!}+\frac{\frac{1}{2^4}}{4!}=1+0.125+0.0026=1.1276.$$

4. 一致收敛

研究下面序列在给定区间上的一致收敛性(10.2.116—10.2.128题)：

10.2.116　$f_n(x)=x^n$；(1) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；(2) $0\leqslant x\leqslant 1$.

解　(1) 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$，任给 $\varepsilon>0$，由于

$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant(\frac{1}{2})^n$,故要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只须$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}$,取 $N=[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}]$.

所以对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,对于$[0,\frac{1}{2}]$上的一切 x 值,均有 $|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon$,因此,$f_n(x)=x^n$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上一致收敛于零.

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, x=1;\\0, 0\leqslant x<1.\end{cases}$

取 ε_0,使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,就有

$$|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})-f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛,但不一致收敛.

10.2.117 $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$, $0<x<+\infty$.

解 当 $0<x<+\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$,又 $|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{x+n}<\frac{1}{n}$,任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只须$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于 $x>0$ 的一切 x 值,都有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在$(0,+\infty)$内一致收敛于零.

10.2.118 $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$, (1)$0\leqslant x\leqslant1$; (2)$1<x<+\infty$.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$,取 ε_0,使 $0<\varepsilon_0<1$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$|f_n(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n})|=1>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

(2) 当 $1<x<+\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$,又

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2nx}{1+n^2x^2}<\frac{2nx}{n^2x^2}<\frac{2}{n},$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只须 $n>\frac{2}{\varepsilon}$, 取 $N=[\frac{2}{\varepsilon}]$, 则当 $n>N$ 时,对于 $x>1$ 的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在$(1,+\infty)$上一致收敛.

10.2.119 $f_n(x)=x^n-x^{2n}, 0\leqslant x\leqslant 1$.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$,又

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{2n},$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{4}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,就有

$$|f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})-f(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})|=\frac{1}{4}>\varepsilon_0,$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛但不一致收敛.

10.2.120 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}, -\infty<x<+\infty$.

解 当 $-\infty<x<+\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=|x|=f(x),$$

又 $$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}<\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n},$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 则当 $n>N$ 时,对于一切实数 x,都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

10.2.121 $f_n(x)=n(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}), 0<x<+\infty$.

解 当 $0<x<+\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n[x + \frac{1}{n} - x]}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x),$$

若取 $x = \frac{1}{n}$，则有

$$|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = |n(\sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}) - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}|$$

$$= \sqrt{n}\,|\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2}| = \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2} + 1)^2} > \frac{1}{18}\sqrt{n}.$$

当 n 充分大时，它就可以大于指定的 $\varepsilon_0 > 0$，因此，$f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛但不一致收敛.

10.2.122　$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$，$-\infty < x < +\infty$.

解　当 $-\infty < x < +\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$，又

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

任给 $\varepsilon > 0$，要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$，只须 $n > \frac{1}{\varepsilon}$，取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n > N$ 时，对于一切实数 x，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

10.2.123　(1) $f_n(x) = \mathrm{arctg}\, nx$，$0 < x < +\infty$；

(2) $f_n(x) = x\,\mathrm{arctg}\, nx$，$0 < x < +\infty$.

解　(1) 当 $0 < x < +\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} = f(x)$，取 ε_0，使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{4}$，不论 n 多么大，只要取 $x = \frac{1}{n}$，就有

$$|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = |\mathrm{arctg} 1 - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{4} > \varepsilon_0,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛但不一致收敛.

(2) 当 $0<x<+\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\dfrac{\pi}{2}x=f(x)$，又

$|f_n(x)-f(x)|=x|\mathrm{arctg}nx-\dfrac{\pi}{2}|=x|-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{nx}|\leqslant x\cdot\dfrac{1}{nx}=\dfrac{1}{n}$，

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x>0$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

10.2.124　$f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$，(1) $-l<x<l$，其中 l 为任意的正数；(2) $-\infty<x<+\infty$.

解　(1) 当 $-l<x<+l$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

又当 $n>[l]$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}\leqslant e^{-(n-l)^2},$$

任给 $\varepsilon>0$(可设 $\varepsilon<1$)，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只须 $n>[l]$ 且 $e^{-(n-l)^2}<\varepsilon$，即只要 $n>l+\ln\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 取 $N=[l+\ln\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$，则当 $n>N$ 时，对于 $(-l,l)$ 上的一切 x 值，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-l,l)$ 上一致收敛.

(2) 当 $-\infty<x<+\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 取 ε_0，使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=n$，就有

$$|f_n(x)-f(n)|=1>\varepsilon_0,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛但不一致收敛.

10.2.125　$f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$，$0<x<1$.

解　当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n}=0$，又 $\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

又 $|f_n(x)-f(x)|=|\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}|$，任给 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{t\to0^+}t\ln t=0$，故存在 δ

$=\delta(\varepsilon)>0$，使当 $0<t<\delta$ 时，恒有 $|t\ln t|<\varepsilon$，取 $N=[\frac{1}{\delta}]$，则当 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而对一切 $0<x<1$，都有 $0<\frac{x}{n}<\delta$，故

$$|f_n(x)-f(x)|=|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛.

10.2.126 $f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}; \\ n^2(\frac{2}{n}-x), & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}; \\ 0, & x\geqslant\frac{2}{n}. \end{cases}$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解　当 $x=0$ 时，$f_n(x)=0$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$.

当 $x\neq 0$ 时，在 $[0,1]$ 上，$x>0$，对任给的 $\varepsilon>0$，取适当大的正整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，使 $\frac{2}{N}\leqslant x$，则当 $n>N$ 时，有 $\frac{2}{n}<\frac{2}{N}\leqslant x$，于是 $f_n(x)=0$，因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 ε_0，使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n^2}$，就有

$$|f_n(\frac{1}{n^2})-f(\frac{1}{n^2})|=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1>\varepsilon_0,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

10.2.127 $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$，$1\leqslant x\leqslant a$.

解　当 $1\leqslant x\leqslant a$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x=f(x),$$

并有　$|f_n(x)-f(x)|=|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n\ln[1+(x^{\frac{1}{n}}-1)]|$

$$=|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n(x^{\frac{1}{n}}-1)+\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)^2+n\cdot o((x^{\frac{1}{n}}-1)^3)|$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2},$$

其中 $A>0$ 为常数,选取适当大的 N,上面不等式当 $n>N_1$ 时成立,显然对任给的 $\varepsilon>0$,存在 N_2,使当 $n>N_2$ 时,$\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,于是,取 $N=\max(N_1,N_2)$,则当 $n>N$ 时,对于$[1,a]$上的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在$[1,a]$上一致收敛.

10.2.128 $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}, 0\leqslant x\leqslant 2.$

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-1|$$

$$=\frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{n},$$

当 $1<x\leqslant 2$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-x|$$

$$=\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+x\cdot(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{n-2}\cdot(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+x^{n-1}}$$

$$<\frac{1}{nx^{n-1}}<\frac{1}{n},$$

因此,对于 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于$[0,2]$上一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,2]$上一致收敛.

10.2.129 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{x}{3^n}$ 是否一致收敛?

解 当 $|t|\leqslant\pi$ 时,有 $|\sin t|\leqslant|t|$,故对充分大的 n,有 $\left|\sin\frac{x}{3^n}\right|\leqslant$

$\frac{|x|}{3^n}$,即从某项开始,有 $|2^n\sin\frac{x}{3^n}| \leqslant |x|(\frac{2}{3})^n$

因 $\sum_{n=0}^{\infty}|x|(\frac{2}{3})^n$ 是等比级数,公比为$\frac{2}{3}(<1)$,故收敛,从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$ 对任意 x 均绝对收敛.

取 N,使$\frac{a}{3N}\leqslant\pi$,则对于满足 $n\geqslant N$ 的 n 以及满足 $|x|\leqslant a$ (a 为任意正数) 的 x,都有

$$|\sin\frac{x}{3^n}|\leqslant\frac{|x|}{3^n},$$

于是,级数$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{\sin x}{3^n}$ 在任意有限区间 $-a\leqslant x\leqslant a$ 上一致收敛.

10.2.130 设 $f(x)$ 为定义于区间(a,b) 内的任意函数,且 $f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}$,$(n=1,2,\cdots)$. 证明:当 $n\to\infty$ 时,$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$,$(a<x<b)$.

证 由于 $|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|[nf(x)]-nf(x)|\leqslant\frac{1}{n}$,故对任给的 $\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于一切 $x\in(a,b)$,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在(a,b) 上一致收敛于 $f(x)$.

10.2.131 设 $f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{i}{n})$,其中 $f(x)$ 为连续函数,证明:序列 $f_n(x)$ 在任何有穷闭区间$[a,b]$ 上一致收敛.

证 设 $f_n(x)$ 的极限函数为 $F(x)$,则

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}}f(t)dt$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}),\ (0<\theta_i<1).$$

由于 $f(x)$ 在$[a,b+1]$ 上连续,故它在$[a,b+1]$ 上一致连续,即对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使对于$[a,b+1]$上的任意点 x' 及 x'',只要当 $|x'-x''|<\delta$ 时,就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

今取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$,则当 $n>N,a\leqslant x\leqslant b$ 时,有

$$|(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n})-(x+\frac{i}{n})|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta,$$

且 $x+\frac{i}{n}\in[a,b+1]$, $x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\in[a,b+1]$, $(i=0,1,\cdots,n-1)$,于是

$$|F(x)-f_n(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}|f(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n})-f(x+\frac{i}{n})|$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\varepsilon=\frac{1}{n}\cdot n\varepsilon=\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

10.2.132 试证:$f_n(x)=\ln x+\frac{1}{n}$ 在$(0,+\infty)$内一致收敛,而 $s_n(x)=(\ln x+\frac{1}{n})^2$ 在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

证 易见 $f_n(x)$ 与 $s_n(x)$ 在$(0,+\infty)$内分别收敛于 $\ln x$ 与 $\ln^2 x$. 对任给的 $\varepsilon>0$,欲使当 $n>N,x>0$ 时,恒有

$$|\ln x+\frac{1}{n}-\ln x|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立,只要取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,因此,$f_n(x)=\ln x+\frac{1}{n}$ 在$(0,+\infty)$内一致收敛于 $\ln x$. 但是,存在 $\varepsilon_0=2$,对任何自然数 N,都存在 $n_0=2N>N,x_0=e^{2N}>0$,使

$$|(\ln x_0+\frac{1}{n_0})^2-\ln^2 x_0|=\frac{1}{n_0^2}+\frac{2\ln x_0}{n_0}>2=\varepsilon_0$$

成立,故 $s_n(x)=(\ln x+\frac{1}{n})^2$ 在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

10.2.133 试证:$f_n(x)=nx$ 在$[c,+\infty)$,$(c>0)$,上一致发散于 ∞,而在$(0,+\infty)$内不一致发散于 ∞.

证 对任给的 $M>0$,欲使当 $n>N$ 和 $x\geqslant c$ 时,恒有 $|nx|=nx>M$ 成立,只要当 $n>N$ 时,恒有 $cn>M$,即 $n>\frac{M}{c}$ 成立即可.

取 $N=[\frac{M}{c}]$,因此,$f_n(x)=nx$ 在$[c,+\infty)$上一致发散于 ∞.

但是，存在 $M_0 = 1$，对任何自然数 N，都存在 $n_0 = 2N > N, x_0 = \frac{1}{2N} > 0$，使 $|n_0 x_0| = 1$ 成立，因此，$f_n(x) = cx$ 在 $(0, +\infty)$ 内不一致发散于 ∞.

10.2.134　研究 $f_n(x) = \frac{n}{n+1}\text{arctg}x$ 在 $[1, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解　易见 $f_n(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上收敛于 $\text{arctg}x$，由于对任何自然数 n，都有

$$\sup\{|\frac{n}{n+1}\text{arctg}x + \text{arctg}x|: x \geqslant 1\}$$
$$= \sup\{\frac{1}{n+1}\text{arctg}x: x \geqslant 1\} = \frac{\pi}{2(n+1)},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$，依定理：$\{f_n(x)\}$ 在点集 X 上一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x) - f(x)|: x \in X\} = 0$，可知 $f_n(x) = \frac{n}{n+1}\text{arctg}x$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致收敛于 $\text{arctg}x$.

10.2.135　试证：$f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛.

证　易见 $f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上收敛于 0，今取 $x_n = n \in [0, +\infty)$，$(n = 1, 2, \cdots)$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_n^2}{1+nx_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2} = 1,$$

依定理：$\{f_n(x)\}$ 在点集 X 上一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是对任意数列 $\{x_n\}: x \in X$ $(n = 1, 2, \cdots)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$，可知 $f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛.

10.2.136　试证：$f_n(x) = \sqrt{\frac{n^3x^2+n^2}{n^3+1}}$ 在 $(-l, l)$ 内一致收敛于 $|x|$.

证　由于 $\sqrt{u}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，而 $g_n(x) = \frac{n^3x^2+n^2}{n^3+1}$ 在 $(-l, l)$ 内一致收敛于 x^2，且 x^2 在 $(-l, l)$ 内恒非负.

对任意自然数 n，$x \in (-l,l)$，都有$\frac{n^3x^2+n^2}{n^3+1}>0$，依定理：设 $f(u)$ 在区间 U 上一致连续，$\{g_n(x)\}$ 在区间 X 内闭一致收敛于 $g(x)$，且对任意 $[\alpha,\beta]\subset X$，当 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 时，$g(x)\in U$，又存在自然数 N，当 $n>N$，$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 时，$g_n(x)\in U$，那么 $\{f(g_n(x))\}$ 在 X 内闭一致收敛于 $f[g(x)]$，可知 $f_n(x)=\sqrt{\frac{n^3x^2+n^2}{n^3+1}}$ 在 $(-l,l)$ 内一致收敛于 $|x|$.

10.2.137　试证：$f_n(x)=\cos\frac{1}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 1.

证　由于对任意自然数 n 和 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$\cos\frac{1}{n}\leqslant\cos\frac{1}{n+x^2}<1,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$，依定理：设存在自然数 N，当 $n>N$ 和 $x\in X$ 时，恒有 $f_n(x)\leqslant g_n(x)\leqslant h_n(x)$ 成立，$\{f_n(x)\}$ 与 $\{h_n(x)\}$ 均在点集 X 上一致收敛于 $g(x)$，则 $\{g_n(x)\}$ 也在 X 上一致收敛于 $g(x)$，可知 $f_n(x)=\cos\frac{1}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 1.

10.2.138　试证：$f_n(x)=\frac{n}{n+1}\mathrm{arctg}x\sin(x+\frac{1}{n})$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 $\sin x\,\mathrm{arctg}x$.

证　因 $g_n(x)=\frac{n}{n+1}\mathrm{arctg}x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 $\mathrm{arctg}x$. $h_n(x)=\sin(x+\frac{1}{n})$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 $\sin x$，且 $\mathrm{arctg}x$ 与 $\sin x$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，依定理：设 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 在点集 X 上分别一致收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 X 上有界，则 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)g(x)$，且 $f(x)g(x)$ 在 X 上有界，可知 $f_n(x)=\frac{n}{n+1}\mathrm{arctg}x\sin(x+\frac{1}{x})$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 $\sin x\,\mathrm{arctg}x$.

10.2.139　试证：$f_n(x)=\frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 0.

证　因 $g_n(x)=\frac{1}{n}$ 一致收敛于 0，又 $h_n(x)=\cos\frac{x}{n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致有界. 依定理：设 $\{f_n(x)\}$ 在点集 X 上一致收敛于 0，又 $\{g_n(x)\}$ 在

X 上往后一致有界，则函数列 $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 0，可知 $f_n(x)=\frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 0.

10.2.140　试证：$f_n(x)=\dfrac{\sin(x+\frac{1}{n})}{\cos\frac{1}{n+x^2}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 $\sin x$.

证　由于 $g_n(x)=\sin(x+\frac{1}{n})$ 与 $h_n(x)=\cos\frac{1}{n+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内分别一致收敛于 $\sin x$ 与 1，又 $|\sin x|\leqslant 1>0$，依定理：设 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 在点集 X 上分别一致收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$，且 $f(x)$ 在 X 上有界，又存在 $a>0$，使对于任意 $x\in X$，都有 $|g(x)|\geqslant a$ 成立，则 $\{\frac{f_n(x)}{g_n(x)}\}$ 在 X 上一致收敛于 $\frac{f(x)}{g(x)}$，且 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 X 上有界，可知 $f_n(x)=$ $\dfrac{\sin(x+\frac{1}{n})}{\cos\frac{1}{n+x^2}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛于 $\sin x$.

10.2.141　对任意自然数 n，函数

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\cdots,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n};\\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{ 上的其它点},\end{cases}$$

(其中 $\frac{1}{k},\cdots,\frac{k-1}{k}(k=2,3,\cdots,n)$ 均为 $(0,1)$ 内的既约分数)，都是在 $[0,1]$ 上只有有限个间断点的有界函数，求 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的极限函数.

解　(1) 当 $x=0,1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$；

(2) 当 x 为 $(0,1)$ 内的任一既约分数 $\frac{q}{p}$ 时，由于 $f_q(x)=f_{q+1}(x)=\cdots=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$；

(3) 当 x 为 $[0,1]$ 上的无理数时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$. 从而可知，$f_n(x)$ 的极限函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为}[0,1]\text{ 上的有理点时};\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为}[0,1]\text{ 上的无理点时},\end{cases}$$

而 $f(x)$ 在$[0,1]$上不可积.

依定理:设$\{f_n(x)\}$在有限区间 X 上一致收敛于 $f(x)$,又存在自然数 N,当 $n>N$ 时,对任何$[\alpha,\beta]\subset X$,$f_n(x)$ 均在$[\alpha,\beta]$上可积,那么

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx\ ,$$

即 $\int_\alpha^\beta \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(x)dx$. 说明积分号与极限号可以交换次序,又对任 $x_0\in X$,$\left\{\int_{x_0}^x f_n(t)dt\right\}$均在 X 上一致收敛于$\int_{x_0}^x f(t)dt$,可知 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

研究下列级数在指定区间上的一致收敛性(10.2.142—10.2.148 题):

10.2.142 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$,(1) 在闭区间 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 上,其中 $\varepsilon>0$;(2) 在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上.

解 (1) 当 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时,$|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$,又 $\frac{1}{n}$ 趋于零而不依赖于 x,故由狄利克雷判别法知,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$上一致收敛.

(2) 显然,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上条件收敛,但它不一致收敛.

事实上,设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[0,2\pi]$上一致收敛,其中 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$,$(n=1,2,\cdots)$,则对于任给的 $\varepsilon>0$,例如取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$,必存在 $N_1=N_1(\varepsilon)$,(它与 x 无关),当 $n\geqslant N_1$ 时,对于$[0,2\pi]$上的一切 x 值,均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数,取 $N_2\geqslant 2N_1$,记 $n_0=\max\{[\frac{N_2}{2}],[\frac{N_2+1}{2}]\}$,则 $n_0\geqslant N_1$,又取 p,使 $n_0+p=N_2+1$,则有

$$|u_{n_0+1}(x)+u_{n_0+2}(x)+\cdots+u_{n_0+p}(x)|<\varepsilon,$$

也即有 $\left|\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n\leqslant N_2+2} u_n(x)\right| < \varepsilon = \frac{1}{4},\ x \in [0,2\pi]$, (*)

今取 $x_0 = \frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{\pi}{2}$. 当然上式成立，但由于当 $\frac{N_2}{2}+1\leqslant n < N_2+2$ 时，显然有 $0 < nx_0 < \frac{\pi}{2}$，故有 $\sin nx_0 \geqslant nx_0\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{n}{N_2+2}$，于是 $u_n(x_0) = \frac{\sin nx_0}{n} \geqslant \frac{1}{N_2+2}$，从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} u_n(x_0) \geqslant \frac{1}{N_2+2}\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} 1 \geqslant \frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{1}{2}(N_2+2) = \frac{1}{2}$$

这与(*)式矛盾，故证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上条件收敛，而不一致收敛.

10.2.143 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，(1) 在区间 $|x| < q$ 内，(其中 $q < 1$)；(2) 在区间 $|x| < 1$ 内.

解 (1) 由于 $|x^n| < q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ 收敛 $(0 < q < 1)$，由维尔斯特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x| < q < 1$ 内绝对并一致收敛.

(2) $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$，当 $|x| < 1$ 时，有

$$s(x) = \lim_{n\to\infty}s_n(x) = \frac{1}{1-x},$$

取 ε_0，使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|s_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) - s\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt[n+1]{2}}\right| > \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x| < 1$ 内收敛而不一致收敛.

10.2.144 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1})$, $-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1})=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$,

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,有 $s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=x$,

$$|s_n(x)-s(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

于是,对任给的 $\varepsilon>0$,只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,若取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对于 $[-1,1]$ 上的一切 x 值,均有 $|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$,因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1})$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

10.2.145 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$,在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

解 $s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}$,于是

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<1;\\0,x=0,\end{cases}$$

取 ε_0,使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$,就有

$$|s_n(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}})-s(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}})|=|\frac{1}{2}-1|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

因此,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

10.2.146 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时,显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减,同时由于

$$0<\frac{1}{n+\sin x}\leqslant\frac{1}{n-1},$$

故当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一致地趋于零,又由于

$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k| \leqslant 1$. 因此，由狄利克雷判别法知，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

10. 2. 147 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}, -\infty < x < +\infty$.

解 $|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{3}| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\pi}{3}|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$，又 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 对于每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是单调递减的，且由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leqslant \frac{1}{n}$，故对于每一个 x 一致趋于零，因此由狄利克雷判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

10. 2. 148 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}, 0 \leqslant x < +\infty$.

解 当 $x = 2m\pi$，$(m = 0,1,2,\cdots)$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx = 0$，

当 $x \neq 2m\pi(m = 0,1,2,\cdots)$ 时，

$$|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx| = |\sin x| \cdot |\sum_{k=1}^{n}\sin kx| \leqslant |\sin x| \cdot \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$= 2|\cos\frac{x}{2}| \leqslant 2,$$

于是，对一切 $x \in [0, +\infty)$，均有 $|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx| \leqslant 2$，又对于每一个 $x \in [0, +\infty)$，$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 n 都是单调递减的，且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ 知，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $[0, +\infty)$ 上一致趋于零，因此由狄利克雷判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

10.2.149 利用维尔斯特拉斯判别法,证明下列函数项级数在所指区间内一致收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $0\leqslant x<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2}\leqslant|x|<2$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{[\frac{n}{2}]!}$, $|x|<a$, a 为任意正数;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})$, $|x|<a$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

解 (1) 由于 $|\frac{1}{x^2+n^2}|\leqslant\frac{1}{n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛.

(2) 当 $x=0$ 时,级数显然收敛于零,当 $x>0$ 时,$1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$,于是 $|\frac{x}{1+n^4x^2}|\leqslant\frac{1}{2n^2}$, 又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 当 $\frac{1}{2}\leqslant|x|<2$ 时,

$$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})\leqslant\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}},$$

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 应用达朗伯尔判别法,当 $n\to\infty$ 时,有

$$\frac{\dfrac{(n+1)^2\cdot 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\dfrac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{2}{\sqrt{n+1}}\to 0<1,$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$收敛，因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$当$\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$时一致收敛.

(4) 当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 时，$u_n(x)=\frac{x^n}{m!}$，考虑级数$\sum_{m=1}^{\infty}u_{2m}(x)$与$\sum_{m=1}^{\infty}u_{2m+1}(x)$，当 $|x|<a$ 时，不论 $n=2m$ 或 $n=2m+1$，均有 $\left|\frac{x^n}{m!}\right|<\frac{a^n}{m!}$，应用达朗贝尔判别法，易证级数$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{2m}}{m!}$及$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{2m+1}}{m!}$均收敛，因此，级数$\sum_{m=1}^{\infty}u_{2m}(x)$与$\sum_{m=1}^{\infty}u_{2m+1}(x)$当 $|x|<a$ 时绝对并一致收敛，从而，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$当 $|x|<a$ 时一致收敛.

(5) 当 $|x|<+\infty$ 时，$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

(6) 当 n 充分大(即 $n\geqslant n_0$) 时，对于 $|x|<a$，有

$$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

但当 $|x|<a$ 时，$\left|\frac{x}{n\ln^2 n}\right|\leqslant\frac{a}{n\ln^2 n}$，而利用柯西判别法知级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$收敛，$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$也收敛，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$当 $|x|<a$ 时一致收敛.

(7) 由于 $x^2+n^3\geqslant 2n^{\frac{3}{2}}|x|$，故 $\left|\frac{x}{x^2+n^3}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{3/2}}$. 当 n 充分大 $(n\geqslant n_0)$ 时，对于 $|x|<+\infty$，有

$$|\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}| = |\frac{2x}{x^2+n^3}+o((\frac{2x}{x^2+n^3})^2)| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}+o(\frac{1}{n^3}),$$

又因$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$及$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$均收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^3}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

10.2.150 不连续函数的序列可否一致收敛于连续函数？

解 可以. 例如函数列$f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)$，$(n=1,2,\cdots)$，其中$\varphi(x)=\begin{cases}0, 若 x 为无理数; \\ 1, 若 x 为有理数.\end{cases}$显然，$f_n(x)$在$-\infty<x<+\infty$上每一点均不连续，但由于$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}$，$(n=1,2,\cdots,-\infty<x<+\infty)$，故当$n\to\infty$时，$f_n(x)$在$-\infty<x<+\infty$上一致趋于零，而$f(x)\equiv 0\ (-\infty<x<+\infty)$，显然是连续函数，即不连续函数的序列可以一致收敛于连续函数.

10.2.151 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$[a,b]$上一致收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上也一致收敛.

证 由柯西准则和题设知，对任给的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，对于$[a,b]$内的一切x值，均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中p为任意自然数，由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

故根据一致收敛的柯西准则知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

10.2.152 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上绝对并一致收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$[a,b]$上是否必定一致收敛？

解 未必. 例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上绝对并一致收敛，

但其绝对值级数不一致收敛.

事实上,显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$上收敛而不一致收敛,因此,只要证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛就可以了.

首先,当$x=0$及$x=1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$显然收敛,当$0<x<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$是交错级数且满足莱布尼兹条件,故收敛.要证其一致收敛,只要证其余式$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$一致趋于零(对$0\leqslant x\leqslant 1$)即可.

对于满足莱布尼兹条件的交错级数,余式估计为

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1},\ (0\leqslant x\leqslant 1).$$

令$f(x)=(1-x)x^{n+1}$,通过求导数易知,此函数当$x=\frac{n+1}{n+2}$时在$[0,1]$上达到最大值,故当$0\leqslant x\leqslant 1$时,恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是,$|R_n(x)|<\frac{1}{n+2}$,$(0\leqslant x\leqslant 1;n=1,2,\cdots)$,由此即知,当$n\to\infty$时,$R_n(x)$关于$0\leqslant x\leqslant 1$一致趋于零.

10.2.153　证明:幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证　设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间为$(-R,R)$,$(R>0)$,且$[a,b]\subset[-R,R]$,令$r=\max\{|a|,|b|\}$,则当$x\in[a,b]$时,有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_nr^n|,$$

由题设知$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nr^n|$收敛,故幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[a,b]$上绝对并一致收敛.

由于$[a,b]$的任意性,故结论得证.

10.2.154　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则狄利克雷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$当$x\geqslant 0$时一致收敛.

证　$0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$,且$\frac{1}{n^x}$对每一个$x\geqslant 0$是单调的,又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$当$x\geqslant 0$时一致收敛,故由阿贝尔判别法知,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$当$x\geqslant 0$时一致收敛.

10.2.155　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$, $x\in[0,1]$,是否一致收敛?

解　当$x=0$时,$u_n(x)\equiv 0$,故级数收敛,且其和$s(x)=0$.

当$0<x\leqslant 1$时,因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{1+x}=\frac{1}{1+x}<1$,故所给级数收敛,且其和$s(x)=\frac{x(\frac{1}{1+x})}{1-\frac{1}{1+x}}=1$,即$s(x)=\begin{cases}0, x=0;\\1, 0<x\leqslant 1.\end{cases}$

$s(x)$在$x=0$处不连续,但级数的各项$u_n(x)$在$0\leqslant x\leqslant 1$上是连续的,所以级数不一致收敛.否则,若所给级数一致收敛,则其和函数应为连续函数,与上述结论矛盾.

10.2.156　设$u_k(x)=kx(1-x)^k-(k-1)x(1-x)^{k-1}$,$(k=1,2,\cdots)$,证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在闭区间$[0,1]$上不一致收敛.

证　设$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=nx(1-x)^n$,则$s_n(0)=s_n(1)=1$,因此,当$x=0$及$x=1$时,$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)=0$,当$0<x<1$时,$0<1-x<1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}(1-x)^n=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=0$,所以对$0\leqslant x\leqslant 1$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=0$.取$x_n=\frac{1}{n+1}$,则

$$R_n(x)=\frac{n}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n=(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\to e^{-1},$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x_n)\neq 0$,故所给级数不一致收敛.

10.2.157　任一收敛的函数项级数在其收敛区间上必一致收敛.

解 非,如级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$在$[0,1]$上收敛,且

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$ 但$s(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

事实上,由于$s_n=x^n$,对于$\varepsilon=\frac{1}{2}$,不论自然数N取多大,总存在x,使$0<2^{-\frac{1}{N+1}}<x<1$,当$n=N+1$时,

$$|r_n(x)|=|s_n(x)-s(x)|=x^{N+1}>(\frac{1}{2^{\frac{1}{N+1}}})^{N+1}=\frac{1}{2}.$$

即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

10.2.158 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$[a,b]$上一致收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上也一致收敛.

解 是.设$\tilde{r}_n(x)=\sum_{i=n}^{\infty}|f_i(x)|$,$r_n(x)=\sum_{i=n}^{\infty}f_i(x)$,则任给$\varepsilon>0$,都存在不依赖于$x$的自然数$N$,使当$n>N$时,有

$$|\tilde{r}_n(x)|=|\sum_{i=n}^{\infty}|f_i(x)||=\sum_{i=n}^{\infty}|f_i(x)|<\varepsilon,$$

因而$\sum_{i=n}^{k}|f_i(x)|\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}|f_i(x)|$,又

$$-\varepsilon<-\sum_{i=n}^{k}|f_i(x)|\leqslant\sum_{i=n}^{k}f_i(x)\leqslant\sum_{i=n}^{k}|f_i(x)|<\varepsilon,$$

由夹逼定理可知$\lim\limits_{k\to\infty}\sum_{i=n}^{k}f_i(x)=0$,故知$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上也一致收敛.

10.2.159 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的各项$u_n(x)$,$n=1,2,\cdots$,在$[a,b]$上连续,则其和函数$s(x)$在$[a,b]$上也必连续.

解 非.如级数$x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$在$[0,1]$上收敛,并且各项$u_1(x)=x$,$u_n(x)=x^n-x^{n-1}$ $n=2,3,\cdots$,在$[0,1]$上都连

续，但是其和函数

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处不连续.

10.2.160　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，$0<r<R$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|\leqslant r$ 上必一致收敛.

解　是. 事实上，若 $0<r<R$，R 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，则可知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ 绝对收敛，而 $|x|\leqslant r$ 时，有 $|a_nx^n|\leqslant|a_nr^n|$，因此由 M- 判别法可知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|\leqslant r$ 上一致收敛.

§3　傅里叶级数

内 容 提 要

1. 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数的收敛定理

定理1　设(1)$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上分段连续;(2)$f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上分段连续可导,则由傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{1}$$

所确定的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

在区间$[-\pi,\pi]$上收敛,并且它的和 =

$$\begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 是 } f(x) \text{ 在}(-\pi,\pi)\text{ 内的连续点时;} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{当 } x \text{ 是 } f(x) \text{ 在}(-\pi,\pi)\text{ 内的间断点时;} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & \text{当 } x = \pm\pi \text{ 时.} \end{cases}$$

此时称 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可展开为傅里叶级数.

特别地,当 $f(x)$ 是在$[-\pi,\pi]$上的连续偶函数时,$b_n=0$,这时

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,\ x \in [-\pi,\pi].$$

当 $f(x)$ 是$[-\pi,\pi]$上的连续奇函数时,$a_n=0$,这时

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,\ x \in (-\pi,\pi).$$

(3)与(4)式中 a_n、b_n 仍由(1)式确定.

2. 任意区间上的傅里叶级数

定理2　设 $f(x)$ 在区间$[-l,l]$上连续,且连续可导,则 $f(x)$ 在$(-l,l)$内可展开为广义傅里叶级数,即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}), \tag{2}$$

其中 $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, (n = 0,1,2,\cdots),$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, (n = 1,2,\cdots). \tag{3}$$

3. 复数形式的傅里叶级数

设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上分段光滑，且 $f(x)$ 为以 $2l$ 为周期的周期函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的复数形式为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}, \tag{4}$$

其中 $C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\omega x}dx$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

4. 函数展开为正弦或余弦级数

设函数 $f(x)$ 定义在 $[0,\pi]$（或 $[0,l]$）上，满足收敛定理的条件，要把它在 $[0,\pi]$（或 $[0,l]$）上展开为只含正弦项或余弦项的傅里叶级数，只要将函数 $f(x)$ 作奇式延拓或偶式延拓即可得到.

问 题 与 解 答

1. 傅里叶系数和傅里叶级数的收敛性

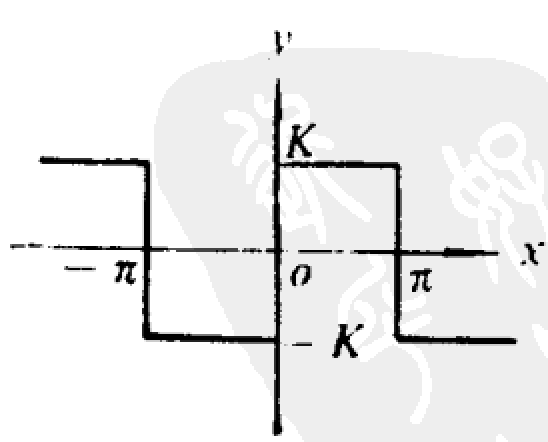
10.3.1 设有一个周期函数，它在一个周期中的定义是

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0; \\ k, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

把它展开成傅里叶级数.

解

函数	$x_1 = 0$ 处的跃值	$x_2 = \pi$ 处的跃值
$f(x)$	$j_1 = 2k$	$j_2 = -2k$



10.3.1 题图

$f(x)$ 在 $x_1 = 0$ 与 $x_2 = \pi$ 处的各阶导数都等于零，由于 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[j_1\cos nx_1 + j_2\cos nx_2] = \frac{1}{n\pi}[2k\cos 0 - 2k\cos n\pi]$$

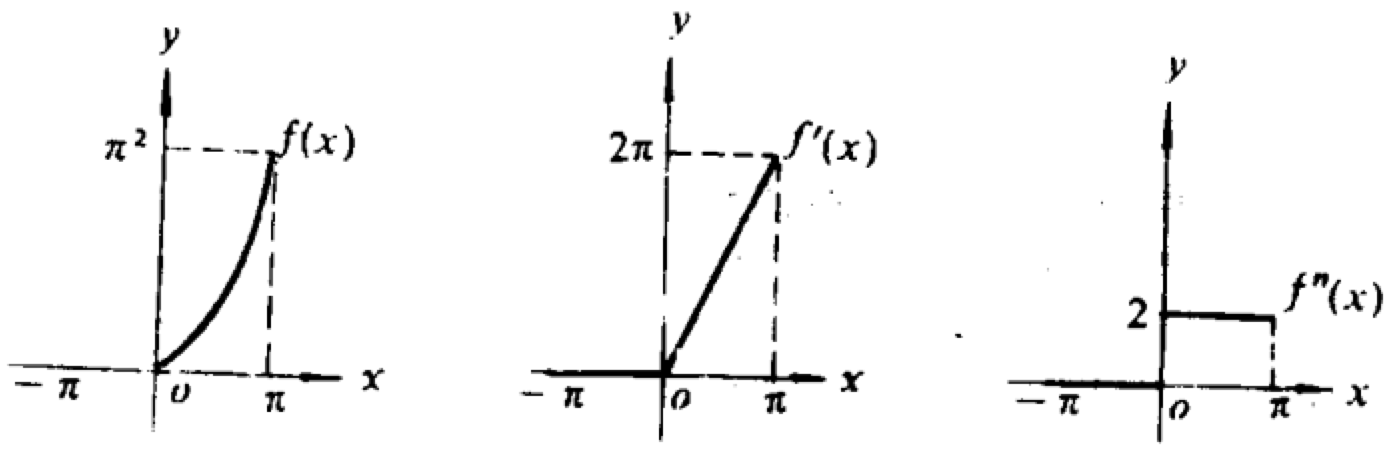
$$=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{4k}{n\pi}, & n\text{ 为奇数};\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故　$f(x)=\frac{4k}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots).$

10.3.2　求函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$ 的傅里叶级数.

解　$f'(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ 2x, & 0<x<\pi,\end{cases}$　$f''(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ 2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

图形为



(a)　(b)　(c)

10.3.2 题图

函数及导数	$x_1=0$ 处的跃值	$x_2=\pi$ 处的跃值
$f(x)$	$j_1=0$	$j_2=-\pi^2$
$f'(x)$	$j_1'=0$	$j_2'=-2\pi$
$f''(x)$	$j_1''=2$	$j_2''=-2$

$x_0=-\pi$ 处的跃值与 x_2 处的跃值相同.

又　$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{\pi^2}{6},$

$$a_n=\frac{1}{n\pi}[-j_1\sin 0-j_2\sin n\pi-\frac{1}{n}j_1'\cos 0-\frac{1}{n}j_2'\cos n\pi$$

$$+\frac{1}{n^2}j_0''\sin 0+\frac{1}{n^2}j_2''\sin n\pi]$$

$$=\frac{1}{n\pi}[\pi^2\sin n\pi+\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}(2\sin 0-2\sin n\pi)]$$

$$= \frac{2}{n^2}\cos n\pi = \frac{2(-1)^n}{n^2},$$

所以，$a_1 = -\frac{2}{1^2}, a_2 = \frac{2}{2^2}, a_3 = -\frac{2}{3^2}, \cdots$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[-\pi^2\cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}(2\cos 0 - 2\cos n\pi)]$$

$$= -\frac{(-1)^n}{n}\pi + \frac{2}{n^3\pi}[(-1)^n - 1],$$

所以，$b_1 = \pi - \frac{4}{\pi}$，$b_2 = -\frac{\pi}{2}$，$b_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3^3\pi}$，$b_4 = -\frac{\pi}{4}, \cdots$，

故 $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2\cos x + (\pi - \frac{4}{\pi})\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \cdots$.

10.3.3 在区间$(-\pi,\pi)$内把函数$f(x) = \sin ax (a > 0)$展开为傅里叶级数.

解 (1) 当 a 不是整数时. 因为 $f(x)$ 在$(-\pi,\pi)$上为奇函数，故

$a_0 = 0$，$a_n = 0$，$(n = 1,2,\cdots)$，

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}[\cos(n-a)x - \cos(n+a)x]dx$$

$$= \frac{2\sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2},$$

故 $\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2}\sin nx, (-\pi < x < \pi)$，$(a \neq 1,2,\cdots)$.

(2) 当 a 为整数时，$a_0 = 0, a_n = 0, (n = 1,2,\cdots)$，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin ax \sin nx dx = \begin{cases} 1, a = n; \\ 0, a \neq n. \end{cases} \text{(三角函数的正交性)}$$

故 $\sin ax = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sin x$，$(-\pi < x < \pi)$，$(a = 1,2,\cdots)$.

即 a 为整数时，$\sin ax$ 的傅里叶级数就是它本身.

综上所述

$$\sin ax = \begin{cases} \frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2}\sin nx, & (-\pi < x < \pi); \\ \sin ax, & a = 1,2,\cdots,(-\pi < x < \pi). \end{cases}$$

10.3.4 设在区间$[-\pi,\pi]$上，$f(x)$ 为偶函数，且 $f(\frac{\pi}{2} + x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$，证明：$f(x)$ 的傅里叶级数展开式中所有系数 $a_{2n} = 0$，$(n$

$= 0,1,2,\cdots)$.

证 $a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos 2nx dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx dx\right],$$

令 $t = \frac{\pi}{2} - x$，则第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\frac{\pi}{2} - t)\cos(n\pi - 2nt)dt$$

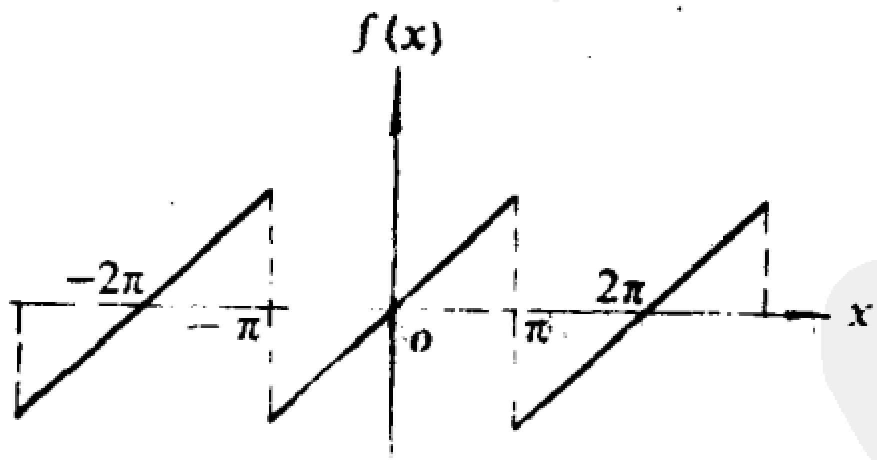
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} - t)\cos(n\pi - 2nt)dt.$$

令 $t = x - \frac{\pi}{2}$，则第二个积分

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\pi}{2} + t)\cos(n\pi + 2nt)dt.$$

注意到 $f(\frac{\pi}{2} + t) = -f(\frac{\pi}{2} - t)$，$\cos(n\pi - 2nt) = \cos(n\pi + 2nt)$，则有 $a_{2n} = 0$，$(n = 0,1,2,\cdots)$.

10.3.5 将如图所示的锯齿波在区间$(-\pi,\pi)$内展开成傅里叶级数，并利用所得的结果求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$的和.



10.3.5 题图

解 由图可知，该锯齿波为奇函数，因此可设 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$，于是

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx dx = \frac{(-1)^{k-1}2}{k},$$

所以 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2\sin kx}{k}$,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$.

10.3.6 将函数 $f(x)=x^2,(-\pi<x<\pi)$,展开为傅里叶级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

解 $f(x)$ 为偶函数,故 $b_n=0$, $(n=1,2,\cdots)$,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}[\frac{x^3}{3}]]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}[\frac{x^2}{n^2}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx]_0^{\pi}=\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n,\ (n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内连续,故

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ x\in(-\pi,\pi).$$

令 $x=0$,即得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

10.3.7 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,并且其傅里叶系数为 a_n,b_n. $(n=0,1,2,\cdots)$,

(1) 求 $f(x+l)$ (l 为常数)的傅里叶系数;

(2) 求 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+l)dt$ 的傅里叶系数,并利用所得结果推出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2).$$

解 (1) $f(x+l)$ 的傅里叶系数

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+l)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l}f(t)\cos(t-l)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)[\cos nt\cos nl+\sin nt\sin nl]dt$$

$$=(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt)\cos nl+(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt)\sin nl$$

$$= a_n\cos nl + b_n\sin nl,\ (n = 0,1,2,\cdots);$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+l)\sin n(l)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+l}^{\pi+l} f(t)\sin(t-l)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\sin nt\cos nl + \cos nt\sin nl]dt$$

$$= b_n\cos nl + a_n\sin nl,\ (n = 1,2,\cdots)$$

(2) 令 $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$，于是 $F(x)$ 的傅里叶系数

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)dx]f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(u)du]f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du]f(t)dt = a_0^2,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nxdx]f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n\cos nt + b_n\sin nt]f(t)dt$$

$$= a_n^2 + b_n^2,\ (n = 1,2,\cdots);$$

因为 $F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(-x+t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)f(u)du$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)f(u)du = F(x),$$

所以，$F(x)$ 是偶函数，故有 $B_n = 0$，$(n = 1,2,\cdots)$.

又 $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx,$$

在上式中令 $x = 0$，则得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

10.3.8 在区间 $(-\pi,\pi)$ 中把 $f(x) = \text{sh}ax$ 展开为傅里叶级数.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数，从而 $a_0 = 0, a_n = 0$，且

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sh}ax\sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\text{sh}ax\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\text{ch}ax dx\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sh}a\pi + \frac{a}{n^2}\text{ch}ax\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\text{sh}ax\sin nx dx\right]$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sh}a\pi - \frac{a^2 b_n}{n^2}\right],$$

即　$b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+a^2)\pi}\text{sh}a\pi$,

故按展开定理,$f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\text{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2} = \text{sh}ax,(-\pi < x < \pi).$$

10.3.9　将函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 0 \end{cases}$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上展开为傅里叶级数,并指出它所收敛的函数.

解　$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx = \dfrac{2}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos\frac{2n\pi}{\pi}x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+4n^2}[(-1)^n e^{\frac{\pi}{2}} - 1],$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin\frac{2n\pi}{\pi}x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4n}{1+4n^2}[(-1)^{n+1}e^{\frac{\pi}{2}} + 1],$$

所以,$f(x)$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的傅里叶级数为

$$\frac{1}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n e^{\frac{\pi}{2}} - 1]}{1+4n^2}\cos 2nx$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n[(-1)^{n+1}e^{\frac{\pi}{2}} + 1]}{1+4n^2}\sin 2nx,$$

由傅里叶级数的收敛定理知,它收敛于

$$g(x)=\begin{cases} e^x, & 0<x<\frac{\pi}{2}; \\ 0, & -\frac{\pi}{2}<x<0; \\ \frac{1}{2}, & x=0; \\ \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}, & x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

10.3.10　在区间$(-\pi,\pi)$中把函数$f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x<0; \\ bx, & 0<x<\pi \end{cases}$展开为傅里叶级数,其中$a$及$b$为常数.

解　由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}axdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bxdx=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bx\cos nxdx=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bx\sin nxdx=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=\begin{cases} ax, & -\pi<x<0; \\ 0, & x=0; \\ bx, & 0<x<\pi. \end{cases}$$

10.3.11　把函数$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\leqslant t\leqslant 0; \\ \sin t, & 0<t\leqslant\pi \end{cases}$展开为傅里叶级数.

解　$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin tdt=\frac{2}{\pi},$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin t\cos ntdt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[\sin(n+1)t-\sin(n-1)t]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{\cos 0}{n+1} - \frac{\cos 0}{n-1}\right]$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1}\right] = \frac{-[1+(-1)^n]}{(n^2-1)\pi}$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 3,5,7,\cdots; \\ \dfrac{-2}{(n^2-1)\pi}, & n = 2,4,6,\cdots, \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\cos t dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\sin nt dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-1)t - \cos(n+1)t]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)t}{n-1} - \frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right]\Big|_0^{\pi} = 0, \quad n = 2,3,4,\cdots,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt = \frac{1}{2}.$$

所给函数满足收敛定理条件，将系数代入傅里叶级数公式，得

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt, x \in [-\pi,\pi].$$

10.3.12 已知函数 $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$,

(1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

解 (1) 因为 $f(x) = f(-x)$，故 $b_n = 0, (n = 1,2,\cdots)$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}dx = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\left(\int_0^{\pi}e^x\cos nx dx + \int_0^{\pi}e^{-x}\cos nx dx\right)$$

$$= \frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\left[\frac{e^{\pi}\cos n\pi}{1+n^2} - \frac{1}{1+n^2} + \frac{e^{-\pi}(-\cos n\pi)}{1+n^2} - \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right]$$

$$= \frac{\cos n\pi}{1+n^2} = \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

又 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = f(\pi-0) = f(\pi) = f(-\pi)$，故在$[-\pi,\pi]$上，$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx.$

(2) 在上式中，令 $x = \frac{\pi}{2}$，得

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2^2}\cos\pi + \frac{1}{1+4^2}\cos 2\pi + \frac{1}{1+6^2}\cos 3\pi + \frac{1}{1+8^2}\cos 4\pi + \cdots + \frac{1}{1+(2n)^2}\cos n\pi + \cdots,$$

即 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+4^2} - \frac{1}{1+6^2} + \frac{1}{1+8^2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{1+(2n)^2} + \cdots,$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(2n)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$

10.3.13　将周期函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x\in[-\pi,0); \\ 1, & x\in[0,\pi) \end{cases}$ 展为傅里叶级数，并据此求周期函数

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & x\in[-\pi,0), \\ b, & x\in[0,\pi) \end{cases} \text{及 } f_2(x) = |x|, x\in(-\pi,\pi)$$

的傅里叶级数，并求级数 $\frac{4}{\pi}[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots]$ 的和．

解　$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = 0,$$

$(n = 0,1,2,\cdots)$，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}[1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1] = \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots; \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots, \end{cases}$$

所以，$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$,

$$(-\infty < x < \infty, x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots).$$

而 $f_1(x) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}f(x)$，所以，

$$f_1(x) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\cdot\frac{4}{\pi}[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots]$$

$$= \frac{a+b}{2} - \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

$$(-\infty < x < \infty, x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots).$$

又 $f_2(x) = \int_0^x f(x)dx$，所以，

$$f_2(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}]dx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x]_0^x$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$f_2(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$，代入上式得

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}[\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{2} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{2n-1}{2}\pi + \cdots]$$

$$+ \frac{4}{\pi}[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots]$$

$$= \frac{4}{\pi}[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots].$$

这样便求得 $f_2(x)$ 的傅里叶展开式

$$f_2(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\ (-\pi<x<\pi).$$

并求得级数的和为

$$\frac{4}{\pi}[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots]=\frac{\pi}{2}.$$

2. 正弦级数和余弦级数

10.3.14　把函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$，$(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为正弦级数.

解　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx=\frac{2}{\pi}[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx]_0^{\pi}$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{n}$,

又 $f(\pi)=0$，$f(0)=\frac{\pi}{2}\neq 0$，因此仅在区间 $(0,\pi]$ 上有

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

10.3.15　把函数 $f(x)=-\sin\frac{x}{2}+1$，$(0\leqslant x\leqslant\pi)$，展开为正弦级数.

解　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-\sin\frac{x}{2}+1)\sin nx dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-2\sin\frac{x}{2}\sin nx dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\frac{1}{2}+n)x-\cos(\frac{1}{2}-n)x]dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$

$=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(\frac{1}{2}+n)x}{\frac{1}{2}+n}-\frac{\sin(\frac{1}{2}-n)x}{\frac{1}{2}-n}-\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n}]_0^{\pi}$

$=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{\frac{1}{2}+n}-\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\pi}{n-\frac{1}{2}}]+\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$

$=\frac{1}{\pi}[\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}-\frac{(-1)^{n+1}}{n-\frac{1}{2}}]+\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n}{n^2 \cdot (\frac{1}{2})^2} + \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

$$= (-1)^n \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} + \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi},$$

因为 $f(x) = -\sin\frac{x}{2} + 1$ 在$[0,\pi]$上连续，但 $f(0) = 1 \neq 0$，$f(\pi) = 0$，故在$(0,\pi]$上有

$$-\sin\frac{x}{2} + 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} + \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}\}\sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^n 4n}{4n^2-1} + \frac{1-(-1)^n}{n}\}\sin nx.$$

10.3.16 把函数 $f(x) = 2x + 3, (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开为余弦级数.

解 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2x+3)dx = \frac{2}{\pi}[x^2 + 3x]_0^\pi$

$$= \frac{2}{\pi}(\pi^2 + 3\pi) = 2(\pi + 3);$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2x+3)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[\frac{2x+3}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}\cos nx]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}[\frac{2}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2}] = \frac{4}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

故 $f(x) = 2x + 3$ 在$[0,\pi]$上可展开为

$$2x + 3 = \pi + 3 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$$

$$= \pi + 3 - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

10.3.17 把函数 $f(x) = e^{2x}, (0 \leqslant x \leqslant \pi)$，展为余弦级数.

解 $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{2x}dx = \frac{2}{\pi}[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^\pi = \frac{1}{\pi}[e^{2\pi} - 1]$；

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{2x}\cos nx dx = \frac{2}{\pi}[\frac{e^{2x}(2\cos nx + \sin nx)}{2^2 + n^2}]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi(4+n^2)}[e^{2\pi} \cdot 2\cos n\pi - 2]$$

$$=\frac{4}{\pi(4+n^2)}[(-1)^n e^{2\pi}-1].$$

因为 $f(x)=e^{2x}$ 在$[0,\pi]$上连续,因此在$[0,\pi]$上有

$$e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2\pi}-1}{4+n^2}\cos nx.$$

10.3.18　把函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数.

解　$a_0=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^h 1\cdot dx+\int_h^\pi 0\cdot dx\right\}=\frac{2h}{\pi}$;

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^h\cos nx\,dx+\int_h^\pi 0\cdot\cos nx\,dx\right\}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^h=\frac{2\sin nh}{n\pi}.$$

由于 $f(x)$ 在$[0,h)$,$(h,\pi]$上分段连续,且 $x=h$ 为第一类间断点,因此在$[0,h)$及$(h,\pi]$上有展开式

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nh}{n\pi}\cos nx=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx.$$

10.3.19　把函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x+1, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数.

解　$a_0=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+1)dx\right\}=\frac{2}{\pi}\left\{[x]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{2}+\pi-\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{3\pi^2}{8}+\pi\right)=2\left(\frac{3\pi}{8}+1\right);$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{x+1}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{\frac{\pi}{2}+1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\}.$$

因为 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2},\pi]$上连续，且在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处是第一类间断点，因而在$[0,\frac{\pi}{2})$及$(\frac{\pi}{2},\pi]$上有展开式

$$f(x)=1+\frac{3}{8}\pi$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n^2}[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}]-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}\}\cdot\cos nx.$$

10.3.20　把函数 $f(x)=\begin{cases}-5,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 2x^2,\ \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数.

解　$$a_0=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-5)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2x^2dx\right\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left\{[-5x]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\frac{2}{3}x^3]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}$$
$$=\frac{2}{\pi}(-\frac{5\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi^3-\frac{\pi^3}{12})$$
$$=\frac{2}{\pi}(-\frac{5\pi}{2}+\frac{7}{12}\pi^3)=-5+\frac{7}{6}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}-5\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2x^2\cos nxdx\right\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\{[\frac{-5\sin nx}{n}]_0^{\frac{\pi}{2}}+[\frac{2x^2}{n}\sin nx+\frac{4x}{n^2}\cos nx-\frac{4}{n^3}\sin nx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\{-\frac{5}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi-\frac{\pi^2}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}$$
$$+\frac{4}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\{(-\frac{5}{n}-\frac{\pi^2}{2n}+\frac{4}{n^3})\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n$$
$$-\frac{2\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\}.$$

因为 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$及$(\frac{\pi}{2},\pi]$上分段连续，且 $x=\frac{\pi}{2}$ 是第一类间断点，因此在$[0,\frac{\pi}{2})$及$(\frac{\pi}{2},\pi]$上有展开式

$$f(x)=-\frac{5}{2}+\frac{7}{12}\pi^2+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{(-1)^n\frac{4\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+(\frac{4}{n^2}-\frac{\pi^2}{2}-5)\sin\frac{n\pi}{2}\}\cos nx.$$

3. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

10. 3. 21　把函数 $f(x)=\sec x,(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4})$，展开为傅里叶级数.

解　显然，$f(x)=\sec x$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 内连续，而且是偶函数. 故

$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$.

$$a_0=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx=\frac{8}{\pi}[\ln|\text{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}[\ln|\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}|]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}[\ln|\frac{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}|]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}[\ln|\frac{1+\sin x}{\cos x}|]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}dx,\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $\cos 4nx-\cos(4nx-4x)=-2\sin(4nx-2x)\sin 2x$

$=-4\sin(4nx-2x)\sin x\cos x$

$=2[\cos(4nx-x)-\cos(4nx-3x)]\cos x$,

故 $a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}dx$

$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos(4n-1)x-\cos(4n-3)x]dx+\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{16}{\pi}[\frac{1}{4n-1}\sin(n\pi-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4n-3}\sin(n\pi-\frac{3}{4}\pi)]+a_{n-1}$$

$$= \frac{16}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}\sin\frac{3\pi}{4}\right] + a_{n-1}$$

$$= \frac{16}{\pi}(-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1}\right) + a_{n-1}$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)} + a_{n-1},\ (n = 1,2,\cdots).$$

由此递推公式，得

$$a_n = \frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + a_0$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$(n = 1,2,\cdots).$

于是，$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 内展开成的傅里叶级数为

$$\sec x = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)}\right]\cos 4nx,\ (-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}).$$

10.3.22　将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解　$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 xdx + \int_1^2 dx + \int_2^3 (3-x)dx\right] = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \int_1^2 \cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \int_2^3 (3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right)\right.$$

$$+\frac{3}{2n\pi}(\sin\frac{4n\pi}{3}-\sin\frac{2n\pi}{3})$$

$$-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}-\frac{9}{4n^2\pi^2}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{4n\pi}{3}]$$

$$=\frac{3}{2n^2\pi^2}(\cos\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{4n\pi}{3}-2),\ (n=1,2,\cdots).$$

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\sin\frac{2n\pi x}{3}dx+\int_1^2\sin\frac{2n\pi x}{3}dx+\int_2^3(3-x)\sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right]$$

$$=\frac{2}{3}[-\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$$-\frac{3}{2n\pi}(\cos\frac{4n\pi}{3}-\cos\frac{2n\pi}{3})+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{4n\pi}{3}]$$

$$=\frac{3}{2n^2\pi^2}(\sin\frac{2n\pi}{3}+\sin\frac{4n\pi}{3})=0,(n=1,2,\cdots).$$

故 $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(2-\cos\frac{2n\pi}{3}-\cos\frac{4n\pi}{3})\cos\frac{2n\pi x}{3}$

$$=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x.$$

由于 $f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 内连续，故其傅里叶级数在 $(0,3)$ 内收敛于 $f(x)$.

当 $x=0$ 或 3 时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(+0)+f(3-0)]=0=f(0)=f(3),$$

故 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上展成的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x,$$

$$(0\leqslant x\leqslant 3).$$

10.3.23　把函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x<\frac{l}{2},\\ 0, & \frac{l}{2}\leqslant x<l\end{cases}$ 展开为余弦级数.

解　作偶延拓，令 $f(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x<l,\\ f(-x), & -l\leqslant x<0,\end{cases}$ $f(x)$ 是偶函数，$b_n=0,(n=1,2,\cdots)$，则有

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos^2\frac{\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}(1+\cos\frac{2\pi x}{l})dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}[\cos\frac{(n+1)\pi x}{l} + \cos\frac{(n-1)\pi x}{l}]dx$$

$$= \frac{1}{l}[\frac{l}{(n+1)\pi}\sin\frac{(n+1)\pi x}{l} + \frac{l}{(n-1)\pi}\sin\frac{(n-1)\pi x}{l}]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{2} + \frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}]$$

$$= -\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}, \quad (n=2,3,\cdots).$$

故 $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi}{l}x$, $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

10.3.24 把函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} < x \leqslant l \end{cases}$ 展开为正弦级数.

解 $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$$= \frac{2}{l}\left\{\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\}$$

$$= \frac{2}{l}\left\{\left[\frac{-lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}} + \left[-\frac{l(l-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} - \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{\frac{l}{2}}^l\right\}$$

$$= \frac{2}{l}\{-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\}$$

$$= \frac{2}{l}\cdot\frac{2l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续，且 $f(0)=0, f(l)=0$，因此在 $[0,l]$ 上有展开式

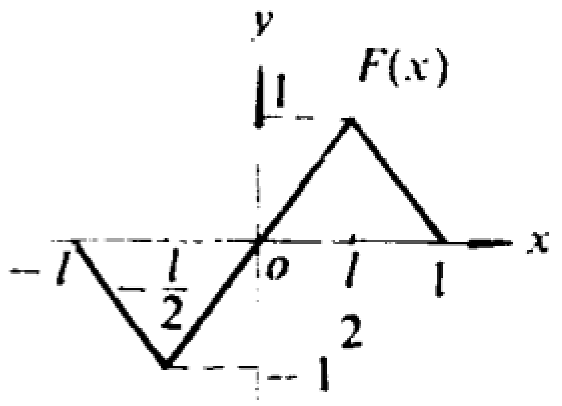
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

10.3.25　把函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{l}x, & 0<x<\frac{l}{2},\\ \frac{2}{l}(l-x), & \frac{l}{2}<x<l\end{cases}$

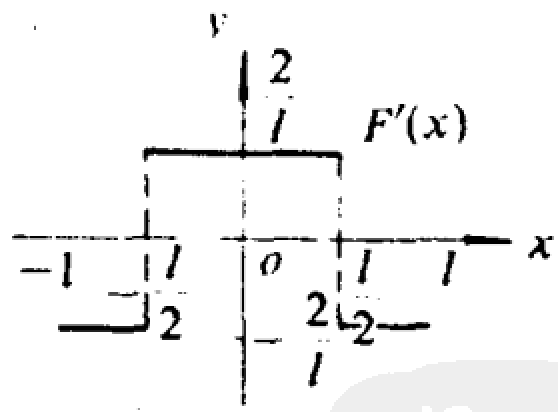
展开成正弦级数.

解　把 $f(x)$ 奇延拓到 $(-l,0)$ 得 $F(x)$，把定义在区间 $(-l,l)$ 中的函数 $F(x)$ 看作是一个以 $2l$ 为周期的周期函数.

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{2}{l}(l+x), & -l<x<-\frac{l}{2};\\ \frac{2}{l}x, & -\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2};\\ \frac{2}{l}(l-x), & \frac{l}{2}<x<l,\end{cases}$$



(a)



(b)

10.3.25 题图

$$F'(x)=\begin{cases}-\frac{2}{l}, & -l<x<-\frac{l}{2};\\ \frac{2}{l}, & -\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2};\\ -\frac{2}{l}, & \frac{l}{2}<x<l,\end{cases}$$

函数,导数	$x_1=-\frac{l}{2}$ 的跃值	$x_2=\frac{l}{2}$ 的跃值	$x_3=l$ 的跃值
$F(x)$	$f_1=0$	$f_2=0$	$f_3=0$
$F'(x)$	$f_1'=\frac{4}{l}$	$f_2'=-\frac{4}{l}$	$f_3'=0$

$a_n=0,\quad (n=0,1,2,\cdots)$;

而 $b_n=\frac{1}{n\pi}\{-\frac{1}{n\pi}[\frac{4}{l}\sin\frac{n\pi}{l}(-\frac{l}{2})+(-\frac{4}{l})\sin\frac{n\pi}{l}(\frac{l}{2})]\}$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(\sin\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2})=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}\frac{8}{n^2\pi^2}(-1)^k, & n=2k+1;\\ 0, & n=2k.\end{cases}$$

由于在$(0,l)$中有$F(x)=f(x)$,因此所求的展开式为

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

10.3.26 把$f(x)=\arcsin(\sin x)$展开为傅里叶级数.

解 $f(x)$是以2π为周期的连续周期函数. 又$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内为奇函数,从而,$a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx]$$

$$=\frac{2}{\pi}[(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+(\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k;\\ (-1)^k\frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1,\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x=\arcsin(\sin x),\quad(-\infty<x<+\infty).$$

10.3.27　在区间$(a,a+2l)$中把$f(x)=x$展开为傅里叶级数.

解　由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}xdx=2(a+l),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}-\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l},\ (n=1,2,3,\cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}+\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l},\ (n=1,2,3,\cdots).$$

故按展开定理,$f(x)$在$(a,a+2l)$中可展开为

$$a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l})=x.$$

$$(a<x<a+2l).$$

10.3.28　在区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$中,把$f(x)=x\cos x$展开为傅里叶级数.

解　因为$f(x)$为奇函数,故$a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}+\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}16}{\pi}\cdot\frac{n}{(4n^2-1)^2},\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx = x\cos x,\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

10.3.29 将周期函数 $f(x)=(x)$(其中(x)是 x 到与它最近的整数的距离)展为傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续周期函数,由于

$$a_0 = 2\int_0^1 (x)dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)dx\right] = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 2\int_0^1 (x)\cos 2n\pi xdx$$

$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 2n\pi xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\cos 2n\pi xdx\right]$$

$$= 2\left\{\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x - \frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\right\}$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ -\dfrac{2}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{(2k+1)^2}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin 2n\pi xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\sin 2n\pi xdx\right]$$

$$= 2\left\{-\left[\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x + \frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x - \frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= 0,\ (n = 1,2,3,\cdots).$$

故按展开定理,$f(x)$ 可展为

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x),\ (-\infty < x < +\infty).$$

10.3.30 将周期函数 $f(x)=|\sin x|$ 展开为傅里叶级数.

解　$f(x)$ 是以 π 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$ 为偶函数，从而 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1},\ (n = 1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

故按展开定理，$f(x)$ 可展为

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x|,\ (-\infty < x < +\infty).$$

10.3.31　把函数 $f(x) = x^3, (0 \leqslant x \leqslant \pi)$，展开为余弦级数，并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解　对函数 $f(x) = x^3$ 作偶延拓，则

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3dx = \frac{\pi^3}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3\sin nx}{n} + \frac{3x^3\cos nx}{n^2} - \frac{6x^3\sin nx}{n^3} - \frac{6\cos nx}{n^4}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{3\pi^2\cos n\pi}{n^2} - \frac{6(\cos n\pi - 1)}{n^4}\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{6}{n^4} + \left(\frac{3\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4}\right)(-1)^n\right],\ (n = 1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

所以，$a_1 = \frac{24}{\pi\cdot 1^4} - \frac{6\pi}{1^2}$, $a_2 = \frac{6\pi}{2^2}$, $a_3 = \frac{24}{\pi\cdot 3^4} - \frac{6\pi}{3^2}$, $a_4 = \frac{6\pi}{4^2}$,

$$a_5 = \frac{24}{\pi\cdot 5^4} - \frac{6\pi}{5^2},\cdots$$

故　$x^3 = \frac{\pi^3}{4} + \left(\frac{24}{\pi\cdot 1^4} - \frac{6\pi}{1^2}\right)\cos x + \frac{6\pi}{2^2}\cos 2x + \left(\frac{24}{\pi\cdot 3^4} - \frac{6\pi}{3^2}\right)\cos 3x + \cdots,$

$$x \in [0,\pi].$$

当 $x = 0$ 时，$0 = \frac{\pi^2}{3} + (\frac{24}{\pi \cdot 1^4} - \frac{6\pi}{1^2}) + \frac{6\pi}{2^2} + (\frac{24}{\pi \cdot 3^4} - \frac{6\pi}{3^2}) + \cdots$,

所以 $$\frac{24}{\pi}[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots]$$

$$= -\frac{\pi^2}{4} + 6\pi[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots],$$

而 $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},$$

所以 $$\frac{24}{\pi}[1 + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots]$$

$$= -\frac{\pi^3}{4} + 6\pi \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^3}{4},$$

即 $$1 + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}, \tag{1}$$

而 $$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots = \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots), \tag{2}$$

(1) + (2) 得，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

10.3.32 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)$,

$$(0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

证 先将 $f(x) = 3x^2 - 6\pi x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开为余弦级数，作偶延拓，故 $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2 - 6\pi x)dx = -4\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2 - 6\pi x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[3\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx - 6\pi\int_0^{\pi}x\cos nx dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}[3(\frac{\pi}{n^2} \cdot 2\cos n\pi) - 6\pi(\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2})]$$

$$= \frac{12}{n^2},\ (n = 1,2,\cdots).$$

于是有，$3x^2 - 6\pi x = -\frac{4}{2}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx$,

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$.

10.3.33　将$f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$在$(0,\pi)$上展开为正弦级数,并说明此级数在$(-\pi,\pi)$内是否一致收敛?

解　将函数$f(x)$作奇延拓,故$a_n=0$,$(n=0,1,2,\cdots)$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx \\
&= \int_0^{\pi}\sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \\
&= \frac{1}{n}(1-\cos n\pi) + \frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx \\
&= \frac{1}{n}(1-\cos n\pi) + \frac{1}{n}\cos n\pi = \frac{1}{n},\ (n=1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

$f(x)$满足狄氏条件,在$[-\pi,\pi]$上展成的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & 0<x\leqslant\pi;\\ 0, & x=0;\\ \frac{-\pi-x}{2}, & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

现在根据柯西判别准则证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$在$(-\pi,\pi)$内不一致收敛.

事实上,不论N取多大,总有正整数k_0存在,当$k_0>N$时,在$(-\pi,\pi)$内总有点$x_{k_0}=\frac{1}{2k_0}\cdot\frac{\pi}{2}$,使得

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k_0+1}^{2k_0}u_i(x_{k_0}) &= \frac{\sin\left[(k_0+1)\frac{1}{2k_0}\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{k_0+1}+\frac{\sin\left[(k_0+2)\frac{1}{2k_0}\cdot\frac{\pi}{2}\right]}{k_0+2} \\
&\quad +\cdots+\frac{\sin\left(2k_0\cdot\frac{1}{2k_0}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2k_0} \\
&> \sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{k_0+1}+\frac{1}{k_0+2}+\cdots+\frac{1}{2k_0}\right) \\
&> \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$在$(-\pi,\pi)$内不一致收敛.

10.3.34 对展开式$x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$ $(-\pi<x<\pi)$用逐项积分的方法,求函数x^2和x^3在区间$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数.

解 将原式在$[0,x]$上逐项积分,得

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^2},$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$,代入上式,即得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},(-\pi<x<\pi). \tag{1}$$

将(1)式在$[0,x]$上逐项积分并将$x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$代入,即得

$$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3},$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

10.3.35 利用公式$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t})$和$\sin x=\frac{1}{2i}(t+\bar{t})$(式中$t=e^{ix}$及$\bar{t}=e^{-ix}$),将$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$展开成傅里叶级数.

解 由于

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{q(e^{ix}-e^{-ix})}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}-\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)-(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)]$$

$$=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

又级数$q\sin x+q^2\sin 2x+q^3\sin 3x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$满足$|q^n\sin nx|\leqslant q^n$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ $(|q|<1)$收敛,故级数$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$

[illegible]

即为其和$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$(它是周期为 2π 的奇函数)的傅里叶级数，

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2},\ (-\infty<x<+\infty).$$

10.3.36 利用$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx.\ (|q|<1)$ 展开函数 $\ln(1-2q\cos x+q^2),(|q|<1)$.

解 由于 $1-2q\cos x+q^2\geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0$,
故 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，而且是周期为 2π 的偶函数，将函数对 x 求导数，得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]'=\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx,\quad(-\infty<x<+\infty).$$

对上式从 0 到 x 积分(由于上式中级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故可在有限区间上逐项积分)则有

$$\begin{aligned}\ln(1-2q\cos x+q^2)&=\int_0^x\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}dx+2\ln(1-q)\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x q^n\sin nx dx+2\ln(1-q)\\&=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}+2\ln(1-q),\end{aligned}$$

而 $\ln(1-q)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}$，于是

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx,\ (-\infty<x<+\infty).$$

由于右端的级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故它就是左端函数的傅里叶级数.

10.3.37 应当如何把给定在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间$(-\pi,\pi)$内，使得它展开成的傅里叶级数的形状为

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x,\ (-\pi<x<\pi).$$

解 由于展开式中无正弦项，故 $f(x)$ 延拓到$(-\pi,\pi)$内应满足

$f(-x)=f(x)$，函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的部分记以 $g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nxdx=0,\ (n=0,1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\cos 2nydy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nxdx=0,$$

亦即 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nxdx=0,\ (n=0,1,2,\cdots).$$

要使上式成立，显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内任何 x 值，恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即 $g(x)=-f(\pi-x)$. 总之，首先要在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内定义一个函数，使它等于 $-f(\pi-x)$；然后再按偶函数延拓到 $(-\pi,0)$，不妨将延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$，则必有

$$f(-x)=f(x),\ f(\pi-x)=-f(x),\ (-\pi<x<\pi).$$

4. 综合问题

10.3.38 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数，即 $f(\pi+x)=-f(x)$，问此函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有怎样的特性？

解 由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}[-\int_{-\pi}^{0}f(\pi+x)\cos nxdx+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx],$$
$$(n=0,1,2,\cdots).$$

故在上式右端第一个积分中，令 $x+\pi=y$，则得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nxdx],$$

于是，得 $a_{2n}=0,\ (n=0,1,2,\cdots)$. 同理，可得 $b_{2n}=0,\ (n=1,2,\cdots)$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0,\ (n=0,1,2,\cdots).\ b_{2n}=0,\ (n=1,2,\cdots).$$

10.3.39 一个具有周期为 2π 的函数 $y=f(x)$，若函数的图形

(1) 以点$(0,0)$，$(\pm\frac{\pi}{2},0)$为对称中心；

(2) 以坐标原点为对称中心并$x=\pm\frac{\pi}{2}$为对称轴；问其傅里叶系数$a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$具有怎样的特性？

解　(1) 由题设知，函数$f(x)$满足

$$f(-x)=-f(x),\quad f(\pi-x)=-f(x),$$

因此，$a_n=0$，$(n=0,1,2,\cdots)$. 且

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\sin nxdx\right\}\\&=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nxdx+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(y)\sin nydy\right]\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^n]f(x)\sin nxdx.\end{aligned}$$

于是$b_{2n-1}=0$，$(n=1,2,\cdots)$. 即$f(x)$的傅里叶级数的特性为

$$a_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_{2n-1}=0,\ (n=1,2,\cdots).$$

(2) 由题设知，函数$f(x)$满足

$$f(-x)=-f(x),\quad f(\pi-x)=f(x),$$

同(1)一样，$a_n=0$，$(n=0,1,2,\cdots)$. 而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\sin nxdx,$$

故$b_{2n}=0$，$(n=1,2,\cdots)$. 因此，$f(x)$的傅里叶系数的特性为

$$a_n=0,\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_{2n}=0,\ (n=1,2,\cdots).$$

10.3.40　若(1) 函数$\varphi(-x)=\psi(x)$，(2) 函数$\varphi(-x)=-\psi(x)$，问$\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数a_n、b_n与α_n、β_n $(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系？

解　(1) 函数$\varphi(x)$、$\psi(x)$的傅里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nxdx,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nxdx,\ \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nxdx.$$

由于$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nxdx+\int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nxdx]$，故在上式右端的两个积分中作代换$-x=y$，并将$\varphi(-x)=\psi(x)$代入，即得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\psi(x)\cos nx dx + \int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx = \alpha_n,$$

同理

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx dx + \int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx - \int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nx dx\right]$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx = -\beta_n,$$

因此，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n = \alpha_n,\ (n = 0,1,2\cdots),\ b_n = -\beta_n,\ (n = 1,2,3,\cdots).$$

(2) 由于$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx dx + \int_0^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx\right]$，故在上式右端的两个积分中作代换 $-x = y$，并将 $\varphi(-x) = -\psi(x)$ 代入，即得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}\psi(x)\cos nx dx - \int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx dx\right]$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx = -\alpha_n.$$

同理有 $b_n = \beta_n$，因此，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n = -\alpha_n,\ (n = 0,1,2\cdots),\ b_n = \beta_n,\ (n = 1,2,3,\cdots).$$

10.3.41 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n、b_n $(n = 0,1,2,\cdots)$，试计算"平移"了的函数 $f(x+h)$（h = 常数）的傅里叶系数$\overline{a_n}$，$\overline{b_n}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$.

解 在傅里叶系数$\overline{a_n}$的表达式中作代换 $x + h = y$，并注意到 $f(x)$ 的周期性，即有

$$\overline{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(y)[\cos nh\cos ny + \sin nh\sin ny]dy$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\cos nh dx + \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\sin nh dx\right]$$
$$= a_n\cos nh + b_n\sin nh.$$

同理,可求得 $\overline{b_n} = b_n\cos nh - a_n\sin nh$.

10.3.42 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n、b_n $(n = 0,1,2,\cdots)$,计算斯且克洛夫函数 $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi$ 的傅里叶系数 A_n、B_n, $(n = 0,1,2,\cdots)$.

解 由于

$$f_h(x + 2\pi) = \frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi)d\xi = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi = f_h(x),$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 2π 为周期的周期函数,于是令 $\xi = x + y$,则有

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_h(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{-h}^{h} f(x + y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{-h}^{h} dy\int_{-\pi}^{\pi} f(x + y)\cos nx dx, \end{aligned}$$

由 10.3.41 题的结果可知,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + y)\cos nx dx = a_n\cos ny + b_n\sin ny,$$

故

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(a_n\cos ny + b_n\sin ny)dy \\ &= \frac{a_n}{h}\int_{0}^{h}\cos ny dy = \begin{cases} a_n, & n = 0; \\ \dfrac{a_n\sin nh}{nh}, & n = 1,2,\cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

即 $A_0 = a_0, A_n = \frac{a_n\sin nh}{nh}$, $(n = 1,2,\cdots)$. 同理可得 $B_n = \frac{b_n\sin nh}{nh}$, $(n = 1, 2,\cdots)$.

10.3.43 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,并且 a_n、b_n, $(n = 0, 1,2,\cdots)$ 为其傅里叶系数. 求卷积函数 $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x + t)dt$ 的傅里叶系数 A_n、B_n $(n = 0,1,2,\cdots)$,并利用所得结果,推出李雅甫诺夫等式 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

解 由于

$$\begin{aligned} F(x + 2\pi) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x + 2\pi + t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x + t)dt = F(x), \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 仍是以 2π 为周期的函数，于是，有

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}dx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right]^2=a_0^2,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)(\cos n\xi\cos nt+\sin n\xi\sin nt)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_nf(t)\cos nt+b_nf(t)\sin nt]dt=a_n^2+b_n^2,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)(\sin n\xi\cos nt-\cos n\xi\sin nt)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_nf(t)\cos nt-a_nf(t)\sin nt]dt=b_na_n-a_nb_n=0.$$

由 $f(x)$ 的连续性可知，$F(x)$ 不仅以 2π 为周期，而且是连续函数，故按展开定理，注意到 $B_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$，即得 $F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$，因此，特别地，有

$$F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n,$$

但已知 $A_0=a_0^2$，$A_n=a_n^2+b_n^2$，，且

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(0+t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt,$$

故得 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$.

10.3.44 求三角级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 之和.

解　注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}$(其中$z=e^{ix}$)以及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-i\sin x)$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+i\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}$$
$$=-\ln|2\sin\frac{x}{2}|+i\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x},\qquad(1)$$

又　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\qquad(2)$$

比较(1)、(2)两式的实数部分及虚数部分,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln|2\sin\frac{x}{2}|,\ (0<x<2\pi),$$

及　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\mathrm{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\frac{x}{2})$$
$$=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{\pi-x}{2})=\frac{\pi-x}{2},\ (0<x<2\pi).$$

注　其中用到$\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$,若$z=x+iy$. 则$\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$,而$\arg z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

10.3.45　求三角级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$之和.

解　令$z=e^{ix}$,考虑级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$,注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$$

及　$e^z=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]$. 按实部和虚部分别相等的关系,即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x),\ (-\infty<x<+\infty).$$

10.3.46　利用$\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)$展成的傅里叶级数为$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\alpha^n$,($|\alpha|<1$),计算积分

$$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx.$$

解　利用上式，即得 $|a|\leqslant 1$ 时，有

$$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx=-2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}a^n dx=0,$$

当 $|a|>1$，即当 $\left|\frac{1}{a}\right|<1$ 时，有

$$\ln(1-2a\cos x+a^2)=\ln\left[a^2\left(1-2\cdot\frac{1}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\right]$$

$$=\ln a^2+\ln\left(1-\frac{2}{a}\cos a+\frac{1}{a^2}\right),$$

利用以上结果，即得当 $|a|>1$ 时，有

$$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx=\pi\ln a^2=2\pi\ln|a|.$$

10.3.47　证明：若在$[a,b]$上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

解　若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则右端的级数收敛.

由级数收敛的必要条件有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0,$$

注意到 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 线性无关，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

10.3.48　证明：对于 $f(x)$ 的傅里叶级数，不论其收敛或发散，必定总可以逐项积分，且积分后的级数之和等于 $f(x)$ 的积分的傅里叶级数.

解　考虑

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{1}$$

$$F(x)=\int_0^x\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)dx,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\tag{2}$$

显然 $F(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上连续，且

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-\pi a_0=0.$$

把 $F(x)$ 展为傅里叶级数,则有

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),\tag{3}$$

其中当 $n\geqslant 1$ 时,

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}F(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$
$$=-\frac{b_n}{n}.$$

同理,可得 $B_n=\frac{a_n}{n}$.

为了求出 A_0,利用 $0=F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n$,可以得到

$$\frac{A_0}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

因此
$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)],$$

注意到上式与 $F(x)$ 的表达式,则有

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x[a_n\cos nx+b_n\sin nx]dx.$$

10.3.49 证明:当 $0<x<\pi$ 时有

$$\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x.$$

证 等式左端为一余弦级数. 为此可以考虑将右端的函数 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x(0<x<\pi)$ 展成余弦级数,先作偶延拓,再作周期延拓,得到 $f^*(x)$.

$b_n=0,\quad(n=1,2,\cdots)$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x)\cos nxdx$$

$$=\frac{\sin nx}{n\pi}\bigg|_0^\pi-\frac{1}{4}\int_0^\pi[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$=\left[\frac{\cos(n+1)x}{4(n+1)}-\frac{\cos(n-1)x}{4(n-1)}\right]\bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}-1}{4(n+1)}-\frac{(-1)^{n-1}-1}{4(n-1)}=\frac{1+(-1)^n}{2(n-1)(n+1)}$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数；}\\ \dfrac{1}{(n-1)(n+1)}, & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

所以 $f^*(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots$，当 $0<x<\pi$ 时，由 $f(x)$ 的连续性可知，级数收敛于 $f(x)$，即

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots,\ (0<x<\pi).$$

10. 3. 50 设 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$，$f(x+10)=f(x)$，试求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解 由 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 的图形及 $f(x+10)=f(x)$ 可知，在区间 $(-5,5)$ 内，$f(x)=-x$.

于是 $f(x)$ 在 $(-5,5)$ 内为奇函数，故

$$a_n=0,\quad (n=0,1,2\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=(-1)^n\frac{10}{n\pi},\ (n=1,2,\cdots).$$

故 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}x,\ 5(2k-1)<x<5(2k+1),$

$$(k=0,\pm 1\pm 2,\cdots).$$

而当 $x=5(2k\pm 1),(k=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$ 时，$f(x)=0$.

10. 3. 51 求级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ 的和.

解 把该级数看作三角级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos kx$ 在 $x=0$ 处的值，即要找偶函数 $f(x)$，使它满足

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx=\frac{(-1)^{k-1}}{k^2},\ k=1,2,\cdots. \tag{1}$$

分部积分，得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin kx}{k}dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[f'(x)\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{\cos kx}{k^2}dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[f'(x)\frac{\cos kx}{k^2} - f''(x)\frac{\sin kx}{k^3}dx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'''(x)\frac{\sin kx}{k^3}dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[f'(x)\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'''(x)\frac{\sin kx}{k^3}dx.$$

由于 $\cos k\pi = \cos(-k\pi) = (-1)^k$，故取 $f(x) = x^2$，这时

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left[2x\cdot\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 4\cdot\frac{(-1)^k}{k^2},$$
$$k = 1,2,\cdots,$$

另外，当 $f(x) = x^2$ 时，$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$，这时级数(1)成为 $\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$，因 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，于是

$$\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 0,$$

所以
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{1}{12}\pi^2.$$

10.3.52　求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}$ 的和.

解　用分部积分公式，

$$\int f(x)\cos kx dx = f(x)\frac{\sin kx}{k} + f'(x)\frac{\cos kx}{k} - f''(x)\frac{\sin kx}{k^3} + \int f'''(x)\frac{\sin kx}{k^3}dx,$$

令 $f(x)$ 为偶函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi; \\ f(-x), & -\pi \leqslant x < 0, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点是 $x = \pm\frac{\pi}{2}$，极大值只有 $\frac{\pi^2}{4}$，极小值只

有 0,这些极值同时分别是 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上的最大值和最小值,又

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos kx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin kx}{k}+2x\frac{\cos kx}{k^2}-2\cdot\frac{\sin kx}{k^3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{4k}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{2}{k^3}\sin\frac{k\pi}{2}],\ (k=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{1}{12}\pi^2.$$

代入$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$,并考虑 $x=0$,则有

$$\frac{1}{24}\pi^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{4k}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{k^2}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{2}{k^3}\sin\frac{k\pi}{2}]\cdot\cos(k\cdot 0)=0,$$

由于 $\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2l,\\ (-1)^{l-1}, & k=2l-1;\end{cases}$

$$\cos\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^l, & k=2l;\\ 0, & k=2l-1.\end{cases}$$

故有

$$\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{2l-1}+2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)^2}-\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{(2l-1)^3}=0,$$

由 $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$,

及 $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l)^2}=-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots)=-\frac{\pi^2}{48}$

得 $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{(2l-1)^3}=\frac{\pi}{4}[\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot(-\frac{\pi^2}{48})]=\frac{\pi^3}{32}$.

10.3.53 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成傅里叶级数:(1) 按余弦展开;(2) 按正弦展开;(3) 在区间$(0,2\pi)$内展开,并利用这些展开式,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

解 (1) 由于 $b_n=0$,且 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^n\frac{4}{n^2},\ (n=1,2,\cdots).$$

故 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,\ x\in[-\pi,\pi]$$

(2) 由于 $a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],(n=1,2,\cdots).$$

故 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上按正弦展开为

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=x^2,\ x\in[0,\pi].$$

(3) 由于 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2},(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{-4\pi}{n},\ (n=1,2,\cdots).$$

故 $f(x)$ 在$(0,2\pi)$上可展开为

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=x^2,\ x\in(0,2\pi).$$

在展开式(1)中令 $x=\pi$,得

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n=\pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

在展开式(2)中，令 $x=\pi$，得 $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2}$$

将级数(1)与(2)相加，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]=\frac{\pi^2}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{3}$$

10.3.54 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，计算 $\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx$.

解
$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx=\int_0^1\ln x(1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots)dx$$
$$=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\ln x\right)dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^nx^n\ln x dx.$$

因为 $\int_0^1 x^n\ln x dx=-\frac{1}{(n+1)^2}$，$(n=0,1,2,\cdots)$，故

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^nx^n\ln x dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$
$$=\left[-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\cdots\right]$$
$$=\left(-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\cdots-\frac{1}{n^2}-\cdots\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$= -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

10.3.55　求函数$f(x)=e^{-x^2}$在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上的最小值，并求出最小值的近似值，使其误差不超过$10^{-3}$.

解　$f'(x)=-2xe^{-x^2}$，令$f'(x)=0$，得唯一驻点$x=0$，而$f(0)=1$，$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$.

因$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，令$x=-\frac{1}{4}$，得

$$e^{-\frac{1}{4}}=1+(-\frac{1}{4})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}+(-\frac{1}{6})\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{256}+\cdots$$

由$\frac{1}{6\times 64}\approx 0.00261$，$\frac{1}{24\times 256}\approx 0.00016$，取前四项就可使误差小于$10^{-3}$，故

$$e^{-\frac{1}{4}}\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{384}=0.77864.$$

因此所求的最小值为$f(\pm\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$，其近似值为0.77864.

10.3.56　根据关系式$\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$计算级数$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-2}+\cdots$的和.

解　$1=\int_0^1 x^0 dx$，$\frac{1}{4}=\int_0^1 x^3 dx$，$\frac{1}{7}=\int_0^1 x^6 dx$，$\frac{1}{10}=\int_0^1 x^9 dx\cdots$，

所以　$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-2}+\cdots$

$$=\int_0^1 x^0 dx-\int_0^1 x^3 dx+\int_0^1 x^6 dx-\cdots+(-1)^{n+1}\int_0^1 x^{3n-3}dx+\cdots,$$

因为$1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3}$，两边从0到$x$积分得

$$x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots=\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt.$$

由有理函数积分法，得

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}),$$

所以 $$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{3n-2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{3}(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}).$$

10.3.57 先计算积分 $I = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$（$n$ 为正整数），然后证明等式

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

解 令 $x = \sin t$，则有

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt$$
$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$
$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

另一方面，$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}$，则有

$$I = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k} dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^k C_n^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1}.$$

于是 $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

10.3.58 设 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$，

(1) 证明 $F(x)$ 处处连续；

(2) 若 $\varphi(x)$ 是 $F(x)$ 的原函数，且 $\varphi(0) = 0$，证明：

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15} < \varphi(\frac{\pi}{2}) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证 (1) 对任何 x，都有

$$\left|\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$收敛，依维尔斯特拉斯判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，又级数的各项$\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$内都是连续的，所以它的和$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内也是连续的，即$F(x)$处处连续.

(2) 若$\varphi(x)$是$F(x)$的原函数，且$\varphi(0)=0$，则

$$\varphi(x)=\int_0^x F(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^x \cos nx dx}{\sqrt{n^3+n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}}.$$

于是 $\varphi(\frac{\pi}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\sqrt{n^3+n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{30}}+\frac{1}{5\cdot\sqrt{5^3+5}}-\frac{1}{7\sqrt{7^3+7}}+\cdots$ 为交错级数，显然有$u_n<u_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，此级数收敛，故有$\varphi(\frac{\pi}{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

若取余项$|R_n|<\frac{1}{3\sqrt{30}}$，即$|\varphi(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}|<\frac{1}{3\sqrt{30}}$，

则有　$\varphi(\frac{\pi}{2})>\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{30}}>\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{15}$，

即　$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<\varphi(\frac{\pi}{2})<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10.3.59　设函数$f(x)=\frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\text{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}+\cdots$，

(1) 证明：$f(x)$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上连续；

(2) 计算$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

解 (1) 当$\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$时，有$\left|\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2^n}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}\text{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2^n}} = \frac{1}{4} < 1$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2^n}$收敛. 由维尔斯特拉斯判别法知，函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上一致收敛，又易见函数项级数的各项在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上是连续的，因此，函数$f(x)$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上连续.

(2) 因为函数$f(x)$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上一致收敛，故逐项积分，得

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\text{tg}\frac{x}{2}dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^2}\text{tg}\frac{x}{2^2}dx + \cdots$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{x}{2^n}dx + \cdots$$

$$= \left\{-\ln\cos\frac{x}{2} - \ln\cos\frac{x}{2^2} - \cdots - \ln\cos\frac{x}{2^n} - \cdots\right\}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\ln\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\ln\frac{\sin x}{x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{3}{2}.$$

10.3.60 设$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$，$(x>0)$，定义$A(x) = \int_0^x f(t)dt$，令$A = A(1) + A(\frac{1}{2}) + \cdots + A(\frac{1}{n}) + \cdots$，试证：$\frac{7}{24} < A < 1$.

证 考察$\ln(1+t)$的泰勒展式

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots,$$

当 $t\in(0,1)$ 时,右端的级数是一交错级数. 所以

$$-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots<0,\ \frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots>0. \tag{1}$$

即 $$\ln(1+t)<t,\ \ln(1+t)>t-\frac{t^2}{2},\ t\in(0,1]. \tag{2}$$

当 $x\in(0,1]$ 时,利用(2) 可得

$$\begin{aligned}A(x)&=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{1+t}dt>\frac{1}{1+x}\int_0^x\ln(1+t)dt\\&>\frac{1}{1+x}\int_0^x(t-\frac{t^2}{2})dt=\frac{1}{1+x}(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\\&=\frac{x^2}{1+x}\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{x}{3})\geqslant\frac{x^2}{1+x}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{3})\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x},\end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned}A&=A(1)+A(\frac{1}{2})+A(\frac{1}{3})+\cdots\\&>\frac{1}{3}(\frac{1^2}{1+1}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3^2}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots)\\&=\frac{1}{3}(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots)\\&=\frac{1}{3}[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots]\\&=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=\frac{1}{3}=\frac{8}{24}>\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

又 $A(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+t)}{1+t}dt=\frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2$,当 $x\in(0,1]$ 时,利用(2) 可得 $A(x)<\frac{1}{2}x^2$,所以

$$\begin{aligned}A&=A(1)+A(\frac{1}{2})+A(\frac{1}{3})+\cdots<\frac{1}{2}(1^2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)\\&=\frac{1}{2}[1+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2})+\cdots]\\&<\frac{1}{2}[1+2(\frac{1}{2^2})+4(\frac{1}{2^4})+\cdots]\\&=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots]=1.\end{aligned}$$

综上所述，即得 $\frac{7}{24} < A < 1$.

10.3.61 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$、$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 分别收敛于 A、B、C，且 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$，$(n = 1, 2, \cdots)$，则 $C = AB$.

证 作幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，由于当 $x = 1$ 时，它们都收敛，因此当 $|x| < 1$ 时，上述三个幂级数都收敛，设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，由

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \quad \lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B,$$

从而有 $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，$(|x| < 1)$. 且 $x = 1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 收敛，故

$$f(1)g(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

即 $C = AB$.

10.3.62 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$，直接证明 $f(x)f(y) = f(x+y)$.

证

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{x^{n_1}}{(n_1)!} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{y^{n_2}}{(n_2)!} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} C_n^{n_1} x^{n_1} y^{n-n_1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y). \end{aligned}$$

上述级数在 $|x|<+\infty$ 及 $|y|<+\infty$ 时绝对收敛.故重新组合是允许的.事实上,若 $f(x)=e^x$,等式 $f(x)f(y)=f(x+y)$ 即为指数函数的特征.

10.3.63 利用无穷乘积的敛散性,证明下列各式:

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$;

(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$;

(3) $\prod_{n=2}^{\infty}[1-\frac{2}{n(n+1)}]=\frac{1}{3}$;

(4) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$;

(5) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$, $(|x|<1)$;

(6) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

解 (1) 记 $P_n=1-\frac{1}{n^2}$,由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}P_i=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2},\ (n\to\infty),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$.

(2) 记 $P_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}$,由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}P_i=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\to\frac{2}{3},\ (n\to\infty),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

(3) 记 $P_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}$，由于部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} P_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \to \frac{1}{3},\ (n \to \infty),$$

故 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}$.

(4) 当 $x \neq 0$ 时，由于部分乘积

$$P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \to \frac{\sin x}{x},\ (n \to \infty),$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$.

(5) 由于 $(1-x)P_n = (1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n})$

$$= 1 - x^{2^{n+1}}.$$

从而（注意 $|x| < 1$），$P_n = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} \to \frac{1}{1-x}$，$(n \to \infty)$，故

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

(6) 在函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开 $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 中，令 $x = \frac{\pi}{3}$，则有

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{(3n)^2}\right] = \frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2},$$

于是得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

10.3.64　试证下列无穷乘积的收敛性，并求出其值：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$;

(2) $\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $(a>0)$;

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n(n+2)}]$.

证 (1) 由于部分乘积

$$P_n=\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}\cdot\frac{7\cdot 13}{9\cdot 11}\cdots\frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2n+7}{2n+3}\to\frac{3}{7},(n\to\infty),$$

故无穷乘积$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$收敛,其值为$\frac{3}{7}$.

(2) 由于部分乘积

$$P_n=a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-[1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n}]}\to a^{-\ln 2},\ (n\to\infty)$$

故无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$收敛,且其值为$a^{-\ln 2}$.

(3) 因 $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$,又部分乘积

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2,\ (n\to\infty).$$

故无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n(n+2)}]$收敛,其值为 2.

10.3.65 可否由乘积$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$与$\prod_{n=1}^{\infty}q_n$的收敛性得出下面乘积的收敛性.

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; (2) $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$;

(3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$;　　　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

解 (1) 不可以. 例如,乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$及$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$均收敛,但乘积$\prod_{n=1}^{\infty}[(1-\frac{1}{n^2})+(1+\frac{1}{n^2})]=\prod_{n=1}^{\infty}(2\cdot n^0)$却发散.

(2) 可以. 事实上,部分乘积 $Q_n=p_1^2\cdot p_2^2\cdots p_n^2=(p_1p_2\cdots p_n)^2$,当 $n\to\infty$ 时,其极限存在且为 p^2,故$\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$收敛,且其值为 p^2,其中 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n=p\neq 0$.

(3) 可以. 事实上,部分乘积 $Q_n=(p_1p_2\cdots p_n)(q_1q_2\cdots q_n)$,当 $n\to\infty$ 时,极限存在且为 pq. 故 $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$ 收敛,且其值为 pq,其中 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n=p\neq 0$,$\prod_{n=1}^{\infty}q_n=q\neq 0$.

(4) 可以. 事实上,部分乘积 $Q_n=\frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n}$,$(q_i\neq 0, i=1,2,\cdots)$,当 $n\to\infty$ 时,极限存在且为$\frac{p}{q}$,故 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ 收敛,且其值为$\frac{p}{q}$,其中 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n=p\neq 0$,$\prod_{n=1}^{\infty}q_n=q\neq 0$.

10.3.66 研究下列无穷乘积的收敛性.

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

(2) $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$;其中当 $n\geqslant n_0$ 时,$n^2+an+b>0$;

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 (1) 由于通项 $p_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$ 不满足收敛的必要条件 $p_n\to 1$,或者说,由于部分乘积 $p_n=\frac{1}{n!}\to 0$,$(n\to\infty)$,且每项不为零,

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散于零.

(2) 通项 $p_n=\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}=1+\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$,

令 $a_n=\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$, 当 $a_1=a$ 时, $a_n\sim\frac{1}{n^2}$, 由于 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原乘积收敛, 当 $a_1\neq a$ 时, 由于 $n^2+an+b>0$ 且 $a_n\sim\frac{a_1-a}{n}$, 故 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 发散. 从而原乘积也发散.

(3) 通项 $p_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$, 故 $\ln p_n=-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})$,

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2}),$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ 收敛, 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛, 因此, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

10.3.67　求函数 $f(x)$, 使它满足方程 $\int_x^{2x}f(x)dx=e^x-1$.

解　设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 将其代入方程得 $\int_x^{2x}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n)=e^x-1$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{2^{n+1}-1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

比较系数, 得 $a_n=\frac{1}{(2^{n+1}-1)n!}$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{n+1}-1)n!}x^n$ 的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$, 因此有

$$\int_x^{2x}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2^{n+1}-1)n!}]dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^{n+1}-1)n!}\cdot\frac{2^{n+1}-1}{n+1}x^{n+1}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x - 1.$$

故 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2^{n+1}-1)n!}$，$x \in (-\infty, +\infty)$ 为所求的函数.

10.3.68 求 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}$ 的和函数.

解 因 $\left|\frac{\cos nx}{n^2-1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2-1}$，而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ 收敛，所以此级数收敛.

若令 $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1}$，由逐项积分得

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nt}{n^2-1}dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2-1)},$$

再逐项积分，注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$（见 10.3.32 题），所以

$$\begin{aligned}\int_0^x\left(\int_0^u f(u)dt\right)du &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(n^2-1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)} \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)} \\ &= -f(x) + \frac{3x^2 - 6\pi x^2 + 2\pi^2}{12} - \cos x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)},\end{aligned}$$

由此式微分一次并令 $x = 0$，得

$$f'(0) = \left(\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}\right)'\Big|_{x=0} = -\frac{\pi}{2},$$

再微分一次，则 $f(x) = -f''(x) + \frac{1}{2} + \cos x$. 解此微分方程，由 $f(0) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$（由简单变换法求得）确定积分常数，得

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2-1} = \frac{\cos x}{4} - \left(\frac{\pi - x}{2}\right)\sin x + \frac{1}{2}.$$

10.3.69　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\cos^2 x\sin^2 x - x^2(1-x^2)^{\frac{4}{3}}\right]}{x^6}$.

解　此极限属于$\dfrac{0}{0}$型，用洛必达法则比较麻烦. 由

$$\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(4x)^{2n}$$

$$= x^2 - \frac{4^4 x^4}{8\cdot 4!} + \frac{4^6 x^6}{8\cdot 6!} - \cdots$$

$$= x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{32}{45}x^6 + \cdots,$$

和　$$x^2(1-x^2)^{\frac{4}{3}} = x^2\left[1 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \cdots\right]$$

$$= x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^6 - \cdots,$$

于是　$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\cos^2 x\sin^2 x - x^2(1-x^2)^{\frac{4}{3}}\right]}{x^6}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{32}{45}x^6 - \frac{2}{9}x^6\right) + o(x^6)}{x^6} = \frac{22}{45}.$$

6.3.70　求极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

解　当 $|x|<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n = \dfrac{1}{1-x}$，两边对 x 求导，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. 再求导，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2} + \dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$，所以

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x^3)\left[\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left[x(1-x) + 2x^2\right] = 2.$$

10.3.71 利用级数求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right).$$

解法 1 把偶函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数，因为函数 x^2 满足狄利克雷条件，故傅里叶系数

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi x^2d\sin nx\\&=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin nx\Big|_0^\pi-2\int_0^\pi x\sin nxdx\right]\\&=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi xd\cos nx=\frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos nxdx\right]\\&=\frac{4}{n^2\pi}\left[(-1)^n\pi-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi\right]\\&=(-1)^n\frac{3}{n^4},\ (n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

$$b_n=0,\ (n=1,2,\cdots).$$

所以 $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4}{n^2}\cos nx$. 再令 $x=\pi$，则得

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}(-1)^n=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\left(\pi^2-\dfrac{\pi^2}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi^2}{6}$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

解法 2 把函数 $\varphi(x)=x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上展开为余弦级数，即把 $\varphi(x)=x$ 在区间 $[-\pi,0]$ 上作偶延拓后展开为傅里叶级数，求得系数

$$b_n=0;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi;$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi xd\sin nx\\&=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin nxdx\right]=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & \text{当 } n \text{ 为奇数时；}\\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

所以，$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$，再令 $x=0$，得 $0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，从而得，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 于是

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$=[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots]$$

$$+[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{s}{4},$$

由此得 $(1-\frac{1}{4})s=\frac{\pi^2}{8}$，$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})=\frac{\pi^2}{6}.$$

10.3.72 利用级数求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4})$.

解法 1 把函数 x^4 在区间 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数，其傅里叶系数为：

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4dx=\frac{2}{5}\pi^4;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\cos nxdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^4d\sin nx$$

$$=\frac{8}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x^3d\cos nx=\frac{8}{n^2\pi}[(-1)^n\pi^3-3\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx]$$

$$=(-1)^n\frac{8\pi^2}{n^2}+\frac{48}{n^3\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=(-1)^n\frac{8\pi^2}{n^2}-(-1)^n\frac{48}{n^4};$$

$$b_n=0.$$

所以　$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4}$,

令 $x=\pi$,得 $\pi^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

利用上题结果,得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}&=\frac{1}{48}(\frac{\pi^4}{5}-\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})\\&=\frac{1}{48}(\frac{\pi^4}{5}-\pi^4+8\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6})=\frac{1}{90}\pi^4.\end{aligned}$$

即　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4})=\frac{\pi^4}{90}$.

解法 2　把函数 x^3 在区间 $[0,\pi]$ 上展开为傅里叶余弦级数,利用与解法 1 类似的方法可得同样结果,但方法较 x^4 稍繁.(略)

解法 3　由阿拉伯判别法知,$a_n=\frac{1}{n^4}>0\ (n=1,2,3\cdots)$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)&=\lim_{n\to\infty}n[\frac{(n+1)^4}{n^4}-1]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^3}=4>1.\end{aligned}$$

所以,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 是收敛的.

再将偶函数 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-2,2]$ 上展为傅里叶级数,其系数为:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2|x|dx=\int_0^2xdx=2;$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{2}\int_0^2x\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{2}{n\pi}\int_0^2xd\sin\frac{n\pi}{2}x\\&=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2\\&=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1];\ (n=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

$b_n=0,\ (n=1,2,\cdots)$.

由于函数 $f(x)=|x|$ 满足狄利克雷条件;故

$$|x|=1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-1]\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x,$$

又因 $f(x) = |x|$ 在$[-2,2]$上连续，则帕塞伐(M. A. Parseval)恒等式

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

成立，这里 $l = 2, f(x) = |x|$，故有

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|^2 dx = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}[(-1)^n - 1]^2,$$

即 $$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2 dx = 2 + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}[(-1)^n - 1]^2,$$

或 $\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$. 由此可得，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{96}\pi^4$.

再设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = s$，则由

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots \\
&= (1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots) + (\frac{1}{2^4} + \frac{2}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{2^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},
\end{aligned}$$

得 $s = \frac{1}{96}\pi^4 + \frac{1}{16}s$. 所以，$s = \frac{16}{15}\cdot\frac{1}{96}\pi^4 = \frac{1}{90}\pi^4$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots = \frac{1}{90}\pi^4,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4}) = \frac{1}{90}\pi^4.$$

解法 4　作 $\sin x$ 的幂级数展开式与它的无穷乘积展开式，令其相等，两边取对数后再作幂级数展开并整理，然后比较同次幂项的系数，同时可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{和} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.\text{(略)}$$

第十一章　微分方程

§1　微分方程的基本概念

内 容 提 要

含有自变量、未知函数与未知函数的导数的方程称为微分方程.未知函数是一元函数的微分方程,称为常微分方程,简称微分方程.它的一般形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots y^{(n)})=0.$$

微分方程中未知函数导数的最高阶数称为方程的阶.微分方程按方程的阶数可分为一阶微分方程与高阶微分方程.

使微分方程成为恒等式的函数称为方程的解.如果方程的解中独立的任意常数的个数与方程的阶数相同,则称它为方程的**通解**;根据初始条件确定出通解中的任意常数就得到方程的特解.凡用于确定运动的初始状态或表示曲线在某一点特定状态的条件,一般叫做初始条件.

在本章,如果不加说明,英文大写字母 C 均表示任意常数.

问 题 与 解 答

11.1.1　求以三参数曲线族 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 为通解的微分方程.

解　将给定的曲线方程化为

$$(x+c)y=ax+b, \tag{1}$$

对方程(1)的两边关于 x 连续求三次导数,得

[illegible] (2)

$$2y' + (x + c)y'' = 0, \tag{3}$$
$$3y'' + (x + c)y''' = 0, \tag{4}$$

从(3)、(4)两式中消去参数 c,得

$$3y'' - \frac{2y'}{y''}y''' = 0, \text{或 } y'y''' = \frac{3}{2}(y'')^2.$$

这就是所求的微分方程.

11.1.2　求平面上的圆族所满足的微分方程.

解　设平面上的圆族为

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2. \tag{1}$$

将(1)式连续对 x 求导三次,得

$$x - \alpha + (y - \beta)y' = 0; \tag{2}$$
$$1 + (y - \beta)y'' + y'^2 = 0; \tag{3}$$
$$(y - \beta)y''' + 3y''y' = 0. \tag{4}$$

从(3)、(4)两式中消去参数 β 得

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

这就是平面上的圆族所满足的微分方程.

11.1.3　有一抛物线族,其对称轴为 y 轴,且具有公共焦点(0,0),求以此曲线为通解的微分方程.

解　以 y 轴为对称轴的抛物线族的一般方程为

$$2py = x^2 + b, \tag{1}$$

焦点为$\left(0, \frac{b}{2p} + \frac{p}{2}\right)$. 因为原点(0,0)为其焦点,所以,$\frac{b}{2p} + \frac{p}{2} = 0$,从而解得

$$b = -p^2. \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,得抛物线的方程为

$$2py = x^2 - p^2. \tag{3}$$

将(3)式的两边对 x 求导,得 $2py' = 2x$,从而解得

$$p = \frac{x}{y'}. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,得

$$\frac{2xy}{y'} = x^2 - \frac{x^2}{y'^2}, \quad \text{即} \quad 2yy' = x(y'^2 - 1)$$

这就是所求的微分方程.

(二) 对下列曲线族,求满足给定初始条件的一条曲线(11.1.4—11.1.5

题)：

11.1.4 $y = C_1\sin(x - C_2)$, $y|_{x=\pi} = 1$, $y'|_{x=\pi} = 0$.

解 $y' = C_1\cos(x - C_2)$. 由初始条件，得

$$\begin{cases} C_1\sin(\pi - C_2) = 1, \\ C_1\cos(\pi - C_2) = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} C_1\sin C_2 = 1, \\ -\cos C_2 = 0. \end{cases}$$

由此解得 $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$, 或 $C_1 = -1$, $C_2 = -\frac{\pi}{2}$.

将 C_1、C_2 代入给定的曲线族方程，得 $y = -\cos x$，这即为所求的曲线方程.

11.1.5 $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = -2$.

解 $y' = -C_1e^{-x} + C_2e^x + 2C_3e^{2x}$, $y'' = C_1e^{-x} + C_2e^x + 4C_3e^{2x}$.
由初始条件，得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ -C_1 + C_2 + 2C_3 = 1, \\ C_1 + C_2 + 4C_3 = -2, \end{cases}$$

由此解得 $C_1 = -\frac{5}{6}$, $C_2 = \frac{3}{2}$, $C_3 = -\frac{2}{3}$. 将 C_1、C_2、C_3 代入给定的曲线族方程，得

$$y = \frac{1}{6}(-5e^{-x} + 9e^x - 4e^{2x}).$$

这即为所求的曲线方程.

11.1.6 验证 $y = x - 2\operatorname{arcctg}(C - x)$ 是微分方程 $y' = \cos(x - y)$ 的通解.

证 将 $y = x - 2\operatorname{arcctg}(C - x)$ 的两边对 x 求导，得

$$y' = 1 - \frac{2}{1 + (C - x)^2}.$$

因为 $x - y = 2\operatorname{arcctg}(C - x)$，所以

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos 2\operatorname{arcctg}(C - x) = 1 - 2\sin^2\operatorname{arcctg}(C - x) \\ &= 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}\operatorname{arcctg}(C - x)} = 1 - \frac{2}{1 + (C - x)^2} = y'. \end{aligned}$$

故 $y = x - 2\operatorname{arcctg}(C - x)$ 是 $y' = \cos(x - y)$ 的通解.

§2　一阶微分方程的几种可积类型

内容提要

1. 变量可分离的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=M(x)N(y) \tag{1}$$

的方程称为变量可分离的微分方程.

当 $N(y)\neq 0$ 时,将方程(1)分离变量后积分,得其通解为

$$\int\frac{dy}{N(y)}=\int M(x)dx+C.$$

2. 一阶线性微分方程

形如 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的方程称为一阶线性微分方程.当 $Q(x)\equiv 0$ 时,称为一阶线性齐次微分方程;当 $Q(x)\neq 0$ 时称为一阶线性非齐次微分方程.

一阶线性齐次微分方程

$$y'+P(x)y=0 \tag{2}$$

是变量可分离的微分方程,其通解为 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$.

一阶线性非齐次微分方程

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{3}$$

由常数变易法,得其通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right].$$

3. 齐次微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

的方程称为齐次微分方程

通过变量置换 $\frac{y}{x}=u$ 或 $y=xu$,可将齐次方程(4)化为变量可分离

的微分方程

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u),\text{ 即 }\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

解此微分方程，并换回原变量，便得齐次方程的通解.

4. 形如 $y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$ 的微分方程

形如

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}) \tag{5}$$

(其中 a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2、均为常数，且 c_1 与 c_2 不同时为零) 的微分方程可按下列方法求解：

(1) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，通过置换 $x = X + h, y = Y + k$ 可将原方程化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{(a_1X + b_1Y)}{a_2X + b_2Y}\right),$$

其中 h 与 k 可由方程组 $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$ 确定.

(2) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$，即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{\lambda}$ 时，通过置换 $a_1x + b_1y = u$，可将原方程化为变量可分离的微分方程

$$\frac{1}{b_1}(\frac{du}{dx} - a_1) = f(\frac{u + c_1}{\lambda u + c_2}),\text{ 即 }\frac{du}{b_1f(\frac{u + c_1}{\lambda u + c_2}) + a_1} = dx.$$

5. 贝努利(Bernoulli) 方程

形如

$$y' + p(x)y = Q(x)y^{\mu} \tag{6}$$

(μ 为实数，且 $\mu \neq 0,1$) 的方程称为贝努利方程.

通过变量置换 $y^{1-\mu} = u$，可将贝努里方程化为一阶线性微分方程

$$\frac{1}{1 - \mu}\cdot\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x),$$

即 $$\frac{du}{dx} + (1 - \mu)P(x)u = (1 - \mu)Q(x).$$

故贝努利方程的通解为

$$y^{1-\mu} = e^{-(1-\mu)\int p(x)dx}\left[\int(1 - \mu)Q(x)e^{-(1-\mu)\int p(x)dx}dx + C\right].$$

6. 全微分方程(恰当方程)

如果微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

的左端恰好是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分,即

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

则称该方程为全微分方程.

设函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连通区域 G 内具有一阶连续偏导数,则方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{8}$$

在区域 G 内恒成立.

全微分方程(7) 的解法如下:

(1) 观察法(分项组合法)

对于较简单的全微分方程(7),可以将方程左端的 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 重新分项组合,凑成某个函数的全微分.

(2) 曲线积分法

方程(7) 是全微分方程的充要条件(8),也是曲线积分 $\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 与路径无关的充要条件,所以可以任取一条自身不相交的路径来积分,得到全微分方程(7) 的通解为

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = C,$$

即

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$$

或

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

7. 用积分因子法求解的一阶微分方程

如果微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{9}$$

不是全微分方程,即$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 但有一个适当的非零函数 $\mu = \mu(x,y)$,使得该方程乘以 $\mu(x,y)$ 后成为全微方程

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0,$$

即$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$,则称函数 $\mu(x,y)$ 为该方程的积分因子.

函数 $\mu(x,y)$ 是方程(9) 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{10}$$

在比较简单的情形下,积分因子可以凭观察得到.

8. 用变量置换法求解的一阶微分方程

有些一阶微分方程可以通过变量置换化为前面五类中某一类一阶微分方程(变量可分离的微分方程、一阶线性微分方程、齐次微分方程、形如 $y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ 的微分方程、贝努利方程). 确定置换函数通常没有固定的法则,要根据方程的特点来确定.

问 题 与 解 答

1. 变量可分离的微分方程

求下列微分方程的通解(11. 2. 1 — 11. 2. 9 题):

11. 2. 1 $y'=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

解 分离变量,得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

积分,得所求的通解为

$$\arcsin y=\arcsin x+C.$$

11. 2. 2 $\sec^2x\,\mathrm{tg}y\,dx+\sec^2y\,\mathrm{tg}x\,dy=0$.

解 分离变量,得

$$\frac{\sec^2x}{\mathrm{tg}x}dx+\frac{\sec^2y}{\mathrm{tg}y}dy=0.$$

积分,得所求的通解为

$$\ln\mathrm{tg}x+\ln\mathrm{tg}y=\ln c,\text{ 即 }\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=c.$$

事实上,由积分公式 $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$,应得通解为

$\ln|\mathrm{tg}x|+\ln|\mathrm{tg}y|=\ln|C|$, ($C$ 为任意常数).

即 $|\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y|=|C|$, 亦即 $\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=\pm C$.

因为 C 为任意常数,所以上式可以记作 $\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=C$.

为了简单起见，一般在不影响结果的情况下，今后对形如$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$的积分结果，均省略绝对值符号，写成$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) + C$.

11.2.3　$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

解　分离变量，得$\frac{x}{x^2 - 1}dx + \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0$. 积分，得所求的通解为$\ln(x^2 - 1) + \ln(y^2 - 1) = \ln C$，即$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$.

11.2.4　$x\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$.

解　分离变量，得

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}dy = 0$$

积分，得所求的通解为

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = C.$$

11.2.5　$\frac{dy}{dx} = 10^{x+y}$.

解　分离变量，得

$$10^{-y}dy = 10^x dx.$$

积分，得通解为

$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{C}{\ln 10}，\quad 即\ 10^{-y} = C - 10^x.$$

11.2.6　$(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$.

解　分离变量，得

$$\frac{e^x}{e^x + 1}dx + \frac{e^y}{e^y - 1}dy = 0.$$

积分，得所求的通解为

$$\ln(e^x + 1) + \ln(e^y - 1) = \ln C,$$

即

$$(e^x + 1)(e^y - 1) = C.$$

11.2.7　$y' + \sin\frac{x + y}{2} = \sin\frac{x - y}{2}$.

解　将给定方程变形为

$$y' = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}.$$

分离变量，得

$$\frac{dy}{\sin\frac{y}{2}}=-2\cos\frac{x}{2}dx.$$

积分,得通解为

$$\ln\left[\csc\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right]=-2\sin\frac{x}{2}+C_1,$$

即
$$\csc\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\frac{y}{2}=Ce^{-2\sin\frac{x}{2}},(C=e^{C_1}).$$

11.2.8　$y-xy'=a(y^2+y')$.

解　将给定方程化为

$$(a+x)y'=y-ay^2.$$

分离变量,得

$$\frac{dy}{y-ay^2}=\frac{dx}{a+x}.$$

积分,得所求的通解为

$$\ln\frac{y}{ay-1}=\ln(a+x)+\ln C.$$

即
$$\frac{y}{ay-1}=C(a+x).$$

11.2.9　$y-xy'=\pi(y^2+y')$.

解　将给定方程化为

$$(x+\pi)y'=y-\pi y^2.$$

分离变量,得

$$\frac{dy}{y-\pi y^2}=\frac{dx}{x+\pi}.$$

积分,得所求的通解为

$$\ln y-\ln(1-\pi y)=\ln(x+\pi)-\ln C$$

即
$$x=\frac{Cy}{1-\pi y}-\pi.$$

对下列微分方程,求满足给定初始条件的特解(11.2.10－11.2.12题):

11.2.10　$y'=e^{2x-y}$,　$y|_{x=0}=0$.

解法1　分离变量,得 $e^y dy=e^{2x}dx$. 积分,得通解为

$$e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

由 $y|_{x=0}=0$，确定 $C=\frac{1}{2}$. 故所求的特解为

$$e^y=\frac{1}{2}(e^{2x}+1) \text{ 或 } 2e^y-e^{2x}-1=0.$$

解法 2　分离变量，得 $e^y dy=e^{2x}dx$，积分，得

$$\int_0^y e^y dy=\int_0^x e^{2x}dx, \text{即 } e^y-1=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2},$$

亦即 $e^y=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)$. 这就是所求的特解.

11.2.11　$\sin x\frac{dy}{dx}=y\ln y,\quad y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e.$

解法 1　分离变量，得 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$. 积分，得通解为

$$\ln\ln y=\ln(\csc x-\operatorname{ctg}x)+\ln C,$$

即 $\ln y=C(\csc x-\operatorname{ctg}x)$. 由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 确定 $C=1$. 故所求特解为

$$\ln y=\csc x-\operatorname{ctg}x.$$

解法 2　分离变量，得 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$. 积分，得所求的特解为

$$\int_e^y\frac{dy}{y\ln y}=\int_{\frac{\pi}{2}}^x\frac{dx}{\sin x},$$

即

$$\ln(\ln y)=\ln(\csc x-\operatorname{ctg}x),$$

亦即

$$\ln y=\csc x-\operatorname{ctg}x.$$

11.2.12　$\frac{dy}{dx}=1-x+y^2-xy^2, y|_{x=0}=1.$

解法 1　将给定方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=(1-x)(1+y^2).$$

用分离变量法，求得原方程的通解为

$$\operatorname{arctg}y=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

由初始条件 $y(0)=1$，确定 $C=\frac{\pi}{4}$. 故所求特解为

$$\operatorname{arctg}y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}.$$

解法 2　分离变量，得

$$\frac{dy}{1+y^2}=(1-x)dx.$$

积分，得所求的特解为

$$\int_0^y \frac{dy}{1+y^2}=\int_0^x (1-x)dx$$

即

$$\operatorname{arctg} y = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}.$$

11.2.13　求满足$\frac{dy}{dx}=|y+1|+|y-1|$，$y(0)=0$的连续解.

解　当$y>1$时，原方程为$y'=2y$或$\frac{dy}{y}=2dx$，积分得$\ln y+\ln C_1=2x$，或$x=\frac{1}{2}\ln C_1 y$；

当$-1\leqslant y\leqslant 1$时，原方程为$y'=2$，积分得，$2x=y+C_2$，或$x=\frac{1}{2}(y+C_2)$；

当$y<-1$时，原方程为$y'=-2y$，或$-\frac{dy}{y}=2dx$，积分得

$$-\ln(-y)+\ln C_3=2x,\quad 或\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{C_3}{-y}.$$

由条件$y(0)=0$，得$C_2=0$. 再利用解的连续性，即

$$\lim_{y\to 1+0}\frac{1}{2}\ln C_1 y=\lim_{y\to 1-0}\frac{1}{2}y,$$

$$\lim_{y\to -1-0}\frac{1}{2}\ln\frac{C_3}{-y}=\lim_{y\to -1+0}\frac{1}{2}y,$$

由此可确定出$C_1=e$，$C_3=\frac{1}{e}$. 故所求的连续解为

$$x=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln y, & y>1;\\ \frac{1}{2}y, & -1\leqslant y\leqslant 1;\\ -\frac{1}{2}[1+\ln(-y)], & y<-1,\end{cases}$$

或
$$y=\begin{cases} e^{2x-1}, & x>\frac{1}{2};\\ 2x, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\\ -e^{-2x-1}, & x<-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. 一阶线性微分方程

11.2.14　用常数变易法解线性微分方程 $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=\cos x$.

解　先解对应的齐次线性微分方程$\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=0$. 分离变量,得
$$\frac{dy}{y}=\operatorname{tg}xdx.$$
积分,得齐次线性微分方程的通解为
$$\ln y=-\ln\cos x+\ln C,\quad 即\ y=\frac{C}{\cos x}$$

设给定的非齐次方程的通解为 $y=\frac{C(x)}{\cos x}$,代入该方程并整理化简,得
$$C'(x)=\cos^2 x.$$
积分得 $C(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 故原方程的通解为
$$y=\frac{1}{\cos x}(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C).$$

求下列微分方程的通解(11.2.15—11.2.29 题):

11.2.15　$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=1$.

解　设 $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=1$,则所求通解为
$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1]=e^{-\int\frac{dx}{x}}(\int e^{\int\frac{dx}{x}}dx+C_1)$$
$$=e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}dx+C_1\right)=\frac{1}{x}\left(\int xdx+C\right)=\frac{1}{x}(\frac{x^2}{2}+C_1),$$
即
$$x^2-2xy=C.$$

11.2.16　$xy'+y=x^2+3x+2$.

解　原方程变形为 $y' + \frac{y}{x} = x + 3 + \frac{2}{x}$. 其通解为

$$y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int(x + 3 + \frac{2}{x})e^{\int\frac{dx}{x}}dx + C\right]$$
$$= e^{-\ln x}\left[\int(x + 3 + \frac{2}{x})e^{\ln x}dx + C\right]$$
$$= \frac{1}{x}\left[\int(x^2 + 3x + 2)dx + C\right]$$
$$= \frac{1}{x}(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C),$$

即
$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}.$$

11.2.17　$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$.

解　原方程变形为 $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{4x^2}{x^2+1}$. 其通解为

$$y = e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}\left(\int\frac{4x^2}{x^2+1}e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx + C\right)$$
$$= e^{-\ln(x^2+1)}\left(\int\frac{4x^2}{x^2+1}e^{\ln(x^2+1)}dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x^2+1}\left(\int 4x^2dx + C\right) = \frac{1}{x^2+1}(\frac{4}{3}x^3 + C),$$

即
$$y = \frac{1}{x^2+1}(\frac{4}{3}x^3 + C)$$

11.2.18　$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

解　所求的通解为

$$y = e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}\left[\int\frac{1}{x(1+x^2)}e^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx + C\right]$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\left[\int\frac{1}{x(1+x^2)}e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}dx + C\right]$$
$$= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + C\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C\right),$$

即
$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+C)$$

11.2.19　$\frac{dy}{dx}=2xy-x^3+x.$

解　原方程变形为$\frac{dy}{dx}-2xy=-x^3+x$,其通解为

$$y=e^{-\int(-2x)dx}[\int(-x^3+x)e^{\int(-2x)dx}dx+C]$$
$$=e^{x^2}[\int(-x^3+x)e^{-x^2}dx+C]$$
$$=e^{x^2}(\frac{x^2}{2}e^{-x^2}+C)=Ce^{x^2}+\frac{x^2}{2},$$

即
$$y=Ce^{x^2}+\frac{x^2}{2}.$$

11.2.20　$y+3+\text{ctg}x\frac{dy}{dx}=0.$

解法1　将原方程改写为$\frac{dy}{dx}+y\text{tg}x=-3\text{tg}x$. 这是线性方程,其通解为

$$y=e^{-\int\text{tg}xdx}[\int(-3\text{tg}x)e^{\int\text{tg}xdx}dx+C]=C\cos x-3,$$

即
$$y=C\cos x-3.$$

解法2　将原方程分离变量,得$\frac{dy}{y+3}=-\text{tg}xdx$,
积分,得通解为

$$\ln(y+3)=\ln\cos x+\ln C,\text{即 } y+3=C\cos x.$$

11.2.21　$y'+y\text{tg}x=\sin 2x.$

解　所求通解为

$$y=e^{-\int\text{tg}xdx}(\int\sin 2xe^{\int\text{tg}xdx}dx+C)$$
$$=e^{\ln\cos x}(\int\sin 2xe^{-\ln\cos x}dx+C)=\cos x\left(2\int\sin xdx+C\right)$$
$$=\cos x(-2\cos x+C)=C\cos x-2\cos^2x,$$

即
$$y=C\cos x-2\cos^2x.$$

11.2.22　$\cos^2x\frac{dy}{dx}+y=\text{tg}x.$

解　$$\frac{dy}{dx}+y\sec^2x=\mathrm{tg}x\sec^2x,$$

其通解为

$$y=e^{-\int\sec^2xdx}\left(\int\mathrm{tg}x\sec^2xe^{\int\sec^2xdx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\mathrm{tg}x}\left(\int\mathrm{tg}x\sec^2xe^{\mathrm{tg}x}dx+C\right)$$

$$=e^{-\mathrm{tg}x}[(\mathrm{tg}x-1)e^{\mathrm{tg}x}+C]=\mathrm{tg}x-1+Ce^{-\mathrm{tg}x},$$

即　$$y=\mathrm{tg}x-1+Ce^{-\mathrm{tg}x}$$

11.2.23　$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0.$

解　原方程化为 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$,其通解为

$$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left(\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}\left(\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\ln(x^2-1)}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left(\int\cos xdx+C\right)=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C),$$

即　$$y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C),\text{ 或 }y(x^2+1)-\sin x=C.$$

11.2.24　$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}.$

解　所求的通解为

$$y=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\int e^{-x}e^{x}dx+C\right)$$

$$=e^{-x}(x+C),$$

即　$$y=Ce^{-x}+xe^{-x}.$$

11.2.25　$x^2y'-y=x^2e^{x-\frac{1}{x}}.$

解　原方程化为 $y'-\frac{y}{x^2}=e^{x-\frac{1}{x}}$,其通解为

$$y=e^{\int\frac{dx}{x^2}}\left(\int e^{x-\frac{1}{x}}\cdot e^{-\int\frac{dx}{x^2}}dx+C\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\left(\int e^{x-\frac{1}{x}}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx+C\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\left(\int e^{x}dx+C\right)=e^{-\frac{1}{x}}(e^x+C),$$

即　$$y=e^{-\frac{1}{x}}(e^x+C).$$

11.2.26 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$.

解法 1　将给定方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=1$.　(1)

方程(1)是关于变量 x 的线性方程,其通解为

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\int e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=\frac{y}{2}+\frac{C}{y}.$$

即 $x=\frac{y}{2}+\frac{C}{y}$　或 $y^2-2xy=C_1$.

解法 2　该方程是齐次方程,令 $\frac{y}{x}=u$,或 $y=xu$,则原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1},\text{即 } x\frac{du}{dx}=\frac{2u-u^2}{u-1}.\quad(2)$$

用分离变量法解方程(2),得 $x^2(u^2-2u)=C$.

令 $u=\frac{y}{x}$,得给定方程的通解为 $y^2-2xy=C$.

11.2.27 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y^2}$

解　将原方程变形为 $\frac{dx}{dy}=x-y^2$,即 $\frac{dx}{dy}-x=-y^2$.

解这个线性方程,得所求的通解为

$$x=e^{\int dy}\left[\int(-y)^2e^{-\int dy}dy+C\right]=Ce^y+y^2+2y+2.$$

11.2.28 $y^2dx-(y^2+2xy-x)dy=0$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1,\text{即}\frac{dx}{dy}+\frac{1-2y}{y^2}x=1.$$

解这个线性方程,得所求的通解为

$$x=e^{-\int\frac{1-2y}{y^2}dy}\left(\int e^{\int\frac{1-2y}{y^2}dy}dy+C\right)=Cy^2e^{\frac{1}{y}}+y^2.$$

11.2.29 $ydx+(1+y)xdy=e^ydy$

解　将原方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1+y}{y}x=\frac{e^y}{y}$. 其通解为

$$x=e^{-\int\frac{1+y}{y}dy}\left(\int\frac{e^y}{y}e^{\int\frac{1+y}{y}dy}dy+C\right)$$

$$=e^{-(\ln y+y)}\left(\int\frac{e^y}{y}e^{\ln y+y}dy+C\right)=\frac{e^{-y}}{y}\left(\int e^{2y}dy+C\right)$$

$$= \frac{e^{-y}}{y}(\frac{1}{2}e^{2y} + C) = \frac{e^y}{2y} + \frac{Ce^{-y}}{y},$$

即 $y = \frac{e^y}{2y} + \frac{Ce^{-y}}{y}$.

求下列微分方程满足给定初始条件的特解(11.2.30 — 11.2.35 题)：

11.2.30　$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x, y|_{x=1} = 0$.

解　$y = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(\int e^x e^{\int\frac{dx}{x}}dx + C\right) = e^{-\ln x}\left(\int e^x e^{\ln x}dx + C\right)$

$$= \frac{1}{x}\left(\int xe^x dx + C\right) = \frac{1}{x}[(x-1)e^x + C].$$

由 $y|_{x=1} = 0$,确定 $C = 0$. 故所求的特解为 $y = \frac{x-1}{x}e^x$.

11.2.31　$y' + y\cos x = \sin 2x,\quad y|_{x=0} = 1$.

解　$y = e^{-\int\cos x dx}\left(\int \sin 2x e^{\int\cos x dx}dx + C\right) = e^{-\sin x}\left(\int \sin 2x e^{\sin x}dx + C\right)$

$$= e^{-\sin x}[2e^{\sin x}(\sin x - 1) + C] = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}.$$

由 $y|_{x=0} = 1$,确定 $C = 3$. 故所求的特解为

$$y = 3e^{-\sin x} + 2\sin x - 2.$$

11.2.32　$\cos x\frac{dy}{dx} = y\sin x + \cos^2 x,\quad y|_{x=\pi} = 1$.

解　原方程化为 $\frac{dy}{dx} - y\operatorname{tg}x = \cos x$.

$$y = e^{\int\operatorname{tg}x dx}\left(\int \cos x e^{-\int\operatorname{tg}x dx}dx + C\right) = e^{-\ln\cos x}\left(\int \cos x e^{\ln\cos x}dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(\int\cos^2 x dx + C\right) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right).$$

由 $y|_{x=\pi} = 1$,确定 $C = -1 - \frac{\pi}{2}$. 故所求的特解为

$$y = \frac{1}{\cos x}(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - 1 - \frac{\pi}{2}),\text{或 } y = \frac{(x - \pi - 2)}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2}.$$

11.2.33　$(1 + x\sin y)y' - \cos y = 0,\quad y|_{x=0} = 0$.

解　将给定的方程改写为 $\frac{dx}{dy} - x\operatorname{tg}y = \sec y$,其通解为

$$x = e^{\int\operatorname{tg}y dy}\left(\int \sec y e^{-\int\operatorname{tg}y dy}dy + C\right) = e^{-\ln\cos y}\left(\int \sec y e^{\ln\cos y}dy + C\right)$$

$$= \frac{1}{\cos y}\left(\int dy + C\right) = \frac{y + C}{\cos y}.$$

由 $y|_{x=0} = 0$，确定 $C = 0$. 故所求的特解为 $x = \frac{y}{\cos y}$，或 $x\cos y = y$.

11.2.34　$(1-x)y' + y = x$，　$y(0) = 2$.

解　将给定的方程变形为 $y' + \frac{1}{1-x}y = \frac{x}{1-x}$，其通解为

$$y = e^{-\int \frac{dx}{1-x}}\left[\int \frac{x}{1-x}e^{\int \frac{dx}{1-x}}dx + C\right]$$

$$= 1 - (x-1)\ln(1-x) + C(1-x).$$

由 $y(0) = 2$ 确定 $C = 1$. 故所求的特解为

$$y = 1 - (x-1)\ln(1-x) + (1-x).$$

11.2.35　$xy' + (1-x)y = e^{2x}$，$(0 < x < +\infty)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 1$.

解　将给定的方程变形为

$$y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{e^{2x}}{x},\quad (0 < x < +\infty)$$

其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1-x}{x}dx}\left(\int \frac{e^{2x}}{x}e^{\int \frac{1-x}{x}dx}dx + C\right) = \frac{Ce^x + e^{2x}}{x}.$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 1$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{Ce^x + e^{2x}}{x} = 1$，得 $\lim\limits_{x\to 0^+}(Ce^x + e^{2x}) = 0$，　而

$$\lim_{x\to 0^+}(Ce^x + e^{2x}) = C + 1,$$

于是有 $C + 1 = 0$，即 $C = -1$. 故所求的特解为

$$y = \frac{e^x + e^{2x}}{x} = \frac{e^x}{x}(e^x - 1).$$

11.2.36　设 $y' + y = f(x)$，其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & x > 1, \end{cases}$ 求满足 $y(0) = 0$ 的连续函数 $y = y(x)$，在 $[0,1]$，$(1, +\infty)$ 内满足微分方程.

解　当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，原方程为 $y' + y = 1$，其通解为

$$y = e^{-\int dx}\left(\int e^{\int dx}dx + C_1\right) = C_1e^{-x} + 1.$$

当 $1 < x < +\infty$ 时，原方程为 $y' + y = 0$，其通解为 $y = C_2e^{-x}$.

综上所述，原方程的通解为

$$y=\begin{cases}1+C_1e^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ C_2e^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

所求函数 $y=y(x)$ 是给定方程满足连续和 $y(0)=0$ 两个条件的特解.

由 $y(0)=1+C_1$ 可设，$1+C_1=0$，即 $C_1=-1$，所以

$$y=\begin{cases}1-e^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ C_2e^{-x}, & x>1\end{cases},$$

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}(1-e^{-x})=1-\frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0} C_2e^{-x}=\frac{C_2}{e}.$$

由 $1-\frac{1}{e}=\frac{C_2}{e}$ 可得，$C_2=e-1$. 故所求的函数为

$$y=\begin{cases}1-e^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ (e-1)e^{-x}, & x>1\end{cases}.$$

11.2.37　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，求证：$\frac{dy}{dx}+y=f(x)$ 的所有解当 $x\to+\infty$ 时都趋于 1.

解　给出的非齐次线性方程的通解为

$$y=e^{-\int dx}\left[\int f(x)e^{\int dx}dx+C_1\right]=e^{-x}\left[\int f(x)e^{x}dx+C_1\right].$$

因为 $f(x)e^x$ 连续，所以 $\int_0^x f(x)e^xdx$ 存在. 设 $f(x)e^x$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\int_0^x f(x)e^xdx=F(x)-F(0)=\int f(x)e^xdx-F(0),$$

于是有　　$$\int f(x)e^xdx=\int_0^x f(x)e^xdx+F(0).$$

因此，通解又可以写成

$$\begin{aligned}y&=e^{-x}\left[\int_0^x f(x)e^xdx+F(0)+C_1\right]\\&=e^{-x}\left[\int_0^x f(x)e^xdx+C\right],(C=C_1+F(0)).\end{aligned}$$

为了证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$，先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)e^xdx=\infty$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，所以对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-1|<\frac{1}{2}$. 即

$$1-\frac{1}{2}<f(x)<1+\frac{1}{2}.$$

于是有 $f(x)>\frac{1}{2}$，$f(x)e^x>\frac{e^x}{2}$. 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{e^x}{2}dx=+\infty$，

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x)e^xdx=+\infty.$$

故由洛比达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)e^xdx+C}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1.$$

11.2.38　设 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个不同的解，证明它的任意一个解 $y(x)$ 满足关系式 $\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=k$，($k$ 为常数).

证　线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right],$$

其中 C 为任意常数. 对于方程的任意一个解 $y(x)$，任意常数 C 有确定的值与之对应.

设方程的两个不同的解 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 分别对应常数 C_1、C_2，且 $C_1\neq C_2$，即

$$y_1(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1\right)$$

$$y_2(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_2\right),$$

于是有
$$\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=\frac{C-C_1}{C_2-C_1}=k$$

11.2.39　求微分方程 $xy'+ay=1+x^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的解 $y(x,a)$，其中 a 为参数，并证明 $\lim\limits_{a\to0}y(x,a)$ 是方程 $xy'=1+x^2$ 的解.

解　方程 $xy'+ay=1+x^2$，即 $y'+\frac{a}{x}y=\frac{1+x^2}{x}$ 的通解为

$$y=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}x^2+Cx^{-a}.$$

由 $y(1)=1$，确定 $C=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}$，因此所求的特解为

$$y=x^{-a}+\frac{1}{a}(1-x^{-a})+\frac{1}{a+2}(x^2-x^{-a}).$$

又　$\lim\limits_{a\to0}y(x,a)=\lim\limits_{a\to0}[x^{-a}+\frac{1}{a}(1-x^{-a})+\frac{1}{a+2}(x^2-x^{-a})]$

$$=\lim_{a\to0}x^{-a}+\lim_{a\to0}\frac{1}{a}(1-x^{-a})+\lim_{a\to0}\frac{1}{a+2}(x^2-x^{-a})$$

$$=1+\ln x+\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{x^2}{2}+\ln x+\frac{1}{2},$$

于是有　$xy'=x(\frac{x^2}{2}+\ln x+\frac{1}{2})'=x^2+1,$

即　$\lim\limits_{a\to0}y(x,a)$ 是方程 $xy'=1+x^2$ 的解.

11.2.40　设 $f(x)$ 是以 ω 为周期的周期函数，李雅普诺夫证明了对于线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+ky=f(x),(k\text{ 为常数}),$$

必存在唯一的以 ω 为周期的特解，把这个解求出来.

解　由题意，即要求方程 $\frac{dy}{dx}+ky=f(x)$ 满足条件 $y(x)=y(\omega+x)$ 的特解.

给定方程的通解为

$$y(x)=e^{-\int kdx}[\int f(x)e^{\int kdx}dx+C]=e^{-kx}[\int f(x)e^{kx}dx+C],$$

于是有

$$y(x+\omega)=e^{-k(x+\omega)}[\int f(x+\omega)e^{k(x+\omega)}d(x+\omega)+C]$$

$$=e^{-kx}e^{-k\omega}[e^{k\omega}\int f(x)e^{kx}dx+C]$$

$$=e^{-kx}[\int f(x)e^{kx}dx+Ce^{-k\omega}].$$

由 $y(x)=y(x+\omega)$，得 $Ce^{-k\omega}=0$，从而 $C=0$. 故所求的特解为

$$y=e^{-kx}\int f(x)e^{kx}dx.$$

3. 齐次微分方程

求下列微分方程的通解(11.2.41 — 11.2.49 题)：

11.2.41　$y'=\frac{y-x}{y+x}$.

解　令 $\frac{y}{x}=u$，或 $y=xu$，将原方程化为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1}, \quad 即\ x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u^2}{1+u}.$$

用分离变量法解这个方程，得

$$x\sqrt{1+u^2} = Ce^{-\mathrm{arctg}u}.$$

用 $u = \frac{y}{x}$ 换回原变量，得给定方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{-\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}.$$

11.2.42 $y^2dx + (xy + x^2)dy = 0.$

解 将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{xy+x^2}. \tag{1}$$

令 $\frac{y}{x} = u$，或 $y = xu$ 将方程(1) 化为

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{2u^2+u}{u+1}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得

$$\frac{1}{2}\ln(2u+1) - \ln u = \ln x + \ln C_1,$$

即

$$\frac{\sqrt{2u+1}}{u} = C_1 x.$$

用 $u = \frac{y}{x}$ 换回原变量，得给定方程的通解为

$$2y + x = Cxy^2, \quad (C = C_1{}^2).$$

11.2.43 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$

解 令 $\frac{y}{x} = u$，或 $y = xu$，将原方程化为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1-u^2}, \ 即\ x\frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2}.$$

用分离变量法解这个方程，得

$$\frac{u}{u^2+1} = Cx,$$

故原方程的通解为

$$\frac{y}{x^2+y^2} = C, \quad 或\ x^2+y^2 = C_1 y.$$

11.2.44　$(4y+3x)\dfrac{dy}{dx}+y-2x=0.$

解　原方程为 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y-2x}{4y+3x}.$　　(1)

令 $\dfrac{y}{x}=u$,或 $y=xu$,将方程(1)化为

$$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{u-2}{4u+3},\text{即 } x\frac{du}{dx}=-\frac{4u^2+4u-2}{4u+3}. \qquad (2)$$

用分离变量法解方程(2),得

$$x^4(2u^2+2u-1)^2=C\left(\frac{2u+1-\sqrt{3}}{2u+1+\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

故原方程的通解为

$$(2y^2+2xy-x^2)^2=C\left(\frac{2y+(1-\sqrt{3})x}{2y+(1+\sqrt{3})x}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

11.2.45　$y(x^2-xy+y^2)dx+x(x^2+xy+y^2)dy=0.$

解　原方程为 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y(x^2-xy+y^2)}{x(x^2+xy+y^2)}.$　　(1)

令 $\dfrac{y}{x}=u$, 或 $y=xu$,将方程(1)化为

$$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{u(1-u+u^2)}{1+u+u^2},\text{即 } x\frac{du}{dx}=-\frac{2u(1+u^2)}{1+u+u^2}. \qquad (2)$$

用分离变量法解方程(2),得 $x^2u=Ce^{-\mathrm{arctg}u}$. 故原方程的通解为

$$xy=Ce^{-\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}.$$

11.2.46　$xy'-x\sin\dfrac{y}{x}-y=0$

解　原方程为 $y'=\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}.$　　(1)

令 $\dfrac{y}{x}=u$,或 $y=xu$,将方程(1)化为

$$u+x\frac{dy}{dx}=\sin u+u,\text{ 即 } x\frac{dy}{dx}=\sin u. \qquad (2)$$

用分离变量法解方程(2),得

$$u=2\mathrm{arctg}Cx,$$

故原方程的通解为 $y=2x\mathrm{arctg}Cx$.

11.2.47　$(x+y\cos\frac{y}{x})dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0$.

解　原方程为 $\frac{dy}{dx} = \sec\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.　(1)

令 $\frac{y}{x} = u$,或 $y = xu$,将方程(1)化为

$$u + x\frac{dy}{dx} = \sec u + u, \text{ 即 } x\frac{du}{dx} = \sec u. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得 $x = ce^{\sin u}$,故原方程的通解为

$$x = Ce^{\sin\frac{y}{x}}.$$

11.2.48　$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1+\ln y - \ln x)$.

解　原方程为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}(1+\ln\frac{y}{x})$.　(1)

令 $\frac{y}{x} = u$,或 $y = xu$,将方程(1)化为

$$u + x\frac{du}{dx} = u(1+\ln u), \text{即 } x\frac{du}{dx} = u\ln u. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得 $u = e^{Cx}$,故原方程的通解为

$$\frac{y}{x} = e^{Cx}, \text{ 或 } y = xe^{Cx}.$$

11.2.49　$x\frac{dy}{dx} - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0$.

解　当 $x > 0$,时原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{(\frac{y}{x})^2 - 1}. \tag{1}$$

令 $\frac{y}{x} = u$,或 $y = xu$,将方程(1)化为

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{u^2-1}, \text{ 即 } x\frac{du}{dx} = \sqrt{u^2-1}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$u + \sqrt{u^2-1} = Cx.$$

故原方程(1)的通解为 $y + \sqrt{y^2-x^2} = Cx^2$.

当 $x < 0$,时原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \sqrt{(\frac{y}{x})^2 - 1}. \tag{3}$$

令$\frac{y}{x}=u$,或$y=xu$,将方程(2)化为

$$x\frac{du}{dx}=-\sqrt{u^2-1}. \tag{4}$$

用分离变量法解方程(4),得

$$u+\sqrt{u^2-1}=\frac{C}{x}.$$

故方程(3)的通解为$y-\sqrt{y^2-x^2}=C$.

综上所述,原方程的通解为

$$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2,\quad (x>0),$$

或

$$y-\sqrt{y^2-x^2}=C,\quad (x<0).$$

求下列微分方程满足给定初始条件的特解(11.2.50—11.2.51题):

11.2.50　$(y^2-3x^2)dy+2xydx=0,\quad y|_{x=0}=1.$

解　原方程为$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$.　(1)

令$\frac{y}{x}=u$,或$y=xu$,将方程(1)化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{3-u^2},\text{ 即 } x\frac{du}{dx}=\frac{u^3-u}{3-u^2}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$u^{-3}(u^2-1)=Cx.$$

故原方程的通解为

$$(\frac{x}{y})^3[(\frac{y}{x})^2-1]=Cx,\text{ 即 } y^2-x^2=Cy^3.$$

由$y|_{x=0}=1$确定$C=1$.故所求的特解为$y^2-x^2=y^3$.

11.2.51　$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0, y|_{x=1}=1.$

解　原方程为$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$.　(1)

令$\frac{y}{x}=u$,或$y=xu$,将方程(1)化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1},\text{ 即 } x\frac{du}{dx}=-\frac{u^3+u^2+u+1}{u^2+2u-1}, \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$\frac{x(1+u^2)}{u+1}=C.$$

故原方程的通解为

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=C.$$

由 $y|_{x=1}=1$ 确定 $C=1$. 故所求的特解为 $\frac{x^2+y^2}{x+y}=1$.

4. 形如 $y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ 的微分方程

求下列微分方程的通解(11.2.52—11.2.59 题):

11.2.52 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y+x+5}$.

解 由 $\begin{cases}y-x+1=0,\\ y+x+5=0,\end{cases}$ 解得 $x=-2, y=-3$,

令 $x=X-2$, $y=Y-3$, 将给定的方程化为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{Y+X}. \tag{1}$$

解齐次方程(1). 令 $\frac{Y}{X}=u$, 或 $Y=Xu$, 将方程(1)化为

$$u+X\frac{du}{dX}=\frac{u-1}{u+1}, \text{ 即 } X\frac{du}{dX}=-\frac{u^2+1}{u+1}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2), 得

$$X\sqrt{u^2+1}=Ce^{-\text{arctg}u}.$$

用 $\begin{cases}X=x+2,\\ Y=y+3,\end{cases}$ $u=\frac{Y}{X}=\frac{y+3}{x+2}$ 换回原变量, 得所求的通解为

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}=Ce^{-\text{arctg}\frac{y+3}{x+2}}.$$

11.2.53 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x-2}{y+x+4}$.

解 由 $\begin{cases}y-x-2=0,\\ y+x+4=0,\end{cases}$ 解得 $x=-3, y=-1$.

令 $x=X-3, y=Y-1$, 或 $X=x+3, Y=y+1$, 将原方程化为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-X}{Y+X}. \tag{1}$$

解齐次方程. (1) 令 $\frac{Y}{X}=u$, 或 $Y=Xu$, 将方程(1)化为

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{u-1}{u+1}, \text{即 } X\frac{du}{dX} = -\frac{u^2+1}{u+1}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$X^2(1+u^2) = Ce^{-2\mathrm{arctg}u}.$$

用 $\begin{cases} X = x+3, \\ Y = y+1, \end{cases} u = \frac{Y}{X} = \frac{y+1}{x+3}$ 换回原变量,得所求的通解为

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = Ce^{-2\mathrm{arctg}\frac{y+1}{x+3}}.$$

11.2.54 $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

解 由 $\begin{cases} y+2 = 0, \\ x+y-1 = 0, \end{cases}$ 解得 $x = 3, y = -2$.

令 $x = X+3, y = Y-2$,将给定的方程化为

$$\frac{dY}{dX} = 2\left(\frac{Y}{Y+X}\right)^2. \tag{1}$$

解齐次方程(1). 令 $\frac{Y}{X} = u$,或 $Y = Xu$,将方程(1) 化为

$$u + X\frac{du}{dX} = 2\left(\frac{u}{u+1}\right)^2, \text{即 } X\frac{du}{dX} = -\frac{u^3+u}{(u+1)^2}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$Xu = Ce^{2\mathrm{arctg}u}.$$

用 $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y+2, \end{cases} u = \frac{Y}{X} = \frac{y+2}{x-3}$ 换回原变量,得所求的通解为

$$y+2 = Ce^{2\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}}.$$

11.2.55 $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\frac{dy}{dx}.$

解 原方程为 $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}.$ (1)

由 $\begin{cases} 3y-7x+7 = 0, \\ 3x-7y-3 = 0 \end{cases}$ 解得 $x = 1, y = 0$. 令 $x = X+1, y = Y$,将给定的方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-7X+3Y}{3X-7Y}. \tag{2}$$

解齐次方程(2). 令 $\frac{Y}{X} = u$,或 $Y = Xu$,将方程(2) 化为

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{-7+3u}{3-7u}, \text{即 } X\frac{du}{dX} = \frac{-7+7u^2}{3-7u}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3),得

$$X^7(u-1)^2(u+1)^5=C.$$

用$\begin{cases}X=x-1,\\ Y=y,\end{cases}$ $u=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{y}{x-1}$换回原变量，得所求的通解为

$$(y+x-1)^5(y-x+1)^2=C.$$

11.2.56　$(x+2y-4)dx-(2x+y-5)dy=0.$

解　原方程为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y-4}{2x+y-5}.$ (1)

由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ y+2x-5=0,\end{cases}$解得$x=2,y=1$. 令$x=X+2,y=Y+1$，将方程(1)化为

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2Y+X}{Y+2X}. \tag{2}$$

解齐次方程(2)令$\dfrac{Y}{X}=u$，或$Y=Xu$，将方程(2)化为

$$u+X\frac{du}{dX}=\frac{1+2u}{u+2}，即\ X\frac{du}{dX}=\frac{1-u^2}{u+2}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3)，得

$$(\frac{1+u}{1-u})^2=CX^2(1-u^2).$$

用$\begin{cases}X=x-2,\\ Y=y-1,\end{cases}$ $u=\dfrac{X}{Y}=\dfrac{x-2}{y-1}$换回原变量，得所求的通解为

$$x+y-3=C(x-y-1)^3.$$

11.2.57　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y-x+5}.$

解　令$y-x=u$或$y=u+x$，将原方程化为

$$\frac{du}{dx}+1=\frac{u+1}{u+5}，即\ \frac{du}{dx}=-\frac{4}{u+5}.$$

用分离变量法解这个方程，得

$$u^2+10u+8x=C.$$

用$u=y-x$换回原变量，得所求的通解为

$$(y-x)^2+10(y-x)+8x=C\ 或 (y-x)^2+10y-2x=C.$$

11.2.58　$(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2.$

解　原方程为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a^2}{(x+y)^2}.$ (1)

令$x+y=u$或$y=u-x$，将原方程(1)化为

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{a^2}{u^2},\text{ 即 }\frac{du}{dx}=\frac{a^2}{u^2}+1. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得

$$y+C=a\operatorname{arctg}\frac{u}{a}.$$

用 $u=y+x$ 换回原变量，得所求的通解为

$$y+C=a\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a},\text{或 }x=-y+a\operatorname{tg}\frac{y+C}{a}.$$

11.2.59　$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$.

解法 1　令 $x+y=u$ 或 $y=u-x$，将原方程化为

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u},\text{ 即 }\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+1. \tag{1}$$

用分离变量法解这个方程(1)，得

$$u-\ln(1+u)=x+C.$$

故原方程的通解为

$$x+y-\ln(1+x+y)=x+C,\text{或 }y-\ln(1+x+y)=C.$$

解法 2　将给定的方程变形为

$$\frac{dx}{dy}-x=y. \tag{2}$$

其通解为

$$x=e^{\int dy}\left(\int ye^{-\int dy}dy+C\right)=Ce^{-y}-y-1,$$

即

$$x=Ce^{-y}-y-1.$$

解法 3　方程(2)是常系数非齐次线性微分方程. 它所对应的齐次方程$\frac{dx}{dy}-x=0$ 的通解为 $X=Ce^{y}$，它的一个特解为 $x^{*}=-y-1$，故原方程的通解为 $x=Ce^{-y}-y-1$.

5. 贝努利(Bernoulli)方程

求下列微分方程的通解(11.2.60—11.2.70 题)：

11.2.60　$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.

解　令 $y^{1-\frac{1}{2}}=y^{\frac{1}{2}}=u$，将给定的贝努利方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx}-\frac{2}{x}u=\frac{x}{2}.$$

解之得

$$u = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{x}{2}e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx + C\right) = x^2(\frac{1}{2}\ln x + C).$$

故所求的通解为 $\sqrt{y} = x^2(\frac{1}{2}\ln x + C)$

11.2.61　$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}$.

解　令 $y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-\frac{1}{3}} = u$,将给定的贝努利方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx} - \frac{2}{3x}u = -x^2.$$

解之得

$$u = e^{\int \frac{2}{3x}dx}\left[\int (-x^2)e^{-\int \frac{2}{3x}dx}dx + C\right] = Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}x^3.$$

故所求的通解为 $y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}x^3$,或 $7y^{-\frac{1}{3}} = C_1x^{\frac{2}{3}} - 3x^3$.

11.2.62　$(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

解　将给定方程变形为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2y}.$$

解这个贝努利方程,令 $y^{1-(-1)} = y^2 = u$,将原方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = 1.$$

解之得

$$u = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(\int e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = Cx + x\ln x.$$

故所求的通解为 $y^2 = Cx + x\ln x$.

11.2.63　$(xy^5 - x^2y^2)dy + (x^2 - y^6)dx = 0$.

解法 1　将给定方程变形为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = y^{-2}.$$

解这个贝努利方程,令 $y^{1-(-2)} = y^3 = u$,将原方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx} - \frac{3}{x}u = 3.$$

解之得

$$u = e^{\int \frac{3}{x}dx}\left(\int 3e^{-\int \frac{3}{x}dx}dx + C\right) = Cx^3 - \frac{3}{2}x.$$

故所求的通解为 $y^3 = Cx^3 - \frac{3}{2}x$.

解法 2　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^3 + \frac{1}{x^2}}{(\frac{y}{x})^2}, \tag{1}$$

令 $\frac{y}{x} = u$ 或 $y = xu$,将方程(1) 化为

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u^2x^2}, \text{ 即 } x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2x^2}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$u^3 = -\frac{3}{2x^2} + C.$$

故所求的通解为 $y^3 = Cx^3 - \frac{3}{2}x$.

11.2.64　$xdy = y(xy - 1)dx$.

解　将给定方程变形为

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2.$$

解这个贝努利方程,令 $y^{1-2} = \frac{1}{y} = u$,将原方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -1.$$

解之得

$$u = e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(-1)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx + C\right) = Cx - x\ln x.$$

故所求的通解为 $\frac{1}{y} = Cx - x\ln x$ 或 $y = \frac{1}{Cx - x\ln x}$.

11.2.65　$3y' - y\sec x = y^4\mathrm{tg}x$.

解　令 $y^{1-4} = y^{-3} = u$,将给定的贝努利方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx} + u\sec x = -\mathrm{tg}x.$$

解之得

$$u = e^{-\int\sec xdx}\left[\int(-\mathrm{tg}x)e^{\int\sec xdx}dx + C\right] = \frac{x + C}{\sec x + \mathrm{tg}x} - 1.$$

故所求的通解为

$$y^{-3}=\frac{x+C}{\sec x+\mathrm{tg}x}-1.$$

11.2.66　$3xy'-y-3xy^4\ln x=0.$

解　将给定的方程变形为

$$3y'-\frac{1}{x}y=3y^4\ln x.$$

解这个贝努利方程，令 $y^{1-4}=y^{-3}=u$，将原方程化为线性方程

$$u'+\frac{1}{x}u=-3\ln x.$$

解之得

$$u=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(-3\ln x)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\frac{C}{x}-\frac{3}{4}x(2\ln x-1).$$

故所求的通解为

$$y^{-3}=\frac{C}{x}-\frac{3}{4}x(2\ln x-1)\text{ 或 }xy^{-3}+\frac{3}{4}x^2(2\ln x-1)=C.$$

11.2.67　$xdx=(x^2+y^2)dy.$

解　将给定的方程变形为

$$\frac{dx}{dy}-x=y^2\frac{1}{x}.$$

解这个贝努利方程，令 $x^{1-(-1)}=x^2=u$，将原方程化为线性方程

$$\frac{du}{dy}-2u=2y^2.$$

解之得

$$u=e^{-\int(-2)dy}\left[\int 2y^2e^{\int(-2)dy}dy+C\right]=Ce^{2y}-(y^2+y+\frac{1}{2}).$$

故所求的通解为 $x^2=Ce^{2y}-(y^2+y+\frac{1}{2})$.

11.2.68　$\frac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1.$

解　将给定的方程变形为

$$\frac{dx}{dy}-yx=y^3x^2. \tag{1}$$

解这个贝努利方程，令 $x^{1-2}=x^{-1}=u$，将原方程化为线性方程

$$\frac{du}{dy}+yu=-y^3.$$

解之得

$$u = e^{-\int y dy}\left[\int(-y^3)e^{\int y dy}dy + C\right] = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2.$$

故所求的通解为$\frac{1}{x} = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} - y^2 + 2.$

11.2.69 $y' = \frac{y}{x^6y^3 - x}.$

解 将给定的方程变形为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = y^2x^6.$$

解这个贝努利方程,令 $x^{1-6} = x^{-5} = u$,将方程化为线性方程

$$\frac{du}{dy} - \frac{5}{y}u = -5y^2.$$

解之得

$$u = e^{\int\frac{5}{y}dy}\left[\int(-5y^2)e^{-\int\frac{5}{y}dy}dy + C\right] = Cy^5 + \frac{5}{2}y^3.$$

故所求的通解为$\frac{1}{x^5} = Cy^5 + \frac{5}{2}y^3.$

11.2.70 $x(2x^3 + y)\frac{dy}{dx} - 6y^2 = 0$

解法 1 将给定的方程变形为

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{6y}x = \frac{1}{3y^2}x^4. \tag{1}$$

解贝努利方程(1),令 $x^{-3} = u$,将方程(1) 化为线性方程

$$\frac{du}{dy} + \frac{1}{2y}u = -\frac{1}{y^2}. \tag{2}$$

解线性方程(2),得

$$u = e^{-\int\frac{1}{2y}dy}\left[\int\left(-\frac{1}{y^2}\right)e^{\int\frac{1}{2y}dy}dy + C\right] = \frac{2}{y} + \frac{C}{\sqrt{y}}.$$

故所求的通解为 $x^{-3} = \frac{2}{y} + \frac{C}{\sqrt{y}}$,或 $-2x^3 + y = C\sqrt{y}\,x^3.$

解法 2 将给定的方程变形为 $6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0$,或

$$6x^2y^2dx - x^3(2x^3 + y)dy = 0. \tag{3}$$

令 $x^3 = X$,将方程(3) 化为

$$2y^2dX - X(2X + y)dy = 0, \tag{4}$$

解齐次方程(4). 令$\frac{X}{y} = u$,或 $X = yu$,将方程(4) 化为

$$2ydu - u(2u-1)dy = 0. \tag{5}$$

用分离变量法解方程(5),得

$$(2u-1)^2 = Cyu^2.$$

用 $u = \dfrac{X}{y} = \dfrac{x^3}{y}$ 换回原变量,得所求的通解为

$$(2x^3 - y)^2 = Cyx^6.$$

求下列微分方程满足给定初始条件的特解(11.2.71—11.2.72 题):

11.2.71　$2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2},\quad y|_{x=0} = 1.$

解　令 $y^2 = u$,将原方程化为线性方程

$$u' + 2xu = xe^{-x^2}.$$

解之得

$$u = e^{-\int 2xdx}\left[\int xe^{-x^2}\cdot e^{\int 2xdx}dx + C\right] = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

故原方程的通解为 $y^2 = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)$.

由 $y|_{x=0} = 1$,确定 $C = 1$. 故所求的特解为

$$y^2 = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right).$$

11.2.72　$\dfrac{dx}{dt} - 2tx + 2e^{-t^2}x^2 = 0, x(0) = x_0\ (x_0 \neq 0).$

解　原方程为$\dfrac{dx}{dt} - 2tx = -2e^{-t^2}x^2$. 令$\dfrac{1}{x} = u$,将原方程化为线性方程

$$\frac{du}{dt} + 2tu = 2e^{-t^2},$$

解之得

$$u = e^{-\int 2tdt}\left(\int 2e^{-t^2}\cdot e^{\int 2tdt}dt + C\right) = e^{-t^2}(2t + C).$$

故原方程的通解为

$$\frac{1}{x} = e^{-t^2}(2t + C).$$

由 $x|_{t=0} = x_0$,确定 $C = \dfrac{1}{x_0}$. 故所求的特解为

$$\frac{1}{x} = e^{-t^2}\left(2t + \frac{1}{x_0}\right),\ 或\ x = \frac{x_0e^{t^2}}{2x_0t + 1}.$$

6. 全微分方程

(1) 观察法

用观察法求下列全微分方程的通解(11.2.73—11.2.80 题):

11.2.73　$xdx + ydy - \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$

解　原方程为 $d\dfrac{x^2}{2} + d\dfrac{y^2}{2} - d\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 0$,故所求的通解为

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C \text{ 或 } x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$$

11.2.74　$\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$

解　原方程为 $d\sqrt{1 + x^2 + y^2} + d\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 0$,故所求的通解为

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C.$$

11.2.75　$2xydy = (e^x - y^2)dx.$

解　将给定方程变形为

$$(2xydy + y^2dx) - e^xdx = 0,$$

即

$$dxy^2 - de^x = 0.$$

故所求的通解为 $xy^2 - e^x = C.$

11.2.76　$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

解　将给定方程的左边重新组合,得

$$3x^2dx + 4y^3dy + (6xy^2dx + 6x^2ydy) = 0,$$

即

$$dx^3 + dy^4 + d(3x^2y^2) = 0.$$

故所求的通解为 $x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C.$

11.2.77　$(x^m + 2xy^2 + \dfrac{1}{x})dx + (y^n + 2x^2y + \dfrac{1}{y})dy = 0.$

解　将给定方程的左边重新组合,得

$$(x^m + \frac{1}{x})dx + (y^n + \frac{1}{y})dy + (2xy^2 + 2x^2y)dy = 0,$$

即

$$d(\frac{1}{m+1}x^{m+1} + \ln x) + d(\frac{1}{n+1}y^{n+1} + \ln y) + dx^2y^2 = 0.$$

故所求的通解为

$$\frac{1}{m+1}x^{m+1}+\frac{1}{n+1}y^{n+1}+\ln xy+x^2y^2=C.$$

11.2.78 $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$

解 将给定方程的左边重新组合,得

$$(\frac{2x}{y^3}dx-\frac{3x^2}{y^4}dy)+\frac{1}{y^2}dy=0,$$

即
$$d\frac{x^2}{y^3}+d(-\frac{1}{y})=0.$$

故所求的通解为

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

11.2.79 $(3x^2+y\cos x)dx+(\sin x-4y^3)dy=0.$

解 将给定方程的左边重新组合,得

$$3x^2dx-4y^3dy+(y\cos xdx+\sin xdy)=0,$$

即
$$dx^3-dy^4+dy\sin x=0.$$

故所求的通解为 $x^3-y^4+y\sin x=C.$

11.2.80 $[\cos(x+y^2)+3y]dx+[2y\cos(x+y^2)+3x]dy=0.$

解 将给定方程的左边重新组合,得

$$[\cos(x+y^2)dx+2y\cos(x+y^2)dy]+3(ydx+xdy)=0,$$

即
$$d\sin(x+y^2)+3dxy=0.$$

故所求的通解为 $\sin(x+y^2)+3xy=C.$

(2) 曲线积分法

用曲线积分法求下列全微分方程的通解(11.2.81—11.2.84题):

11.2.81 $(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=0.$

解 设 $P(x,y)=a^2-2xy-y^2$, $Q(x,y)=-(x+y)^2$,因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以给定的方程是全微分方程,其通解为

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}(a^2-2xy-y^2)dx-(x+y)^2dy=C,$$

即
$$\int_0^x a^2dx-\int_0^y(x+y)^2dy=C,$$

亦即 $a^2x-\frac{1}{3}(x+y)^3+\frac{x^3}{3}=C$,或 $a^2x-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}=C$.

11.2.82　$[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}]dx+[\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}]dy=0.$

解　设 $P(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}$，$Q(x,y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}$. 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x-y)^3}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以给定的方程是全微分方程，其通解为

$$\int_{(2,1)}^{(x,y)}[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}]dx+[\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}]dy=C_1,$$

即　$$\int_2^x[\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}]dx+\int_1^y[\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}]dy=C_1,$$

亦即　$$\ln\frac{x}{y}+\frac{xy}{x-y}=C\ (C=C_1+2+\ln 2).$$

11.2.83　$y'(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y+(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x=0.$

解　原方程即为

$$(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y dy+(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x dx=0.$$

设　$P=(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x.\ Q=(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y,$

因为　$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\sin\alpha\cos x\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以给定的方程是全微分方程，其通解为

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}(\cos x-\sin\alpha\sin y)\cos x dx+(\cos y-\sin\alpha\sin x)\cos y dy=C.$$

即　$$\int_0^x\cos^2 x dx+\int_0^y(\cos^2 y-\sin\alpha\sin x\cos y)dy=C,$$

亦即　$$\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{\sin 2y}{4}-\sin\alpha\sin x\sin y=C,$$

或　$$2(x+y)+\sin 2x+\sin 2y-\sin\alpha\sin x\sin y=C.$$

11.2.84　$$(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1)dx+(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2})dy=0.$$

解　设 $P(x,y)=\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1,$

$$Q(x,y)=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}.$$

因为　$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^3}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以给定的方程是全微分方程，其通解为

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)}\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx$$
$$+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=C_1,$$

即 $$\int_1^x\left(\sin x-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+1\right)dx$$
$$+\int_1^y\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=C_1,$$

亦即 $$\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C,\ (C=C_1+\sin 1-\cos 1).$$

7. 用积分因子法求解的一阶微分方程

利用观察法求出下列微分方程的积分因子，并求出其通解(11.2.85—11.2.100 题)：

11.2.85 $ydx-xdy=0.$

解　将给定的方程乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}$，得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=0,\text{即 } d\frac{x}{y}=0.$$

故所求的通解为 $\frac{x}{y}=C$ 或 $x=Cy$.

此外，积分因子还可以取为 $\frac{1}{x^2}$ 或 $\frac{1}{x^2+y^2}$.

11.2.86 $y(1+xy)dx-xdy=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$(ydx-xdy)+xy^2dx=0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}$，得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0,\text{即 } d\frac{x}{y}+d\frac{x^2}{2}=0.$$

故所求的通解为 $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$.

11.2.87 $y(2xy+e^x)dx-e^xdy=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$2xy^2dx+(e^xydx-e^xdy)=0. \tag{1}$$

给方程(1) 乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}$,得

$$2xdx+\frac{e^x ydx-e^x dy}{y^2}=0,\text{即 } dx^2+d\frac{e^x}{y}=0.$$

故所求的通解为 $x^2+\frac{e^x}{y}=C$ 或 $x^2y+e^x=Cy$.

11.2.88　$(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$.

解　将给定方程的左边重新组合,得

$$2xy^2dx+(y^2+y)dy+(xdy-ydx)=0, \tag{1}$$

给方程(1) 乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{y^2}$,得

$$2xdx+(1+\frac{1}{y})dy+\frac{xdy-ydx}{y^2}=0,$$

即
$$dx^2+d(y+\ln y)-d\frac{x}{y}=0.$$

故所求的通解为 $x^2+y+\ln y-\frac{x}{y}=C$.

11.2.89　$(y+x^3y+2x^2)dx+(x+4xy^4+8y^3)dy=0$.

解　将给定方程的左边重新组合,得

$$(ydx+xdy)+[(x^3y+2x^2)dx+(4xy^4+8y^3)dy]=0.$$

因为第一项是全微分 $d(xy)$,所以它的积分因子一般形式为 $1\cdot\varphi(xy)=\varphi(xy)$,它也应是第二项的积分因子,于是该积分因子须满足充要条件

$$Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

即　$[(4xy^4+8y^3)y-(x^3y+2x^2)x]\varphi'=(x^3-4y^4)\varphi$.

亦即　$(4y^4-x^3)(xy+2)\varphi'=(x^3-4y^4)\varphi$.

所以　$\varphi'=-\frac{1}{xy+2}\varphi$.

解之,得　$\varphi=e^{-\int\frac{d(xy)}{xy}}=\frac{1}{xy+2}$.

以 $\frac{1}{xy+2}$ 乘原方程,得

$$\frac{ydx+xdy}{xy+2}+x^2dx+4y^3dy=0,$$

即
$$d[\ln|xy+2|]+d(\frac{1}{3}x^3)+d(y^4)=0.$$

积分，得　$\ln(xy+2)+\frac{1}{3}x^3+y^4=C.$

11.2.90　$ydx-xdy+\ln xdx=0.$

解　将给定方程乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2}$，得

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}dx=0,\text{即 } d\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{\ln x}{x^2}dx=0.$$

积分，得所求的通解为$\frac{y}{x}+\frac{\ln x+1}{x}=C$，或 $y=Cx-\ln x-1.$

11.2.91　$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$，

解　将给定的方程变形为

$$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx. \tag{1}$$

将方程(1) 乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2}$，得

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}dx,\text{ 即 } d\,\frac{y}{x}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{dx}{x}.$$

亦即

$$\frac{d\,\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=\frac{dx}{x}$$

故所求的通解为

$$\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=\ln x+\ln C,\text{ 或 } \frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx,$$

或

$$2Cy=C^2x^2-1.$$

11.2.92　$(x^2+y)dx-xdy=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$x^2dx+(ydx-xdy)=0. \tag{1}$$

给方程(1) 乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2}$，得

$$dx+\frac{ydx-xdy}{x^2}=0,\text{即 } d\left(\frac{y}{x}\right)=dx.$$

故所求的通解为$\frac{y}{x}=x+C$ 或 $y=x^2+Cx.$

11.2.93　$(x^4e^x-2mxy^2)dx+2mx^2ydy=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$x^4e^x dx + m(2x^2ydy - 2xy^2dx) = 0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以积分因子 $\mu(x,y) = \frac{1}{x^4}$,得

$$e^x dx + m\frac{2x^2ydy - 2xy^2dx}{x^4} = 0,\text{即 } de^x + md\frac{y^2}{x^2} = 0.$$

故所求的通解为 $e^x + m\frac{y^2}{x^2} = C$,或 $x^2e^x + my^2 = Cx^2$.

11.2.94　$a(xdy + 2ydx) = xydy$.

解　将给定的方程变形为

$$x(a - y)dy + 2aydx = 0. \tag{1}$$

将方程(1)乘以积分因子 $\mu(x,y) = \frac{1}{xy}$,得

$$\frac{a - y}{y}dy + \frac{2a}{x}dx = 0.$$

积分,得所求的通解为 $a\ln y - y + 2a\ln x = C$, 或 $a\ln x^2y - y = C$.

11.2.95　$y(xy + 2x^2y^2)dx + x(xy - x^2y^2)dy = 0$.

解　将给定方程的左边重新组合,得

$$xy(ydx + xdy) + x^2y^2(2ydx - xdy) = 0. \tag{1}$$

将方程(1)乘以积分因子 $\mu(x,y) = \frac{1}{x^3y^3}$,得

$$\frac{ydx + xdy}{x^2y^2} + \frac{2ydx - xdy}{xy} = 0,\text{即 } d(-\frac{1}{xy}) + d\ln\frac{x^2}{y} = 0.$$

故所求的通解为 $-\frac{1}{xy} + \ln\frac{x^2}{y} = C$.

11.2.96　$(x + y)dx + (y - x)dy = 0$.

解　将给定方程的左边重新组合,得

$$(xdx + ydy) + (ydx - xdy) = 0,$$

即

$$\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + ydx - xdy = 0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以积分因子 $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$,得

$$\frac{1}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0,$$

即

$$\frac{1}{2}d\ln(x^2 + y^2) - d\text{arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

故所求的通解为 $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \text{arctg}\frac{y}{x} = C$,

或 $$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}},(C=e^{C_1}).$$

11.2.97　$(\sqrt{t^2+s^2}+\frac{t}{\sqrt{t^2+s^2}})dt+\frac{s}{\sqrt{t^2+s^2}}ds=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$\sqrt{t^2+s^2}dt+\frac{tdt+sds}{\sqrt{t^2+s^2}}=0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以积分因子 $\mu(s,t)=\sqrt{t^2+s^2}$，得

$$dt+\frac{tdt+sds}{t^2+s^2}=0,\text{即 } dt+\frac{1}{2}d\ln(t^2+s^2)=0.$$

故所求的通解为 $t+\frac{1}{2}\ln(t^2+s^2)=C.$

11.2.98　$(x-y^2)dx+2xydy=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$xdx+(-y^2dx+2xydy)=0. \tag{1}$$

由方程(1)的第一项分析，应取积分因子为

$$\mu(x,y)=\varphi(x).$$

给方程(1)的第二个括号内的两项 $-y^2dx+2xydy$ 乘以函数$\frac{1}{xy^2}$，得

$$\frac{1}{xy^2}(-y^2dx+2xydy)=-\frac{dx}{x}+\frac{2}{y}dy=d\ln\frac{y^2}{x}.$$

因此，由第二个括号分析，应取积分因子为 $\mu(x,y)=\frac{1}{xy^2}\psi(\frac{y^2}{x})$.

现求 $\psi(\frac{y^2}{x})$ 使得$\frac{1}{xy^2}\psi(\frac{y^2}{x})=\varphi(x)$

显然，取 $\psi(\frac{y^2}{x})=\frac{y^2}{x}$，从而确定积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2}.$$

将给定方程乘以积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{x^2}$，得

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=0,$$

即 $$d\ln x+d\frac{y^2}{x}=0.$$

故所求的通解为 $\ln x+\frac{y^2}{x}=C.$

11.2.99　$(5xy-3y^3)dx+(3x^2-7xy^2)dy=0.$

解　将给定方程的左边重新组合，得

$$(5xydx+3x^2dy)-(3y^3dx+7xy^2dy)=0. \tag{1}$$

对方程(1)左边第一个括号内的两项 $5xydx+3x^2dy$ 乘以函数$\frac{1}{x^2y}$，得

$$\frac{1}{x^2y}(5xydx+3x^2dy)=\frac{5}{x}dx+\frac{3}{y}dy=d\ln(x^5y^3).$$

因此，由第一个括号分析，应取积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2y}=\varphi(x^5y^3).$$

同理，由第二个括号分析，应取积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xy^3}\psi(x^3y^7).$$

现求 $\varphi(x^5y^3),\psi(x^3y^7)$，使得

$$\frac{1}{x^2y}\varphi(x^5y^3)=\frac{1}{xy^3}\psi(x^3y^7).$$

设 $\varphi(x^5y^3)=(x^5y^3)^\alpha,\psi(x^3y^7)=(x^3y^7)^\beta$，欲使

$$\frac{1}{x^2y}(x^5y^3)^\alpha=\frac{1}{xy^3}(x^3y^7)^\beta,\ 即\ x^{5\alpha-2}y^{3\alpha-1}=x^{3\beta-1}y^{7\beta-3},$$

由$\begin{cases}5\alpha-2=3\beta-1,\\3\alpha-1=7\beta-2\end{cases}$解得 $\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{2}$. 从而确定积分因子为

$$\mu(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

将给定方程乘以积分因子 $\mu(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$，得

$$(5x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}dx+3x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}}dy)-(3y^{\frac{7}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx+7x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}dy)=0,$$

即

$$2dx^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}-2dy^{\frac{7}{2}}x^{\frac{3}{2}}=0.$$

故所求的通解为 $x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{7}{2}}x^{\frac{3}{2}}=C.$

11.2.100　$axdy+bydx+x^my^n(lxdy+kydx)=0.$

解　把给定方程的两边分成两组，得

$$(axdy+bydx)+x^my^n(lxdy+kydx)=0.$$

对第一个括号内的两项 $axdy+bydx$，乘以函数$\frac{1}{xy}$，得

$$\frac{1}{xy}(axdy+bydx)=\frac{a}{y}dy+\frac{b}{x}dx=d\ln y^ax^b.$$

因此，由第一个括号分析，应取积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xy}\varphi(y^ax^b).$$

同理，由第二个括号分析，应取积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\psi(y^lx^k).$$

现求 $\varphi(y^ax^b)$、$\psi(y^lx^k)$，使得

$$\frac{1}{xy}\varphi(y^ax^b)=\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\psi(y^lx^k).$$

设 $\varphi=(y^ax^b)^\alpha$、 $\psi=(y^lx^k)^\beta$，欲使

$$\frac{1}{xy}(y^ax^b)^\alpha=\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}(y^lx^k)^\beta,$$

即

$$x^{b\alpha-1}y^{a\alpha-1}=x^{k\beta-m-1}y^{l\beta-n-1},$$

则要 $\begin{cases}b\alpha-1=k\beta-m-1,\\ a\alpha-1=l\beta-n-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b\alpha-k\beta=-m,\\ a\alpha-l\beta=-n.\end{cases}$ 下面分两种情况讨论：

(1) 当 $\begin{vmatrix}b & -k\\ a & -l\end{vmatrix}\neq 0$ 时，可以求得

$$\alpha=\frac{ml-nk}{ak-bl},\quad \beta=\frac{am-bn}{ak-bl}.$$

这时，对第一个括号有

$$x^{b\alpha-1}y^{a\alpha-1}(axdy+bydx)=ax^{b\alpha}y^{a\alpha-1}dy+bx^{b\alpha-1}y^{a\alpha}dx=d\left(\frac{1}{\alpha}x^{b\alpha}y^{a\alpha}\right);$$

对第二个括号有

$$\begin{aligned}&x^{k\beta-m-1}y^{l\beta-n-1}\cdot x^my^n(lxdy+kydx)\\&=lx^{k\beta}y^{l\beta-1}dy+kx^{k\beta-1}y^{l\beta}dx=d\left(\frac{1}{\beta}x^{k\beta}y^{l\beta}\right).\end{aligned}$$

故原方程的通解为 $\frac{1}{\alpha}x^{b\alpha}y^{a\alpha}+\frac{1}{\beta}x^{k\beta}y^{l\beta}=C$，其中 $\alpha=\frac{ml-nk}{ak-bl}$，$\beta=\frac{am-bn}{ak-bl}$.

(2) 当 $\begin{vmatrix}b & -k\\ a & -l\end{vmatrix}=0$ 时，设 $\frac{l}{a}=\frac{k}{b}=\lambda$，或 $l=a\lambda, k=b\lambda$，将原方程化为

$$axdy+bydx+\lambda x^my^n(axdy+bydx)=0,$$

即

$$(1+\lambda x^my^n)(axdy+bydx)=0.$$

这时,显然有积分因子

$$\mu(x,y) = [xy(1 + \lambda x^m y^n)]^{-1}.$$

故给定方程的通解为 $x^a y^b = C$.

11.2.101　导出方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 有形如 $\mu(x)$ 的积分因子的充要条件.

解　函数 $\mu(x,y)$ 是方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的积分因子的充要条件是

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

若积分因子形如 $\mu = \mu(x)$,则$\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$,于是有

$$Q\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),\text{即 } \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx.$$

故方程有形如 $\mu(x)$ 的积分因子的充要条件是$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$是 x 的函数.
这时,积分得

$$\ln\mu = \int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx + \ln C.$$

即

$$\mu(x) = Ce^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$$

类似地,可以得到方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 有形如 $\mu(y)$ 的积分因子的充要条件为$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$是 y 的函数,且

$$\mu(y) = Ce^{-\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy}.$$

这是求形如 $\mu(x)$、$\mu(y)$ 的积分因子的计算公式.

用积分因子法求下列微分方程的通解(11.2.102—11.2.106 题):

11.2.102　$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy = 0.$

解　设 $P = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

于是

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 1.$$

由 11.2.101 题知,给定方程有形如 $\mu(x)$ 的积分因子,且

$$\mu(x) = Ce^{-\int \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dx} = Ce^{\int dx} = Ce^x.$$

将给定方程乘以积分因子 $\mu(x) = e^x$，得

$$e^x(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})dx + e^x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy = 0,$$

即
$$de^x \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

故原方程的通解为 $e^x \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

11.2.103　$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$

解　设 $P = x\sin y + y\cos y, Q = x\cos y - y\sin y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

于是
$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 1.$$

由 11.2.101 题知，给定的方程有形如 $\mu(x)$ 的积分因子，且

$$\mu(x) = Ce^{\int \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dx} = Ce^{\int dx} = Ce^x.$$

将给定的方程乘以积分因子 $\mu(x) = e^x$，得

$$e^x(x\sin y + y\cos y)dx + e^x(x\cos y - y\sin y)dy = 0.$$

这是全微分方程，故给定方程的通解为

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x(x\sin y + y\cos y)dx + e^x(x\cos y - y\sin y)dy = C,$$

即
$$e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) = C.$$

11.2.104　$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

解　设 $P(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3},\quad Q(x,y) = x^2 + y^2.$

则
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

于是
$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 1.$$

由 11.2.101 题知，给定的方程有形如 $\mu(x)$ 的积分因子，且

$$\mu(x) = Ce^{\int \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dx} = Ce^{\int dx} = Ce^x,$$

将给定的方程乘以积分因子 $\mu(x) = e^x$，得

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0.$$

这是全微分方程，其通解为

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = C,$$

即原方程的通解为 $e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) = C$.

11.2.105 $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$.

解 设 $P(x,y) = 2xy^3, Q(x,y) = x^2y^2 - 1$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2,$$

于是
$$\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = \frac{2}{y}.$$

由 11.2.101 题知,给定的方程有形如 $\mu(y)$ 的积分因子,且

$$\mu(y) = Ce^{-\int \frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dy} = Ce^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{C}{y^2}.$$

将给定的方程乘以积分因子 $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$,得

$$x^2dy + 2xydx - \frac{1}{y^2}dy = 0,$$

即
$$d(x^2y) + d(\frac{1}{y}) = 0.$$

故所求的通解为 $x^2y + \frac{1}{y} = C$.

11.2.106 $xdx = (\frac{x^2}{y} - y^3)dy$.

解 设 $P = x, Q = y^3 - \frac{x^2}{y}$,则$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x}{y}$,于是

$$\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = \frac{2}{y}.$$

由 11.2.101 题知,给定的方程有形如 $\mu(y)$ 的积分因子,且

$$\mu(y) = Ce^{-\int \frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dy} = Ce^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{C}{y^2}$$

将给定的方程乘以积分因子 $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$,得

$$\frac{x}{y^2}dx + (y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$$

这是全微分方程. 故原方程的通解为

$$\int_{(0,1)}^{(x,y)} \frac{x}{y^2}dx + (y - \frac{x^2}{y^3})dy = C_1$$

即 $$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2y^2}-\frac{1}{2}=C_1,\text{或 }x^2+y^4=Cy^2.$$

11.2.107　导出方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 有形如 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件.

解　函数 $\mu(x,y)$ 是方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的积分因子的充要条件是

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

若积分因子形如 $\mu(x+y)$，设 $x+y=z$，则

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\mu}{dz},\ \frac{d\mu}{dy}=\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{du}{dz}.$$

于是有 $(Q-P)\frac{d\mu}{dz}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$，即 $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz$. 故方程有形如 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件是 $\frac{1}{Q-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ 是 $z=x+y$ 的函数，这时，积分得

$$\ln\mu=\int\frac{1}{Q-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz+C_1,$$

即 $$\mu(x+y)=\mu(z)=Ce^{\int\frac{1}{Q-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz}.$$

11.2.108　用积分因子法求微分方程 $(2x^3+3x^2y+y^2-y^3)dx+(2y^3+3xy^2+x^2-x^3)dy=0$ 的通解.

解　设 $P=2x^3+3x^2y+y^2-y^3, Q=2y^3+3xy^2+x^2-x^3$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2y-3y^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3y^2+2x-3x^2,$$

于是 $$\frac{1}{Q-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{2}{x+y}.$$

由 11.2.107 题知，所给方程有形如 $\mu(x+y)$ 的积分因子，且

$$\mu(x+y)=\mu(z)=Ce^{\int\frac{1}{Q-P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dz}$$
$$=Ce^{-\int\frac{2}{z}dz}=\frac{C}{z^2}=\frac{C}{(x+y)^2}.$$

给原方程乘以积分因子 $\mu(x+y)=\frac{1}{(x+y)^2}$，得

$$\left[2x-y+\frac{y^2}{(x+y)^2}\right]dx+\left[2y-x+\frac{x^2}{(x+y)^2}\right]dy=0,$$

即 $$2xdx+2ydy-(ydx+xdy)+\frac{x^2dy+y^2dx}{(x+y)^2}=0,$$

亦即　　$dx^2 + dy^2 - d(xy) + d\dfrac{xy}{x+y} = 0.$

故原方程的通解为

$$x^2 + y^2 - xy + \frac{xy}{x+y} = C, \text{或} \frac{x^3 + xy + y^3}{x+y} = C.$$

11.2.109　求变量可分离的微分方程 $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ 的积分因子.

解　给原方程乘以函数$\dfrac{1}{N(y)P(x)}$,得

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0.$$

这是全微分方程.故所求的积分因子为

$$\mu(x,y) = \frac{1}{N(y)P(x)}.$$

11.2.110　求线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的积分因子.

解　将给定的线性方程变形为

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0.$$

因为　　$\dfrac{\partial}{\partial y}[P(x)y - Q(x)] = P(x),$

所以由 11.2.101 题知,线性方程具有形如 $\mu(x)$ 的积分因子,且

$$\mu(x) = Ce^{\int p(x)dx}.$$

11.2.111　用积分因子法求线性微分方程 $y' - y\text{tg}x = \cos x$ 的通解.

解　由 11.2.110 题知,给定的线性方程有积分因子

$$\mu(x) = e^{-\int \text{tg}x dx} = \cos x.$$

将原方程变形为

$$dy - y\text{tg}x dx - \cos x dx = 0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以积分因子 $\mu(x) = \cos x$,得

$$\cos x dy - y\sin x dx - \cos^2 x dx = 0.$$

即　　$d(y\cos x) - \cos^2 x dx = 0.$

积分,得所求的通解为 $y\cos x - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\sin x\cos x = C.$

11.2.112　求齐次方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的积分因子,其中 P 和 Q 都是 m 次齐次函数.

解　令$\frac{y}{x}=u$，或$y=xu$，则$dy=xdu+udx$，

$P(x,y)=P(x,xu)=x^mP(1,u)$，$Q(x,y)=Q(x,xu)=x^mQ(1,u)$.
于是将原齐次方程化为

$$x^mP(1,u)dx+x^mQ(1,u)(xdu+udx)=0,$$

即
$$x^m[P(1,u)+uQ(1,u)]dx+x^{m+1}Q(1,u)du=0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以函数

$$\frac{1}{x^{m+1}[P(1,u)+uQ(1,u)]}, \tag{2}$$

就可以化为全微分方程

$$\frac{dx}{x}+\frac{Q(1,u)}{P(1,u)+uQ(1,u)}du=0.$$

这就是说，(2)式是方程(1)的积分因子. 在(2)式中令$u=\frac{y}{x}$换回原变量，就得到所求齐次方程的积分因子为

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}.$$

11.2.113　用积分因子法求齐次方程$(x-y)dx+(x+y)dy=0$的通解.

解　设$P(x,y)=x-y$，$Q(x,y)=x+y$，由11.2.112题知，给定的方程有积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xP+yQ}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

给原方程乘以积分因子$\mu(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$，得

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,$$

即
$$\frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2)+d\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0.$$

故所求的通解为$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.

11.2.114　试求贝努利方程$y'+P(x)y=Q(x)y^\mu$（μ为实数，$\mu\neq 0,1$）的积分因子.

解　给贝努利方程

$$y'+P(x)y=Q(x)y^\mu \tag{1}$$

乘以函数$\mu_1=y^{-\mu}$，得

$$(y^{-\mu})y' + P(x)y^{1-\mu} = Q(x),$$

即
$$(y^{1-\mu})' + (1-\mu)P(x)y^{1-\mu} = (1-\mu)Q(x). \tag{2}$$

方程(2)是关于 $y^{1-\mu}$ 的线性微分方程，由 11.2.110 题知，它的积分因子为

$$\mu_2 = e^{\int(1-\mu)P(x)dx}.$$

故给定的贝努利方程的积分因子为

$$\mu(x,y) = \mu_1 \cdot \mu_2 = y^{-\mu}e^{(1-\mu)\int P(x)dx}.$$

11.2.115 用积分因子法求贝努利方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2\ln x$ 的通解.

解 由 11.2.114 题知，给定的贝努利方程有积分因子

$$\mu(x,y) = y^{-2}e^{(1-2)\int\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{xy^2}.$$

将给定的贝努利方程变形为

$$dy + (\frac{y}{x} - y^2\ln x)dx = 0. \tag{1}$$

给方程(1)乘以积分因子 $\mu(x,y) = \frac{1}{xy^2}$，得

$$\frac{dy}{xy^2} + \frac{dx}{x^2y} - \frac{\ln x}{x}dx = 0,$$

即 $-\frac{xdy + ydx}{x^2y^2} + \frac{\ln x}{x}dx = 0$，亦即 $d\frac{1}{xy} + d\frac{\ln^2 x}{2} = 0$.

故所求的通解为 $\frac{1}{xy} + \frac{\ln^2 x}{2} = C$.

11.2.116 设微分方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 有解 $f(x,y) = C$ 及积分因子 $\mu(x,y)$. 证明：$\mu(x,y)\varphi(f(x,y))$ 也是该方程的积分因子，其中 φ 是任意可微的函数.

证
$$\frac{\partial\mu\varphi(f)P}{\partial y} = \mu P\varphi'\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi(f)\frac{\partial\mu P}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\mu\varphi(f)P}{\partial x} = \mu Q\varphi'\frac{\partial f}{\partial x} + \varphi(f)\frac{\partial\mu Q}{\partial x}. \tag{2}$$

因为 $\mu(x,y)$ 为原方程的积分因子，于是有

$$\frac{\partial\mu P}{\partial y} = \frac{\partial\mu Q}{\partial x}. \tag{3}$$

又因为 $f(x,y) = C$ 是原方程的解，所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

于是有
$$P\frac{\partial f}{\partial x}dx + P\frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \tag{4}$$
由原方程,得
$$Pdx = -Qdy. \tag{5}$$
将(5)式代入(4)式,得
$$Q\frac{\partial f}{\partial x} = P\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{6}$$
将(3)、(6)两式代入(2)式,得
$$\frac{\partial \mu\varphi(f)P}{\partial y} = \frac{\partial \mu\varphi(f)Q}{\partial x}.$$
故 $\mu\varphi(f(x,y))$ 是给定的方程的积分因子.

11.2.117　设函数 $f(u)$、$g(u)$ 连续、可微且 $f(u) \neq g(u)$,证明:方程 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 有积分因子
$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy[f(xy) - g(xy)]}.$$

证　因为
$$\frac{\partial[\mu(x,y)yf(xy)]}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{yf(xy)}{xy[f(xy) - g(xy)]} = \frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{[f(xy) - g(xy)]^2},$$
$$\frac{\partial[\mu(x,y)xg(xy)]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{xg(xy)}{xy[f(xy) - g(xy)]} = \frac{f(xy)g'(xy) - f'(xy)g(xy)}{[f(xy) - g(xy)]^2},$$
所以 $\mu(x,y)yf(xy)dx + \mu(x,y)xg(xy)dy = 0$ 是全微分方程,故 $\mu(x,y)$ 是给定方程的积分因子.

11.2.118　已知微分方程 $(6y + x^2y^2)dx + (8x + x^3y)dy = 0$ 具有 $y^3f(x)$ 形式的积分因子,求 $f(x)$,并求微分方程的通解.

解　将给定方程乘以 $y^3f(x)$,得
$$y^3f(x)(6y + x^2y^2)dx + y^3f(x)(8x + x^3y)dy = 0. \tag{1}$$
方程(1)为全微分方程,即设 $P = 6y^4f(x) + x^2y^5f(x)$, $Q = 8xy^3f(x) + x^3y^4f(x)$,由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,有
$$24y^3f(x) + 5x^2y^2f(x)$$
$$= 8y^3f(x) + 8xy^3f'(x) + 3x^2y^4f(x) + x^3y^4f'(x),$$

即 $xf'(x) = 2f(x)$. 解之得 $f(x) = x^2$. 于是有

$$P = 6x^2y^4 + x^4y^5, \quad Q = 8x^3y^3 + x^5y^4.$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$,得

$$u = \int P dx + \varphi(y) = \int (6x^2y^4 + x^4y^5)dx + \varphi(y)$$

$$= 2x^3y^4 + \frac{1}{5}x^5y^5 + \varphi(y).$$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$,即 $8x^3y^3 + x^5y^4 + \varphi'(y) = 8x^3y^3 + x^5y^4$,亦即 $\varphi'(y) = 0$,于是 $\varphi(y) = C_1$. 故所求的通解为 $2x^3y^4 + \dfrac{1}{5}x^5y^5 = C$.

11. 2. 119　设 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ 有形如 $\lambda(x)\mu(y)$ 的积分因子,求函数 $f(x,y)$ 的一般形式.

解　设将给定的方程改写为

$$f(x,y)dx - dy = 0.$$

因为 $\lambda(x)\mu(y)$ 是此方程的积分因子,即

$$\lambda(x)\mu(y)f(x,y)dx - \lambda(x)\mu(y)dy = 0.$$

是全微分方程,所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[\lambda(x)\mu(y)f(x,y)dx] = -\frac{\partial}{\partial x}[\lambda(x)\mu(y)dy]$$

即

$$\lambda(x)\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)f(x,y)] = -\mu(y)\frac{d\lambda(x)}{dx},$$

亦即

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)f(x,y)] = -\mu(y)\frac{d\ln\lambda(x)}{dx}.$$

将上式对 y 积分,得

$$\mu(y)f(x,y) = -\frac{d\ln\lambda(x)}{dx}\int\mu(y)dy + \varphi(x).$$

故函数的一般形式为

$$f(x,y) = -\frac{1}{\mu(y)}\left[\frac{d\ln\lambda(x)}{dx}\int\mu(y)dy + \varphi(x)\right].$$

11. 2. 120　设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$、$\mu_1(x,y)$、$\mu_2(x,y)$ 连续可微,μ_1,μ_2 是方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 的两个积分因子,且 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2} \neq$ 常数,证明:$\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$ 是该方程的通解.

证　因为 $\mu_i(x,y)(i=1,2)$ 是给定方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

的积分因子，所以

$$\frac{\partial \mu_i P}{\partial y}=\frac{\partial \mu_i Q}{\partial x} \qquad (v=1,2),$$

即

$$P\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu_1}{\partial x}=\mu_1\frac{\partial Q}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2}$$

$$P\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu_2}{\partial x}=\mu_2\frac{\partial Q}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{3}$$

解由(2)、(3) 两式组成的关于 P、Q 的二元一次方程组，得

$$P=\frac{(\mu_2\frac{\partial \mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial \mu_2}{\partial x})(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})}{\frac{\partial \mu_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-\frac{\partial \mu_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mu_2}{\partial x}},$$

$$Q=\frac{(\mu_2\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-\mu_1\frac{\partial \mu_2}{\partial y})(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})}{\frac{\partial \mu_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-\frac{\partial \mu_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mu_2}{\partial x}}$$

将 P、Q 代入方程(1) 并整理化简，得

$$(\mu_2\frac{\partial \mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial \mu_2}{\partial x})dx+(\mu_2\frac{\partial \mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial \mu_2}{\partial y})dy=0, \tag{4}$$

用 $\frac{1}{{\mu_2}^2}$ 乘以方程(4)，得 $\frac{\partial(\frac{\mu_1}{\mu_2})}{\partial x}dx+\frac{\partial(\frac{\mu_1}{\mu_2})}{\partial y}dy=0$，即 $d(\frac{\mu_1}{\mu_2})=0$. 积分，得 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=C$. 这就是方程(1) 的通解.

8. 用变量置换法求解的一阶微分方程

求下列微分方程的通解(11.2.121—11.2.145 题)：

11.2.121　$y'(x)+xy'(-x)=x$.

解　在方程

$$y'(x)+xy'(-x)=x \tag{1}$$

中，用 $-x$ 置换 x，得

$$y'(-x)-xy'(x)=-x. \tag{2}$$

由(1)、(2) 两式，得

$$(1+x^2)y'=x+x^2,\ 即\ y'=\frac{x+x^2}{1+x^2}. \tag{3}$$

将方程(3) 直接积分，得原方程的通解为

$$y = x - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$$

11.2.122　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-1)^2 + y^2}{2(x-1)y}. \tag{1}$$

令 $x - 1 = t$，将方程(1) 化为

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + y^2}{2ty}. \tag{2}$$

解齐次方程(2). 令 $\dfrac{y}{t} = u$ 或 $y = tu$，将方程(2) 化为

$$u + t\frac{du}{dt} = \frac{u^2 + 3}{2u},\ \text{即}\ t\frac{du}{dt} = \frac{3 - u^2}{2u}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3)，得

$$t(3 - u^2) = C.$$

用 $t = x - 1, u = \dfrac{y}{t} = \dfrac{y}{x-1}$ 换回原变量，得所求通解为

$$3(x-1)^2 - y^2 = C(x-1).$$

11.2.123　$(y + 1)\dfrac{dy}{dx} + x(y^2 + 2y) = x$.

解　将原方程变形为

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y^2 + 2y) + x(y^2 + 2y) = x. \tag{1}$$

令 $y^2 + 2y = u$，将方程(1) 化为

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + xu = x,\ \text{即}\ \frac{du}{dx} = 2x(1 - u). \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得 $u - 1 = Ce^{-x^2}$. 故原方程的通解为

$$y^2 + 2y - 1 = Ce^{-x^2}.$$

11.2.124　$(x + y)^2 dy - dx = 0$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)^2}. \tag{1}$$

令 $x + y = u$，或 $y = u - x$，将方程(1) 化为

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u^2},\ \text{即}\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2} + 1 \ \text{[illegible]} \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得

$$u - \text{arctg}u = x + C.$$

故原方程的通解为 $y = \text{arctg}(x + y) + C$.

11.2.125　$x\dfrac{dy}{dx} + x + \sin(x + y) = 0$.

解　令 $x + y = u$，或 $y = u - x$，将原方程化为

$$x(\frac{du}{dx} - 1) + x + \sin u = 0，即 x\frac{du}{dx} = -\sin u.$$

用分离变量法解得

$$\csc u - \text{ctg}u = \frac{C}{x}.$$

故原方程的通解为 $\csc(x + y) - \text{ctg}(x + y) = \dfrac{C}{x}$.

11.2.126　$y' = \cos(x - y)$.

解　令 $x - y = u$ 或 $y = x - u$，将原方程化为

$$1 - u' = \cos u. \tag{1}$$

用分离变量法解方程(1)，得

$$-\text{ctg}\frac{u}{2} = x - C，或 u = 2\text{arcctg}(C - x).$$

故原方程的通解为

$$x - y = 2\text{arcctg}(C - x)，或 y = x - 2\text{arcctg}(C - x).$$

11.2.127　$(x^2 - y^2 - 2y)dx + (x^2 + 2x - y^2)dy = 0$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x + y)}{(x - y)(x + y) + 2x} - 1. \tag{1}$$

令 $x + y = u, x - y = v$，或 $x = \dfrac{u + v}{2}, y = \dfrac{u - v}{2}$，将方程(1)化为

$$\frac{du - dv}{du + dv} = \frac{2u}{uv + u + v} - 1,$$

从而得到　$$\frac{dv}{du} = v(1 + \frac{1}{u}). \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得 $C\dfrac{v}{u} = e^u$. 故所求的通解为

$$\frac{x + y}{x - y}e^{x+y} = C.$$

11.2.128　$(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$.

解　将原方程变形为

$$(y^4 - 3x^2)dy + \frac{y}{2}dx^2 = 0. \tag{1}$$

令 $x^2 = u$ 将方程(1) 化为

$$(y^4 - 3u)dy + \frac{y}{2}du = 0, \text{即} \frac{du}{dy} - \frac{6}{y}u = -2y^3. \tag{2}$$

解线性方程(2),得

$$u = \left(\int(-2y^3)e^{-\int\frac{6}{y}dy}dy + C\right)e^{-\int\frac{6}{y}dy} = (\frac{1}{y^2} + C)y^6.$$

故所求的通解为 $x^2 = (\frac{1}{y^2} + C)y^6$.

11.2.129　$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2y(x + y^2)}$.

解　将原方程变形为

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{x + y^2}, \text{ 即 } \frac{dy^2}{dx} = \frac{x - y^2}{x + y^2}. \tag{1}$$

令 $y^2 = u$,将方程(1) 化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{x - u}{x + u}. \tag{2}$$

解齐次方程(2). 令 $\frac{u}{x} = v$ 将方程(2) 化为

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1 - v}{1 + v}, \text{ 或 } \frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v - v^2}{(1 + v)x}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3),得

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - 2v - v^2) = \ln x + C_1, \text{或 } x\sqrt{1 - 2v - v^2} = C_2.$$

令 $v = \frac{u}{x} = \frac{y^2}{x}$,得所求的通解为

$$x\sqrt{1 - \frac{2y^2}{x} - \frac{y^4}{x^2}} = C_2, \text{ 或 } x^2 - 2xy^2 - y^4 = C.$$

11.2.130　$y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^2)}. \tag{1}$$

令 $y = \sqrt{z}$,则 $y^2 = z$,将方程(1) 化为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{xz - x^2}. \tag{2}$$

解齐次方程(2)，令$\frac{z}{x}=u$，或$z=xu$，将方程(2)化为

$$u+x\frac{dz}{du}=\frac{u^2}{u-1},\text{ 即 } x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3)，得

$$xu=Ce^u.$$

用$u=\frac{z}{x}=\frac{y^2}{x}$换回原变量，得所求的通解为

$$y^2=Ce^{\frac{y^2}{x}}.$$

11.2.131　$(x^2+y^2+3)\frac{dy}{dx}=2x(2y-\frac{x^2}{y})$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x(2y^2-x^2)}{y(y^2+x^2+3)},\text{ 即 }\frac{ydy}{xdx}=\frac{2(2y^2-x^2)}{y^2+x^2+3}. \tag{1}$$

令$x=\sqrt{t}$，$y=\sqrt{z}$，则$x^2=t$，$y^2=z$，将方程(1)化为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2(2z-t)}{z+t+3}. \tag{2}$$

解形如$y'=f(\frac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2})$的微分方程(2)。由
$\begin{cases}2z-t=0,\\ z+t+3=0\end{cases}$解得$z=-1$，$t=-2$，令$z=Z-1$，$t=T-2$，将方程(2)化为

$$\frac{dZ}{dT}=\frac{4Z-2T}{Z+T}. \tag{3}$$

解齐次方程(3)，令$\frac{Z}{T}=u$，或$Z=uT$，将方程(3)化为

$$u+T\frac{du}{dT}=\frac{4u-2}{u+1},\text{ 即 } T\frac{du}{dT}=-\frac{u^2-3u+2}{u+1}. \tag{4}$$

用分离变量法解方程(4)，得

$$T(u-2)^3=C(u-1)^2.$$

用$T=t+2=x^2+2$，$u=\frac{Z}{T}=\frac{z+1}{t+2}=\frac{y^2+1}{x^2+2}$换回原变量，得所求的通解为

$$(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)^2.$$

11.2.132　$(y^4-3x^2)dy+xydx=0$.

解　将原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{3x^2-y^4}. \tag{1}$$

令 $x=\sqrt{t}$，$y=\sqrt[4]{z}$，则 $x^2=t$，$y^4=z$，将方程(1) 化为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{2z}{3t-z}. \tag{2}$$

解齐次方程(2). 令 $\frac{z}{t}=u$ 或 $z=tu$，将方程(2) 化为

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{2u}{3-u},\ 即\ t\frac{du}{dt}=\frac{u^2-u}{3-u}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3)，得

$$tu^3=C(u-1)^2.$$

用 $t=x^2$，$u=\frac{z}{t}=\frac{y^4}{x^2}$ 换回原变量，得所求的通解为

$$y^{12}=C(y^4-x^2)^2,\ 或\ y^6=C(y^4-x^2).$$

11.2.133　$(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$.

解　令 $xy=u$，或 $y=\frac{u}{x}$，则 $dy=\frac{1}{x}(du-ydx)$. 将原方程化为

$$u(1+u)dx+(1-u)(xdu-udx)=0,$$

即

$$2u^2dx+x(1-u)du=0. \tag{1}$$

用分离变量法解方程(1)，得 $\frac{x^2}{u}=Ce^{\frac{1}{u}}$. 故原方程的通解为

$$x=Cye^{\frac{1}{xy}}.$$

11.2.134　$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\text{tg}\,\frac{y^2}{x}$.

解　将原方程变形为

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+\text{tg}\,\frac{y^2}{x}. \tag{1}$$

令 $\frac{y^2}{x}=u$，或 $y^2=xu$，将方程(1) 化为

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\text{tg}u,\ 即\ x\frac{du}{dx}=\text{tg}u. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得 $\sin u=Cx$.

故原方程的通解为 $\sin\frac{y^2}{x}=Cx$.

11.2.135　$9y\frac{dy}{dx}-18xy+4x^3=0$.

解 令 $\sqrt{y}=z$,则 $y=z^2$ 将原方程化为

$$18z^3\frac{dz}{dx}-18xz^2+4x^3=0,\text{即}\ \frac{dz}{dx}=\frac{x}{z}-\frac{2}{9}\left(\frac{x}{z}\right)^3. \qquad (1)$$

再令 $\frac{z}{x}=u$,或 $z=xu$ 将方程(1) 化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}-\frac{2}{9u^3},\ \text{即}\ x\frac{du}{dx}=-\frac{9u^4-9u^2+2}{9u^3}. \qquad (2)$$

用分离变量法解方程(2),得

$$x^2(3u^2-2)^2=C(3u^2-1).$$

用 $u=\frac{z}{x}=\frac{\sqrt{y}}{x}$,得原方程的通解为

$$(3y-2x^2)^2=C(3y-x^2).$$

11.2.136 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y-x}+1$.

解 令 $\sqrt{y-x}=u$,则 $\frac{dy}{dx}-1=2u\frac{du}{dx}$,将原方程化为

$$2u\frac{du}{dx}+1=u+1,\ \text{即}\ \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

将方程(1) 直接积分,得

$$u=\frac{x}{2}+C.$$

故原方程的通解为

$$y-x=\left(\frac{x}{2}+C\right)^2,\ \text{即}\ y=x+\left(\frac{x}{2}+C\right)^2.$$

11.2.137 $\cos y\frac{dy}{dx}+\sin y=x+1$.

解 将原方程变形为

$$\frac{d}{dx}\sin y+\sin y=x+1. \qquad (1)$$

令 $\sin y=u$,将方程(1) 化为

$$\frac{du}{dx}+u=x+1. \qquad (2)$$

解一阶线性方程(2),得 $u=Ce^{-x}+x$. 故原方程的通解为

$$\sin y=Ce^{-x}+x.$$

11.2.138 $(x+1)\frac{dy}{dx}+\mathrm{tg}y-(x^2-1)\sec y=0$.

解 将原方程变形为

$$\cos y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x+1}\sin y=x-1. \tag{1}$$

令 $\sin y=u$，将方程(1)化为

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{x+1}u=x-1. \tag{2}$$

解线性方程(2)，得

$$u=\left[\int(x-1)e^{\int\frac{dx}{x+1}}dx+C\right]e^{-\int\frac{dx}{x+1}}$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x+C\right)\frac{1}{x+1}.$$

故所求的通解为 $\sin y=\left(\frac{x^3}{3}-x+C\right)\frac{1}{x+1}$.

11.2.139　$\cos yy'-\cos x\sin^2 y=\sin y$.

解　令 $\sin y=z$，将原方程化为

$$z'-z^2\cos x=z，即\ z'-z=z^2\cos x. \tag{1}$$

解贝努里方程(1). 令 $\frac{1}{z}=u$，将方程(1)化为

$$u'+u=-\cos x. \tag{2}$$

解线性方程(2)，得

$$u=e^{-\int dx}\left[\int(-\cos x)e^{\int dx}dx+C\right]=Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}.$$

用 $u=\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin y}$ 换回原变量，得所求的通解为

$$\frac{1}{\sin y}=Ce^{-x}-\frac{\sin x+\cos x}{2}，或\ \frac{2}{\sin y}+\sin x+\cos x=Ce^{-x}.$$

11.2.140　$y'x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$.

解　将原方程变形为

$$y'\sin y+\frac{1}{x\ln x}\cos y=\frac{1}{\ln x}\cos^2 y. \tag{1}$$

令 $\cos y=z$，将方程(1)化为

$$z'-\frac{1}{x\ln x}z=-\frac{1}{\ln x}z^2. \tag{2}$$

解贝努利方程(2)，令 $\frac{1}{z}=u$，将方程(2)化为

$$u'+\frac{1}{x\ln x}u=\frac{1}{\ln x}. \tag{3}$$

解线性方程(3)，得

$$u = e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}\left(\int \frac{1}{\ln x}e^{\int\frac{dx}{x\ln x}}dx + C\right) = \frac{1}{\ln x}(x + C).$$

用 $u = \frac{1}{z} = \frac{1}{\cos y}$ 换回原变量，得所求的通解为

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\ln x}(x + C)\text{，或 } (x + C)\cos y = \ln x.$$

11.2.141　$\sqrt{1 + x^2}\sin 2y \frac{dy}{dx} = 2x\sin^2 y + e^{2\sqrt{1+x^2}}$.

解　将原方程变形为

$$\sin 2y \frac{dy}{dx} - \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\sin^2 y = \frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}}. \tag{1}$$

令 $\sin^2 y = u$，将方程(1)化为

$$\frac{du}{dx} - \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}u = \frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}}. \tag{2}$$

解线性方程(2)，得

$$u = e^{\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx}\left(\int \frac{e^{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + x^3}}e^{-\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{2\sqrt{1+x^2}}[\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C].$$

故原方程的通解为

$$\sin^2 y = e^{2\sqrt{1+x^2}}[\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C].$$

11.2.142　$(y - x)\sqrt{1 + x^2}\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)^{3/2}$.

解　令 $x = \mathrm{tg}\varphi$，$y = \mathrm{tg}\psi$，则 $dx = \sec^2\varphi d\varphi$，$dy = \sec^2\psi d\psi$，$y - x = \mathrm{tg}\psi - \mathrm{tg}\varphi = \sec\varphi\sec\psi\sin(\psi - \varphi)$. 将原方程化为

$$\sec^2\varphi\sec\psi\sin(\psi - \varphi)\frac{\sec^2\psi d\psi}{\sec^2\varphi d\varphi} = \sec^3\psi,$$

即

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sin(\psi - \varphi) \tag{1}$$

又令 $\psi - \varphi = \theta$，或 $\varphi = \psi - \theta$，将方程(1)化为

$$1 - \frac{d\theta}{d\psi} = \sin\theta. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}=\psi+C_1,\text{ 或 }\operatorname{tg}\theta+\sec\theta=\psi+C. \tag{3}$$

由 $\theta=\psi-\varphi$，$\operatorname{tg}\varphi=x$，$\operatorname{tg}\psi=y$，得

$$\psi=\operatorname{arctg}y,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\psi-\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\varphi}=\frac{y-x}{1+xy},$$

$$\sec\theta=\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta+1}=\sqrt{(\frac{y-x}{1+xy})^2+1}=\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+xy}.$$

将这三个式子代入(3)式，得原方程的通解为

$$\frac{y-x+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{1+xy}=\operatorname{arctg}y+C.$$

11.2.143　$(x^3-y^2)dx+(x^2y+xy)dy=0.$

解　将原方程化为

$$xdx+ydy+y\frac{xdy-ydx}{x^2}=0,$$

即
$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)+yd\frac{y}{x}=0. \tag{1}$$

令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$，将方程(1)化为

$$\frac{1}{2}d\rho^2+\rho\sin\theta d\operatorname{tg}\theta=0,\text{ 即 }d\rho+\sec\theta\operatorname{tg}\theta d\theta=0. \tag{2}$$

将方程(2)积分，得 $\rho+\sec\theta=C_1$. 用 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$ 换回原变量，得原方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=C_1,\text{ 或 }(x^2+y^2)(x+1)^2=Cx^2.$$

11.2.144　$(xy+y+\sin y)dx+(x+\cos y)dy=0.$

解　将原方程变形为

$$(ydx+xdy)+\cos ydy+(xy+\sin y)dx=0,$$

即
$$d(xy+\sin y)+(xy+\sin y)dx=0. \tag{1}$$

令 $xy+\sin y=u$，将方程(1)化为

$$du+udx=0.$$

分离变量后积分，得 $u=Ce^{-x}$. 故所求的通解为

$$xy + \sin y = Ce^{-x}, \text{或 } xye^{x} + e^{x}\sin y = C.$$

11.2.145　$\cos y dx + (\sin y - e^{x}\sin 2y)dy = 0$.

解　将原方程变形为

$$e^{-x}\frac{dx}{dy} + \operatorname{tg}y \cdot e^{-x} = 2\sin y. \tag{1}$$

令 $e^{-x} = u$ 将方程(1)化为

$$\frac{du}{dy} - u\operatorname{tg}y = -2\sin y. \tag{2}$$

解线性方程(2),得

$$u = e^{\int \operatorname{tg}y dy}\left[\int(-2\sin y)e^{-\int \operatorname{tg}y dy}dy + C\right] = \frac{1}{\cos y}\left(\frac{1}{2}\cos 2y + C\right).$$

故原方程的通解为

$$e^{-x} = \frac{1}{\cos y}\left(\frac{1}{2}\cos 2y + C\right), \text{或 } 2e^{-x}\cos y - \cos 2y = C.$$

事实上,容易看出,e^{-x} 是给定方程的积分因子.用 e^{-x} 乘方程两边,得

$$(e^{-x}\cos y dx + e^{-x}\sin y dy) - \sin 2y dy = 0,$$

即
$$d(-e^{-x}\cos y) + d\left(\frac{1}{2}\cos 2y\right) = 0.$$

故所求的通解为 $2e^{-x}\cos y - \cos 2y = C$.

11.2.146　求微分方程 $x + yy' = f(x)g(\sqrt{x^2+y^2})$ 的通解,并利用此结果求 $x + yy' = \operatorname{tg}x(\sqrt{x^2+y^2} - 1)$ 的通解.

解　令 $\sqrt{x^2+y^2} = u$,则 $du = \dfrac{x + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$,于是有 $x + yy' = u\dfrac{du}{dx}$.

利用这个置换,将原方程

$$x + yy' = f(x)g(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{1}$$

化为
$$u\frac{du}{dx} = f(x)g(u). \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$\int\frac{u}{g(u)}du = \int f(x)dx + C.$$

故原方程的通解为

$$\left[\int\frac{u}{g(u)}du\right]_{u=\sqrt{x^2+y^2}} = \int f(x)dx + C. \tag{3}$$

对于方程

$$x + yy' = \mathrm{tg}x(\sqrt{x^2+y^2} - 1), \tag{4}$$

设 $f(x) = \mathrm{tg}x, g(u) = u - 1$，由上面的结果(3)，得方程(4) 的通解为

$$\left[\int \frac{u}{u-1} du\right]_{u=\sqrt{x^2+y^2}} = \int \mathrm{tg}x dx + \ln C,$$

即
$$[u + \ln(u-1)]_{u=\sqrt{x^2+y^2}} = -\ln\cos x + \ln C,$$

亦即
$$\sqrt{x^2+y^2} + \ln(\sqrt{x^2+y^2} - 1) + \ln\cos x = \ln C,$$

或
$$\cos x(\sqrt{x^2+y^2} - 1) = Ce^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

11.2.147　证明：如果已知黎卡提方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ 有一特解 $y_1(x)$，那末借助变量置换 $y = z + y_1(x)$，可以求出该方程的通解.

证　将 $y = z + y_1(x)$ 代入黎卡提方程，得

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = P(x)(z+y_1)^2 + Q(x)(z+y_1) + R(x),$$

即
$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = P(x)z^2 + [2P(x)y_1 + Q(x)]z + P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x). \tag{1}$$

因为 $y_1(x)$ 是黎卡提方程的解，即

$$\frac{dy_1}{dx} = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x),$$

所以方程(1) 可化为

$$\frac{dz}{dx} - [2P(x)y_1(x) + Q(x)]z = P(x)z^2. \tag{2}$$

方程(2) 是贝努利方程，它的通解为

$$\frac{1}{z} = e^{-\int[2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}\left[-\int P(x)e^{\int[2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}dx + C\right].$$

故黎卡提方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= y_1(x) + z \\ &= y_1(x) + e^{\int[2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}\left[-\int P(x)e^{\int[2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}dx + C\right]^{-1}. \end{aligned}$$

求下列微分方程的通解(11.2.148 —— 11.2.149 题)：

11.2.148　$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

解　给定方程是黎卡提方程. 由观察法知，给定黎卡提方程有一

特解 $y_1=\frac{1}{x}$. 令 $P(x)=1, Q(x)=0, R(x)=-\frac{2}{x^2}$,由 11.2.147 题知,给定黎卡提方程的通解为

$$y=y_1+e^{\int[2P(x)y_1(x)+Q(x)]dx}\left[-\int P(x)e^{\int[2P(x)y_1(x)Q(x)]dx}dx+C\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{x}+e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(-\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)^{-1}=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{3C-x^3}.$$

11.2.149　$(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$.

解　将原方程变形为

$$y'=-\frac{1}{x^2-1}y^2+\frac{2x}{x^2-1}y-\frac{1}{x^2-1}. \tag{1}$$

方程(1)是黎卡提方程,容易看出 $y_1=x$ 是该方程的解.

令 $P(x)=-\frac{1}{x^2-1}, Q(x)=\frac{2x}{x^2-1}, R(x)=-\frac{1}{x^2-1}$. 由题 11.2.147 题知,给定方程的通解为

$$y=y_1+e^{-\int(2Py_1+Q)dx}\left[-\int Pe^{\int(2Py_1+Q)dx}dx+C\right]^{-1}$$

$$=x+e^{-\int\left(-\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-1}\right)dx}\left[-\int\frac{-1}{x^2-1}e^{\int\left(-\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-1}\right)dx}dx+C\right]^{-1}$$

$$=x+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}-\ln C_1\right)^{-1},$$

或

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=C_1e^{\frac{1}{y-x}}.$$

§ 3　未解出导数的一阶微分方程

内 容 提 要

1. n 次一阶微分方程

如果由一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 可以解出 n 个一阶方程

$$y'=f_1(x,y),y'=f_2(x,y),\cdots\cdots y'=f_n(x,y),$$

那么这 n 个方程的通解的全体构成所求方程的通解.

2. $F(x,p)=0$ 型的一阶微分方程(其中 $p=\dfrac{dy}{dx}$,下同)

解法 1　由给定方程解出 $x=\varphi(p)$,于是有

$$dy=pdx=p\varphi'(p)dp,$$

积分,得 $$y=\int p\varphi'(p)dp+C.$$

故所求通解为$\begin{cases}x=\varphi(p),\\ y=\int p\varphi'(p)dp+C,\end{cases}$　若从上式中消去参数 p,得所求通解为

$$\Phi(x,y,C)=0.$$

解法 2　由给定方程得到 $x=\varphi(t)$, $p=\psi(t)$. 于是有

$$dy=pdx=\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

积分,得 $y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C$. 故所求通解为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C.\end{cases}$$

3. $F(y,p)=0$ 型的一阶微分方程

解法 1　由给定方程解出 $y=\varphi(p)$,于是有

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{\varphi'(p)}{p}dp,$$

积分,得 $x=\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+C$. 故所求通解为

$$\begin{cases} y = \varphi(p), \\ x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C. \end{cases}$$

解法 2　由给定方程得到 $y = \varphi(t), p = \psi(t)$，于是有

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

积分得 $x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C$，故所求通解为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4. $y = f(x,p)$ 型的一阶微分方程

将给定的方程对 x 求导，得 $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$. 解这个关于 p,x 的一阶方程. 设它的通解为 $p = \varphi(x,C)$.

将 $p = \varphi(x,C)$ 代入给定的方程，得所求的通解为

$$y = f(x, \varphi(x,C)).$$

5. $x = f(y,p)$ 型的一阶微分方程

将给定的方程对 y 求导，得

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

解这个关于 p,y 的一阶方程. 设它的通解为 $p = \varphi(y,C)$. 将 $p = \varphi(y,C)$ 代入给定的方程，得所求通解为

$$x = f(y, \varphi(y,C)).$$

6. 拉格朗日(Lagrange)方程

形如 $A(p)y + B(p)x = C(p)$ 的方程，称为拉格朗日方程.

由拉格朗日方程解出(设 $A(p) \neq 0$)

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \tag{1}$$

其中 $\varphi(p) = -\frac{B(p)}{A(p)}$, $\psi(p) = -\frac{C(p)}{A(p)}$.

将方程(1)对 x 求导，得

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)] \frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

当 $p - \varphi(p) \neq 0$ 时，由(2)式得

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}, \tag{3}$$

解线性方程(3),得

$$x=x(p,C), \tag{4}$$

将(4)式代入(1)式,得

$$y=\varphi(p)x(p,C)+\psi(p). \tag{5}$$

故拉格朗日方程用参数 p 表示的通解为

$$\begin{cases}x=x(p,C),\\ y=\varphi(p)x(p,C)+\psi(p).\end{cases}$$

若 $\varphi(p)-p=0$,则

$$p=C_0. \tag{6}$$

将(6)式代入(1)式,得

$$y=\varphi(C_0)x+\psi(C_0). \tag{7}$$

容易验证,(7)式也是拉格朗日方程的解,即它的奇解.

7. 克莱洛(Clairaut)方程

形如 $y=px+\varphi(p)$ 的方程称为克莱洛方程.

将克莱洛方程对 x 求导,得

$$p=p+[x+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

即

$$\frac{dp}{dx}[x+\varphi'(p)]=0,$$

亦即 $\frac{dp}{dx}=0$,或 $x+\varphi'(p)=0$.

由 $\frac{dp}{dx}=0$,得 $p=C$. 将 $p=C$ 代入克莱洛方程,得通解为

$$y=Cx+\varphi(C).$$

由 $x+\varphi'(p)=0$,得 $x=-\varphi'(p)$ 将 $x=-\varphi'(p)$,代入克莱洛方程,得

$$y=-p\varphi'(p)+\varphi(p).$$

容易验证,

$$\begin{cases}x=-\varphi'(p),\\ y=-p\varphi'(p)+\varphi(p).\end{cases}$$

也是克莱洛方程的解,即为它的奇解.

问 题 与 解 答

1. n 次一阶方程

求下列微分方程的通解，其中 $p = \frac{dy}{dx}$ (11.3.1—11.3.10 题)：

11.3.1　$p^2y + p(x - y) - x = 0$.

解　将方程变形为

$$(p - 1)(py + x) = 0.$$

因此，给定方程实际上是下列两个方程：

$$p - 1 = 0,\ 即\ y' = 1, \tag{1}$$

$$py + x = 0,\ 即\ y' = -\frac{x}{y}. \tag{2}$$

对方程(1) 直接积分，得通解为 $y = x + C$；
用分离变量法解方程(2)，得通解为 $x^2 + y^2 = C$. 故原方程的通解为

$$y = x + C,\ 或\ x^2 + y^2 = C.$$

11.3.2　$p^2 + yp - x^2 - xy = 0$.

解　将原方程变形为

$$(p - x)(p + y + x) = 0.$$

因此，给定方程实际上是下列两个方程：

$$p - x = 0,\ 即\ y' = x; \tag{1}$$

$$p + y + x = 0,\ 即\ y' + y = -x. \tag{2}$$

对方程(1) 直接积分，得通解为

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

方程(2) 是线性方程，其通解为

$$y = Ce^{-x} - x + 1.$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{x^2}{2} + C,\ 或\ y = Ce^{-x} - x + 1.$$

11.3.3　$p^2 + xp + x^2y - x^2y^2 = 0$.

解　将方程变形为

$$(p + xy)(p - xy + x) = 0.$$

因此，给定方程实际上是下列两个方程：

$$p + xy = 0,\ 即\ y' = -xy; \tag{1}$$

$$p - xy + x = 0,\ 即\ y' - xy = -x. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(1)，得通解为 $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

方程(2)是线性方程，其通解为 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$.

故原方程的通解为 $y = C_1e^{-\frac{x^2}{2}}$，或 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$.

11.3.4 $p^3 - (x^2 + xy + y^2)p^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)p - x^3y^3 = 0$.

解　将原方程变形为

$$(p - xy)(p - x^2)(p - y^2) = 0.$$

因此，给定的方程实际上是下列三个方程：

$$p - xy = 0,\quad 即\quad y' = xy, \tag{1}$$

$$p - x^2 = 0,\quad 即\quad y' = x^2, \tag{2}$$

$$p - y^2 = 0,\quad 即\quad y' = y^2. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(1)，得通解为

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}};$$

对方程(2)直接积分，得通解为 $y = \dfrac{x^3}{3} + C$；

用分离变量法解方程(3)，得通解为 $y = \dfrac{1}{C - x}$.

故原方程的通解为 $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ 或 $y = \dfrac{x^3}{3} + C$ 或 $y = \dfrac{1}{C - x}$.

11.3.5 $p^2 + y^2 - 1 = 0$.

解　由给定方程解出 p(即 y')，得

$$y' = \sqrt{1 - y^2}\ 与\ y' = -\sqrt{1 - y^2}$$

用分离变量法解这两个方程，得所求的通解为

$$\arcsin y = x + C \quad 或 \quad \arcsin y = -x + C.$$

11.3.6 $p^2 + 2yp\operatorname{ctg}x = y^2$.

解　原方程两边同加上 $y^2\operatorname{ctg}^2x$，得

$$p^2 + 2yp\operatorname{ctg}x + y^2\operatorname{ctg}^2x = y^2 + y^2\operatorname{ctg}^2x,$$

即

$$(p + y\operatorname{ctg}x)^2 = y^2\csc^2x$$

开方，得 $p + y\operatorname{ctg}x = \pm y\csc x$，即 $y' = \dfrac{\sin x}{\cos x \pm 1}y$.

用分离变量法解这两个方程，得原方程的通解为

$$y(\cos x \pm 1) = C.$$

11.3.7　$xp^2 - 2yp + 4x = 0.$

解　由给定方程解出 p(即 y')，得

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}.$$

解这两个齐次方程，令 $\frac{y}{x} = u$，或 $y = xu$，得

$$u + x\frac{du}{dx} = u \pm \sqrt{u^2 - 4},\ 即\ x\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{u^2 - 4}.$$

用分离变量法解得

$$u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{C}. \tag{1}$$

由(1)式，得

$$u \mp \sqrt{u^2 - 4} = \frac{4C}{x}. \tag{2}$$

将(1)式与(2)式相加，得

$$2u = \frac{x}{C} + \frac{4C}{x},\ 即\ u = \frac{x}{2C} + \frac{2C}{x}. \tag{3}$$

在(3)式中令 $u = \frac{y}{x}$，得原方程的通解为

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{2C} + \frac{2C}{x},\ 或\ x^2 = 2C(y - 2C).$$

11.3.8　$x^2p^2 - 2xyp + y^2 = x^2y^2 + x^4.$

解　将原方程变形为

$$(xp - y)^2 = x^2(y^2 + x^2),$$

开方，得

$$xp - y = \pm x\sqrt{x^2 + y^2},\ 即\ y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

令 $y = ux$，将(1)式化为

$$u + x\frac{du}{dx} = u \pm x\sqrt{1 + u^2},\ 即\ \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1 + u^2}, \tag{2}$$

用分离变量法解(2)，得 $u = \operatorname{sh}(\pm x + C)$.

令 $u = \frac{y}{x}$ 换回原变量，得原方程的通解为

$$y = x\operatorname{sh}(\pm x + C).$$

11.3.9　$p^2 + a^2y^2(\ln^2 y - 1) = 0.$

解　令 $\ln y = u$，则 $\frac{y'}{y} = \frac{du}{dx}$，即 $p = y' = y\frac{du}{dx}$，将原方程化为

$$y^2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + a^2y^2(u^2 - 1) = 0, \text{即} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = a^2(1 - u^2).$$

亦即　　$\frac{du}{dx} = \pm a\sqrt{1 - u^2}$.

用分离变量法解这两个方程，得 $u = \sin(C \pm ax)$. 用 $u = \ln y$ 换回原变量，得所求的通解为

$$\ln y = \sin(C \pm ax) \text{ 或 } y = e^{\sin(C \pm ax)}.$$

11.3.10　$(xp - y)^2 = (x^2 - y^2)\arcsin^2\frac{y}{x}$.

解　令 $\arcsin\frac{y}{x} = u$，或 $y = x\sin u$，则 $p = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x\cos u + \sin u$，原方程可化为

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 x^4\cos^2 u = x^2u^2\cos^2 u.$$

即 $x^2\frac{du}{dx} = u^2$，亦即$\frac{du}{dx} = \pm\frac{u}{x}$. 用分离变量法解这两个方程，得

$$u = Cx, \text{ 或 } u = \frac{C}{x}.$$

用 $u = \arcsin\frac{y}{x}$ 换回原变量，得所求通解为

$$\arcsin\frac{y}{x} = Cx, \text{ 或 } \arcsin\frac{y}{x} = \frac{C}{x},$$

即　　$y = x\sin Cx$，或 $y = x\sin\frac{C}{x}$.

2.　$F(x, p) = 0$ 型的一阶微分方程

求下列微分方程的通解，其中 $p = \frac{dy}{dx}$(11.3.11—11.3.14 题)：

11.3.11　$e^p + p = x$.

解　由方程 $x = e^p + p$　可得

$$dy = pdx = p(e^p + 1)dp.$$

将上式积分，得

$$y = \int p(e^p + 1)dp = e^p(p - 1) + \frac{p^2}{2} + C.$$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = e^p + p, \\ y = e^p(p-1) + \dfrac{p^2}{2} + C. \end{cases}$

11.3.12　$xp^3 = 1 + p$.

解　由原方程可得 $x = \dfrac{1+p}{p^3}$,因此

$$dy = pdx = p \cdot \left(-\frac{3+2p}{p^4}\right)dp = -\frac{3+2p}{p^3}dp.$$

积分,得　$$y = -\int \frac{3+2p}{p^3}dp = \frac{3}{2p^2} + \frac{2}{p} + C.$$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = \dfrac{1+p}{p^3}, \\ y = \dfrac{3}{2p^2} + \dfrac{2}{p} + C, \end{cases}$

11.3.13　$x^3 + p^3 - 3xp = 0$.

解　设 $p = xt$,并代入给定方程,得

$$x^3 + x^3t^3 - 3x^2t = 0,\ 即\ x(1+t^3) - 3t = 0.$$

解出 $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$,于是有 $p = xt = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$. 因此,

$$dy = pdx = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt.$$

积分,得

$$y = \int \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt = -\frac{9}{2(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C.$$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = -\dfrac{9}{2(1+t^3)^2} + \dfrac{6}{1+t^3} + C. \end{cases}$

11.3.14　$p^3 - x^3(1-p) = 0$.

解　由原方程解出 $x = \dfrac{p}{\sqrt[3]{1-p}}$,设 $\sqrt[3]{1-p} = t$,则 $p = 1 - t^3$,于是有 $x = \dfrac{1}{t} - t^2$. 因此,

$$dy = pdx = (1-t^3)\left(-\frac{1}{t^2} - 2t\right)dt = -\frac{1}{t^2} - t + 2t^4.$$

积分,得　$y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{5}t^5 + C$. 故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} - t^2, \\ y = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{5}t^5 + C. \end{cases}$$

3. $F(y,p) = 0$ 型的一阶微分方程

求下列微分方程的通解，其中 $p = \dfrac{dy}{dx}$（11.3.15—11.3.21 题）：

11.3.15　$y = p + \ln p$.

解　由原方程得

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{p})dp = (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})dp.$$

将上式积分，得

$$x = \int(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2})dp = \ln p - \frac{1}{p} + C.$$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = \ln p - \dfrac{1}{p} + C, \\ y = p + \ln p. \end{cases}$

11.3.16　$y = e^p p^2$.

解　由原方程可得

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{e^p(p^2 + 2p)}{p}dp = e^p(p + 2)dp.$$

积分，得

$$x = \int e^p(p + 2)dp = e^p(p + 1) + C.$$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = e^p(p + 1) + C, \\ y = e^p p^2. \end{cases}$

11.3.17　$p^3 - y^2(a - p) = 0$.

解　设 $y = pt$，并代入给定方程，得

$$p^3 - p^2t^2(a - p) = 0,\ 即\ (1 + t^2)p - at^2 = 0.$$

解出 $p = \dfrac{at^2}{1 + t^2}$. 于是有 $y = pt = \dfrac{at^3}{1 + t^2}$. 因此，

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1 + t^2}{at^2} \cdot \frac{a(3t^2 + t^4)}{(1 + t^2)^2}dt = \frac{3 + t^2}{1 + t^2}dt.$$

积分，得　$x = \displaystyle\int \frac{3 + t^2}{1 + t^2}dt = t + 2\mathrm{arctg}t + C.$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = t + 2\operatorname{arctg} x + C, \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$

11.3.18 $p^3 + y^3 - 3py = 0.$

解　设 $y = pt$，并代入给定方程，得到

$$p^3 + p^3t^3 - 3p^2t = 0,\ 即\ p(1+t^3) - 3t = 0.$$

解出 $p = \dfrac{3t}{1+t^3}$. 于是有 $y = pt = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$. 因此，

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1+t^3}{3t}\cdot\frac{3(2t-t^4)}{(1+t^3)^2}dt = \frac{2-t^3}{1+t^3}dt.$$

积分，得

$$x = \int\frac{2-t^3}{1+t^3}dt = -t + \ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C.$$

故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = -t + \ln\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

11.3.19 $y^2(p-1) = (2-p)^2.$

解　设 $2 - p = yt$，并代入给定方程，得

$$y^2(1-yt) = y^2t^2,\ 即\ 1 - yt = t^2.$$

解出 $y = \dfrac{1}{t} - t$. 于是有 $p = 2 - yt = 1 + t^2$. 因此，

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-\dfrac{1}{t^2} - 1}{1+t^2}dt = -\frac{1}{t^2}dt.$$

积分，得 $x = \dfrac{1}{t} + C$. 故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + C, \\ y = \dfrac{1}{t} - t. \end{cases}\quad 或\ y = x - C - \frac{1}{x-C}.$$

11.3.20 $y(1+p^2) = 2a.$

解　设 $p = \operatorname{tg} t$，代入给定方程，得 $y\sec^2 t = 2a$. 解出 $y = 2a\cos^2 t = a(1+\cos 2t)$. 因此，

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-2a\sin 2t}{\operatorname{tg} t}dt = -2a(1+\cos 2t)dt.$$

积分，得

$$x = \int -2a(1+\cos 2t)dt = -a(2t+\sin 2t)+C.$$

故原方程的通解为 $\begin{cases} x = -a(2t+\sin 2t)+C, \\ y = a(1+\cos 2t). \end{cases}$

11.3.21　$y^2(1-p) = (2-p)^2$.

解　将原方程变形为

$$1 - p = \left(\frac{2-p}{y}\right)^2, \tag{1}$$

令 $\frac{2-p}{y} = t$，即 $p = 2 - yt$，将方程(1)化为

$$ty - 1 = t^2,\ 即\ y = t + \frac{1}{t},$$

于是有 $p = 2 - ty = 1 - t^2$，由此求得

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{1-t^2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{t^2}dt.$$

积分，得 $x = \frac{1}{t} + C$. 故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + C, \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases} \quad 或\ y = x + \frac{1}{x-C} - C.$$

4. $y = f(x,p)$ 型的一阶微分方程

求下列微分方程的通解，其中 $p = \frac{dy}{dx}$(11.3.22—11.3.25 题)：

11.3.22　$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$.

解　将给定方程对 x 求导，得 $p = 2p\frac{dp}{dx} - x\frac{dp}{dx} - p + x$，

即

$$\frac{dp}{dx} = 1. \tag{1}$$

对方程(1)直接积分，得

$$p = x + C. \tag{2}$$

将(2)式代入给定方程，得所求的通解为

$$y=(x+C)^2-(x+C)x+\frac{x^2}{2}，\text{或 } y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2.$$

11.3.23　$xp^2+2xp-y=0.$

解　由给定方程解出

$$y=xp^2+2xp. \tag{1}$$

将方程(1)对 x 求导，得 $p=p^2+2p+(2px+2x)\frac{dp}{dx}$，即

$$p+2x\frac{dp}{dx}=0. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得 $x=\frac{C}{p^2}$，　(3)

将(3)式代入(1)式，得 $y=C+\frac{2C}{p}$. 故所求的通解为

$$\begin{cases}x=\frac{C}{p^2},\\ y=C+\frac{2C}{p}\end{cases}\quad\text{或 }(y-C)^2=4Cx.$$

11.3.24　$p-e^{\frac{xp}{y}}=0.$

解　将原方程变形为 $\ln p=\frac{xp}{y}$，　(1)

由(1)式解出

$$y=\frac{xp}{\ln p} \tag{2}$$

将(2)式对 x 求导，得 $p=\frac{p}{\ln p}+\frac{x}{\ln p}\frac{dp}{dx}-\frac{x}{\ln^2 p}\frac{dp}{dx}$，即

$$p=\frac{x}{\ln p}\frac{dp}{dx}. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3)，得

$$x=C\ln p. \tag{4}$$

将(4)式代入(2)式，得 $y=Cp$. 故原方程的通解为

$$\begin{cases}x=C\ln p,\\ y=Cp.\end{cases}\text{或 } y=Ce^{\frac{x}{C}}.$$

11.3.25　$(x^2-1)p^2-2xyp=x^2.$

解　由给定方程解出

$$y=\frac{x^2-1}{2x}p-\frac{x}{2p}. \tag{1}$$

因此，$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}(\frac{x^2+1}{2x^2}pdx + \frac{x^2-1}{2x}dp - \frac{dx}{2p} + \frac{x}{2p^2}dp)$. 即

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}. \tag{2}$$

将(2)式积分，得 $p = Cx$，代入(1)式，得原方程的通解为

$$y = \frac{C}{2}(x^2-1) - \frac{1}{2C}.$$

5. $x = f(y,p)$ 型的一阶微分方程

求下列微分方程的通解，其中 $p = \frac{dy}{dx}$(11.3.26—11.3.29 题)：

11.3.26　$x = py + ap^2$.

解　将给定方程对 y 求导，得

$$\frac{1}{p} = p + y\frac{dp}{dy} + 2ap\frac{dp}{dy},$$

即

$$\frac{dy}{dp} + \frac{p}{p^2-1}y = \frac{2ap}{1-p^2}. \tag{1}$$

解线性方程(1)得 $y = \frac{C + a\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} - ap.$ (2)

将(2)式代入给定方程，得

$$x = \frac{Cp + ap\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}.$$

故所求的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{Cp + ap\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}, \\ y = \dfrac{C + a\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} - ap. \end{cases}$$

11.3.27　$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$.

解　由给定方程解出

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}. \tag{1}$$

将(1)式对 y 求导，得 $\frac{1}{p} = \frac{p}{2y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy}$，即

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{2y}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得

$$p = c\sqrt{y}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,得原方程的通解为 $x = \frac{C^2}{4} + \frac{2}{C}\sqrt{y}$,

或 $$y = C_1(x - C_1)^2, (C_1 = \frac{C^2}{4}).$$

11.3.28 $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$.

解 由给定方程解出

$$x = \frac{2y}{p} \pm \frac{p}{2\sqrt{y}}. \tag{1}$$

将(1)式对 y 求导,得

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy} \pm \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dp}{dy} \mp \frac{p}{4\sqrt{y^3}},$$

即 $$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2y}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$p = C\sqrt{y}. \tag{3}$$

将(3)式代入给定方程,得所求的通解为 $4(Cx - 2\sqrt{y})^2 = C^4$.

11.3.29 $y = \frac{k(x + yp)}{\sqrt{1 + p^2}}$.

解 由给定方程解出

$$x = (\frac{1}{k}\sqrt{1 + p^2} - p)y. \tag{1}$$

将(1)式对 y 求导,得

$$\frac{1}{p} = (\frac{1}{k}\sqrt{1 + p^2} - p) + y(\frac{p}{k\sqrt{1 + p^2}} - 1)\frac{dp}{dy}.$$

即 $$\frac{1 + p^2}{p} = -y\frac{dp}{dy}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得

$$\sqrt{1 + p^2} = \frac{C}{y}, \text{即 } p = \pm\frac{\sqrt{C^2 - y^2}}{y}. \tag{3}$$

将(3)式代入给定方程,得所求的通解为

$$x \pm \sqrt{C^2 - y^2} = \frac{C}{k}, \text{或 } (x - \frac{C}{k})^2 + y^2 = C^2.$$

6. 拉格朗日(Lagrange)方程

求下列微分方程的通解和奇解,其中 $p=\frac{dy}{dx}$ (11.3.30—11.3.32 题):

11.3.30 $y=2px+p^2$.

解 将给定方程对 x 求导,得 $p=2p+2x\frac{dp}{dx}+2p\frac{dp}{dx}$,即

$$-p=2(x+p)\frac{dp}{dx}. \tag{1}$$

当 $p\neq 0$ 时,由(1)式得

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p}x=-2. \tag{2}$$

解线性方程(2),得

$$x=\frac{C}{p^2}-\frac{2}{3}p, \tag{3}$$

将(3)式代入给定方程,得 $y=\frac{2C}{p}-\frac{p^2}{3}$ 故原方程的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}-\dfrac{2}{3}p, \\ y=\dfrac{2C}{p}-\dfrac{p^2}{3}. \end{cases}$$

当 $p=0$ 时,由给定方程得 $y=0$,它也是原方程的解,即为奇解.

11.3.31 $p^2+2xp+2y=0$.

解 由给定方程解出

$$y=-xp-\frac{p^2}{2}, \tag{1}$$

将(1)式对 x 求导,得

$$p=-p-(x+p)\frac{dp}{dx},\ 即\ 2p=-(x+p)\frac{dp}{dx}.$$

当 $p\neq 0$ 时,有

$$\frac{dx}{dp}+\frac{1}{2p}x=-\frac{1}{2}. \tag{2}$$

解线性方程(2),得

$$x=\frac{C}{\sqrt{p}}-\frac{p}{3}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,得 $y=-C\sqrt{p}-\frac{p^2}{6}$. 故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{\sqrt{p}} - \dfrac{p}{3}, \\ y = -C\sqrt{p} - \dfrac{p^2}{6}. \end{cases}$$

当 $p=0$ 时，由(1)式得 $y=0$，这也是原方程的解，即为奇解．

11.3.32　$y = xp^2 + p^3$.

解　将给定方程对 x 求导，得 $p = p^2 + (2px + 3p^2)\dfrac{dp}{dx}$，即

$$p - p^2 = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx},$$

当 $p - p^2 \neq 0$ 时，有

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{3p}{1-p}, \tag{1}$$

解线性方程(1)，得

$$x = \left(\frac{3}{2}p - p^3 + C\right)\frac{1}{(p-1)^2}. \tag{2}$$

将(2)式代入给定方程，得

$$y = \left(\frac{3}{2}p - p^3 + C\right)\frac{p^2}{(p-1)^2} + p^3.$$

故原方程的通解为
$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{3}{2}p - p^3 + C\right)\dfrac{1}{(p-1)^2}, \\ y = \left(\dfrac{3}{2}p - p^3 + C\right)\dfrac{p^2}{(p-1)^2} + p^3. \end{cases}$$

当 $p - p^2 = 0$，即 $p=0$ 与 $p=1$ 时，由原方程可得 $y=0$ 与 $y = x + 1$，它们均为给定方程的解，即为奇解．

7.　克莱洛(Clairaut)方程

求下列微分方程的通解和奇解，其中 $p = \dfrac{dy}{dx}$ (11.3.33—11.3.36 题)：

11.3.33　$y = xp + p - p^2$.

解　将给定方程对 x 求导，得

$$p = p + xp' + p' - 2pp'，即\ (1 + x - 2p)p' = 0.$$

亦即 $p' = 0$，$1 + x - 2p = 0$.

由 $p' = 0$，得 $p = C$. 代入给定方程，得通解为

$$y = Cx + C - C^2.$$

由 $1 + x - 2p = 0$，得 $p = \frac{x+1}{2}$，代入给定方程，得

$$y = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

这也是给定方程的解，即奇解.

11.3.34　$y = xp + 2\sqrt{-p}$.

解　将给定方程对 x 求导，得

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{\sqrt{-p}}\frac{dp}{dx},\ 即\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{-p}}\right)\frac{dp}{dx} = 0,$$

亦即 $\frac{dp}{dx} = 0$ 或 $x - \frac{1}{\sqrt{-p}} = 0$.

由 $\frac{dp}{dx} = 0$，得 $p = C$，代入给定方程得通解为

$$y = Cx + 2\sqrt{-C}.$$

由 $x - \frac{1}{\sqrt{-p}} = 0$，得 $x = \frac{1}{\sqrt{-p}}$，代入给定方程，得 $y = \sqrt{-p}$.

故

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{-p}}, \\ y = \sqrt{-p}, \end{cases}\quad 或\ xy = 1.$$

这也是给定方程的解，即奇解.

11.3.35　$y = xp + \sqrt{1+p^2}$.

解　由原方程得

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}\left(pdx + xdp + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}dp\right),$$

即
$$\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp = 0, \tag{1}$$

亦即
$$dp = 0, \tag{2}$$

或
$$x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0. \tag{3}$$

由方程(2)得 $p = C$，代入方程(1)，得通解为

$$y = Cx + \sqrt{1+C^2}.$$

由(3)式得 $x=-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$，代入方程(1)，得 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$，故

$$\begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \end{cases} \quad 即\ x^2+y^2=1,$$

这也是给定方程的解，即为奇解.

11.3.36　$p^2(x^2-1)-2pxy+y^2-1=0$.

解　由原方程解出

$$y=px\pm\sqrt{p^2+1}. \tag{1}$$

将上式对 x 求导，得

$$p=p+\left(x\pm\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)\frac{dp}{dx},\ 即\ \left(x\pm\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)\frac{dp}{dx}=0.$$

亦即 $\dfrac{dp}{dx}=0$，　$x\pm\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}=0$.

由 $\dfrac{dp}{dx}=0$，得 $p=C$，代入原方程，得通解为

$$C^2(x^2-1)-2Cxy+y^2-1=0.$$

由 $x\pm\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}=0$，得

$$x=\mp\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式得 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$，故

$$\begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}. \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x=\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}, \\ y=-\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}. \end{cases}$$

即 $x^2+y^2=1$，这也是方程的解，即为奇解

§ 4　可降阶的高阶微分方程

内 容 提 要

1. $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$ 型的高阶微分方程

对于这类方程，逐次积分得通解为

$y = \int dx \int dx \int \cdots \int f(x)dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n$，

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}, C_n$ 均为任意常数．

2. 不显含未知函数的高阶微分方程

对于 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程，令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，可以将原方程化为一阶微分方程 $p' = f(x, p)$. 设其通解为 $y' = p = \varphi(x, C_1)$，则原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

一般地，对于 $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}, y^{(n-2)} \cdots y^{(k)})$ 型的微分方程，令 $y^{(k)} = p$，就可以将原方程化为 $n - k$ 阶微分方程

$$p^{(n-k)} = f(x, p^{n-k-1}, p^{n-k-2}, \cdots, p).$$

3. 不显含自变量的高阶微分方程

对于 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程，令 $y' = p$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$，可以将原方程化为一阶微分方程 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$. 设其通解为 $y' = p = \varphi(y, C_1)$，则用分离变量法解得原方程的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

一般地，对于 $y^{(n)} = f(y, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \cdots, y^{(k)})$ 型的微分方程，令 $y^{(k)} = p$，则 $y^{(k+1)} = p\frac{dp}{dy}$，$y^{(k+2)} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})^2p$，…，就可以将原方程化为 $n - k$ 阶微分方程．

对于既不显含未知函数，又不显含自变量的微分方程

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \cdots, y^{(k)}),$$

按前面2与3两种方法(含 $y^{(k)}=p$,取 x 或 y 为自变量)都可以将原方程化为 $n-k$ 阶微分方程,一般地,取 x 为自变量较为简便.

问题与解答

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的高阶微分方程

求下列微分方程的通解(11.4.1—11.4.4题):

11.4.1　$y''=x$.

解　$y'=\frac{1}{2}x^2+C_1$, $y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$.

11.4.2　$y''=\mathrm{arctg}x$.

解　$y'=\int \mathrm{arctg}x dx=x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1$.

$$y=\int[x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1]dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{arctg}x-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

11.4.3　$y''-x-e^x=0$.

解　$y''=x+e^x$, $y'=\frac{1}{2}x^2+e^x+C_1$,

所以,
$$y=\frac{1}{6}x^3+e^x+C_1x+C_2.$$

11.4.4　$y'''=xe^x$.

解　$y''=(x-1)e^x+C$, $y'=(x-2)e^x+Cx+C_2$,

所以,$y=(x-3)e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$,　$(C_1=\frac{C}{2})$.

11.4.5　求 $y'''=\frac{\ln x}{x^2}$ 满足 $y(1)=0, y'(1)=1, y''(1)=2$ 的特解.

解　$y''=\int_1^x \frac{\ln x}{x^2}dx+2=3-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$,

$$y'=\int_1^x(3-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x})dx+1=3x-\frac{1}{2}\ln^2x-\ln x-2,$$

$$y=\int_1^x(3x-\frac{1}{2}\ln^2x-\ln x-2)dx=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{x^2}{2}\ln^2x+\frac{1}{2}.$$

故所求的特解为

$$y=\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{x^2}{2}\ln^2x+\frac{1}{2}.$$

2. 不显含未知函数的高阶微分方程

求下列微分方程的特解(11.4.6—11.4.12 题):

11.4.6　$y''=by'^3$.

解　令 $y'=p$,则 $y''=p'$,原方程可化为

$$p'=bp^2. \tag{1}$$

用分离变量法解方程(1)得

$$-\frac{1}{2p^2}=bx+C_1. \tag{2}$$

由(2)式,解出

$$p=\pm\frac{1}{\sqrt{-2bx+C_1}},\text{即 } y'=\pm\frac{1}{\sqrt{-2bx+C_1}}. \tag{3}$$

将方程(3)直接积分,得所求的通解为

$$y=\mp\frac{1}{2b}\sqrt{-2bx+C_1}+C_2.$$

11.4.7　$y''=1+y'^2$.

解　令 $y'=p$,则 $y''=p'$,将原方程化为

$$p'=1+p^2. \tag{1}$$

用分离变量法解方程(1),得

$$\operatorname{arctg}p=x+C_1. \tag{2}$$

由(2)式解出

$$p=\operatorname{tg}(x+C_1),\text{即 } y'=\operatorname{tg}(x+C_1). \tag{3}$$

将方程(3)直接积分,得所求的通解为

$$y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2.$$

11.4.8　$y''=y'+x$.

解　令 $y'=p$,则 $y''=p'$,将原方程化为

$$p'=p+x. \tag{1}$$

解一阶线性非齐次方程(1)得

$$p=e^{\int dx}\left(\int xe^{-\int dx}dx+C_1\right)=C_1e^x-x-1.$$

即　$$y'=C_1e^x-x-1. \tag{2}$$

将方程(2)直接积分,得所求的通解为

$$y = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

11.4.9　$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} = -4x^2.$

解　将给定方程变形为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (2 - \frac{1}{x})\frac{dy}{dx} = -4x. \tag{1}$$

令 $y' = p, y'' = p'$，将方程(1)化为

$$p' + (2 - \frac{1}{x}p) = -4x. \tag{2}$$

解线性方程(2)得

$$p = [\int(-4x)e^{\int(2-\frac{1}{x})dx}dx + C]e^{-\int(2-\frac{1}{x})dx} = C_1xe^{-2x} - 2x.$$

即　　$y' = C_1xe^{-2x} - 2x.$

积分，得 $y = Ce^{-2x}(x + \frac{1}{2}) - t^2 + C_2$，　$(C = -\frac{1}{2}C_1)$.

11.4.10　$(y''')^2 + (y'')^2 = 1.$

解　令 $y'' = p$，则 $y''' = p'$，将原方程化为

$$(p')^2 + p^2 = 1,\ 即\ p' = \pm\sqrt{1+p^2}. \tag{1}$$

用分离变量法解方程(1)得

$$\arcsin p = \pm x + C. \tag{2}$$

由(2)式解出

$$p = \sin(C \pm x),\ 即\ y'' = \sin(C \pm x). \tag{3}$$

将方程(3)积分得

$$y' = -\cos(C \pm x) + C_2,\ 即\ y' = -\cos(x + C_1) + C_2$$

$$(C_1 = \pm C).$$

再积分，得所求的通解为

$$y = -\sin(x + C_1) + C_2x + C_3.$$

11.4.11　$x^2y''' + xy'' - 4y' = 3x.$

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p', y''' = p''$，将给定方程化为

$$x^2p'' + xp' - 4p = 3x.$$

解这个欧垃方程，得 $p = \frac{C_1}{x^2} + C_2x^2 - x$，于是有

$$y' = \frac{C}{x^2} + C_2x^2 - x.$$

积分,得所求的通解为

$$y = -\frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + C_3.$$

11. 4. 12　$y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0.$

解　令 $y^{(4)} = p$,则 $y^{(5)} = p'$,将给定方程化为

$$p' - \frac{1}{x}p = 0.$$

用分离变量法解得

$$p = Cx,\ \text{即}\ y^{(4)} = Cx.$$

连续积分四次,得所求的通解为

$$y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5.$$

求下列微分方程满足给定初始条件的特解(12. 4. 13—12. 4. 17 题):

11. 4. 13　$xy'' + y' = 0, y(1) = ay'(1)$,($a$ 为常数)且当 $x \to 0$ 时,$y(x)$ 有界.

解　令 $y' = p$,则 $y'' = p'$,将原方程化为

$$xp' + p = 0,\ \text{即}\ (xp)' = 0. \tag{1}$$

将(1)式直接积分,得

$$xp = C_1. \tag{2}$$

由(2)式,解得

$$p = \frac{C_1}{x},\ \text{即}\ y' = \frac{C_1}{x}. \tag{3}$$

将方程(3)直接积分,得原方程的通解为

$$y = C_1\ln|x| + C_2.$$

由 $x \to 0$ 时 $y(x)$ 有界,可得 $C_1 = 0$,于是有 $y = C_2$. 又由 $y(1) = ay'(1)$,确定 $C_2 = 0$,故所求的特解为 $y = 0$.

11. 4. 14　$(x+1)y'' + xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

解　令 $y' = p, y'' = p'$,则原方程化为

$$(x+1)p' + xp = 0. \tag{1}$$

初始条件为 $p|_{x=0} = 1$.

将方程(1)分离变量后积分,得

$$\int_1^p \frac{dp}{p} = -\int_0^x \frac{x}{x+1}dx,\ \text{即}\ p = (1+x)e^{-x}.$$

亦即　　$y' = (1 + x)e^{-x}$.　　(2)

初始条件为 $y(0) = 0$.

将方程(2)直接积分,得所求的特解为

$$y = \int_0^x (1 + x)e^{-x}dx = -(x + 2)e^{-x} + 2.$$

11.4.15　$(1 - x^2)y'' - xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

解　令 $y' = p$,则 $y'' = p'$,原方程可化为

$$(1 - x^2)p' = xp. \tag{1}$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$,得初始条件为 $p|_{x=0} = 1$.

用分离变量法解方程(1)得

$$\int_1^p \frac{dp}{p} = \int_0^x \frac{x}{1 - x^2}dx,\ 即\ p = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

亦即　　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.　　(2)

初始条件为 $y|_{x=0} = 0$.

将方程(2)直接积分,得所求的特解为

$$y = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \arcsin x.$$

11.4.16　$(a - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + (\dfrac{dy}{dx})^2}$,($a, k$ 为常数,$a > 0$),$y(0) = 0, y'(0) = 0$.

解　令 $y' = p$,则 $y'' = p$,原方程可化为

$$(a - x)p' = k\sqrt{1 + p^2}. \tag{1}$$

由 $y'(0) = 0$ 得初始条件为 $p|_{x=0} = 0$

用分离变量法解方程(1),得

$$\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int_0^x \frac{k}{a - x}dx,即\ p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{a^k}{(a - x)^k}, \tag{2}$$

由(2)式解出

$$p = \frac{a^k}{2(a - x)^k} - \frac{(a - x)^k}{2a^k},$$

即　　$y' = \dfrac{a^k}{2(a - x)^k} - \dfrac{(a - x)^k}{2a^k}$.　　(3)

初始条件为 $y(0) = 0$.

当 $k \neq \pm 1$ 时，将方程(3)积分，得所求的特解为

$$y = \int_0^x \left[\frac{a^k}{2(a-x)^k} - \frac{(a-x)^k}{2a^k}\right]dx.$$

即　$y = -\dfrac{a^k}{2(1-k)}(a-x)^{1-k} + \dfrac{1}{2a^k(1+k)}(a-x)^{k+1} + \dfrac{ka}{1-k^2}.$

当 $k = 1$ 时，方程(3)为

$$y' = \frac{a}{2(a-x)} - \frac{a-x}{2a}.$$

积分，得所求的特解为

$$y = -\frac{a}{2}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}(a-x)^2 + \frac{a}{2}\ln a - \frac{a}{4}.$$

当 $k = -1$ 时，方程(3)为

$$y' = \frac{a-x}{2a} - \frac{a}{2(a-x)}.$$

积分，得所求的特解为

$$y = \frac{a}{2}\ln|a-x| - \frac{1}{4a}(a-x)^2 - \frac{a}{2}\ln a + \frac{a}{4}.$$

11.4.17　$y''' = \sqrt{y''}$，$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

解　令 $y'' = p$，则 $y''' = p'$，原方程可化为

$$p' = \sqrt{p}. \tag{1}$$

由 $y''(0) = 0$，得初始条件为 $p(0) = 0$.

用分离变量法解方程(1)得

$$\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{p}} = \int_0^x dx,\ 即\ 2\sqrt{p} = x, \tag{2}$$

由(2)式解出 $p = \dfrac{x^2}{4}$，即 $y'' = \dfrac{x^2}{4}$ 初始条件为 $y(0) = y'(0) = 0$.

积分两次，得所求的特解为 $y = \dfrac{1}{48}x^4$.

3. 不显含自变量的高阶微分方程

求下列微分方程的通解(11.4.18—11.4.24题)：

11.4.18　$y'' = y$.

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，原方程可化为

$$p\frac{dp}{dy}=y. \qquad (1)$$

用分离变量法解方程(1)，得

$$p^2=y^2+C_1. \qquad (2)$$

由(2)式解出

$$p=\pm(y^2+C_1)^{\frac{1}{2}} \text{ 即 } y'=\pm(y^2+C_1)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

用分离变量法解方程(3)，得原方程的通解为

$$\ln(y+\sqrt{y^2+C_1})=\pm x+C_2.$$

11.4.19　$y''+\frac{a^2}{y^2}=0$.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程可化为

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{a^2}{y^2}=0. \qquad (1)$$

用分离变量法解方程(1)得

$$\frac{p^2}{2}=\frac{a^2}{y}+C_1. \qquad (2)$$

由(2)式解出

$$p=\pm\frac{\sqrt{2}a}{y}\sqrt{y+C_1y^2}, \text{ 即 } y'=\pm\frac{\sqrt{2}a}{y}\sqrt{y+C_1y^2}. \qquad (3)$$

用分离变量法解方程(3)，得原方程的通解为

$$\frac{1}{C_1}\sqrt{y+C_1y^2}-\frac{1}{C_1\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y}+\sqrt{C_1y+1})=\pm\sqrt{2}ax+C_2.$$

或 $\sqrt{y+C_1y^2}-\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln(\sqrt{C_1y}+\sqrt{C_1y+1})=\pm\sqrt{2}aC_1x+C_2$.

11.4.20　$y''=\frac{1}{\sqrt{ay}}$，$(a>0)$.

解　令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，原方程可化为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{1}{\sqrt{ay}}, \qquad (1)$$

用分离变量法解方程(1)，得

$$p^2=\frac{4}{\sqrt{a}}(\sqrt{y}+C_1). \qquad (2)$$

由(2)式解出：

$$p=\pm\frac{2}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\sqrt{y}+C_1},\text{即 } y'=\pm\frac{2}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\sqrt{y}+C_1}.\quad(3)$$

用分离变量法解方程(3),得原方程的通解为

$$4\left[\frac{(\sqrt{y}+C_1)^{3/2}}{3}-C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\right]=\pm\frac{2}{\sqrt[4]{a}}x+C_2,$$

或 $$(\sqrt{y}+C_1)^{3/2}-3C_1\sqrt{\sqrt{y}+C_1}=\pm\frac{3}{2\sqrt[4]{a}}x+C_2.$$

11.4.21 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2y-1}{y^2+1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

解　令 $\dfrac{dy}{dx}=p$,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=p\dfrac{dp}{dy}$,给定方程可化为

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{2y-1}{y^2+1}p^2,\ \text{即}\ \frac{dp}{dy}=\frac{2y-1}{y^2+1},$$

积分得 $p=C_1(1+y^2)e^{-\arctan y}$, 即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1(1+y^2)e^{-\arctan y}$.

用分离变量法解得 $e^{\arctan y}=C_1x+C_2$,这即为所求的通解.

11.4.22 $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0.$

解　令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$,给定方程可化为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0,\ \text{即}\ y\frac{dp}{dy}-p=0.$$

用分离变量法解得　　$p=C_1y$, 即 $y'=C_1y$.

再用分离变量法解得原方程的通解为 $y=C_2e^{C_1x}$.

11.4.23 $yy''-y'^2+y'=0.$

解　令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$,原方程可化为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2+p=0,\ \text{即}\ y\frac{dp}{dy}=p-1.$$

用分离变量法解得

$$p=C_1y+1,\ \text{即}\ y'=C_1y+1.$$

再用分离变量法解得原方程的通解为 $y=C_1e^{C_1x}-\dfrac{1}{C_1}$.

11.4.24 $y'y'''=3(y'')^2.$

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p'$，$y''' = p''$，给定方程可化为

$$pp'' = 3(p')^2. \tag{1}$$

再令 $p' = u$，则 $p'' = u\dfrac{du}{dp}$，将方程(1)化为

$$pu\frac{du}{dp} = 3u^2,\ 即\ p\frac{du}{dp} = 3u. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)得

$$u = Cp^3,\ 即\ p' = Cp^3. \tag{3}$$

再用分离变量法解方程(3)得

$$\frac{1}{p^2} = C_1x + C_2,\quad (C_1 = -2C). \tag{4}$$

由(4)式解出

$$p = \pm (C_1x + C_2)^{-\frac{1}{2}},\ 即\ y' = \pm (C_1x + C_2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

将方程(5)直接积分，得原方程的通解为

$$y = \pm \frac{2}{C_1}(C_1x + C_2)^{\frac{1}{2}} + C_3,$$

或

$$y = C_1(x + C_2)^{\frac{1}{2}} + C_3.$$

求下列微分方程满足给定初始条件的特解(11.4.25—11.4.30题)：

11.4.25　$y'' = 3\sqrt{y}$，$y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 2$.

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，给定方程可化为

$$p\frac{dp}{dy} = 3\sqrt{y}, \tag{1}$$

由 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 2$，得初始条件为 $p|_{y=1} = 2$.

用分离变量法解方程(1)，得

$$\int_2^p pdp = \int_1^y 3\sqrt{y}\,dy,\ 即\ p^2 = 4y^{\frac{3}{2}}. \tag{2}$$

由(2)式解出 $p = \pm 2y^{\frac{3}{4}}$，因为 $p = -2y^{\frac{3}{4}}$ 不符合初始条件 $p|_{y=1} = 2$，舍去，所以

$$p = 2y^{\frac{3}{4}},\ 即\ y' = 2y^{\frac{3}{4}}. \tag{3}$$

初始条件为 $y|_{x=0} = 1$.

用分离变量法解方程(3)，得所求的特解为

$$\int_1^y \frac{dy}{y^{\frac{3}{4}}} = 2\int_0^x dx,\ \text{即}\ y = (\frac{x}{2}+1)^4.$$

11.4.26　$y'' - e^{2y} = 0, y'(0) = 1, y(0) = 0.$

解　令 $y' = p$,则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$,将给定方程化为

$$p\frac{dp}{dy} = e^{2y}. \tag{1}$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$,得初始条件为 $p|_{y=0} = 1$.

用分离变量法解方程(1),得

$$\int_1^p pdp = \int_0^y e^{2y}dy,\ \text{即}\ p^2 = e^{2y}. \tag{2}$$

由(2)式解出

$$p = \pm e^y,\ \text{即}\ y' = \pm e^y. \tag{3}$$

初始条件为　　$y(0) = 0.$

用分离变量法解方程(3),得所求的特解为

$$\int_0^y e^{-y}dy = \pm\int_0^x dx,\ \text{即}\ 1 - e^{-y} = \pm x.$$

11.4.27　$y^3y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0.$

解　令 $y' = p$ 则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$,将给定方程化为

$$y^3p\frac{dp}{dy} + 1 = 0, \tag{1}$$

由 $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$,得初始条件为 $p|_{y=1} = 0$.

用分离变量法解方程(1),得

$$\int_0^p pdp = -\int_1^y \frac{dy}{y^3},\ \text{即}\ p^2 = \frac{1}{y^2} - 1, \tag{2}$$

由(2)式解出

$$p = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},\ \text{即}\ y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \tag{3}$$

初始条件为 $y|_{x=1} = 1$

用分离变量法解方程(3),得所求的特解为

$$\int_1^y \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = \pm\int_1^x dx,\ \text{即}\ (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

11.4.28　$yy'' = 2(y'^2 - y'), y(0) = 1, y'(0) = 2.$

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，给定方程可化为

$$yp\frac{dp}{dy} = 2(p^2 - p),\ 即\ y\frac{dp}{dy} = 2(p-1), \tag{1}$$

由 $y(0) = 1, y'(0) = 2$，得初始条件为 $p|_{y=1} = 2$.

用分离变量法解方程(1)，得

$$\int_2^p \frac{dp}{p-1} = 2\int_1^y \frac{dy}{y}\ 即\ p = y^2 + 1,$$

亦即 $y' = y^2 + 1$，初始条件为 $y(0) = 1$. (2)

用分离变量法解方程(2)，得所求的特解为

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^2+1} = \int_0^x dx,\ 即\ y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}).$$

11.4.29　$yy'' + (y')^2 + 1 = 0, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -\sqrt{3}$.

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，原方程可化为

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

由 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -\sqrt{3}$，得初始条件为 $p|_{y=1} = -\sqrt{3}$.

用分离变量法解方程(1)，得

$$\int_{-\sqrt{3}}^p \frac{p}{p^2+1}dp = -\int_1^y \frac{dy}{y},\ 即\ \frac{p^2+1}{4} = \frac{1}{y^2}. \tag{2}$$

由(2)式解出 $p = \pm\dfrac{\sqrt{4-y^2}}{y}$. 因为 $p = \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{y}$ 不符合初始条件 $p|_{y=1} = -\sqrt{3}$，舍去，所以

$$p = -\frac{\sqrt{4-y^2}}{y},\ 即\ y' = -\frac{\sqrt{4-y^2}}{y}, \tag{3}$$

初始条件为 $y|_{x=0} = 1$.

用分离变量法解方程(3)，得所求的特解为

$$-\int_1^y \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}dy = \int_0^x dx,\ 即\ \sqrt{4-y^2} - \sqrt{3} = x.$$

11.4.30　$y'' + y'^2 = 2, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

解　令 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，将给定方程化为

$$p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2. \tag{1}$$

由 $y(0)=0, y'(0)=1$，得初始条件为 $p|_{y=0}=1$.

用分离变量法解方程(1)得

$$\int_1^p \frac{p}{2-p^2}dp = \int_0^y dy,\ 即\ p^2 = 2 - e^{-2y}. \tag{2}$$

由(2)式解得 $p=\pm\sqrt{2-e^{-2y}}$. 因为 $p=-\sqrt{2-e^{-2y}}$ 不符合初始条件 $p|_{y=0}=1$，舍去，所以

$$p=\sqrt{2-e^{-2y}},\ 即\ y'=\sqrt{2-e^{2y}} \tag{3}$$

初始条件为 $y|_{x=0}=0$.

用分离变量法解方程(3)，得所求的特解为

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2-e^{-2y}}} = \int_0^x dx,$$

即　$\sqrt{2}e^y + \sqrt{2e^{2y}-1} = (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}x}$.

§5　高阶线性微分方程解的结构

内容提要

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

其中 $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\cdots$, $a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$, $f(x)$ 均为已知的连续函数，且 $a_0(x) \not\equiv 0$. 当 $f(x) \equiv 0$ 时，方程(1) 为

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (2)$$

(2) 称为 n 阶齐次线性微分方程；当 $f(x) \not\equiv 0$ 时，方程(1) 称为 n 阶非齐次线性微分方程.

关于线性微分方程解的结构有下列定理：

定理 1　若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次线性微分方程(2) 的解，则 $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ 也是方程(2) 的解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数.

定理 2　若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次线性微分方程(2) 的 n 个线性无关的解[1]，则 $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ 是方程(2) 的通解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数，且 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 称为方程(2) 的基本解组.

定理 3　若 Y 是 n 阶齐次线性微分方程(2) 的通解，y^* 是 n 阶非齐次线性微分方程(1) 的特解，则 $y = Y + y^*$ 是 n 阶非齐次线性微分方程(1) 的通解.

定理 4　若 n 阶非齐次线性微分方程(1) 的自由项 $f(x)$ 是几个函数的和，例如

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x), \qquad (3)$$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是下列两个 n 阶非齐次线性微分方程

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

与　$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 是方程(3) 的特解.

注 1　设 n 个函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在 (a,b) 内具有 $n-1$ 阶导数，则这 n 个函数在 (a,b) 内线性相关的必要条件是：朗斯基(Wronski) 行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

对于 (a,b) 内任意 x 恒为零，即 $W(x) \equiv 0$，但其逆不真.

问 题 与 解 答

11.5.1　已知二阶齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$(其中 $P(x)$、$Q(x)$ 为连续函数) 的一个非零特解 $y_1(x)$，试利用变换 $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ 求出该方程的通解表达式.

解　设 $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ 是给定方程的解，将 y_2 代入给定方程并整理后得到

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' + (y_1'' + Py_1' + Qy_1)u = 0.$$

因为 $y_1(x)$ 是给定方程的解，所以 $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$. 于是有

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0. \tag{1}$$

令 $u' = P, u'' = P'$，则方程(1) 化为

$$y_1P' + (2y_1' + Py_1)P = 0. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2) 得

$$P = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}, \quad 即 \quad u' = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}. \tag{3}$$

将方程(3) 直接积分得 $u = \int \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx + C_2$.

取 $u(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx$. 于是给定的方程与 y_1 线性无关的解为

$$y_2 = u(x)y_1(x) = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx,$$

故原方程的通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1y_1 + C_2y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx.$$

11.5.2　设二阶线性方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$，其中

$P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是某区间上的连续函数，证明：存在变换 $y=u(x)v(x)$，可以把给定方程化为方程$\frac{d^2u}{dx^2}+R(x)u=f(x)$，并求出 $R(x)$.

证　用变换 $y=u(x)v(x)$ 将给定方程化为

$$vu''+(2v'+Pv)u'+(v''+Pv'+Qv)u=f(x).$$

令 u' 项的系数为零，即 $2v'+Pv=0$. 解之得

$$v=Ce^{-\int\frac{1}{2}p(x)dx},$$

其中 C 为任意常数．取 $C=1$，即取 $v=e^{-\int\frac{1}{2}p(x)dx}$.

亦即用变换 $y=ue^{-\int\frac{1}{2}p(x)dx}$，可将给定方程化为

$$vu''+(v''+Pv'+Qv)u=f(x),$$

或 $$u''+R(x)u=f(x),$$

其中 $$R(x)=Q+\frac{v'}{v}P+\frac{v''}{v}=Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2.$$

11.5.3　求方程 $x^4y''+2x^3y'+n^2y=0$ 的通解．

解　将给定方程变形为

$$y''+\frac{2}{x}y'+\frac{n^2}{x^4}y=0. \tag{1}$$

设 $P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=\frac{n^2}{x^4}$，由 11.5.2 题知，用变换 $y=ue^{-\int\frac{1}{2}p(x)dx}=\frac{u}{x}$ 可将方程(1) 化为 $u''+R(x)u=0$.

其中 $R(x)=Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2=\frac{n^2}{x^4}$.

即 $$u''+\frac{n^2}{x^4}u=0. \tag{2}$$

用观察法知，$u_1=x\sin\frac{n}{x}$ 与 $u_2=x\cos\frac{n}{x}$ 为方程(2) 的两个解，所以方程(2) 的通解为

$$u=x(C_1\cos\frac{n}{x}+C_2\sin\frac{n}{x}).$$

故所求通解为

$$y=\frac{u}{x}=C_1\cos\frac{n}{x}+C_2\sin\frac{n}{x}.$$

11.5.4　求方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+k^2y=0$ 满足当 $x\to0$ 时，y 为有限的条件的解．

解　设 $P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=k^2$，由 11.5.2 题知，用变换

$$y=ue^{-\int\frac{1}{2}p(x)dx}=-\frac{u}{x},$$

可以将给定方程化为 $u''+R(x)u=0$，其中 $R(x)=Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2=k^2$，即 $u''+k^2u=0$.

解之得 $u=C_1\cos kx+C_2\sin kx$，因此给定方程的通解为

$$y=\frac{u}{x}=\frac{1}{x}(C_1\cos kx+C_2\sin kx).$$

由条件 $x\to 0$ 时，y 为有限，确定 $C_1=0$. 故所求的解为

$$y=\frac{C}{x}\sin kx.$$

11.5.5　求 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解.

解　首先求给定方程所对应的齐次方程

$$xy''+2y'-xy=0,\ 即\ y''+\frac{2}{x}y'-y=0 \tag{1}$$

的通解. 设 $P(x)=\frac{2}{x}$，$Q(x)=-1$，由 11.5.2 题知，用变换

$$y=ue^{-\int\frac{1}{2}p(x)dx}=\frac{u}{x}$$

可以将方程(1) 化为 $u''+R(x)u=0$，其中

$$R(x)=Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}p^2=-1.$$

即　　$u''-u=0.$　　(2)

解二阶常系数线性齐次方程(2) 得 $u=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 因此，齐次方程(1) 的通解为

$$Y=\frac{u}{x}=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x}).$$

由观察法知，$y^*=\frac{1}{2}e^x$ 是给定方程的一个特解，故所求通解为

$$y=Y+y^*=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{1}{2}e^x.$$

11.5.6　已知函数 $\sin^2x$、$\cos^2x$ 都是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解，

(1) 证明：$\sin^2x$、$\cos^2x$ 构成基本解组；

(2) 证明:1、$\cos 2x$ 也构成基本解组;

(3) 求 $P(x)$、$Q(x)$;

(4) 求 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = \sin 2x$ 的通解.

解 (1) 因为 $\sin^2 x$、$\cos^2 x$ 都是方程 $y'' + P(x)y + Q(x)y = 0$ 的解,且$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x \neq$ 常数,即 $\sin^2 x$ 与 $\cos^2 x$ 线性无关,故 $\sin^2 x$ 与 $\cos^2 x$ 构成所给方程的基本解组.

(2) 因为 $\sin^2 x$ 与 $\cos^2 x$ 是所给方程的基本解组,而 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$,所以 1 与 $\cos 2x$ 也都是所给方程的解. 又因为$\frac{1}{\cos 2x} \neq$ 常数,即函数 1 与 $\cos 2x$ 线性无关,故 1 与 $\cos 2x$ 也构成所给方程的基本解组.

(3) 将 $y = 1$ 代入所给方程得,$Q(x) = 0$. 再将 $y = \cos 2x$ 代入所给方程,得

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x P(x) = 0, \text{ 即 } P(x) = -2\mathrm{ctg}2x.$$

(4) 所给方程为

$$y'' - 2\mathrm{ctg}2xy' = \sin 2x, \tag{1}$$

令 $y' = p, y'' = p'$,则方程(1) 化为

$$p' - 2p\mathrm{ctg}2x = \sin 2x, \tag{2}$$

解一阶线性非齐次方程(2),得

$$p = e^{\int 2\mathrm{ctg}2x dx}\left(\int \sin 2x e^{-\int 2\mathrm{ctg}2x dx}dx + C_1\right) = (x + C_1)\sin 2x. \tag{3}$$

即 $\qquad y' = (x + C_1)\mathrm{sim}2x.$

将方程(3) 直接积分,得所求的通解为

$$y = -\frac{x + C_1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_2.$$

11.5.7 设函数 $y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$ 都是线性非齐次方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ 的特解,其中 $a(x)$、$b(x)$、$f(x)$ 为已知函数,且 $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \neq$ 常数,证明:$y(x) = (1 - C_1 - C_2)y_1(x) + C_1y_2(x) + C_2y_3(x)$(其中 C_1、C_2 为任意常数)是所给方程的通解.

证 先证 $y(x)$ 是所给方程的解. 将 $y(x)$ 代入方程,得

$$\begin{aligned}\text{左边} = &(1 - C_1 - C_2)y''_1 + C_1y''_2 + C_2y''_3 \\ &+ a(x)[(1 - C_1 - C_2)y_1' + C_1y_2' + C_2y_3']\end{aligned}$$

$$+ b(x)[(1 - C_1 - C_2)y_1 + C_1y_2 + C_2y_3]$$
$$= (1 - C_1 - C_2)[y''_1 + a(x)y_1' + b(x)y_1]$$
$$+ C_1[y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2] + C_2[y''_3 + a(x)y_3' + b(x)y_3$$
$$= (1 - C_1 - C_2)f(x) + C_1f(x) + C_2f(x) = f(x) = \text{右边}.$$

故 $y(x)$ 是所给方程的解.

再证 $y(x)$ 是所给方程的通解.

$$y(x) = (1 - C_1 - C_2)y_1(x) + C_1y_2(x) + C_2y_3(x)$$
$$= y_1(x) + C_1[y_2(x) - y_1(x)] + C_2[y_3(x) - y_1(x)].$$

因为 $y_1(x)$、$y_2(x)$、$y_3(x)$ 都是所给方程的特解，所以 $y_2(x) - y_1(x)$、$y_3(x) - y_1(x)$ 都是所给方程对应的齐次方程的特解. 又因为 $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \neq$ 常数，所以 $y_2(x) - y_1(x)$、$y_3(x) - y_1(x)$ 是两个线性无关的特解，$C_1[y_2(x) - y_1(x)] + C_2[y_3(x) - y_1(x)]$ 是齐次方程的通解. 故

$$y = y_1(x) + C_1[y_2(x) - y_1(x)] + C_2[y_3(x) - y_1(x)]$$

是所给方程的通解.

11.5.8　已知方程 $y'' - y' - 2y = -2x - 1$ 满足 $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ 的两个特解恰好是微分方程

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' - 4(x^2 - x + 1)y = -2(2x^3 - 2x^2 + 3x)$$

的两个特解，求该微分方程的通解.

解　二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' - y' - 2y = -2x - 1 \tag{1}$$

的通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + x$.

由初条件 $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$，确定 $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = -\frac{1}{3}$. 因此，非齐次方程(1) 满足此初始条件的特解为

$$y_1 = \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x} + x.$$

由初始条件 $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2, \end{cases}$ 确定 $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}$. 因此，非齐次方程(1) 满足此初始条件的特解为

$$y_2 = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} + x.$$

因为 y_1、y_2 是二阶线性非齐次方程

$$(x^2+1)y''-2xy'-4(x^2-x+1)y=-2(2x^3-2x^2+x) \quad (2)$$

的两个特解，所以 $y_1^*=y_2-y_1=e^{2x}$ 是方程(2) 所对应的齐次方程

$$(x^2+1)y''-2xy'-4(x^2-x+1)y=0$$

即 $$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'-4\frac{x^2-x+1}{x^2+1}y=0 \quad (3)$$

的一个特解.

令 $p=-\dfrac{2x}{x^2+1}$，由 11.5.1 题知，线性齐次方程(3) 的通解为

$$\begin{aligned}Y&=e_1y_1^*+C_2y_1^*\int\frac{1}{y_1^{*2}}e^{-\int pdx}dx\\&=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}\int\frac{1}{e^{4x}}e^{\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}}dx\\&=C_1e^{2x}+C_2^{-2x}(-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}-\frac{9}{32})\\&=C_1e^{2x}-\frac{1}{32}C_2e^{-2x}(8x^2+4x+9).\end{aligned}$$

故所求线性非齐次方程(2) 的通解为

$$\begin{aligned}y&=Y+y_2\\&=C_1e^{2x}+C_2'e^{-2x}(8x^2+4x+9)+\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{2x}+x.\end{aligned}$$

$$(C_2'=-\frac{1}{32}C_2).$$

§ 6　高阶常系数线性微分方程

内 容 提 要

1. 高阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

(其中 p、q 为实数) 的特征方程为

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{2}$$

根据特征方程(2)的根(特征根)的下列三种情况,分别得到方程(1)的通解如下:

(1) 当特征根为两个不相同的实数 r_1 与 r_2 时,通解为

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x};$$

(2) 当特征根为两个相同的实数 r 时,通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{rx};$$

(3) 当特征根为一对共轭复数 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 时,通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

上述结论可以类似地推广到 n 阶实常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = 0 \tag{3}$$

其中 $n > 2$, $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 均为实数,方程(3) 的特征方程为

$$r^n + p_1r^{n-1} + \cdots + p_{n-1}r + p_n = 0, \tag{4}$$

根据特征根,可以写出方程(4) 的通解中与之对应的项如下:

(1) 当 r 为 k 重实根时,通解中对应的 k 项为

$$e^{rx}(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1}).$$

(2) 当 $\alpha \pm \beta i$ 为 k 重共轭复根时,通解中对应的 $2k$ 项为

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2x + D_kx^{k-1})\sin\beta x].$$

实常系数齐次线性微分方程的这种解法称为特征根法.

2. 高阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{5}$$

（其中 p、q 均为实数）的通解 y 是该方程对应的齐次方程(1)的通解 $Y = C_1y_1 + C_2y_2$ 与该方程一个特解 y^* 的和，即 $y = Y + y^*$.

求非齐次方程(5)的特解 y^* 的方法如下：

(1) 待定系数法.

在下列两种情况下，可以用待定系数法来求 y^*.

1) 当 $f(x) = P_m(x)e^{ax}$ 时，方程(5)具有形如 $y^* = x^kQ_m(x)e^{ax}$ 的特解，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次（m 次）的多项式，k 按 a 不是特征根，或是单实根，或是重根依次取 0，或 1，或 2.

2) 当 $f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]$ 时，方程(5)具有形如

$$y^* = x^ke^{ax}[R_l^1(x)\cos\beta x + R_l^2(x)\sin\beta x]$$

的特解，其中 $R_l^1(x)$、$R_l^2(x)$ 均为 l 次多项式，($l = \max\{m,n\}$)，K 按 $a + \beta i$（或 $a - \beta i$）不是特征根，或是特征根依次取 0 或 1.

(2) 常数变易法

将非齐次方程(5)对应的齐次方程(1)的通解 $C_1y_1 + C_2y_2$ 中的常数 C_1 与 C_2 变易为函数 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$，并设非齐次方程(5)具有形如

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

的特解. 把 y^* 代入方程(5)，得到一个关于 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 的方程. 为了确定 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$，还需要找到一个限制条件方程，组成关于 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 的方程组. 最简单、常用的方法是：

对 $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ 求导，得

$$y^{*\prime} = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'.$$

令 $$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \tag{6}$$

于是有 $$y^{*\prime} = C_1y_1' + C_2y_2'. \tag{7}$$

再对(7)式求导，得

$$y^{*\prime\prime} = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''. \tag{8}$$

将(7)、(8)两式代入方程(5)，并注意到 y_1 与 y_2 是齐次方程(1)的解，得到

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x), \tag{9}$$

由(6)、(9)两式组成的方程组

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C'_1y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

解出 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$，就得到所求的特解 y^*.

(3) 算子法

应用微分算子"D":$Dy=\frac{dy}{dx}$, $D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}$,将常系数非齐次线性微分方程(5)写成

$$D^2y+pDy+qy=f(x),$$

或简记成 $F(D)y=f(x)$,其中 $F(D)=D^2+pD+q$,于是有

$$y=\frac{1}{F(D)}f(x),$$

利用 $F(D)$ 的性质可以求出非齐次方程(5)的特解 y.

1) 当 $f(x)=e^{kx}$ 时,因为 $F(D)e^{kx}\equiv e^{kx}F(k)$,所以当 $F(k)\neq 0$ 时,有

$$\frac{1}{F(D)}e^{kx}=\frac{e^{kx}}{F(k)},$$

故非齐次方程 $y''+py'+qy=e^{kx}$ 的特解为 $y=\frac{e^{kx}}{F(k)}$.

2) 当 $f(x)=\sin ax$(或 $\cos ax$),因为

$$F(D^2)\sin ax\equiv\sin axF(-a^2),\ F(D^2)\cos ax\equiv\cos axF(-a^2),$$

所以当 $F(-a^2)\neq 0$ 时,有

$$\frac{1}{F(D^2)}\sin ax=\frac{\sin ax}{F(-a^2)},\ \frac{1}{F(D^2)}\cos ax=\frac{\cos ax}{F(-a^2)}.$$

故非齐次方程

$$y''+py'+qy=\sin ax,\text{或 } y''+py'+qy=\cos ax$$

的特解为 $y=\frac{\sin ax}{F(-a^2)}$,或 $y=\frac{\cos ax}{F(-a^2)}$

3) 当 $f(x)=e^{kx}u(x)$ 时,因为

$$F(D)e^{kx}u(x)\equiv e^{kx}F(D+k)u(x),$$

所以有 $\frac{1}{F(D)}e^{kx}u(x)=e^{kx}\frac{1}{F(D+k)}u(x)$.

此外,应用微分算子 D 可以将常系数非齐次线性微分方程(5)降阶,从而求出通解.

上述解法可以类似地推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x),$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},p_n$ 均为实数.

问题与解答

1. 高阶常系数线性齐次微分方程

求下列微分方程的通解（11.6.1.—11.6.10 题）：

11.6.1　$y''+y'-2y=0$.

解　特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=-2$. 故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

11.6.2　$y''+2y'-3y=0$.

解　特征方程为 $r^2+2r-3=0$，特征根为 $r=1, r=-3$，故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$.

11.6.3　$3y''-2y'-8y=0$.

解　特征方程为 $3r^2-2r-8=0$，特征根为 $r_1=-\frac{4}{3}, r_2=2$. 故通解为 $y=C_1e^{-\frac{4}{3}x}+C_2e^{2x}$.

11.6.4　$y''-4y'=0$.

解　特征方程为 $r^2-4r=0$，特征根为 $r_1=0, r_2=4$. 故通解为 $y=C_1+C_2e^{4x}$.

11.6.5　$2y''+y'+(2\sin^2 15°\cos^2 15°)y=0$.

解　原方程为 $2y''+y'+\frac{1}{8}y=0$. 特征方程为 $2r^2+r+\frac{1}{8}=0$，特征根为 $r_{1,2}=-\frac{1}{4}$. 故通解为 $y=e^{-\frac{x}{4}}(C_1+C_2x)$.

11.6.6　$4y''-12y'+9y=0$.

解　特征方程为 $4r^2-12r+9=0$，特征根为 $r_{1,2}=\frac{3}{2}$. 故通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{3}{2}x}$

11.6.7　$y''+y=0$.

解　特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，故通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

11.6.8　$y''-4y'+5y=0$.

解　特征方程为 $r^2-4r+5=0$，特征根为 $r_{1,2}=2\pm i$. 故通解为 $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

11.6.9　$y'' + 6y' + 13y = 0$.

解　特征方程为 $r^2 + 6r + 13 = 0$,特征根为 $r_{1,2} = -3 \pm 2i$. 故通解为 $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

11.6.10　$y'' - 10y' + 34y = 0$.

解　特征方程为 $r^2 - 10r + 34 = 0$,特征根为 $r_{1,2} = 5 \pm 3i$. 故通解为 $y = e^{5x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

11.6.11　设 $y'' + k^2y = 0$(k 为常数,且 $k > 0$).

(1) 确定常数 k,使微分方程有满足 $y(0) = 0, y(1) = 0$ 的非零解;

(2) 对于微分方程的任意一个解 y,证明 $y'^2 + k^2y^2$ 为常数.

解　(1) 特征方程为 $r^2 + k^2 = 0$, 特征根为 $r = \pm ki$. 通解为 $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$.

由 $y(0) = 0$ 确定 $C_1 = 0$,于是有 $y = C_2\sin kx$. 由 $y(1) = 0$,得 $C_2\sin k = 0$. 要使方程有非零解,则 $C_2 \neq 0$,从而有 $\sin k = 0$. 故 $k = n\pi$ $(n = 1, 2\cdots)$.

(2) 所给方程的通解为 $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$,其中 C_1、C_2 为任意常数. 又 $y' = -C_1k\sin kx + C_2k\cos kx$,故

$$y'^2 + k^2y^2 = (-C_1k\sin kx + C_2k\cos kx)^2 + k^2(C_1\cos kx + C_2\sin kx)^2$$
$$= k^2(C_1^2 + C_2^2) = C \ (C \text{ 为常数}).$$

求下列微分方程的通解(11.6.12—11.6.18 题):

11.6.12　$y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

解　特征方程为 $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$;特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$. 故通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$.

11.6.13　$y^{(4)} - 12y'' + 12y = 0$.

解　特征方程为 $r^4 - 12r^2 + 12 = 0$,特征根为

$$r_1 = \sqrt{6 + 2\sqrt{6}}, r_2 = -\sqrt{6 + 2\sqrt{6}},$$
$$r_3 = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}}, r_4 = -\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}.$$

故通解为

$$y = C_1e^{\sqrt{6+2\sqrt{6}}x} + C_2e^{-\sqrt{6+2\sqrt{6}}x} + C_3e^{\sqrt{6-2\sqrt{6}}x} + C_4e^{-\sqrt{6-2\sqrt{6}}x}.$$

11.6.14 $y^{(4)}+2y^{(3)}-3y''-4y'+4y=0$.

解 特征方程为 $r^4+2r^3-3r^2-4r+4=0$,即 $(r-1)^2(r+2)^2=0$,特征根为 $r_{1,2}=1,r_{3,4}=-2$.故通解为

$$y=e^x(C_1+C_2x)+e^{-2x}(C_3+C_4x).$$

11.6.15 $y^{(4)}+2y^{(3)}+y''=0$.

解 特征方程为 $r^4+2r^3+r^2=0$,特征根为 $r_{1,2}=0,r_{3,4}=-1$,故通解为 $y=C_1+C_2x+e^{-x}(C_3+C_4x)$.

11.6.16 $y^{(4)}-y=0$.

解 特征方程为 $r^4-1=0$,特征根为 $r_1=1,r_2=-1,r_{3,4}=\pm i$,故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

11.6.17 $y^{(5)}-2y^{(4)}+2y^{(3)}-4y''+y'-2y=0$.

解 特征方程为 $r^5-2r^4+2r^3-4r^2+r-2=0$,

即 $$(r^2+1)^2(r-2)=0,$$

特征根为 $r_1=2,r_{2,3}=i,r_{4,5}=-i$,故通解为

$$y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

11.6.18 $y^{(8)}+y^{(7)}-y^{(6)}-3y^{(5)}-7y^{(4)}-9y'''-7y''-5y'-2y=0$.

解 特征方程为

$$r^8+r^7-r^6-3r^5-7r^4-9r^3-7r^2-5r-2=0,$$

即 $$(r+1)^3(r-2)(r^2+1)^2=0.$$

特征根为 $r_{1,2,3}=-1,r_4=2,r_{5,6}=\pm i,r_{7,8}=\pm i$,故所求通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}+C_4e^{2x}+(C_5+C_6x)\cos x+(C_7+C_8x)\sin x.$$

求下列微分方程满足给定初始条件的特解(11.6.19—11.6.22题):

11.6.19 $y''+y'=0,y(0)=1,y'(0)=1$.

解 特征方程为 $r^2+r=0$,特征根为 $r_1=0,r_2=-1$,通解为 $y=C_1+C_2e^{-x}$.

由 $y(0)=1,y'(0)=1$,确定 $C_1=2,C_2=-1$,故所求的特解为 $y=2-e^{-x}$.

11.6.20 $4y''+4y'+y=0,y|_{x=0}=2,y'|_{x=0}=0$.

解 特征方程为 $4r^2+4r+1=0$,特征根为 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}$,通解为 $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$.

由 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$，确定 $C_1=2, C_2=1$. 故所求的特解为 $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

11.6.21 $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$.

解 特征方程为 $r^2+4r+29=0$，特征根为 $r_{1,2}=-2\pm 5i$，通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).$$

由 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$，确定 $C_1=0, C_2=3$. 故所求特解为

$$y=3e^{-2x}\sin 5x.$$

11.6.22 $y^{(4)}=a^2y''$，问哪一条积分曲线在原点的邻近，近似于曲线 $y=x^3$?

解 $y^{(4)}-a^2y''=0$ 的通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{ax}+C_4e^{-ax}.$$

将 e^{ax} 与 e^{-ax} 展开为 x 的幂级数，得

$$e^{ax}=1+ax+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^3}{3!}x^3+\cdots,$$

$$e^{-ax}=1-ax+\frac{a^2}{2!}x^2-\frac{a^3}{3!}x^3+\cdots.$$

于是有 $y=C_1+C_2x+C_3(1+ax+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^3}{3!}x^3+\cdots)$

$$+C_4(1-ax+\frac{a^2}{2!}x^2-\frac{a^3}{3!}x^3+\cdots).$$

在原点的邻近有

$$y\approx C_1+C_2x+C_3(1+ax+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^3}{3!}x^3)+C_4(1-ax+\frac{a^2}{2!}x^2-\frac{a^3}{3!}x^3)$$

$$=\frac{a^3}{3!}(C_3-C_4)x^3+\frac{a^2}{2!}(C_3+C_4)x^2+(C_2+aC_3-aC_4)x+(C_1+C_3+C_4)$$

欲使 $y\approx x^3$，只要

$$\frac{a^3}{3!}(C_3-C_4)=1,\ \frac{a^2}{2!}(C_3+C_4)=0,$$

$$C_2+aC_3-aC_4=0,\ C_1+C_3+C_4=0.$$

从而确定 $C_1=0, C_2=-\frac{6}{a^2}, C_3=\frac{3}{a^3}, C_4=-\frac{3}{a^3}$.

故所求的特解为 $y = \frac{3}{a^3}(e^{ax} - e^{-ax}) - \frac{6}{a^2}x.$

11.6.23 求 $y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$ 所满足的二阶常系数线性齐次方程.

解 由 y_1 与 y_2 的形式知，$r = 2$ 是特征方程的二重根，所以特征方程为

$$(r-2)^2 = 0,\ 即\ r^2 - 4r + 4 = 0,$$

故所求的微分方程为 $y'' - 4y' + 4y = 0.$

11.6.24 求以四个函数 $y_1 = e^x, y_2 = 2xe^x, y_3 = \cos 2x, y_4 = 3\sin 2x$ 为解的常系数线性齐次微分方程，并求出它的通解.

解 容易验证，给定的四个函数的朗斯基行列式 $W(y_1, y_2, y_3, y_4) \neq 0$，即它们线性无关，所以它们组成一个四阶常系数线性齐次方程的基本解组，该方程的通解为

$$y = C_1e^x + 2C_2xe^x + C_3\cos 2x + 3C_4\sin 2x$$
$$= (C_1 + C_2'x)e^x + C_3\cos 2x + C_4'\sin 2x, (C_2' = 2C_2, C_4' = 3C_4).$$

具有上述通解的齐次方程所对应的特征方程为

$$(r-1)^2(r^2+4) = 0,\ 即\ r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0.$$

故所求的四阶常系数线性齐次微分方程为

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$$

2. 高阶常系数线性非齐次微分方程

(1) 待定系数法

求下列微分方程的通解(11.6.25—11.6.42 题)：

11.6.25 $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $2y'' + 5y' = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x}.$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$，代入方程中，确定 $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{3}{5}, C = \frac{7}{25}$，于是有

$$y^* = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

故所求的通解为 $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$

11.6.26 $y'' + a^2y = e^x (a > 0).$

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''+a^2y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^*=Ae^x$，代入方程中确定 $A=\frac{1}{1+a^2}$，于是有 $y^*=\frac{1}{1+a^2}e^x$. 故所求的通解为

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{1+a^2}e^x.$$

11.6.27　$2y''+y'-y=2e^x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $2y''+y'-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}.$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^*=Ae^x$，代入方程中确定 $A=1$ 于是有 $y^*=e^x$. 故所求的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x.$$

11.6.28　$y''-2y'+y=xe^x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^x.$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^*=x^2(Ax+B)e^x$，代入方程中确定 $A=\frac{1}{6}$，$B=0$，于是有 $y^*=\frac{1}{6}x^3e^x$，故所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

11.6.29　$y''-6y'+9y=e^{3x}(x+1)$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''-6y'+9y=0$ 的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{3x},$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^*=x^2\cdot(Ax+B)e^{3x}$，代入方程中确定 $A=\frac{1}{6}$，$B=1$. 于是有 $y^*=x^2(\frac{1}{6}x+\frac{1}{2})e^x$. 故所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}.$$

11.6.30　$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=(1+x+\cdots+x^{23})e^{2x}$.

解法1　原非齐次方程对应的齐次方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0$ 的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

设非齐次方程的特解形如

$$y^* = x^2(a_0 + a_1x + \cdots + a_{23}x^{23})e^{2x}.$$

将 y^* 代入给定方程并整理化简，得

$$2 \cdot 1a_0 + 3 \cdot 2a_1 + \cdots + 25 \cdot 24x^{23} = 1 + x + \cdots + x^{23}.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot 1}, a_1 = \frac{1}{3 \cdot 2}, \cdots, a_{23} = \frac{1}{25 \cdot 24},$$

所以 $y^* = (\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2}x + \cdots + \frac{1}{25 \cdot 24}x^{23})x^2e^{2x}$. 故所求的通解为

$$y = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2 \cdot 1}x^2 + \cdots + \frac{1}{25 \cdot 24}x^{25})e^{2x}.$$

解法 2　求出原非齐次方程对应的齐次方程的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

设非齐次方程的特解为 $y = Q(x)e^{2x}$，代入给定方程，得

$$Q'' = 1 + x + \cdots + x^{23}.$$

积分两次，得 $Q(x) = C_1 + C_2x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{1}{24 \cdot 25}x^{25}$.

故所求的通解为

$$y = (C_1 + C_2x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{1}{24 \cdot 25}x^{25})e^{2x}.$$

11.6.31　$5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x}\cos x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $5y'' - 6y' + 5y = 0$ 的通解为 $Y = e^{\frac{3}{5}x}(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x)$.

设给定非齐次方程的特解形如 $y^* = e^{\frac{3}{5}x} \cdot (A\cos x + B\sin x)$，代入方程中确定 $A = -\frac{5}{9}$, $B = 0$. 故所求的通解为

$$y = e^{\frac{3}{5}x}(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x) - \frac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\cos x.$$

11.6.32　$y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' - 7y' + 6y = 0$ 的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

设给定非齐次方程的特解形如 $y^* = A\cos x + B\sin x$，代入方程中确定 $A = \frac{7}{74}$, $B = \frac{5}{74}$. 于是有 $y^* = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$，故所求的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$$

11.6.33 $y'' + 9y = \cos^2 x.$

解 将原非齐次方程变形为 $y'' + 9y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$，它对应的齐次方程 $y'' + 9y = 0$ 的通解为 $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.

设给定非齐次方程的特解形如 $y^* = A + B\cos 2x + C\sin 2x$，代入方程中确定 $A = \frac{1}{18}, B = \frac{1}{10}, C = 0$. 故所求的通解为

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{18} + \frac{1}{10}\cos 2x.$$

11.6.34 $y'' - y' = f(x)$，其中(1) $f(x) = x$; (2) $f(x) = xe^x$.

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' - y' = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 + C_2e^x.$$

(1) 设非齐次方程 $y'' - y' = x$ 的特解形如 $y^* = x(Ax + B)$，代入方程中确定 $A = -\frac{1}{2}, B = -1$. 于是有 $y^* = -\frac{1}{2}x^2 - x$. 故所求的通解为

$$y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x.$$

(2) 设非齐次方程 $y'' - y' = xe^x$ 的特解形如 $y^* = x(Ax + B)e^x$，代入方程中，确定 $A = \frac{1}{2}, B = -1$，故所求的通解为

$$y = C_1 + C_2e^x + (\frac{1}{2}x^2 - x)e^x.$$

11.6.35 $y'' - 5y' + 6y = f(x)$: (1) $f(x) = 2x + 3$; (2) $f(x) = e^{2x}$; (3) $f(x) = 2e^x + \sin x$

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

(1) 设非齐次方程 $y'' - 5y' + 6y = 2x + 3$ 的特解形如 $y^* = Ax + B$，代入方程中，确定 $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{7}{9}$. 于是有 $y^* = \frac{1}{3}x + \frac{7}{9}$，故所求的通解为

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{7}{9}.$$

(2) 设非齐次方程 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ 的特解形如 $y^* = Axe^{2x}$，代入

方程中，确定 $A=-1$. 于是有 $y^*=-xe^{2x}$ 故所求的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-xe^{2x}.$$

(3) 设非齐次方程 $y''-5y'+6y=2e^x+\sin x$ 的特解形如 $y^*=Ae^x+B\sin x+C\cos x$，代入方程中，确定 $A=1,B=\frac{1}{10},C=\frac{1}{10}$. 于是有 $y^*=e^x+\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$，故所求的通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+e^x+\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x.$$

11.6.36　$y''+3y'+2y=f(x)$，其中：(1) $f(x)=3\sin x$；(2) $f(x)=3xe^{-x}$；(3) $f(x)=e^{-x}\cos x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''+3y'+2y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

(1) 设非齐次方程 $y''+3y'+2y=3\sin x$ 的特解形如 $y^*=A\cos x+B\sin x$，代入方程中，确定 $A=-\frac{9}{10},B=\frac{3}{10}$ 于是有　$y^*=-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x$，故所求的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x.$$

(2) 设非齐次方程 $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$ 的特解形如 $y^*=xe^{-x}(Ax+B)$，代入方程中，确定 $A=\frac{3}{2},B=-3$. 于是有　$y^*=e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x)$. 故所求的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(\frac{3}{2}x^2-3x).$$

(3) 设非齐次方程 $y''+3y'+2y=e^{-x}\cos x$ 的特解形如 $y^*=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$，代入方程中，确定 $A=-\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$，于是有 $y^*=e^{-x}(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)$，故所求的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x).$$

11.6.37　$y''-4y'+4y=f(x)$，其中：(1) $f(x)=e^{-2x}+3$；(2) $f(x)=x\operatorname{ch}2x$；(3) $f(x)=8x^2+e^{2x}+\sin 2x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

(1) 设非齐次方程 $y''-4y'+4y=e^{-2x}+3$ 的特解形如 $y^*=Ae^{-2x}+B$，代入方程中确定 $A=\frac{1}{16}$，$B=\frac{3}{4}$，于是有 $y^*=\frac{1}{16}e^{-2x}+\frac{3}{4}$，故所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{16}e^{-2x}+\frac{3}{4}.$$

(2) 设非齐次方程 $y''-4y'+4y=x\mathrm{ch}2x$，即

$$y''-4y'+4y=\frac{x}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$$

的特解形如 $y^*=(Ax+B)e^{-2x}+x^2(Cx+D)e^{2x}$，代入方程中，确定

$$A=\frac{1}{32},B=\frac{1}{64},C=\frac{1}{12},D=0.$$

于是有 $y^*=(\frac{x}{32}+\frac{1}{64})e^{-2x}+\frac{1}{12}x^3e^{2x}$ 故所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+(\frac{x}{32}+\frac{1}{64})e^{-2x}+\frac{1}{12}x^3e^{2x}.$$

(3) 设非齐次方程

$$y''-4y'+4y=8x^2+e^{2x}+\sin 2x$$

的特解形如 $y^*=Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}+E\cos 2x+F\sin 2x$，代入方程中，确定

$$A=2,B=4,C=3,D=\frac{1}{2},E=\frac{1}{8},F=0.$$

于是有 $y^*=2x^2+4x+3+\frac{x^2}{2}e^x+\frac{1}{8}\cos 2x$，故所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+2x^2+4x+3+\frac{x^2}{2}e^x+\frac{1}{8}\cos 2x.$$

11.6.38　$y''+y=f(x)$，其中：(1) $f(x)=e^x\sin x$；(2) $f(x)=4x\sin x$；(3) $f(x)=x^2+\cos x$；(4) $f(x)=\cos x\cos 3x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(1) 设非齐次方程 $y''+y=e^x\sin x$ 的特解形如 $y^*=e^x(A\cos x+B\sin x)$，代入方程中确定 $A=-\frac{2}{5}$，$B=\frac{1}{5}$，于是有 $y^*=e^x(-\frac{2}{5}\cos x+$

$\frac{1}{5}\sin x)$. 故所求的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x).$$

(2) 设非齐次方程 $y'' + y = 4x\sin x$ 的特解形如

$$y^* = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x],$$

代入方程中,确定 $A = -1, B = 0, C = 0, D = 1$. 于是有 $y^* = -x^2\cos x + x\sin x$. 故所求的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - x^2\cos x + x\sin x.$$

(3) 设非齐次方程 $y'' + y = x^2 + \cos x$ 的特解形如

$$y^* = Ax^2 + Bx + C + x(D\cos x + E\sin x),$$

代入方程中,确定 $A = 1, B = 0, C = -2, D = 0, E = \frac{1}{2}$.

于是有 $y^* = x^2 - 2 + \frac{x}{2}\sin x$,故所求的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2 + \frac{x}{2}\sin x.$$

(4) 设非齐次方程 $y'' + y = \cos x\cos 3x$, 即 $y'' + y = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$ 的特解形如 $y^* = A\cos 4x + B\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x$,代入方程中确定

$$A = -\frac{1}{30}, B = 0, C = -\frac{1}{6}, D = 0.$$

于是有 $y^* = -\frac{1}{30}\cos 4x - \frac{1}{6}\cos 2x$. 故所求的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{30}\cos 4x - \frac{1}{6}\cos 2x.$$

11.6.39　$y'' - 2y' + 5y = f(x)$,其中:(1) $f(x) = e^x$; (2) $f(x) = \cos 2x$; (3) $f(x) = e^x\sin 2x$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解为

$$Y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

(1) 设非齐次方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x$ 的特解形如 $y^* = Ae^x$,代入方程中,确定 $A = \frac{1}{4}$. 于是有 $y^* = \frac{1}{4}e^x$ 故所求的通解为

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^x.$$

(2) 设非齐次方程 $y'' - 2y' + 5y = \cos 2x$ 的特解形如 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$，代入方程中确定 $A = \frac{1}{17}, B = -\frac{4}{17}$，

于是有 $y^* = \frac{1}{17}\cos 4x - \frac{4}{17}\sin 4x$. 故所求的通解为

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{17}\cos 4x - \frac{4}{17}\sin 4x.$$

(3) 设非齐次方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x\sin 2x$ 的特解形如

$y^* = xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$，代入方程中，确定 $A = -\frac{1}{4}, B = 0$，于是有

$y^* = -\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$，故所求的通解为

$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

11.6.40 $y'' - 2y' + 2y = f(x)$，其中：(1) $f(x) = \sin x$；(2) $f(x) = xe^x\sin x$.

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的通解为

$$Y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

(1) 设非齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = \sin x$ 的特解形如 $y^* = A\cos x + B\sin x$，代入方程中确定 $A = \frac{2}{5}, B = \frac{1}{5}$，于是有 $y^* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. 故所求的通解为

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

(2) 设非齐次方程 $y'' - 2y' + 2y = xe^x\sin x$ 的特解形如

$y^* = xe^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$，代入方程中确定

$$A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = 0, D = \frac{1}{4}.$$

于是有 $y^* = e^x(-\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x)$. 故所求的通解为

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^x(-\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x).$$

11.6.41 $y'' - ay' = e^{bx}$ (a、b 为实数，且 $a \neq 0, b \neq 0$).

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' - ay' = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 + C_2e^{ax}.$$

求给定非齐次方程的特解 y^*. 当 $b \neq a$ 时，设 $y^* = Ae^{bx}$，代入给定方

程，确定 $A=\dfrac{1}{b(b-a)}$. 于是有 $y^*=\dfrac{1}{b(b-a)}e^{bx}$. 当 $b=a$ 时，设 $y^*=Axe^{bx}$，代入给定方程，确定 $A=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}$，于是有

$$y^*=\frac{1}{a}xe^{bx}.$$

故给定非齐次方程的通解为

$$y=\begin{cases}C_1+C_2e^{ax}+\dfrac{1}{b(b-a)}e^{bx}, & \text{当 } b\neq a \text{ 时};\\ C_1+(C_2+\dfrac{x}{a})e^{ax}, & \text{当 } b=a \text{ 时}.\end{cases}$$

11.6.42　$y''-2y'-ky=x^2+3x+4,\ (k\geqslant-1)$.

解　原非齐次方程对应的齐次方程 $y''-2y'-ky=0$ 的特征根为 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{1+k}$.

(1) 当 $k>-1$，且 $k\neq0$ 时，$r_1\neq r_2$，且 $r_1\neq0$，$r_2\neq0$ 所以齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

设非齐次方程的特解形如 $y^*=ax^2+bx+C$，代入方程中，确定

$$a=-\frac{1}{k},b=\frac{3}{k}+\frac{4}{k^2},C=-\frac{4}{k}-\frac{8}{k^2}-\frac{8}{k^3},$$

于是有　$y^*=-\dfrac{1}{k}x^2+(\dfrac{3}{k}+\dfrac{4}{k^2})x-4(\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{k^2}+\dfrac{2}{k^3})$.

故所求的通解为

$$y=C_1e^{(1+\sqrt{1+k})x}+C_2e^{(1-\sqrt{1+k})x}-\frac{1}{k}x^2+(\frac{3}{k}+\frac{4}{k^2})x-4(1+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}).$$

(2) 当 $k=-1$ 时，$r_1=r_2=1$，所以齐次方程的通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^x.$$

设非齐次方程 $y''-2y'+y=x^2+3x+4$ 的特解形如 $y^*=Ax^2+Bx+C$，代入方程中，确定 $A=1,B=1,C=4$，

于是有 $y^*=x^2+x+4$. 故所求的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+x^2+x+4.$$

(3) 当 $k=0$ 时，$r_1=2$，$r_2=0$，所以齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{2x}.$$

设非齐次方程 $y''-2y'=x^2+3x+4$ 的特解形如 [illegible] $+bx$

$+ C)$，代入方程中，确定

$$a = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}, C = -\frac{3}{2},$$

于是有 $y^* = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$. 故所求的通解为

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

11.6.43 写出微分方程 $y'' + 4y' + a^2y = e^{-2x}$ 的通解形式(特解中的待定系数不必具体算出)，其中 a 为实数.

解 原非齐次方程所对应的齐次方程

$$y'' + 4y' + a^2y = 0 \tag{1}$$

的特征方程为 $r^2 + 4r + a^2 = 0$；特征根为 $r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - a^2}$.

(1) 当 $|a| < 2$ 时，特征根为两个不相同的实根 $r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - a^2}$. 因此，齐次方程(1)的通解为 $Y_1 = C_1e^{(-2+\sqrt{4-a^2})x} + C_2e^{(-2-\sqrt{4-a^2})x}$. 这时，给定非齐次方程的特解形如 $y_1^* = Ae^{-2x}$，其中 A 为待定系数(下同). 故所求的通解形式为

$$y = e^{-2x}(C_1e^{\sqrt{4-a^2}\,x} + C_2e^{-\sqrt{4-a^2}\,x} + A).$$

(2) 当 $|a| = 2$ 时，特征根为两个相同的实根 $r_{1,2} = -2$. 因此，齐次方程(1)的通解为 $Y_2 = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$. 这时，给定的非齐次方程的特解形如 $y_2^* = Ax^2e^{-2x}$，故所求的通解形式为 $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x + Ax^2)$.

(3) 当 $|a| > 2$ 时，特征根为一对共轭复根 $r_{1,2} = -2 + i\sqrt{a^2 - 4}$. 因此，齐次方程(1)的通解为 $Y_3 = e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{a^2 - 4}\,x + C_2\sin\sqrt{a^2 - 4}\,x)$. 这时，给定非齐次方程的特解形如 $y_2^* = Ae^{-2x}$. 故所求的通解形式为

$$y = e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{a^2 - 4}\,x + C_2\sin\sqrt{a^2 - 4}\,x + A).$$

11.6.44 写出微分方程 $y'' + 2y' + \lambda y = xe^{ax} + \sin 2x$ 的通解形式，其中 λ、a 为任意实数.

解 原非齐次方程对应的齐次方程

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

的特征根为 $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$.

(1) 当 $\lambda = 1, a = 1$ 时，原方程为

$$y'' + 2y' + y = xe^x + \sin 2x. \tag{2}$$

它所对应的齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2x)e^x$. 设非齐次方程(2)的特解形如 $y^* = x^2(Ax + B)e^x + C\cos 2x + D\sin 2x$. 故所求的通解形为

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2(Ax + B)e^x + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

(2) 当 $\lambda = 1, a \neq 1$ 时，原方程为

$$y'' + 2y' + y = xe^{ax} + \sin 2x, \tag{3}$$

它所对应的齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2x)e^x$.

设非齐次方程(3)的特解形如 $y^* = (Ax + B)e^{ax} + C\cos x + D\sin 2x$. 故所求的通解形为

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + (Ax + B)e^{ax} + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

(3) 当 $\lambda < 1, a = 1 + \sqrt{1-\lambda}$ 或 $a = 1 - \sqrt{1-\lambda}$ 时，原方程为

$$y'' + 2y' + \lambda y = xe^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + \sin 2x, \tag{4}$$

或

$$y'' + 2y' + \lambda y = xe^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} + \sin 2x. \tag{5}$$

它们所对应的齐次方程(1)的通解为

$$Y = C_1e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}.$$

设非齐次方程(4)或(5)的特解形如

$$y^* = x(Ax + B)e^{ax} + C\cos 2x + D\sin 2x,$$

其中 $a = 1 + \sqrt{1-\lambda}$ 或 $a = 1 - \sqrt{1-\lambda}$. 故所求的通解形为

$$y = C_1e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} + x(Ax + B)e^{ax} + C\cos 2x + D\sin 2x,$$

其中 $a = 1 + \sqrt{1-\lambda}$ 或 $a = 1 - \sqrt{1-\lambda}$.

(4) 当 $\lambda < 1, a \neq 1 \pm \sqrt{1-\lambda}$ 时，齐次方程(1)的通解为

$$Y = C_1e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}.$$

设给定非齐次方程的特解形如

$$y^* = e^{ax}(Ax + B) + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

故所求的通解形为

$$y = C_1e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x} + e^{ax}(Ax + B) + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

(5) 当 $\lambda > 1$ 时，齐次方程(1)的通解为

$$y = e^x(C_1\cos\sqrt{\lambda-1}\,x + C_2\sin\sqrt{\lambda-1}\,x).$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^* = (Ax + B)e^{ax} + C\cos 2x + D\sin 2x$. 故所求的通解形为

$$y = e^{x}(C_1\cos\sqrt{\lambda-1}\,x + C_2\sin\sqrt{\lambda-1}\,x) + (Ax+B)e^{ax} + C\cos2x + D\sin2x.$$

11.6.45 能否设 $y^* = A\sin2x$ 为下列方程的特解?(1) $y'' + y = \sin2x$; (2) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin2x$.

解 (1) 方程 $y'' + y = \sin2x$ 的左端只有 y 与 y''，而 $(\sin2x)'' = -4\sin2x$，所以该方程有形如 $y^* = A\sin2x$ 的特解. 将 y^* 代入方程，得

$$-4A\sin2x + A\sin2x = \sin2x,\ -3A = 1.$$

从而确定 $A = -\frac{1}{3}$. 故该方程的特解为 $y^* = -\frac{1}{3}\sin2x$.

(2) 方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin2x$ 的左端只有 y 与 y''、$y^{(4)}$，而 $(\sin2x)'' = -4\sin2x$，$(\sin2x)^{(4)} = 16\sin2x$，所以该方程有形如 $y^* = A\sin2x$ 的特解. 将 y^* 代入方程，得

$$16A\sin2x + 2(-4A\sin2x) + A\sin2x = \sin2x, 9A = 1.$$

从而确定 $A = \frac{1}{9}$. 故该方程的特解为 $y^* = \frac{1}{9}\sin2x$.

11.6.46 写出微分方程 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x)$ 的通解形式.

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' + 2y' + 2y = 0$ 的通解为

$$Y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

设原非齐次方程的特解形如

$$y^* = xe^{-x}\cdot[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x],$$

故所求的通解形式为

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + xe^{-x}[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x].$$

求下列微分方程的通解(11.6.47—11.6.50)题:

11.6.47 $\frac{d^3s}{dt^3} - 3\frac{ds}{dt} - 2s = \sin t + 2\cos t$.

解 原非齐次方程对应的齐次方程

$$\frac{d^3s}{dt^3} - 3\frac{ds}{dt} - 2s = 0$$

的通解为 $S = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3e^{2t}$.

设原非齐次方程的特解形如 $s^* = A\cos t + B\sin t$，代入方程中确定 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$. 于是有 $s^* = -\frac{1}{2}\sin t$. 故所求的通解为

$$s = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3e^{2t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

11.6.48 $y^{(3)}+y=e^x\sin 2x.$

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y^{(3)}+y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

设给定非齐次方程的特解形如 $y^*=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，代入方程中，确定 $A=\frac{1}{52}, B=-\frac{5}{52}$. 于是有 $y^*=e^x(\frac{1}{52}\cos 2x-\frac{5}{52}\sin 2x)$. 故所求的通解为

$$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$
$$+e^x(\frac{1}{52}\cos 2x-\frac{5}{52}\sin 2x).$$

11.6.49 $x^{(3)}-3x''+3x'-x=te^t+\sin t.$

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $x^{(3)}-3x''+3x'-x=0$ 的通解为 $X=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^t$.

设原非齐次方程的特解形如 $x^*=t^3(At+B)e^t+C\cos t+D\sin 2t$，代入方程中，确定

$$A=\frac{1}{24}, B=0, C=-\frac{1}{4}, D=\frac{1}{4},$$

于是有 $x^*=\frac{1}{24}t^4e^t-\frac{1}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t$ 故所求的通解为

$$x=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^t+\frac{1}{24}t^4e^t-\frac{1}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t.$$

11.6.50 $y^{(4)}-2y^{(3)}+y''=x.$

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y^{(4)}-2y^{(3)}+y''=0$ 的通解为 $Y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x$.

设原非齐次方程的特解形如 $y^*=x^2\cdot(Ax+B)$，代入方程中，确定 $A=\frac{1}{6}, B=1$ 于是有 $y^*=\frac{1}{6}x^3+x^2$ 故所求的通解为

$$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^x+\frac{1}{6}x^3+x^2.$$

11.6.51 求 $y''+4y=2x^2$ 在原点处与 $y=x$ 相切的特解.

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y''+4y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

设原非齐次方程的特解形如 $y^*=ax^2+bx+C$. 将 y^* 代入原方程，

确定

$$a=\frac{1}{2},b=0,C=-\frac{1}{4}.$$

因此，$y^{*}=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}$. 于是，原方程的通解为

$$y=C_{1}\cos 2x+C_{2}\sin 2x+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}.$$

由已知，得初始条件为 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$，从而确定 $C_{1}=\frac{1}{4}$，$C_{2}=\frac{1}{2}$. 故所求的特解为

$$y=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}.$$

11.6.52 求 $y''+4y=3|\sin x|$ 在$[-\pi,\pi]$上满足 $y(\frac{\pi}{2})=0$，$y'(\frac{\pi}{2})=1$ 的特解.

解 给定方程为

$$y''+4y=\begin{cases}-3\sin x, & -\pi\leqslant x<0;\\ 3\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

它所对应的齐次方程 $y''+4y=0$ 的通解为

$$Y=C_{1}\cos 2x+C_{2}\sin 2x.$$

在$[-\pi,0]$上，原方程为

$$y''+4y=-3\sin x, \tag{1}$$

设它的特解形如 $y_{1}^{*}=A_{1}\cos x+B_{1}\sin x$. 将 y_{1}^{*} 代入方程(1)，确定 $A_{1}=0$，$B_{1}=-1$. 因此 $y_{1}^{*}=-\sin x$.

在$[0,\pi]$上，原方程为

$$y''+4y=3\sin x. \tag{2}$$

设它的特解形如 $y_{2}^{*}=A_{2}\cos x+B_{2}\sin x$. 将 y_{2}^{*} 代入方程(2)，确定 $A_{2}=0$，$B_{2}=1$. 因此 $y_{2}^{*}=\sin x$.

综上所述，原定方程的通解为

$$y=\begin{cases}C_{1}\cos 2x+C_{2}\sin 2x-\sin x, & -\pi\leqslant x<0;\\ C_{3}\cos 2x+C_{4}\sin 2x+\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

由初始条件 $y(\frac{\pi}{2})=0,y'(\frac{\pi}{2})=1$，确定 $C_{3}=1,C_{4}=-\frac{1}{2}$；再由

y 在 $x=0$ 处的连续性和可导性，确定 $C_1=1, C_2=\frac{1}{2}$. 故所求的特解为

$$y=\begin{cases}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x, & -\pi\leqslant x<0;\\ \cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

11.6.53　求 $y''+4y=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ E, & 0<t\leqslant\tau;\\ 0, & t>\tau\end{cases}$ 满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，其中 E 与 τ 均为常数.

解　(1) 当 $t\leqslant 0$ 时，原方程为 $y''+4y=0$，其通解为

$$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t.$$

由 $y(0)=y'(0)=0$，确定 $C_1=C_2=0$. 故特解为 $y=0$.

(2) 当 $0<t\leqslant\tau$ 时，原方程为 $y''+4y=E$，其通解为

$$y=C_1'\cos 2t+C_2'\sin 2t+\frac{E}{4}.$$

由 $y(0)=y'(0)=0$，确定 $C_1'=-\frac{E}{4}, C_2'=0$. 故特解为

$$y=\frac{E}{4}(1-\cos 2t).$$

显然，在 $t=0$ 处函数 y 连续.

(3) 当 $t>\tau$ 时，原方程为 $y''+4y=0$，其通解为

$$y=C_1''\cos 2t+C_2''\sin 2t.$$

由 y 在 $x=\tau$ 处的连续性和可导性，确定

$$C_1''=\frac{E}{4}(\cos 2\tau-1), c_2''=\frac{E}{4}\sin 2\tau.$$

故特解为 $y=\frac{E}{4}(\cos 2\tau-1)\cos 2t+\frac{E}{4}\sin 2\tau\sin 2t$

$$=\frac{E}{4}[\cos 2(t-\tau)-\cos 2t].$$

综上所述，所求特解为

$$y=\begin{cases}0, & t\leqslant 0;\\ \frac{E}{4}(1-\cos 2t), & 0<t\leqslant\tau;\\ \frac{E}{4}[\cos(2-\tau)-\cos 2t], & t>\tau.\end{cases}$$

11.6.54 求方程 $y''+4y'+5y=8\cos x$ 的当 $x\to-\infty$ 时有界的特解.

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y''+4y'+5y=0$ 的通解为

$$Y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

设原非齐次方程的特解形如 $y^*=A\cos x+B\sin x$. 将 y^* 代入原方程,确定 $A=B=1$. 因此 $y^*=\cos x+\sin x$. 于是,给定方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\cos x+\sin x.$$

当 $x\to-\infty$ 时,$e^{-2x}\to+\infty$,所以要使 y 有界,只有 $C_1=C_2=0$. 故所求的特解为 $y=\cos x+\sin x$.

(2) 常数变易法

用常数变易法求下列微分方程的通解(11.6.55—11.6.58 题):

11.6.55 $y''+y=\sec x$, $(0<x<\frac{\pi}{2})$.

解 原非齐次方程对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

设原非齐次方程的特解形如 $y^*=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$. 由方程组

$$\begin{cases}\cos xC_1'+\sin xC_2'=0,\\ -\sin xC_1'+\cos xC_2'=\sec x\end{cases}$$

解得 $C_1(x)=\ln\cos x$, $C_2(x)=x$. 因此 $y^*=\cos x\ln\cos x+x\sin x$,故所求的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\cos x+x\sin x.$$

11.6.56 $y''-2y'=2\cos^2 x$.

解 原非齐次方程所对应的齐次方程 $y''-2y'=0$ 的通解为

$$Y=C_1+C_2e^{2x}.$$

设原非齐次方程的特解形如 $y^*=C_1(x)+C_2(x)e^{2x}$. 由方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)+C_2'(x)e^{2x}=0,\\ \qquad C_2'(x)e^{2x}=\cos^2 x\end{cases}$$

解得 $C_1(x)=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$,

$$C_2(x)=(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x)e^{-2x},$$

因此 $y^*=-\frac{x}{2}-\frac{1}{8}(\sin 2x+\cos 2x)-\frac{1}{4}$,故所求的通解为

$$y = C_1^* + C_2e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(\sin 2x + \cos 2x),\text{其中},C_1^* = C_1 - \frac{1}{4}.$$

11.6.57 $y'' + y = \mathrm{tg}x$.

解 原非齐次方程所对应的齐次方程 $y'' + y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

设原非齐次方程的特解形如 $y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. 由方程组

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \mathrm{tg}x \end{cases}$$

解得 $C_1(x) = \sin x - \ln(\sec x + \mathrm{tg}x)$, $C_2(x) = -\cos x$.

因此 $y^* = -\cos x\ln(\sec x + \mathrm{tg}x)$. 故所求的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln(\sec x + \mathrm{tg}x).$$

11.6.58 $y'' + y' - 2y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

解 原非齐次方程所对应的齐次方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

设原非齐次方程的特解形如 $y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-2x}$. 由方程组

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-2x} = 0, \\ C_1'e^x - 2C_2'e^{-2x} = \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$$

解得 $C_1(x) = \dfrac{1}{3}[x - \ln(1+e^x)]$,

$$C_2(x) = -\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}\ln(1+e^x).$$

因此,

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{e^x}{3}[x - \ln(1+e^x)] + e^{-2x}\left[-\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}\ln(1+e^x)\right] \\ &= -\frac{e^x + e^{-2x}}{3}\ln(1+e^x) + \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

故所求的通解为

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{e^x + e^{-2x}}{3}\ln(1+e^x) + \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{6}.$$

11.6.59 设 $f(t)$ 在$[0, +\infty)$上是有界连续函数,证明:方程 $x'' + 8x' + 7x = f(t)$ 的每一个解在$[0, +\infty)$上都是有界函数.

证 原非齐次方程对应的齐次方程 $x'' + 8x' + 7x = 0$ 的通解为

$$X = C_1e^{-t} + C_2e^{-7t}.$$

设原非齐次方程的特解形如 $x^* = C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{-7t}$，由方程组

$$\begin{cases} e^{-t}C_1' + e^{-7t}C_2' = 0, \\ -e^{-t}C_1' - 7e^{-7t}C_2' = f(t), \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{1}{6}\int_0^t f(t)e^t dt$, $C_2 = -\frac{1}{6}\int_0^t f(t)e^{7t}dt$. 因此

$$x^* = \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t f(t)e^t dt - \frac{1}{6}e^{-7t}\int_0^t f(t)e^{7t}dt.$$

故原非齐次方程的通解为

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{-7t} + \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t f(t)e^t dt - \frac{1}{6}e^{-7t}\int_0^t f(t)e^{7t}dt.$$

因为 $f(t)$ 在$[0, +\infty)$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得

$$|f(t)| \leqslant M, \ (0 \leqslant t < +\infty);$$

又因为在$[0, +\infty)$ 上有 $0 < e^{-t} \leqslant 1, 0 < e^{-7t} \leqslant 1, (0 \leqslant t < +\infty)$，所以在$[0, +\infty)$ 上有

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant |C_1e^{-t}| + |C_2e^{-7t}| \\ &\quad + \left|\frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t f(t)e^t dt\right| + \left|\frac{1}{6}e^{-7t}\int_0^t f(t)e^{7t}dt\right| \\ &\leqslant |C_1| + |C_2| + \left|\frac{M}{6}(1 - e^{-t})\right| + \left|\frac{M}{42}(1 - e^{-7t})\right| \\ &\leqslant |C_1| + |C_2| + \frac{M}{6} + \frac{M}{42} = |C_1| + |C_2| + \frac{4}{21}M. \end{aligned}$$

而对于每一个解 x，C_1 与 C_2 均为确定的常数，故 $x = x(t)$ 在$[0, +\infty)$ 上是有界函数.

(3) 算子法

用算子法求下列微分方程的特解(11.6.60——11.6.63 题)：

11.6.60 $y'' + 4y = e^x$.

解 应用微分算子将原方程写为$(D^2 + 4)y = e^x$. 故所求的特解为 $y = \frac{e^x}{D^2 + 4} = \frac{e^x}{1^2 + 4} = \frac{1}{5}e^x$.

11.6.61 $y^{(4)} + y = 2\cos 3x$.

解 应用微分算子将原方程写为 $(D^4 + 1)y = 2\cos 3x$，故所求的特解为

$$y = \frac{2}{D^4 + 1}\cos 3x = \frac{2}{(D^2)^2 + 1}\cos 3x$$

$$= \frac{2}{(-3^2)^2+1}\cos 3x = \frac{1}{41}\cos 3x.$$

11.6.62　$y''-4y'+4y=x^2e^{2x}$.

解　应用微分算子将原方程写为

$$(D^2-4D+4)y=x^2e^{2x},$$

所以 $y=\frac{x^2e^{2x}}{(D-2)^2}=e^{2x}\frac{x^2}{D^2}$，令$\frac{x^2}{D^2}=u$，则 $D^2u=x^2$，$Du=\frac{1}{3}x^3$，$u=\frac{1}{12}x^4$

故所求的特解为 $y=\frac{1}{12}x^4e^{2x}$.

11.6.63　$y'''-3y''+3y'-y=e^x$.

解　应用微分算子将原方程写为

$$(D^3-3D^2+3D-1)y=e^x，即(D-1)^3y=e^x.$$

所以 $y=\frac{e^x}{(D-1)^3}=e^x\frac{1}{D^3}\cdot 1$. 令 $\frac{1}{D^3}\cdot 1=u$，则 $D^3u=1$，$u=\frac{1}{6}x^3$，

故所求的特解为 $y=\frac{1}{6}x^3e^x$.

用算子法求下列微分方程的通解(11.6.64——11.6.66题)：

11.6.64　$y'''+y''=x^2+1+3xe^x$.

解　应用微分算子将原方程写为

$$D^3y+D^2y=x^2+1+3xe^x,$$

即

$$(D+1)D^2y=x^2+1+3xe^x. \tag{1}$$

令 $D^2y=u$，则方程(1) 化为$(D+1)u=x^2+1+3xe^x$，即

$$\frac{du}{dx}+u=x^2+1+3xe^x. \tag{2}$$

解线性方程(2)，得

$$u=e^{-\int dx}\left[\int(x^2+1+3xe^x)e^{\int dx}dx+C_1\right]$$

$$=x^2-2x+3+\frac{3}{2}xe^x-\frac{3}{4}e^x+C_1e^{-x},$$

即

$$D^2y=x^2-2x+3+\frac{3}{2}xe^x-\frac{3}{4}e^x+C_1e^{-x},$$

$$Dy=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+\frac{3}{2}xe^x-\frac{9}{4}e^x-C_1e^{-x}+C_2.$$

故 $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}xe^x-\frac{15}{4}e^x+C_1e^{-x}+C_2x+C_3$

即为所求的特解.

11.6.65　$y''-3y'+2y=16x+\sin 2x+e^{2x}$.

解 应用微分算子将原方程写为

$$D^2y - 3Dy + 2y = 16x + \sin 2x + e^{2x},$$

即 $$(D-2)(D-1)y = 16x + \sin 2x + e^{2x}. \tag{1}$$

令 $(D-1)y = u$，则方程(1) 化为 $(D-2)u = 16x + \sin 2x + e^{2x}$，即

$$\frac{du}{dx} - 2u = 16x + \sin 2x + e^{2x}. \tag{2}$$

解线性方程(2)，得

$$u = e^{\int 2dx}\left[\int (16x + \sin 2x + e^{2x})e^{-\int 2dx}dx + C\right]$$

$$= -8x - 4 - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + xe^{2x} + Ce^{2x},$$

即 $$\frac{dy}{dx} - y = -8x - 4 - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + xe^{2x} + Ce^{2x}. \tag{3}$$

解线性方程(3)，得所求的通解为

$$y = e^{\int dx}\left[\int \left(-8x - 4 - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + xe^{2x} + Ce^{2x}\right)e^{-\int dx}dx + C_2\right]$$

$$= C_1e^{2x} + C_2e^{x} + 8x + 12 + \frac{1}{20}(3\cos 2x - \sin 2x) + xe^{2x},$$

$$(C_1 = C - 1).$$

11.6.66 $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-2x}$.

解法 1 应用微分算子将给定方程写为 $(D^2 + 3D + 2)y = 4e^{-2x}$，即

$$(D+1)(D+2)y = 4e^{-2x}, \tag{1}$$

令 $(D+2)y = u$，则方程(1) 化为 $(D+1)u = 4e^{-2x}$，即

$$\frac{du}{dx} + u = 4e^{-2x}, \tag{2}$$

解线性方程(2)，得

$$u = e^{-\int dx}\left[\int 4e^{-2x}e^{\int dx}dx + C_1\right] = C_1e^{-x} - 4e^{-2x},$$

即 $$\frac{dy}{dx} + 2y = C_1e^{-x} - 4e^{-2x}. \tag{3}$$

解线性方程(3)，得所求的通解为

$$y = e^{-\int 2dx}\left[\int (C_1e^{-x} - 4e^{-2x})e^{\int 2dx}dx + C_2\right]$$

$$= C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}.$$

解法 2 原非齐次方程对应的齐次方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的通解

为 $Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

用算子法求原非齐次方程的特解 y^*，将给定方程写为

$$(D^2 + 3D + 2)y = 4e^{-2x}, \text{即 } F(D)y = 4e^{-2x},$$

其中 $F(D) = D^2 + 3D + 2$. 于是有

$$y = \frac{4e^{-2x}}{F(D)} = \frac{4e^{-2x}}{F(D-2)} = \frac{4e^{-2x}}{(D-2)^2 + 3(D-2) + 2}$$

$$= 4e^{-2x}\frac{1}{D^2 - D}\cdot 1 \tag{1}$$

令 $\frac{1}{D^2 - D}\cdot 1 = u$，即 $(D^2 - D)u = 1$，亦即

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 1. \tag{2}$$

求出二阶常系数线性非齐次方程(2)的特解为 $u = -x$. 因此给定非齐次方程的特解为 $y^* = -4xe^{-2x}$. 故所求的通解为

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}.$$

§ 7　高阶变系数线性微分方程

内 容 提 要

一般说来，高于一阶的变系数线性微分方程不能用初等积分法求解. 但是，对于有些特殊类型的变系数线性微分方程，在一定条件下，有特殊的解法. 常用的方法有：

1. 化为常系数线性微分方程

有些变系数线性微分方程可以通过变量置换化为常系数线性微分方程. 例如，欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

（其中 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{n-1}, p_n$ 均为常数）. 作变换 $x = e^t$（或 $t = \ln x$），并引入记号 D 表示对 t 求导的运算，则

$$x\frac{dy}{dx} = Dy,\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y,\ \cdots\cdots,$$

一般地，有

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k} = D(D-1)\cdots\cdots(D-k+1)y, (k = 1, 2, \cdots, n),$$

于是可以将欧拉方程化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程

$$D(D-1)\cdots(D-n+1)y + p_1 D(D-1)\cdots(D-n+2)y + \cdots + p_{n-1}Dy + p_n y = f(e^t),$$

求出这个方程的通解后，用 $t = \ln x$（或 $e^t = x$）换回原变量，就得到欧拉方程的通解.

2. 降阶法

有些变系数线性微分方程，可以通过变量置换将方程降低一阶. 例如，对于线性方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

若已知一个特解 $y_1(x)$，通过变量置换 $y = y_1(x)u(x)$，可以将方程降低一阶.

3. 常数变易法

如果已知变系数非齐次线性微分方程所对应的齐次方程的通解，可以用常数变易法求非齐次线性方程的特解，其作法与求常系数线性非齐次方程特解的常数变易法相同.

问 题 与 解 答

1. 化为常系数线性微分方程

求下列欧拉方程的通解(11.7.1—11.7.9 题)：

11.7.1　$x^2y'' - xy' + y = 0.$

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$)，将给定方程化为常系数线性齐次方程

$$D(D-1)y - Dy + y = 0, \text{即 } D^2y - 2Dy + y = 0,$$

解之得，$y = (C_1 + C_2t)e^t$. 故所求的通解为

$$y = (C_1 + C_2\ln x)x.$$

11.7.2　$x^2y'' + xy' - y = 0.$

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$)，将原方程化为常系数线性齐次方程

$$D(D-1)y + Dy - y = 0, \text{即 } D^2y - y = 0.$$

解之得 $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$，故所求的通解为 $y = C_1x + C_2\dfrac{1}{x}$.

11.7.3　$x^2y'' - 9xy' + 21y = 0.$

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$)，将原方程化为常系数线性齐次方程

$$D(D-1)y - 9Dy + 21y = 0, \text{即 } D^2y - 10Dy + 21y = 0.$$

解之得，$y = C_1e^{3t} + C_2e^{7t}$，故所求的通解为 $y = C_1x^3 + C_2x^7$.

11.7.4　$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$)，将给定方程化为常系数线性齐次方程

$$D(D-1)y + 3Dy + y = 0, \text{即 } D^2y + 2Dy + y = 0.$$

解之得，$y = (C_1 + C_2t)e^{-t}$，故所求的通解为 $y = \dfrac{1}{x}(C_1 + C_2\ln x)$.

11.7.5　$x^4y^{(4)} + 3x^2y'' - 7xy' + 8y = 0.$

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$) 将原方程化为常系数线性齐次方程

$$D(D-1)(D-2)(D-3)y + 3D(D-1)y - 7Dy + 8y = 0,$$

即　$(D-2)^2(D^2 - 2D + 2)y = 0$. 解之得

$$y = (C_1 + C_2t)e^{2t} + (C_3\cos t + C_4\sin t)e^t.$$

故所求的通解为

$$y = (C_1 + C_2\ln x)x^2 + (C_3\cos\ln x + C_4\sin\ln x)x.$$

11.7.6　$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{2}{x}$.

解　将原方程变形为

$$x^2y'' - xy' + y = 2x. \tag{1}$$

令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$),将方程(1)化为常系数线性齐次方程

$$D(D-1)y - Dy + y = 2e^t,\text{即 } D^2y - 2Dy + y = 2e^t.$$

解之得,$y = (C_1 + C_2t)e^t + t^2e^t$.故所求的通解为

$$y = (C_1 + C_2\ln x)x + x\ln^2 x.$$

11.7.7　$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$.

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$),将原方程化为常系数线性非齐次方程

$$D(D-1)y - 2Dy + 2y = 2e^{3t} - e^t.$$

解之得,$y = C_1e^t + C_1e^{2t} + te^t + e^{3t}$. 故所求的通解为

$$y = C_1x + C_2x^2 + x\ln x + x^3.$$

11.7.8　$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 9y = 3x^2 + \frac{1}{x^2}$.

解　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$),将原方程化为常系数线性非齐次方程

$$D(D-1)y + 5Dy + 9y = 3e^{2t} + e^{-2t},$$

即　$D^2y + 4Dy + 9y = 3e^{2t} + e^{-2t}$.

解之得,$y = e^{-2t}(C_1\cos\sqrt{5}t + C_2\sin\sqrt{5}t) + \frac{1}{7}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$.

故所求的通解为

$$y = x^{-2}[C_1\cos(\sqrt{5}\ln x) + C_2\sin(\sqrt{5}\ln x)] + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{5x^2}.$$

11.7.9　$x^2y'' - xy' = \ln x, y(1) = 0, y'(1) = 4$.

解法1　令 $x = e^t$(或 $t = \ln x$),将原方程化为常系数线性非齐次方程

$$D(D-1)y - Dy = t,\text{即 } D^2y - 2Dy = t.$$

解之得,$y = C_1 + C_2e^{2t} - \frac{1}{4}t(t+1)$. 故原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2x^2 - \frac{1}{4}\ln x(1 + \ln x).$$

由初始条件 $y(1) = 0, y'(1) = 4$,确定 $C_1 = \frac{17}{8}$, $C_2 = -\frac{17}{8}$. 故所

求的特解为

$$y=-\frac{1}{4}(\ln x+1)\ln x+\frac{17}{8}(x^2-1).$$

解法 2　将给定方程变形为

$$y''-\frac{1}{x}y'=\frac{\ln x}{x^2}. \tag{1}$$

令 $y'=p$,则 $y''=p'$,将方程(1)化为

$$p'-\frac{1}{x}p=\frac{\ln x}{x^2}. \tag{2}$$

解之得,$p=C_1x-\frac{1}{2}(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x})$,即 $y'=C_1x-\frac{1}{2}(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x})$. 积分,得原方程的通解为

$$y=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2-\frac{1}{4}\ln^2x-\frac{1}{4}\ln x.$$

由初始条件 $y(1)=0,y'(1)=4$,确定 $C_1=4\frac{1}{4},C_2=-2\frac{1}{8}$. 故所求的特解为

$$y=-\frac{1}{4}(\ln x+1)\ln x+\frac{17}{8}(x^2-1).$$

求下列微分方程的通解(11.7.10—11.7.15 题):

11.7.10　$4xy''+2(1-\sqrt{x})y'-6y=e^{3\sqrt{x}}$.

解　令 $\sqrt{x}=u$,或 $x=u^2$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{2u}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{du}(\frac{dy}{dx})\frac{du}{dx}=(\frac{1}{2u}\frac{d^2y}{du^2}-\frac{1}{2u^2}\frac{dy}{du})\frac{1}{2u}$$
$$=\frac{1}{4u^2}\frac{d^2y}{du^2}-\frac{1}{4u^3}\frac{dy}{du}.$$

将 $x=u^2,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ 代入给定方程,得

$$\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}-6y=e^{3u}.$$

解这个二阶常系数线性非齐次方程,得

$$y=C_1e^{3u}+C_2e^{-2u}+\frac{1}{5}ue^{3u}.$$

故原方程的通解为

$$y = C_1e^{3\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}} + \frac{1}{5}\sqrt{x}\,e^{3\sqrt{x}}.$$

11.7.11 $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^4$.

解 令$\frac{y}{x} = u$,即 $y = xu$,则 $y' = xu' + u$, $y'' = xu'' + 2u'$. 将 y、y'、y'' 代入给定方程,得

$$x^2(xu'' + 2u') - 2x(xu' + u) + (x^2+2)xu = x^4.$$

即 $u'' + u = x$. 解这个二阶常系数线性非齐次方程,得

$$u = C_1\cos x + C_2\sin x + x.$$

故原方程的通解为

$$y = xu = x(C_1\cos x + C_2\sin x) + x^2.$$

11.7.12 $\cos^4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\cos^2x(1 - \sin x\cos x)\frac{dy}{dx} + y = \mathrm{tg}x$.

解 令 $\mathrm{tg}x = t$,则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy}{dt}\frac{\sin x}{\cos^3x} + \frac{1}{\cos^3x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\cos^2x}$$

$$= \frac{2\sin x}{\cos^3x}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\cos^4x}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

将$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$代入给定方程,得$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = t$. 解这个二阶常系数线性非齐次方程,得

$$y = (C_1 + C_2t)e^{-t} + t - 2.$$

故原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2\mathrm{tg}x)e^{-\mathrm{tg}x} + \mathrm{tg}x - 2.$$

11.7.13 $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.

解 设 $p(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = 1$,因为 $Q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) = 1$, 应用变量置换可得

$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = ue^{-\int\frac{1}{x}dx} = ue^{-\ln x} = \frac{u}{x}.$$

可以求出 $y' = \frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u$, $y'' = \frac{1}{x}u'' - \frac{2}{x^2}u' + \frac{2}{x^3}u$. 将 y、y'、y'' 代入给定方程,得

$$\frac{1}{x}u'' - \frac{2}{x^2}u' + \frac{2}{x^3}u + \frac{2}{x}(\frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u) + \frac{u}{x} = 0,$$

即 $u'' + u = 0$. 解这个二阶常系数线性齐次方程，得

$$u = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{u}{x} = \frac{1}{x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

11.7.14　$y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2}\sin 2x$.

解　设 $p(x) = -4x, Q(x) = 4x^2 - 1$，因为

$$Q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) = 1,$$

应用变量置换可得 $y = ue^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} = ue^{\int 2xdx} = ue^{x^2}$.

可以求出 $y' = (u' + 2xu)e^{x^2}$, $y'' = [u'' + 4xu' + (4x^2 + 2)u]e^{x^2}$. 将 y、y'、y'' 代入给定方程，并整理化简，得

$$u'' + u = -3\sin 2x.$$

解这个二阶常系数线性非齐次方程，得

$$u = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = ue^{x^2} = (C_1\cos x + C_2\sin x + \sin 2x)e^{x^2}.$$

11.7.15　$\cos^4 x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\cos^2 x(1 - \sin x\cos x)\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg} x$.

解　设 $y = y[t(x)]$ 是给定方程的解，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}(\frac{dt}{dx})^2 + \frac{dy}{dt}(\frac{d^2t}{dx^2}).$$

将 y、$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$ 代入方程中，得

$$\cos^4 x(\frac{dt}{dx})^2\frac{d^2y}{dt^2} + [\cos^4 x\frac{d^2t}{dx^2} + 2\cos^2 x(1 - \sin x\cos x)\frac{dt}{dx}]\frac{dy}{dt} + y = \operatorname{tg} x.$$

为使 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 的系数为 1，取 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$，即 $t = \operatorname{tg} x$，则 $\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$，代入上式，得 $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = t$.

解这个二阶常系数线性微分方程，得

$$y = (C_1 + C_2t)e^t + t - 2.$$

故原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2\operatorname{tg} x)e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 2$.

2. 降阶法

11.7.16　已知 $y_1=e^x$ 是 $xy''-2(x+1)y'+(x+2)y=0$ 的一个特解，求该方程的通解.

解　将给定齐次线性方程变形为

$$y''-\frac{2(x+1)}{x}y'+\frac{x+2}{x}y=0.$$

令 $p=-\dfrac{2(x+1)}{x}$，由 11.5.1 题知，所求的通解为

$$\begin{aligned}y&=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,dx}dx\\&=C_1e^x+C_2e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int\frac{2(x+1)}{x}dx}dx\\&=C_1e^x+\frac{C_2}{3}x^3e^x=(C_1+C_2'x^3)e^x,\ (C_2'=\frac{C_2}{3}).\end{aligned}$$

11.7.17　已知 $y_1=e^{2x}$ 是方程 $x^2y''-2xy'-4x(x-1)y=0$ 的一个特解，试求该方程的通解.

解　将给定方程变形为

$$y''-\frac{2}{x}y'-4(x-1)y=0,$$

令 $p=-\dfrac{2}{x}$ 由 11.5.1 题知，所求通解为

$$\begin{aligned}y&=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,dx}dx=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}\int\frac{1}{e^{4x}}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\\&=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}(8x^2+4x+1).\end{aligned}$$

11.7.18　已知 $y_1=e^{mx}$ 是方程 $(x^2+1)y''-2xy'-(ax^2+bx+C)y=0$ 的一个解，求 a、b、c 的值，再求所得方程的解.

解　将 $y_1=e^{mx}$ 代入给定方程，得

$$e^{mx}[m^2(x^2+1)-2mx-(ax^2+bx+c)]=0. \tag{1}$$

因为 $e^{mx}\neq0$，所以由(1)式得

$$m^2(x^2+1)-2mx-(ax^2+bx+c)=0,$$

即

$$m^2x^2-2mx+m^2=ax^2+bx+c. \tag{2}$$

比较(2)式两边 x 同次幂的系数，得

$$a=m^2,\ b=-2m,\ c=m^2.$$

因此，原方程为

$$(x^2+1)y''-2xy'-(m^2x^2-2mx+m^2)y=0,$$

即
$$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'-\frac{m^2x^2-2mx+m^2}{x^2+1}y=0. \tag{3}$$

由 11.5.1 题知,方程(3) 的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}dx=C_1e^{mx}+C_2e^{mx}\int\frac{1}{e^{2mx}}e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx$$
$$=C_1e^{mx}-\frac{1}{2m}C_2\left(x^2+\frac{x}{m}+\frac{1}{2m^2}+1\right)e^{-mx},$$

或　$y=C_1e^{mx}+C_2'\left(x^2+\frac{x}{m}+\frac{1}{2m^2}+1\right)e^{-mx}$, $\left(C_2'=-\frac{1}{2m}C_2\right)$.

11.7.19　已知 $y_1=\frac{\sin x}{x}$ 是方程 $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ 的一个特解,求该方程的通解.

解　令 $p=\frac{2}{x}$,由 11.5.1 题知,所求的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}dx=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2x}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx$$
$$=\frac{1}{x}(C_1\sin x-C_2\cos x).$$

11.7.20　求方程 $(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$ 的通解.

解　容易看出,$y_1=x$ 是给定方程的一个特解.将原方程变形为

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2+1}y=0. \tag{1}$$

令 $p=\frac{2x}{x^2+1}$,由 11.5.1 题知,齐次线性方程(1) 的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}dx$$
$$=C_1x+C_2x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx}dx=C_1x+C_2(x^2-1),$$

这就是给定方程的通解.

3. 常数变易法

11.7.21　已知 $y_1=x$ 是齐次线性方程 $x^2y''-(x+2)(xy'-y)=0$ 的解,求作齐次线性方程 $x^2y''-(x+2)(xy'-y)=x^4$ 的通解.

解　将给定齐次线性方程变形为

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0, \tag{1}$$

令 $p = -\frac{x+2}{x}$,由 11.5.1 题知,齐次线性方程(1) 的通解为

$$\begin{aligned} Y &= C_1y_1 + C_2y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx \\ &= C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x+2}{x}dx}dx = C_1x + C_2xe^x. \end{aligned}$$

设非齐次方程 $x^2y'' - (x+2)(xy' - y) = x^4$,即 $y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = x^2$ 的特解形如 $y^* = C_1(x)x + C_2(x)e^x$,由方程组

$$\begin{cases} xC_1' + xe^xC_2' = 0, \\ \quad C_1' + (1+x)e^xC_2' = x^2 \end{cases}$$

解得 $C_1(x) = -\frac{x^2}{2}$, $C_2(x) = -(1+x)e^{-x}$,于是有

$$y^* = -\frac{x^3}{2} - (1+x)xe^{-x}\cdot e^x = -\frac{x^3}{2} - x^2 - x.$$

故所求的通解为

$$y = Y + y^* = C_1x + C_2xe^x - \frac{x^3}{2} - x^2 - x.$$

11.7.22　求微分方程$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 6(x^2+1)^2$的通解.

解　将原非齐次方程变形为

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{x^2+1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}2y = 6(x^2+1). \tag{1}$$

由 11.5.1 题知,方程(1) 对应的齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{x^2+1}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}2y = 0.$$

的通解为 $Y = C_1x + C_2(x^2-1)$.

设非齐次方程(1) 的特解形如 $y^* = C_1(x)x + C_2(x)(x^2-1)$,由方程组

$$\begin{cases} xC_1' + (x^2-1)C_2' = 0, \\ C_1' + 2xC_2' = 6(x^2+1) \end{cases}$$

解得 $C_1(x) = -2x^3 + 6x$, $C_2(x) = 3x^2$. 于是有

$$y^* = x(-2x^3 + 6x) + 3x^2(x^2 - 1) = x^4 + 3x^2.$$

故所求的通解为 $y = C_1x + C_2(x^2 - 1) + x^4 + 3x^2$.

11.7.23　求微分方程 $tx'' - x' = t^2$ 的通解.

解　将原非齐次方程变形为

$$x'' - \frac{1}{t}x' = t. \tag{1}$$

非齐次方程(1)对应的齐次方程为

$$x'' - \frac{x'}{t} = 0, \tag{2}$$

即 $\frac{x''}{x'} = \frac{1}{t}$,亦即$\frac{(x')'}{x'} = \frac{1}{t}$.积分,得 $\ln x' = \ln t + \ln C$,即 $x' = Ct$,再积分,得齐次方程(2)的通解为

$$x = C_1t^2 + C_2,\ (C_1 = \frac{1}{2}C).$$

设非齐次方程(1)的特解形如　$x^* = C_1(t)t^2 + C_2(t)$.由方程组

$$\begin{cases} C_1'\,t^2 + C_2' = 0, \\ 2C_1'\,t \qquad = t \end{cases}$$

解得 $C_1(t) = \frac{1}{2}t,\ C_2(t) = -\frac{1}{6}t^3$,于是有 $x^* = \frac{1}{3}t^3$,故所求的通解为

$$x = C_1t^2 + C_2 + \frac{1}{3}t^3.$$

事实上,用 t 乘原方程两端,得到的方程 $t^2x'' - tx' = t^3$ 是欧拉方程.容易求出该方程的通解为

$$x = C_1t^2 + C_2 + \frac{1}{3}t^3.$$

§ 8 微分方程的幂级数解法

内 容 提 要

1. 一阶微分方程

求一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解，其中函数 $f(x,y)$ 是 $(x-x_0)$、$(y-y_0)$ 的多项式：

$$f(x,y) = a_{00} + a_{10}(x-x_0) + a_{01}(y-y_0) + \cdots + a_{lm}(x-x_0)^l(y-y_0)^m.$$

这时我们可以设所求的特解可展开为 $x-x_0$ 的幂级数：

$$y = y_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \tag{2}$$

其中 $a_1, a_2 \cdots, a_n \cdots$ 是待定的系数，把(2) 代入(1) 中，得到一个恒等式，比较该恒等式两端 $x-x_0$ 的同次幂的系数，就可定出常数 $a_1, a_2 \cdots$，以这些常数为系数的级数(2)，在其收敛区间内就是方程(1) 满足初始条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解.

2. 二阶齐次线性微分方程

对于二阶齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3}$$

利用幂级数求解的问题，有下面两个定理；

定理 1 如果方程(3) 中 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 可在 $-R < x < R$ 内展开为 x 的幂级数，那末，在 $-R < x < R$ 内方程(3) 必有形如 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的解.

定理 2 如果方程(3) 中 $xP(x)$，$x^2Q(x)$ 可在 $-R < x < R$ 在内展开为 x 的幂级数，那么，在 $-R < x < R$ 内方程(3) 必有形如 $y =$

$x^{a}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$(a_0\neq 0)$ 的解，其中 $a,a_0,a_1\cdots,a_n\cdots$ 均为待定常数.

问题与解答

1. 一阶微分方程

11.8.1　证明：幂级数 $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$ 的和函数 $y(x)$ 满足一阶微分方程 $y'+y=e^x$，并求该幂级数的和函数.

证　由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$，$(-\infty<x<+\infty)$

和 $$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

得 $$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty),$$

即所给幂级数的和函数为 $y(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$(-\infty<x<+\infty)$.

由此求出 $y'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，故 $y'+y=e^x$，即和函数 $y(x)$ 满足一阶微分方程.

11.8.2　证明：$y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n$ 满足微分方程 $(1-x)y'=\frac{y}{2}$，并求出该级数之和 y.

证　设 $a_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$，$(n=1,2,\cdots)$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n(2n+2)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}=1,$$

所以，幂级数 $\sum_{n\to\infty}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$.

当 $x=1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 为常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}.$$

因为 $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n - 1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdots\cdots (2n-2)2n} > \frac{1}{2n}$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 因此,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 发散.

当 $x = -1$ 时,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 为常数项级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}.$$

因为 $a_n > a_{n+1}$,且 $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,则 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. 由莱布尼兹判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛,因此,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -1$ 处收敛.

综上所述,幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$. 故幂级数 $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$,且在该收敛域内可以逐项微分,即

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)n}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^{n-1},$$

将 y' 代入给定方程的左端,得

$$\begin{aligned}
(1-x)y' &= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)n}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)n}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^{n-1} \\
&\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot n}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^n \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)n}{2 \cdot 4 \cdots 2n} x^{n-1} \\
&\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)n}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} x^n \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)(n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n(2n+2)} x^n
\end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}x^n$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)n}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)2n}{2\cdot 4\cdots 2n}\Big]x^n$$

$$=\frac{1}{2}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n\Big]=\frac{1}{2}y.$$

故级数 $y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n$ 满足微分方程 $(1-x)y'=\frac{1}{2}y$.

分离变量,得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2(1-x)}$,积分得

$$\ln y=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\ln C,\ 即\ y=C(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

由 $y|_{x=0}=1$,得 $C=1$,故所求级数之和为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

11.8.3　推导出函数 $y=x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}+\cdots$ 所满足的一阶微分方程,并把函数用积分表示出来.

解　$y'=1+x^2+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}+\cdots$

$$=1+x\Big(x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{2n-3}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}+\cdots\Big)$$

$$=1+xy.$$

即 $y'-xy=1$,这就是给定函数所满足的一阶微分方程.

解这个一阶线性非齐次方程,得

$$y = e^{\int x dx}\left(\int e^{-\int x dx}dx + C\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right).$$

这就是所求的函数 $y(x)$.

利用幂级数求下列微分方程的通解(11.8.4—11.8.7 题):

11.8.4 $y' = x + y$.

解 设原方程的通解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

将 y 与 y' 代入给定方程,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数,得

$$a_1 = a_0, 2a_2 = 1 + a_1, (n+1)a_{n+1} = a_n,$$

即 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ $(n \geqslant 2)$,亦即 $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$, $(n \geqslant 3)$.

确定 $a_1 = a_0$, $a_2 = \dfrac{1+a_1}{2} = \dfrac{1+a_0}{2}$, $a_3 = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{1+a_0}{3 \cdot 2}$,

$$a_4 = \frac{1+a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdots, \quad a_n = \frac{1+a_0}{n!} \cdots.$$

因此 $y = a_0 + a_0 x + \dfrac{1+a_0}{2!}x^2 + \dfrac{1+a_0}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1+a_0}{n!}x^n + \cdots$

$$= (1+a_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - x - 1.$$

而 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$,故 $y = (1+a_0)e^x - x - 1$,(a_0 为任意常数),即为原方程的通解.

11.8.5 $y' + y = e^x$.

解 设原方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

将 y 与 y' 代入给定方程，注意到 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，于是有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$$(n+1)a_{n+1}+a_n=\frac{1}{n!},\ 即\ a_{n+1}=\frac{1-a_nn!}{(n+1)!},\ (n=0,1,2,\cdots).$$

亦即
$$a_n=\frac{1-a_{n-1}(n-1)!}{n!},\ (n=0,1,2,\cdots).$$

确定 $a_1=1-a_0,\ a_2=\frac{1-a_1}{2!}=\frac{1-(1-a_0)}{2!}=\frac{a_0}{2!}$，

$$a_3=\frac{1-a_2\cdot 2!}{3!}=\frac{1-a_0}{3!},$$

$$a_4=\frac{1-a_3\cdot 3!}{4!}=\frac{1-(1-a_0)}{4!}=\frac{a_0}{4!},\cdots$$

$$a_{2k-1}=\frac{1-a_0}{(2k-1)!},\ a_{2k}=\frac{a_0}{(2k)!}\cdots.$$

因此
$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_0}{(2k)!}x^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_0}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_0}{(2k)!}x^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_0}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

而 $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$，$\operatorname{sh}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. 故

$$y=a_0e^{-x}+\operatorname{sh}x,\ (a_0\ 为任意常数)$$

即为原方程的通解.

11.8.6　$y'-xy-x=1$.

解　设原方程的解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

将 y 与 y' 代入原方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 1+x,$$

即
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n = 1+x.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得 $a_1=1, 2a_2-a_0=1$，

$(n+1)a_{n+1}-a_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，即 $a_n=\dfrac{1}{n}a_{n-2}(n\geqslant 3)$.

确定 $a_1=1$，$a_2=\dfrac{1+a_0}{2}$，$a_3=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$，$a_4=\dfrac{a_2}{4}=\dfrac{1+a_0}{4\cdot 2}$，

$a_5=\dfrac{a_3}{5}=\dfrac{1}{5\cdot 3}$，$a_6=\dfrac{a_4}{6}=\dfrac{1+a_0}{6\cdot 4\cdot 2}\cdots$，

$a_{2k-1}=\dfrac{1}{(2k-1)!!}$，$a_{2k}=\dfrac{1+a_0}{(2k)!}\cdots$.

故
$$y = a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+a_0}{(2k)!!}x^{2k}$$
$$=(1+a_0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!!}x^{2k}-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!!}x^{2k-1}.$$

这即为原方程的通解.

11.8.7　利用幂级数求微分方程 $(1-x)y'+y=1+x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

解　设原方程的解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由 $y|_{x=0}=0$ 可知 $a_0=0$，所以 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. 于是 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. 将 y 与 y' 代入原方程，得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即
$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

亦即
$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_{n+1}-(n-1)a_n]x^n=1+x.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$$a_1=1,2a_2=1,(n+1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0,$$

即 $a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}a_n$，$(n\geqslant 2)$，亦即 $a_n=\dfrac{n-2}{n}a_{n-1}$. 由此求得

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{1}{2\cdot 3},\ a_4=\frac{2a_3}{4}=\frac{1}{3\cdot 4},\cdots$$

故 $y=x+\dfrac{1}{1\cdot 2}x^2+\dfrac{1}{2\cdot 3}x^3+\dfrac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots$，即为所求的特解.

2. 高阶线性齐次微分方程

利用幂级数求下列微分方程的通解(11.8.8 — 11.8.10 题)：

11.8.8　$y''=x^2y$.

解　设原方程的解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

将 y,y',y'' 代入给定方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$$2a_2=0,\ 6a_3=0,(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-2},$$

即

$$a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-2},\ (n\geqslant 2),$$

亦即

$$a_n=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-4},\ (n\geqslant 4).$$

由此求得

$$a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{4\cdot 3}a_0,\ a_5=\frac{1}{5\cdot 4}a_1,a_6=\frac{1}{6\cdot 5}a_2=0,$$

$$a_7=\frac{1}{7\cdot 6}a_3=0,\ a_8=\frac{1}{8\cdot 7}a_4=\frac{1}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}a_0,$$

$$a_9=\frac{1}{9\cdot 8}a_5=\frac{1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}a_1\cdots,$$

$$a_{4k} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4k-1)4k} a_0,$$

$$a_{4k+1} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots 4k(4k+1)} a_1,$$

$$a_{4k+2} = 0,\ a_{4k+3} = 0,\ (k = 1,2,\cdots).$$

故 $y = a_0 + a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k} x^{4k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{4k+1} x^{4k+1}$

$$= a_0 \left(1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \cdots\right)$$

$$+ a_1 \left(x + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \cdots\right)$$

(a_0, a_1 为任意常数）即为原方程的通解.

11.8.9　$y'' - xy' + y = 0.$

解　设原方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

将 $y, y' y''$ 代入给定方程,得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-1) a_n] x^n = 0.$

比较上式两边 x 的同次幂的系数,得

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-1) a_n = 0,$$

即 $a_{n+2} = \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} a_n\ (n = 0,1,2,\cdots)$. 由此求得

$$a_2 = \frac{-1}{2 \cdot 1} a_0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{1}{4!} a_0,$$

$$a_5 = \frac{2}{5 \cdot 4} a_3 = 0,\ a_6 = \frac{3}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{1 \cdot 3}{6!} a_0, \cdots$$

$$a_{2k-1} = 0,\ a_{2k} = -\frac{(2k-3)!!}{(2k)!} a_0,\ (k = 1,2,\cdots)$$

故　$y = a_0 + a_1x - a_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!}x^{2k}$

$$= a_0(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!}x^{2k}) + a_1x,(a_0,a_1,\text{为任意常数}).$$

这即为原方程的通解.

11.8.10　$y'' + x^2y' + xy = 0.$

解　设原方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

将 y、y'、y'' 代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} = 0.$$

即　$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n = 0,$

亦即 $2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = -a_0x - \sum_{n=2}^{\infty}na_{n-1}x^n,$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$2a_2 = 0,\ 6a_3 = -a_0,\ (n+2)(n+1)a_{n+2} = -na_{n-1}\ (n = 2,3,\cdots),$

从而确定 $a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{6}a_0,\ a_{n+3} = -\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}a_n$

$(n = 1,2,\cdots).$

故所求的通解为

$$y = a_0(1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4^2}{6!}x^6 - \frac{4^2\cdot 7^2}{9!}x^9 + \cdots)$$

$$+ a_1(x - \frac{2^2}{4!}x^4 - \frac{2^2\cdot 5^2}{7!}x^7 - \frac{2^2\cdot 5^2\cdot 8^2}{10!}x^{10} + \cdots),$$

$(-\infty < x < +\infty).$

利用幂级数求下列微分方程满足初始条件的特解(11.8.11—11.8.13题)：

11.8.11　$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

解　设原方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由 $y(0) = 0, y'(0) = 1$，可得 a_0

$= 0; a_1 = 1$，于是有 $y = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$，又

$$y' = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

将 y、y'、y'' 代入给定方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

即　$$2a_2 + (6a_3 + 1)x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = -\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$$2a_2 = 0, 6a_3 + 1 = 0, (n+2)(n+1) a_{n+2} = -a_n, \ (n = 2, 3, \cdots).$$

从而确定　$a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n, \ (n = 2, 3, \cdots).$$

故所求的特解为

$$y = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots,$$

即　　$y = \sin x$.

11.8.12　$y'' - xy = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

解　设原方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，由 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$，可得 $a_0 = 0$，$a_1 = 1$，于是有 $y = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$，又

$$y' = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

将 y、y'、y'' 代入给定方程，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) = 0,$$

即 $2a_2 + 6a_3x + (4\cdot 3a_4 - 1)x^2$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$$

比较上式两边 x 同次幂的系数，得

$$2a_2 = 0, 6a_3 = 0, 4\cdot 3a_4 - 1 = 0,$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0,$$

即 $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}$，$(n \geqslant 3)$，亦即 $a_n = \frac{1}{n(n-1)}a_{n-3}(n \geqslant 5)$.
由此求得

$$a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{1}{4\cdot 3},\ a_5 = \frac{a_2}{5\cdot 4} = 0,\ a_6 = \frac{a_3}{6\cdot 5} = 0,$$

$$a_7 = \frac{1}{7\cdot 6}a_4 = \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\ a_8 = 0,\ a_9 = 0,\cdots$$

故 $y = x + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \frac{x^{10}}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \cdots$
即为所求的特解.

11.8.13　$xy'' + y' + xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

解　设原方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，由 $y(0) = 1, y'(0) = 0$，可得 $a_0 = 1, a_1 = 0$，于是有，$y = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$，又

$$y' = \sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

将 y、y'、y'' 代入原方程，得

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + x(1 + \sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n) = 0.$$

即　$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^n = -x,$$

亦即　$$2^2a_2x + 3^2a_3x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}[(n+1)^2a_{n+1} + a_{n-1}]x^n = -x.$$

比较上式两边 x 的同次幂的系数，得

$2^2a_2 = -1,\ 3^2a_3 = 0, (n+1)^2a_{n+1} + a_{n-1} = 0,$

即 $a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2}a_{n-1}\ (n \geqslant 3)$，亦即 $a_n = \frac{-1}{n^2}a_{n-2}$，$(n \geqslant 4)$ 由此求得

$$a_2 = -\frac{1}{2^2}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{4^2}a_2 = \frac{1}{4^2 \cdot 2^2}, a_5 = -\frac{1}{5^2}a_3 = 0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6^2}a_4 = \frac{-1}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2}, \cdots,$$

$$a_{2k-1} = 0,\ a_{2k} = \frac{(-1)^k}{[(2k)!!]^2}, (k = 1, 2, \cdots)$$

故

$$y = 1 - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}x^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}x^6 + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{[(2n)!!]^2}$$

即为所求的特解.

§9　线性微分方程组

内 容 提 要

如果微分方程组中所有的未知函数及其导数都是一次的，则称为线性微分方程组. 其常用的解法有：

1. 消元法

先设法消去方程组中的某些未知函数，得到只含一个未知函数的高阶微分方程.

2. 算子法

应用微分算子 D 将微分方程组写成算子形式

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(D)y_j = f_i(x), \tag{1}$$

其中 $p_{ij}(D), (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是具有常系数的算子多项式，$f_i(x), (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是充分光滑的函数. 把 $p_{ij}(D)$ 看作普通的代数多项式，并且对方程组(1) 施以和解线性代数方程组类似的运算，就可求得全部解.

3. 可积组合法

对于形如 $y_i' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), (i = 1, 2, \cdots, n)$　　(2)

的一阶方程组中的诸方程进行适当的算术运算(加，减，乘，除) 若能导出

$$d\Phi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0 \tag{3}$$

的形式，则称(3) 为方程组(2) 的可积组合. 由每一个可积组合(3)，可以得到一个联系未知函数和自变量的有限方程

$$\Phi(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = C. \tag{4}$$

方程(4) 称为方程组(2) 的首次积分.

如果找到方程组(2) 的 k 个可积组合，由此就可得到 k 个独立的首次积分

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y_1, \cdots, y_n) = C_1, \\ \Phi_2(x, y_1, \cdots, y_n) = C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_k(x, y_1, \cdots, y_n) = C_k. \end{cases} \tag{5}$$

当 $k \neq n$ 时，由于它们彼此是独立的，至少有一个雅可比行列式不为零，即

$$\frac{D(\Phi_1\Phi_2,\cdots,\Phi_k)}{D(y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{ik})} \neq 0,$$

其中 $y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{ik}$ 是未知函数 $y_1,y_2\cdots,y_n$ 中的某 k 个函数. 从(5)中把这 k 个未知函数用 x 和其余的 $n-k$ 个未知函数表示出来，再代入方程组(2)，问题就化为积分 $n-k$ 个未知函数的方程组的问题了. 当 $k=n$ 时，全部的未知函数可由(5)解出.

为了求得方程组(2)的可积组合，经常将(2)写成对称形式

$$\frac{dy_1}{\varphi_1(x,y_1,\cdots,y_n)} = \frac{dy_2}{\varphi_2(x,y_1,\cdots,y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{\varphi_n(x,y_1,\cdots,y_n)} = \frac{dx}{\varphi_0(x,y_1\cdots,y_n)}.$$

在对称型方程中，变量的地位在形式上是平等的，经常可以利用比例的性质求得可积组合.

4. 待定系数法

对于常系数线性齐次方程组

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

先写出其系数矩阵的特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

并求出特征根. 若特征方程有相异的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_s$，则对于每一个 m_i 重根 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,s)$，作出形如

$$\begin{cases} y_1 = (A_{11} + A_{12}x + \cdots + A_{m_i}x^{m_i-1})e^{\lambda_i t} \\ \cdots\cdots \\ y_n = (A_{n1} + A_{n2}x + \cdots + A_{nm_i}x^{m_i-1}e^{\lambda_i t} \end{cases}$$

的解；若特征方程有相异的复根 $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \cdots, \alpha_t \pm i\beta_t$，它们的重数分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_t$，则对于每一对 l_j 重复根 $\alpha_j \pm i\beta_j (j=1,2,\cdots,t)$，作出形如

$$y_1 = e^{\alpha_j x}[(B_{11} + B_{12}x + \cdots + B_{1l_j}x^{l_j-1})\cos\beta_j x$$

$$+ (C_{11} + C_{12}x + \cdots + C_{1l_j}x^{l_j-1})\sin\beta_j x].$$

……………………

$$y_n = e^{\alpha_j x}[(B_{n1} + B_{n2}x + \cdots + B_{nl_j}x^{l_j-1})\cos\beta_j x$$
$$+ (C_{n1} + C_{n2}x + \cdots + C_{nl_j}x^{l_j-1})\sin\beta_j x]$$

的解；并把它们代入方程组，确定诸待定系数 $A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m_i}, \cdots, A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{nm_i}, B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1l_j}, C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1l_j}, \cdots, B_{n1}, B_{n2}, \cdots, B_{nl_j}, C_{n1}, C_{n2}, \cdots, C_{nl_j}$，其中 $m_1 + m_2 + \cdots m_s + 2(l_1 + l_2 + \cdots l_t) = n$.

问 题 与 解 答

1. 消元法

求下列微分方程组的通解(11.9.1 — 11.9.10 题)：

11.9.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x. & (2) \end{cases}$

解法 1　由方程(1)，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}. \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式，得　$\dfrac{d^2x}{dt^2} = x$，即 $x'' - x = 0$.　(4)

解二阶常系数线性齐次方程(4)，得 $x = C_1e^t + C_2e^{-t}$. 因此 $y = \dfrac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t}$. 故所求的通解为

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = C_1e_t - C_2e^{-t}. \end{cases}$$

解法 2　将方程组的两个方程相除，得 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{x}$，即

$$xdx = ydy.$$

积分，得所求的通解为 $x^2 - y^2 = C$.

11.9.2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. & (2) \end{cases}$

解　由方程(2)，得

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}+y\right),\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\right),$$

将 x 与 $\frac{dx}{dt}$ 代入方程(1)，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{3}$$

解二阶常系数线性齐次方程(3)，得 $y=(C_1+C_2t)e^t$，因此 $x=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}+y\right)=(C_1+\frac{C^2}{2}+C_2t)e^t$. 故所求的通解为

$$\begin{cases}x=(C_1+\frac{C^2}{2}+C_2t)e^t,\\ y=(C_1+C_2t)e^t.\end{cases}$$

11.9.3
$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+3x-y=0, & (1)\\ \frac{dy}{dt}-8x+y=0. & (2)\end{cases}$$

解　由方程(1)，得 $y=x'+3x$, $y'=x''+3x'$，将 y 与 y' 代入方程(2)，得

$$x''+4x'-5x=0. \tag{3}$$

解二阶常系数线性齐次方程(3)，得 $x=C_1e^t+C_2e^{-5t}$.
因此 $y=x'+3x=4C_1e^t-2C_2e^{-5t}$. 故原微分方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{-5t},\\ y=4C_1e^t-2C_2e^{-5t}.\end{cases}$$

11.9.4
$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=1-\frac{2z}{x^2},\\ \frac{dz}{dx}=x-y.\end{cases}$$

解　由方程组的第二个方程，得 $\frac{d^2z}{dx^2}=1-\frac{dy}{dx}=\frac{2z}{x^2}$，即

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}-2z=0.$$

解这个欧拉方程，得 $z=C_1x^2+C_2\frac{1}{x}$，于是有

$$y=x-\frac{dz}{dx}=(1-2C_1)x+C_2\frac{1}{x^2}.$$

这就是原方程组的通解.

11.9.5 $\begin{cases} 2y\dfrac{dy}{dx}+z=1, & (1)\\ x^2\dfrac{dz}{dx}+2y^2=x^2\ln x. & (2)\end{cases}$

解　将方程(2)的两边对 x 求导,得

$$x^2z''+2xz'+4yy'=2x\ln x+x. \tag{3}$$

由方程(1),有 $2yy'=1-z$,代入方程(3),得

$$x^2z''+2xz'-2z=2x\ln x+x-2. \tag{4}$$

解欧拉(Euler)方程(4),得

$$z=C_1x+C_2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}x\ln^2x+\frac{1}{9}x\ln x+1,$$

求出

$$z'=C_1-\frac{2C_2}{x^3}+\frac{1}{3}\ln^2x+\frac{7}{9}\ln x+\frac{1}{9}.$$

将 z' 代入方程(2),得

$$y=\pm\sqrt{\frac{C_2}{x}-(\frac{C_1}{2}+\frac{1}{18})x^2+\frac{1}{9}x^2\ln x+\frac{1}{6}x^2\ln^2x},$$

故原微分方程组的通解为

$$\begin{cases} z=C_1x+C_2\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{3}x\ln^2x+\dfrac{1}{9}x\ln x+1,\\ y=\pm\sqrt{\dfrac{C_2}{x}-(\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{1}{18})x^2+\dfrac{1}{9}x^2\ln x+\dfrac{1}{6}x^2\ln^2x}.\end{cases}$$

11.9.6 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x^2}y-z=x, & (1)\\ x\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{2}{x^2}y-xz=x^2. & (2)\end{cases}$

解　将(1)、(2)两式相加,得

$$(x+1)y'-(x+1)z=x(x+1),\ 即\ y'=z+x,$$

积分,得

$$y=\int zdx+\frac{x^2}{2}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式,得

$$z+x+z'-\frac{2}{x^2}\left(\int zdx+\frac{x^2}{2}\right)-z=x,$$

即

$$z'-\frac{2}{x^2}\int zdx-1=0,$$

亦即　$$x^2z' - 2\int zdx - x^2 = 0 \tag{4}$$

将方程(4)对 x 求导,得

$$x^2z'' + 2xz - 2z = 2x, \tag{5}$$

解欧拉方程(5),得

$$z = C_1x + C_2\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x\ln x, \tag{6}$$

将(6)式代入(3)式,得

$$y = \int zdx + \frac{x^2}{2} = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2(\ln x + 1).$$

故所求的通解为

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2(\ln x + 1),$$

$$z = C_1x + C_2\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x\ln x.$$

11.9.7 $$\begin{cases} y' + z' - \dfrac{2}{x^2}y - z = x, & (1) \\ xy' - z' + \dfrac{2}{x^2}y - zx = x^2. & (2) \end{cases}$$

解　将方程(1)乘以 x 后与方程(2)相减,得

$$xz' + z' - \frac{2}{x}y - \frac{2}{x^2}y = 0,\ 即\ y = \frac{x^2}{2}z'. \tag{3}$$

将方程(3)求导,得

$$y' = xz' + \frac{x^2}{2}z'', \tag{4}$$

将(3)、(4)两式代入方程(1),得

$$\frac{x^2}{2}z'' + xz' - z = x,\ 即\ x^2z'' + 2xz' - 2z = 2x. \tag{5}$$

解欧拉方程(5),得

$$z = C_1x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{2}{3}x\ln x,$$

又 $z' = C_1 - \dfrac{2C_2}{x^3} + \dfrac{2}{3}\ln x + \dfrac{2}{3}$,代入(3)式,得

$$y = \frac{x^2}{2}z' = \frac{C_1}{2}x^2 - \frac{C_2}{x} + \frac{x^2}{3}\ln x + \frac{x^2}{3}.$$

故所求的通解为

$$\begin{cases} y = \dfrac{C_1}{2}x^2 - \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{x^2}{3}\ln x + \dfrac{x^2}{3}, \\ z = C_1 x + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{2}{3}x\ln x. \end{cases}$$

11.9.8 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y - 2x = 6e^{-t}, & (1) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = 0. & (2) \end{cases}$

解　由方程(1),解出

$$y = 2x - \frac{dx}{dt} + 6e^{-t}, \tag{3}$$

将(3)式连续求导两次,得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^3x}{dt^3} + 6e^{-t}. \tag{4}$$

将(4)式代入方程(2),得

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 6e^{-t}. \tag{5}$$

解三阶常系数线性非齐次方程(5),得

$$x = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t} - e^{-t},$$

又 $\dfrac{dx}{dt} = C_2e^t + 2C_3e^{2t} + e^{-t}$,将 x 与$\dfrac{dx}{dt}$ 代入(3)式,得

$$y = 2C_1 + C_2e^t + 3e^{-t}.$$

故所求的通解为　$\begin{cases} x = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t} - e^{-t}, \\ y = 2C_1 + C_2e^t + 3e^{-t}. \end{cases}$

11.9.9 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, & (1) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. & (2) \end{cases}$

解　将方程(1)连续微分两次,得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^4x}{dt^4}, \tag{3}$$

由(2)、(3)两式,得

$$\frac{d^4x}{dt^4} = x,\ 即\ x^{(4)} - x = 0. \tag{4}$$

解四阶常系数线性齐次方程(4),得

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t + C_4\sin t. \tag{5}$$

将(5)式代入(1)式,得

$$y=\frac{d^2x}{dt^2}=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.$$

故所求的通解为

$$\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t,\\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.\end{cases}$$

11. 9. 10 $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+2x=-4y, & (1)\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+7y=x. & (2)\end{cases}$

解　将方程(1)的两边对 t 求导两次,得

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}=-4\frac{d^2y}{dt^2},\tag{3}$$

由(2)式,有$\frac{d^2y}{dt^2}=x-7y$,代入方程(3),得

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}=-4(x-7y).\tag{4}$$

又由(1)式,有 $y=-\frac{1}{4}(\frac{d^2x}{dt^2}+2x)$,代入方程(4),得

$$\frac{d^4x}{dt^4}+9\frac{d^2x}{dt^2}+18x=0.\tag{5}$$

解四阶常系数线性齐次方程(5),得

$$x=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t,$$

又　$$\frac{d^2x}{dt^2}=-3C_1\cos\sqrt{3}t-3C_2\sin\sqrt{3}t-6C_3\cos\sqrt{6}t-6C_4\sin\sqrt{6}t,$$

因此　$$y=-\frac{1}{4}(\frac{d^2x}{dt^2}+2x)=\frac{C_1}{4}\cos\sqrt{3}t+\frac{C_2}{4}\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t,$$

故原微分方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t,\\ y=\dfrac{C_1}{4}\cos\sqrt{3}t+\dfrac{C_2}{4}\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t.\end{cases}$$

求出下列微分方程组满足给定初始条件的特解(11. 9. 11—11. 9. 16 题):

11.9.11 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + t^2 + \cos t. & (2) \end{cases}$

$x(0) = -1, y(0) = 0.$

解　将方程(1)求导，得 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}.$　(3)

将(3)代入方程(2)，得 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = t^2 + \cos t.$　(4)

解二阶常系数线性非齐次方程(4)，得

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + t^2 - 2 + \frac{1}{2}t\sin t.$$

由 $x(0) = -1, x'(0) = y'(0) = 0$，确定 $C_1 = 1, C_2 = 0$，于是有

$$x = \cos t + t^2 - 2 + \frac{1}{2}t\sin t,$$

又由(1)式，得 $y = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sin t + 2t + \dfrac{1}{2}t\cos t.$

故所求的特解为 $\begin{cases} x = \cos t + t^2 - 2 + \dfrac{1}{2}t\sin t, \\ y = -\dfrac{1}{2}\sin t + 2t + \dfrac{1}{2}t\cos t. \end{cases}$

11.9.12 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y + \cos 2t, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. & (2) \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 0.$

解　由方程(2)，得 $x = y + \dfrac{dy}{dt},$　(3)

求导，得 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2}$，将 x 与 $\dfrac{dx}{dt}$ 代入方程(1)，得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos 2t. \quad (4)$$

解二阶常系数线性非齐次方程(4)，得

$$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t.$$

由 $y(0) = 0$，确定 $C_1 = 0$，于是有 $y = C_2\sin 2t + \dfrac{1}{4}t\sin 2t.$

又$\frac{dy}{dt} = 2C_2\cos2t + \frac{1}{4}\sin2t + \frac{1}{2}t\cos2t$,将 y 与$\frac{dy}{dt}$代入(3)式,得

$$x = y + \frac{dy}{dt} = 2C_2\cos2t + C_2\sin2t + \frac{1}{4}(t+1)\sin2t + \frac{1}{2}t\cos2t.$$

由 $x(0) = 0$,确定 $C_2 = 0$. 所求的特解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(t+1)\sin2t + \frac{1}{2}t\cos2t, \\ y = \frac{1}{4}t\sin2t. \end{cases}$$

11.9.13 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y + \cos2t, & (1) \\ \frac{dy}{dt} = x - y. & (2) \end{cases}$

$x(0) = y(0) = 0$.

解　由方程(2),解出　$x = \frac{dy}{dt} + y.$　(3)

求导,得　$\frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt},$　(4)

将(3)、(4)两式代入方程(1),得　$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos2t.$　(5)

解二阶常系数线性非齐次方程(5),得

$$y = C_1\cos2t + C_2\sin2t + \frac{1}{4}t\sin2t.$$

又$\frac{dy}{dt} = -2C_1\sin2t + 2C_2\cos2t + \frac{1}{4}\sin2t + \frac{1}{2}t\cos2t$,将 y 与$\frac{dy}{dt}$代入(3)式,得

$$x = (C_1 + 2C_2)\cos2t + (-2C_1 + C_2)\sin2t + \frac{1}{4}(t+1)\sin2t + \frac{1}{2}t\cos2t.$$

故原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = (C_1 + 2C_2)\cos2t + (-2C_1 + C_2)\sin2t + \frac{1}{4}(t+1)\sin2t + \frac{1}{2}t\cos2t, \\ y = C_1\cos2t + C_2\sin2t + \frac{1}{4}t\sin2t. \end{cases}$$

由 $x(0) = y(0) = 0$,确定 $C_1 = C_2 = 0$,故所求的特解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(t+1)\sin 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t, \\ y = \frac{1}{4}t\sin 2t. \end{cases}$$

11.9.14 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = e^{-t}, & (1) \\ \frac{dy}{dt} + x = 1. & (2) \end{cases}$

$x(0) = 0, \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0.$

解　将方程(1)对 t 求导，得 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -e^{-t}$，　　(3)

由(2)式，解出 $\frac{dy}{dt} = 1 - x$，代入(3)式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = -1 - e^{-t}. \quad (4)$$

解二阶常系数线性非齐次方程(4)，得

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^t + \frac{1}{2}te^{-t} + 1.$$

求导，得 $\frac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} + C_2e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}$，将 $\frac{dx}{dt}$ 代入(1)式，得

$$y = -\frac{dx}{dt} + e^{-t} = C_1e^{-t} + C_2e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}.$$

由 $x(0) = 0, \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$，确定 $C_1 = -1, C_2 = 0$. 故所求的特解为

$x = (\frac{1}{2}t - 1)e^{-t} + 1,\ y = \frac{1}{2}(t-1)e^{-t}.$

11.9.15 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, & (1) \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, & (2) \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y + 3z. & (3) \end{cases}$

$x(0) = y(0) = z(0) = 1$

解　用分离变量法解方程(1)，得 $x = C_1e^t$. 由 $x(0) = 1$，确定 $C_1 = 1$，于是有

$$x = e^t. \quad (4)$$

将(4)式代入(2)、(3)两式，得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y + z + e^t, & (5) \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 3z + 2e^t. & (6) \end{cases}$$

由(5)式，解出 $z = \dfrac{dy}{dt} - y - e^t$. (7)

求导，得$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - e^t$. 将 z 与$\dfrac{dz}{dt}$代入方程(6)，得

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0, \tag{8}$$

解二阶常系数线性齐次方程(8)，得 $y = (C_2 + C_3t)e^{2t}$. 由 $y(0) = 1$，确定 $C_2 = 1$，于是有 $y = (1 + C_3t)e^{2t}$. 求导，得

$$\frac{dy}{dt} = (2 + C_3 + 2C_3t)e^{2t},$$

将 y 与$\dfrac{dy}{dt}$代入(7)式，得 $z = (1 + C_3 + C_3t)e^{2t} - e^t$. 由 $z(0) = 1$，确定 $C_3 = 1$，于是有

$$y = (1 + t)e^{2t}, z = (2 + t)e^{2t} - e^t.$$

故所求的通解为 $\begin{cases} x = e^t, \\ y = (1 + t)e^{2t}, \\ z = (2 + t)e^{2t} - e^t. \end{cases}$

11.9.16 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, & (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. & (3) \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1.$

解 将方程(1)对 t 求导，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}. \tag{4}$$

将(1)、(2)、(3)三个式子代入(4)式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 11x - 9y + 7z. \tag{5}$$

将方程(5)对 t 求导，得

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11\frac{dx}{dt} - 9\frac{dy}{dt} + 7\frac{dz}{dt}. \tag{6}$$

将(1)、(2)、(3) 三个式子代入(6) 式,得

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63y + 41z. \tag{7}$$

由(1)、(5)、(7) 三个方程构成的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = 11x - 9y + 7z, \\ \dfrac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63y + 41z \end{cases}$$

解得

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 11\frac{d^2x}{dt^2} + 36\frac{dx}{dt} - 36x = 0. \tag{8}$$

解二阶常系数线性齐次方程(8),得

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}.$$

求导,得$\dfrac{dx}{dt} = 2C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 6C_3e^{6t}$,将 $x,\dfrac{dx}{dt}$ 代入方程(1),得

$$y - z = 3x - \frac{dx}{dt} = C_1e^{2t} - 3C_3e^{6t} \tag{9}$$

再求导,得 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4C_1e^{2t} + 9C_2e^{3t} + 36C_3e^{6t}$,将 $x,\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 代入方程(5),得

$$9y - 7z = 11x - \frac{d^2x}{dt^2} = 7C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t} - 25C_3e^{6t}. \tag{10}$$

由(9)、(10) 两个方程构成的方程组

$$\begin{cases} y - z = C_1e^{2t} - 3C_3e^{6t}, \\ 9y - 7z = 7C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t} - 25C_3e^{6t} \end{cases}$$

解得 $y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}, z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}$.

综上所述,原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}, \\ y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}, \\ z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}. \end{cases}$$

由初始条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1$,确定 $C_1 = -\dfrac{1}{2}, C_2 =$

$\frac{1}{3}$, $C_3=\frac{1}{6}$,故所求的特解为

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{6t}, \\ y=\qquad\qquad \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}e^{6t}, \\ z=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{6t}. \end{cases}$$

2. 算子法

用算子法求下列微分方程组的通解(11.9.17 — 11.9.19 题):

11.9.17 $\begin{cases} x''+y'+3x=e^{-t}, \\ y''-4x'+3y=\sin 2t. \end{cases}$

解　应用微分算子将给定方程组写成算子形式:

$$\begin{cases} (D^2+3)x+Dy=e^{-t}, & (1)\\ -4Dx+(D^2+3)y=\sin 2t. & (2) \end{cases}$$

用 $4D$ 作用于(1)式,用(D^2+3)作用于(2)式,然后再相加,得

$$(D^4+10D^2+9)y=-4e^{-t}-\sin 2t. \tag{3}$$

应用算子法解方程(3),得

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3\cos 3t+C_4\sin 3t-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{15}\sin 2t. \tag{4}$$

用 D 作用于(2)式,并解出

$$D^2x=\frac{1}{4}[(D^3+3D)y-2\cos 2t], \tag{5}$$

将(5)式代入(1)式,并解出

$$\begin{aligned} x&=(-\frac{1}{12}D^3-\frac{7}{12}D)y+\frac{1}{6}\cos 2t+\frac{1}{3}e^{-t} \\ &=\frac{1}{2}(C_1\sin t-C_2\cos t-C_3\sin 3t+C_4\cos 3t) \\ &\qquad\qquad +\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t. \end{aligned}$$

故所求的通解为

$$x=\frac{1}{2}(C_1\sin t-C_2\cos t-C_3\sin t+C_4\cos 3t+\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t,$$

$$y=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3\cos 3t+C_4\sin 3t-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{15}\sin 2t.$$

11.9.18 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + x = -t, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + 3x - y = e^{2t}. \end{cases}$

解　应用微分算子将给定方程组写作算子形式：

$$\begin{cases} (D+1)x - Dy = -t, & (1) \\ (D^2+3)x - (D+1)y = e^{2t}. & (2) \end{cases}$$

由克莱姆法则，得

$$(D^3 - D^2 + D - 1)x = -(D+1)(-t) + De^{2t},$$

即
$$(D^3 - D^2 + D - 1)x = 1 + t + 2e^{2t}. \quad (3)$$

应用算子法解方程(3)，得

$$x = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t + \frac{2}{5}e^{2t} - t - 2.$$

由(1)式，得　$Dy = (D+1)x + t,$ (4)

将(4)式代入(2)式，并解出

$$y = (D^2 - D + 2)x - t - e^{2t}$$
$$= 2C_1e^t + (C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + C_3)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t} - 3t - 3.$$

故所求的通解为

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t + \dfrac{2}{5}e^{2t} - t - 2, \\ y = 2C_1e^t + (C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + C_3)\sin t + \dfrac{3}{5}e^{2t} - 3t - 3. \end{cases}$$

11.9.19 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} - x = e^t, \\ -\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - 2y = t^2. \end{cases}$

解　应用微分算子将给定方程组写成算子形式：

$$\begin{cases} (D^2 - 1)x - 2Dy = e^t, & (1) \\ Dx - (D^2 + 2)y = t^2. & (2) \end{cases}$$

用 D 作用于(2)式，再减去(1)式，得

$$x - D^3y = 2t - e^t. \quad (3)$$

又用 D 作用于(3)式，再减去(2)式，得

$$(D^4 - D^2 - 2)y = e^t + t^2 - 2. \quad (4)$$

方程(3)与(4)构成了三角形方程组

$$\begin{cases} x - D^3 y = 2t - e^t, \\ (D^4 - D^2 - 2)y = e^t + t^2 - 2. \end{cases}$$

应用算子法解方程(4),得

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} + C_3\cos t + C_4\sin t - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2},$$

求出 $D^3 y$,并代入(3)式,得

$$x = 2\sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - 2\sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t} - C_4\cos t + C_3\sin t - \frac{3}{2}e^t + 2t,$$

故所求的通解为

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - 2\sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t} - C_4\cos t + C_3\sin t - \frac{3}{2}e^t + 2t, \\ y = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} + C_3\cos t + C_4\sin t - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

3. 可积组合法

用可积组合法求下列微分方程组的通解(11.9.20 — 11.9.26 题):

11.9.20 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x. & (2) \end{cases}$

解 将方程(1)与(2)相加,得 $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = x + y$,即

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y. \tag{3}$$

(3)式为可积组合式,用分离变量法,解得

$$x + y = C_1 e^t, \tag{4}$$

将方程(1)与(2)相减,得 $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x - y$,即

$$\frac{d(x-y)}{dt} = x - y. \tag{5}$$

(5)式为可积组合式,用分离变量法,解得

$$x - y = C_2 e^{-t}. \tag{6}$$

由(4)、(6)两式,得所求的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(C_1e^t + C_2e^{-t}), \\ y = \dfrac{1}{2}(C_1e^t - C_2e^{-t}). \end{cases}$$

11.9.21 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, & (2) \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. & (3) \end{cases}$

解　用方程(1)减方程(2)，得$\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = y - x$，即

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

亦即　$d[\ln(x-y) + t] = 0.$　(4)

类似地，用方程(1)减方程(3)，得

$$d[\ln(x-z) + t] = 0. \tag{5}$$

由可积组合式(4)与(5)，得到首次积分

$$\begin{cases} x - y = C_1e^{-t}, \\ x - z = C_2e^{-t}. \end{cases} \tag{6}$$

由(6)式解出　$\begin{cases} y = x - C_1e^{-t}, & (7) \\ z = x - C_2e^{-t}. & (8) \end{cases}$

将(7)、(8)两式代入(1)式，得到

$$\frac{dx}{dt} - 2x = -(C_1 + C_2)e^{-t}. \tag{9}$$

求出非齐次线性微分方程(9)的解为

$$x = C_3e^{2t} + (C_1 + C_2)e^{-t}, \tag{10}$$

将(10)式代入(7)、(8)两式，得

$$y = C_3e^{2t} + C_2e^{-t},\ z = C_3e^{2t} + C_1e^{-t},$$

故所求的通解为

$$\begin{cases} x = C_3e^{2t} + (C_1 + C_2)e^{-t}, \\ y = C_3e^{2t} + C_2e^{-t}, \\ z = C_3e^{2t} + C_1e^{-t}. \end{cases}$$

11.9.22　$\dfrac{xdx}{y^2z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y^2}.$

解 由 $\frac{xdx}{y^2z}=\frac{dy}{xz}$，得 $x^2dx=y^2dy$，积分，得 $x^3-y^3=C_1$.
由 $\frac{xdx}{y^2z}=\frac{dz}{y^2}$，得 $xdx=zdz$. 积分，得 $x^2-z^2=C_2$ 故所求的通解为

$$\begin{cases}x^3-y^3=C_1,\\x^2-z^2=C_2.\end{cases}$$

11.9.23 $\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}$，其中 l、m、n 均为常数.

解 由分式的性质，得

$$\frac{ldx}{lmz-lny}=\frac{mdy}{mnx-mlz}=\frac{ndz}{nly-nmx}=\frac{d(lx+my+nz)}{0}.$$

于是有 $lx+my+nz=C_1$. 又由分式的性质，得

$$\frac{xdx}{mxz-nxy}=\frac{ydy}{nxy-lyz}=\frac{zdz}{lyz-mxz}=\frac{d(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2)}{0}$$

于是有 $x^2+y^2+z^2=C_2$.

故所求的通解为 $\begin{cases}lx+my+nz=C_1,\\x^2+y^2+z^2=C_2.\end{cases}$

11.9.24 $\frac{dx}{x(y^2-t^2)}=\frac{dy}{y(t^2-x^2)}=\frac{-dt}{t(x^2-y^2)}$.

解 用 xyt 乘以给定的微分方程，得

$$\frac{ytdx}{y^2-t^2}=\frac{xtdy}{t^2-x^2}=\frac{xydt}{y^2-x^2},$$

由分式的性质，得 $$\frac{ytdx+xtdy}{y^2-x^2}=\frac{xydt}{y^2-x^2},$$

即 $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t}$. 积分，得 $\ln x+\ln y+\ln C_1=\ln t$，即 $t=C_1xy$.

把 $t=C_1xy$ 代入给定微分方程组，得

$$\frac{dx}{x(y^2-C_1^2x^2y^2)}=\frac{dy}{y(C_1^2x^2y^2-x^2)}，即\frac{xdx}{C_1^2x^2-1}+\frac{ydy}{C_1^2y^2-1}=0.$$

积分，得 $\ln(C_1^2x^2-1)+\ln(C_1^2y^2-1)=\ln C_2$,

即 $C_1^4x^2y^2-C_1^2x^2-C_1^2y^2+1=C_2$.

亦即 $C_1^2(t^2-x^2-y^2)=C_1'$，$(C_1'=C_2-1)$. 故原微分方程的通解为

$$\begin{cases}t=C_1xy,\\C_1^2(t^2-y^2-x^2)=C_2.\end{cases}$$

11.9.25 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解　应用分式的性质,有

$$\frac{xdx}{x^2}=\frac{ydy}{y^2}=\frac{zdz}{z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}+(x^2+y^2+z^2)}$$

$$=\frac{xdx+ydy+zdz-\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz}{0}$$

因此$\dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=dz$,由此解得 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=z+C_1$.

又由$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$,解得 $y=C_2x$. 故所求的通解为

$$\begin{cases}y=c_2x,\\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=z+C_1.\end{cases}$$

11.9.26 $\dfrac{dx_1}{(1+\sqrt{2})x_2+(1-\sqrt{2})y_2}$

$$=\frac{dy_1}{(1-\sqrt{2})x_2+(1+\sqrt{2})y_2}$$

$$=\frac{dx_2}{(\sqrt{2}-1)y_1-(\sqrt{2}+1)x_1}$$

$$=\frac{dy_2}{(\sqrt{2}-1)x_1-(\sqrt{2}+1)y_1}.$$

解　记 $1+\sqrt{2}=a, 1-\sqrt{2}=b$,将方程组写成

$$\frac{dx_1}{ax_2+by_2}=\frac{dy_1}{bx_2+ay_2}=\frac{dx_2}{-(ax_1+by_1)}=\frac{dy_2}{-(bx_1+ay_1)}.$$

由分式的性质,有

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1+dy_1}{x_2+y_2}=\dfrac{dx_2+dy_2}{-(x_1+y_1)},\\ \dfrac{dx_1-dy_1}{x_2-y_2}=\dfrac{dx_2-dy_2}{-(x_1-y_1)}.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}(x_2+y_2)d(x_2+y_2)=-(x_1+y_1)d(x_1+y_1),\\ (x_2-y_2)d(x_2-y_2)=-(x_1-y_1)d(x_1-y_1).\end{cases}$

亦即
$$\begin{cases}(x_2+y_2)^2+(x_1+y_1)^2=C_1, & (1)\\ (x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2=C_2. & (2)\end{cases}$$

由(1)、(2) 两式解得

$$\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{C_1-(x_1+y_1)^2}+\sqrt{C_2-(x_1-y_1)^2}\right]\\ y_2=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{C_1-(x_1+y_1)^2}-\sqrt{C_2-(x_1-y_1)^2}\right]\end{cases}$$

将 x_2、y_2 代入 $\dfrac{dx_1}{ax_2+by_2}=\dfrac{dy_1}{bx_1+ay_2}$ 中,得

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{\sqrt{C_1-(x_1+y_1)^2}-\sqrt{2}\sqrt{C_2-(x_1-y_1)^2}}{\sqrt{C_1-(x_1+y_1)^2}+\sqrt{2}\sqrt{C_2-(x_1-y_1)^2}}. \qquad (3)$$

令 $u=x_1+y_1, v=x_1-y_1$,将(3) 式化为

$$\frac{du+dv}{\sqrt{C_1-u^2}+\sqrt{2}\sqrt{C_2-v^2}}=\frac{du-dv}{\sqrt{C_1-u^2}-\sqrt{2}\sqrt{C_2-v^2}},$$

即
$$\frac{dv}{\sqrt{C_2-v^2}}=\frac{\sqrt{2}\,du}{\sqrt{C_1-u^2}}. \qquad (4)$$

将(4) 式积分,得 $\arcsin\dfrac{v}{\sqrt{C_2}}=\sqrt{2}\arcsin\dfrac{u}{\sqrt{C_1}}+C_3$,即

$$\arcsin\frac{x_1-y_1}{\sqrt{C_2}}=\sqrt{2}\arcsin\frac{x_1+y_1}{\sqrt{C_1}}+C_3, \qquad (5)$$

由(1)、(2)、(5) 三个式子,得所求的通解为

$$\begin{cases}(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2=C_1,\\ (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=C_2,\\ \arcsin\dfrac{x_1-y_1}{\sqrt{C_2}}=\sqrt{2}\arcsin\dfrac{x_1+y_1}{\sqrt{C_1}}+C_3.\end{cases}$$

4. 待定系数法

用待定系数法求下列常系数线性齐次方程组的通解(11.9.27 — 11.9.33 题):

11.9.27 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-2y.\end{cases}$

解　给定齐次方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

求出特征根为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$.

对应于 λ_1 与 λ_2,方程组有形如

$$\begin{cases} x_1 = a_1 e^{-3t}, \\ y_1 = b_1 e^{-3t}, \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_2 = a_2 e^{2t}, \\ y_2 = b_2 e^{2t}. \end{cases}$$

的解.分别将它们代入方程组,确定 $a_1 = C_1$, $b_1 = -4C_1$ 与 $a_2 = C_2$, $b_2 = C_2$,其中 C_1、C_2 均为任意常数。故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}, \\ y = -4C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

11.9.28
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

解　给定齐次方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

求出将征根为 $\lambda_{1,2} = 2$.

对应于 $\lambda_{1,2}$ 方程组有形如 $\begin{cases} x_{1,2} = (a_1 t + a_2) e^{2t} \\ y_{1,2} = (b_1 t + b_2) e^{2t} \end{cases}$ 的解.将 $x_{1,2}, y_{1,2}$ 代入方程组,确定

$$a_1 = C_1,\ a_2 = C_2,\ b_1 = -C_1,\ b_2 = -(C_1 + C_2),$$

其中 C_1、C_2 均为任意常数.故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = (C_1 t + C_2) e^{2t}, \\ y = -[C_1(t+1) + C_2] e^{2t}. \end{cases}$$

11.9.29
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x - y + 6z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -10x + 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y - z. \end{cases}$$

解　给定方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 6 \\ -10 & 4-\lambda & -12 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

求出特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$.

对应于 λ_1、λ_2 与 λ_3,方程组有形如

$$\begin{cases} x_1 = a_1 e^{2t}, \\ y_1 = b_1 e^{2t}, \\ z_1 = c_1 e^{2t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a_2 e^{3t}, \\ y_2 = b_2 e^{3t}, \\ z_2 = c_2 e^{3t}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = a_3 e^{5t}, \\ y_3 = b_3 e^{5t}, \\ z_3 = c_3 e^{5t}. \end{cases}$$

的解,分别将它们代入方程组,确定

$$a_1 = C_1, \quad b_1 = -C_1, \quad c_1 = -C_1,$$
$$a_2 = C_2, \quad b_2 = -2C_2, \quad c_2 = -C_2,$$
$$a_3 = 3C_3, \quad b_3 = -6C_3, \quad c_3 = -2C_3.$$

故所求的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{3t} - 6C_3 e^{5t}, \\ z = -C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{5t}. \end{cases}$$

11.9.30 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y + z. \end{cases}$

解　给定齐次方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

求出特征根为 $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 0$.

对应于 $\lambda_{1,2}$ 与 λ_3,方程组有形如

$$\begin{cases} x_{1,2} = (a_1 t + a_2)e^t, \\ y_{1,2} = (b_1 t + b_2)e^t, \\ z_{1,2} = (c_1 t + c_2)e^t, \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_3 = a_3, \\ y_3 = b_3, \\ z_3 = c_3. \end{cases}$$

的解,分别将它们代入方程组,确定

$$a_1 = C_1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = C_1,$$

$$a_2 = C_2,\quad b_2 = C_1,\ c_2 = C_2,$$
$$a_3 = -2C_3,\ y = C_3,\ z = -C_3.$$

其中 C_1、C_2、C_3 均为任意常数，故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = (C_1t + C_2)e^t - 2C_3, \\ y = \qquad C_1e^t + C_3; \\ z = (C_1t + C_2)e^t - C_3. \end{cases}$$

11.9.31 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$

解　给定方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

求出特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2$.

对应于 λ_1 与 $\lambda_{2,3}$，方程组有形如

$$\begin{cases} x_1 = a_1e^t, \\ y_1 = b_1e^t, \\ z_1 = c_1e^t, \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_{2,3} = (a_2t + a_3)e^{-2t}, \\ y_{2,3} = (b_2t + b_3)e^{-2t}, \\ z_{2,3} = (c_2 + c_3)e^{-2t}. \end{cases}$$

的解，分别将它们代入方程组，确定

$$a_1 = b_1 = c_1 = C_1,\ a_2 = b_2 = c_2 = 0,$$
$$a_3 = C_2,\ b_3 = C_3,\ c_3 = -C_2 - C_3;$$

其中 C_1、C_2、C_3 均为任意常数，故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-2t}, \\ y = C_1e^t + C_3e^{-2t}, \\ z = C_1e^t - (C_2 + C_3)e^{-2t}. \end{cases}$$

11.9.32 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

解　给定齐次方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

求出特征根为 $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 2$.

对应于 $\lambda_{1,2}$ 与 λ_3，方程组有形如

$$\begin{cases} x_{1,2} = (a_1 t + a_2)e^{-t}, \\ y_{1,2} = (b_1 t + b_2)e^{-t}, \\ z_{1,2} = (c_1 t + c_2)e^{-t}. \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_3 = a_3 e^{2t}, \\ y_3 = b_3 e^{2t}, \\ z_3 = c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

的解，分别将它们代入方程组，确定 $a_1 = b_1 = c_1 = 0$.

$$a_2 = C_1,\ b_2 = C_2,\ c_2 = -C_1 - C_2$$

$$a_3 = C_3,\ b_3 = C_3,\ c_3 = C_3$$

其中 C_1、C_2、C_3 均为任意常数，故原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \\ y = C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

11.9.33
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

解　给定齐次方程组的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

求出特征根为 $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$.

对应于 $\lambda_{1,2}$，方程组有形如

$$\begin{cases} x_{1,2} = e^{-6t}(a_1 \cos t + a_2 \sin t), \\ y_{1,2} = e^{-6t}(b_1 \cos t + b_2 \sin t). \end{cases}$$

的解，代入方程组，确定 $a_1 = C_1,\ a_2 = C_2, b_1 = C_1 + C_2, b_2 = C_2 - C_1$，其中 C_1、C_2 为任意常数，故所求的通解为

$$\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t}[C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]. \end{cases}$$

§10　微分方程的应用

问题与解答

1. 应用微分方程求未知函数

11.10.1　设 $f'(\cos x+2)=\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x$，求 $f(x)$.

解　令 $\cos x+2=u$，或 $\cos x=u-2$，则

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-(u-2)^2,$$

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1}{(u-2)^2}-1.$$

于是有　$$f'(u)=\frac{1}{(u-2)^2}-(u-2)^2.$$

积分得　$$f(u)=-\frac{1}{u-2}-\frac{1}{3}(u-2)^3+C,$$

故所求的函数为　$$f(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3}(x-2)^3+C.$$

11.10.2　设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1;\\ x, & x>1,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$，求函数 $f(x)$.

解　令 $\ln x=t$ 或 $x=e^t$，则

$$f'(t)=\begin{cases}1, & 0<e^t\leqslant 1;\\ e^t, & e^t>1,\end{cases}\ \text{或}\ f'(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant 0;\\ e^t, & t>0.\end{cases}$$

积分得 $f(t)=\begin{cases}t+C_1, & t\leqslant 0;\\ e^t+C_2, & t>0.\end{cases}$ 由 $f(t)$ 在 $t=0$ 处的连续性，即 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)=0$，得 $C_1=0$，$C_2=-1$. 故所求的函数为

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0;\\ e^x-1, & x>0.\end{cases}$$

11.10.3　设函数 $y=f(x)$ 在数轴上处处有定义，且恒不为零，对任意两点 ξ、η 有 $f(\xi+\eta)=f(\xi)\cdot f(\eta)$，$f'(0)$ 存在. 试根据导数定义求 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 之间的关系式，并求出函数 $y=f(x)$.

解　在 $f(\xi+\eta)=f(\xi)\cdot f(\eta)$ 中令 $\xi=0$，得 $f(\eta)=f(0)\cdot f(\eta)$. 因为 $f(\eta)\neq 0$，所以 $f(0)=1$，即 $y|_{x=0}=1$.

又 $f'(0)$ 存在，所以

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}.$$

从而得到

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)f'(0)$$

于是有 $\begin{cases}y'=f'(0)y\\ y|_{x=0}=1.\end{cases}$

因为 $y\neq 0$，所以由分离变量法得，$\frac{dy}{y}=f'(0)dx$. 积分得通解为

$$\ln y=f'(0)x+\ln C,\text{即 } y=Ce^{f'(0)x}.$$

由 $y|_{x=0}=1$，得 $C=1$. 故所求的函数为 $y=e^{f'(0)x}$.

11.10.4 设函数 $y=f(x)$ 满足关系式 $f(x+t)=\frac{f(x)+f(t)}{1-f(x)f(t)}$，且 $f(x)$ 可微，求 $f(x)$.

解 将 $x=t=0$ 代入关系式 $f(x+t)=\frac{f(x)+f(t)}{1-f(x)f(t)}$， (1)

得 $f(0)[1-f^2(0)]=2f(0)$，即 $f(0)[f^2(0)+1]=0$，从而得到

$$f(0)=0, \tag{2}$$

由(1)式，得 $f(x+t)[1-f(x)f(t)]=f(x)+f(t)$. 将该式对 t 求导，并令 $t=0$，得

$$f'(x)=f'(0)[1+f^2(x)],\text{ 即 } y'=y'(0)(1+y^2).$$

用分离变量法解微分方程 $\begin{cases}y'=y'(0)(1+y^2),\\ y(0)=0,\end{cases}$ 得

$y=\operatorname{tg}[y'(0)x]$，这即为所求的函数.

11.10.5 设函数 $y=f(x)$ 满足关系式 $f'(x)+xf'(-x)=x$，求 $f(x)$.

解 将关系式 $f'(x)+xf'(-x)=x$ (1)

中的 x 变为 $-x$，得 $f'(-x)-xf'(x)=-x$， (2)

由(1)、(2)两式解出 $f'(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$，即 $y'=\frac{x^2+x}{x+1}$. (3)

将方程(3)直接积分，得

$$y=x-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

这即为所求的函数.

11.10.6　设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，具有二阶连续导数，且满足关系式 $f(x)+3f'(x+\pi)=\sin x$，求 $f(x)$.

解　在关系式
$$f(x)+3f'(x+\pi)=\sin x \tag{1}$$
中以 $x+\pi$ 代 x，得
$$f(x+\pi)+3f'(x+2\pi)=\sin(x+\pi). \tag{2}$$
因为 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，所以 $f(x+2\pi)=f(x)$. 求导，得
$$f'(x+2\pi)=f'(x), \tag{3}$$
将(3)式代入(2)式，得
$$f(x+\pi)+3f'(x)=\sin(x+\pi), \tag{4}$$
将(4)式对 x 求导，得 $f'(x+\pi)+3f''(x)=\cos(x+\pi)$，

即
$$f'(x+\pi)=\cos(x+\pi)-3f''(x). \tag{5}$$
将(5)式代入(1)式，得
$$9f''(x)-f(x)=-\sin x-3\cos x. \tag{6}$$
解二阶常系数线性非齐次方程(6)，得
$$f(x)=C_1e^{\frac{x}{3}}+C_2e^{-\frac{x}{3}}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x.$$
因为 $f(x)$ 为周期函数，所以取 $C_1=C_2=0$. 故所求的函数为
$$f(x)=\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x.$$

11.10.7　已知 $f(x)$、$g(x)$ 满足条件 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，$f(0)=0$，$g(x)\neq 0$，试确定由 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 所定义的函数 $F(x)$.

解法 1
$$F'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$
$$=\frac{g^2(x)-f^2(x)}{g^2(x)}=1-\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2=1-F^2(x),$$
即 $F'(x)=1-F^2(x)$，且 $F(0)=\left.\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|_{x=0}=0$.

用分离变量法解这个微分方程，得所求函数为
$$F(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}，\text{或 } F(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\text{th}x.$$

解法 2　由已知条件得，
$$f'(x)=g(x), \tag{1}$$
$$g'(x)=f(x). \tag{2}$$

将(1)式对 x 求导,得

$$f''(x) = g'(x). \tag{3}$$

又由(2)式,得

$$f''(x) = f(x),\text{即 } f''(x) - f(x) = 0. \tag{4}$$

初始条件为 $f(0) = 0$.

解二阶常系数线性齐次微分方程(4),得 $f(x) = C(e^x - e^{-x})$. 于是有 $g(x) = f'(x) = C(e^x + e^{-x})$,故所求的函数为

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

解法 3　由已知,$f'(x) = g(x)$, 即 $\frac{df}{dx} - g = 0$.

$$g'(x) = f(x),\text{ 即 } \frac{dg}{dx} - f = 0.$$

得常系数线性微分方程组 $\begin{cases} \frac{df}{dx} - g = 0, \\ \frac{dg}{dx} - f = 0. \end{cases}$ 初始条件为 $f(0) = 0$.

解之得　$f(x) = C(e^x - e^{-x}), g(x) = C(e^x + e^{-x})$. 故所求的函数为

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

11.10.8　设$\left(\int dx + \int y dx + \int y^2 dx + \int y^3 dx\right) \cdot \int \frac{1-y}{1-y^4} dx = -1$,求函数 $x = \varphi(y)$.

解　将原方程化为

$$\int (1 + y + y^2 + y^3) dx \cdot \int \frac{1-y}{1-y^4} dx = -1,$$

即

$$\int \frac{1-y^4}{1-y} dx \cdot \int \frac{1-y}{1-y^4} dx = -1. \tag{1}$$

令$\frac{1-y^4}{1-y} = u$,则方程(1)化为

$$\int u dx \cdot \int \frac{1}{u} dx = -1. \tag{2}$$

因为 $\int u dx \neq 0, \int \frac{1}{u} dx \neq 0$,所以方程(2)可化为

$$\int \frac{1}{u}dx = \frac{-1}{\int udx}. \tag{3}$$

对方程(3)两边关于 x 求导，得

$$\frac{1}{u} = \frac{u}{\left(\int udx\right)^2}, \text{即} \int udx = \pm u. \tag{4}$$

再对方程(4)两边关于 x 求导，得

$$u = \pm u', \text{ 或 } u' = \pm u. \tag{5}$$

对方程(5)分离变量后积分，得 $x = \ln C_1 u$ 或 $x = \ln \dfrac{C_2}{u}$，故所求函数为 $x = \ln C_1(1 + y + y^2 + y^3)$，或 $x = \ln \dfrac{C_2}{1 + y + y^2 + y^3}$.

11.10.9 设 $f(x)$ 是区间 $[0,b]$ $(b > 0)$ 上的正值连续函数，且对任意的 $x \in [0,b]$，$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $\sqrt{af(x)}$ $(a > 0)$，求 $f(x)$.

解 求出 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的平均值为 $\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$，所以得

$$\frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \sqrt{af(x)}, \text{ 即 } \frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}{x^2} = af(x). \tag{1}$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则 $f(x) = F'(x)$，将(1)式化为

$$aF'(x) = \frac{1}{x^2}F^2(x). \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得 $F(x) = \dfrac{ax}{1 - Cx}$，故所求的函数为

$$f(x) = F'(x) = \frac{a}{(1 - Cx)^2}.$$

11.10.10 求一不恒为零的连续函数 $f(x)$，使之满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t}dt.$$

解 因为可导函数是连续函数，所以设 $f(x)$ 可导，且满足给定方程 $f^2(x) = \int_0^x f(t) \dfrac{\sin t}{2 + \cos t}dt$，又 $f(0) = 0$.

将给定方程的两边对 x 求导，得 $f(x)$ 满足的微分方程为

$$2f(x)f'(x) = f(x)\frac{\sin x}{2+\cos x}.$$

当 $f(x)\neq 0$ 时，有 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$，初始条件为 $f(0)=0$. (1)

对方程(1)直接积分，得

$$f(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{2+\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2+\cos x}.$$

故所求的函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2+\cos x}$.

11.10.11　求满足方程 $\int_0^x f(t)dt = x+\int_0^x tf(x-t)dt$ 的可微函数 $y=f(x)$.

解　令 $x-t=u$，则

$$\int_0^x tf(x-t)dt = -\int_x^0 (x-u)f(u)du$$
$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du,$$

原方程可化为

$$\int_0^x f(t)dt = x + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt. \tag{1}$$

将方程(1)对 x 求导，得 $f(x)=1+\int_0^x f(t)dt$, (2)

且 $f(0)=1$，即 $y(0)=1$.

将方程(2)对 x 求导，得 $f(x)$ 满足的微分方程为

$$f'(x)=f(x)，\text{或 } y'=y. \tag{3}$$

初始条件为 $y(0)=1$.

将方程(3)分离变量后积分，得

$$\int_1^y \frac{dy}{y}=\int_0^x dx，\text{即 } \ln y = x.$$

故所求的函数为 $y=e^x$.

11.10.12　设 $\int_0^1 f(ax)da = \dfrac{1}{2}f(x)+1$，且 $x\neq 0$，求 $y=f(x)$.

解　令 $ax=t$，则 $\int_0^1 f(ax)da = \int_0^x \dfrac{1}{x}f(t)dt = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，所以原方程可化为

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}f(x)+1，\text{或 } \int_0^x ydt = \frac{1}{2}xy + x. \tag{1}$$

将方程(1)对 x 求导,得 $y=f(x)$ 满足的微分方程为

$$y=\frac{y}{2}+\frac{x}{2}y'+1,\text{或 } y'-\frac{1}{x}y=-\frac{2}{x}. \tag{2}$$

解一阶线性非齐次方程(2),得通解为

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[\int\left(-\frac{2}{x}\right)e^{\int-\frac{dx}{x}}+C\right]=Cx+2,$$

故所求的函数为 $y=Cx+2$.

11.10.13　设函数 $f(x)$ 可微,且满足关系式 $\int_1^x\frac{f(x)}{f^2(x)+x}dx=f(x)-1$,求 $f(1)$ 与 $f(x)$.

解　在关系式

$$\int_1^x\frac{f(x)}{f^2(x)+x}dx=f(x)-1 \tag{1}$$

中,令 $x=1$,得 $f(1)=1$.将(1)式对 x 求导,得

$$f'(x)=\frac{f(x)}{f^2(x)+x},\text{ 即 }\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y, \tag{2}$$

其中 $y=f(x)$.

解一阶线性非齐次微分方程(2),得

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left[\int ye^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=Cy+y^2.$$

由 $y|_{x=1}=1$,确定 $C=0$.故所求的函数为 $x=y^2$,或 $y=\sqrt{x}$.

11.10.14　设二阶可微函数 $f(x)$ 满足方程 $\int_0^x(x+1-t)f'(t)dt=x^2+e^x-f(x)$,求 $f(x)$.

解　在给定方程中,令 $x=0$,得 $f(0)=1$.将原方程化为

$$(x+1)\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=x^2+e^x-f(x),$$

$$(x+1)[f(x)-f(0)]-xf(x)+\int_0^x f(t)dt=x^2+e^x-f(x),$$

而 $f(0)=1$,于是有

$$2f(x)+\int_0^x f(t)dt=x^2+e^x+x+1. \tag{1}$$

将方程(1)的两边对 x 求导,得 $f(x)$ 满足的微分方程为

$$2f'(x)+f(x)=2x+e^x+1, \tag{2}$$

初始条件为 $f(0)=1$.

解一阶常系数线性非齐次方程(2),得通解为

$$f(x) = Ce^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}e^x + 2x - 3.$$

由 $f(0) = 1$，确定 $C = \frac{8}{3}$，故所求的函数为

$$f(x) = \frac{8}{3}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^x + 2x - 3.$$

11.10.15 设 $x(t)$ 为可微函数，且 $x(t) = \cos 2t + \int_0^t x(u)\sin u du$，求 $x(t)$.

解 令 $t = 0$，得 $x(0) = 1$. 将原方程对 t 求导，得 $x(t)$ 满足的微分方程为

$$x'(t) = -2\sin 2t + x(t)\cos t, \text{ 即 } x' - x\sin t = -2\sin 2t.$$

解这个一阶线性非齐次方程，得通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \sin t dt}\left[\int(-2\sin 2t)e^{-\int \sin t dt}dt + C\right] \\ &= Ce^{-\cos t} + 4(\cos t - 1), \end{aligned}$$

由 $x(0) = 1$，确定 $C = e$. 故所求的函数为 $x(t) = e^{1-\cos t} + 4(\cos t - 1)$.

11.10.16 设函数 $y = y(x)$ 具有二阶连续导数，且 $y'(0) = 0$，试由方程 $y(x) = 1 + \frac{1}{3}\int_0^x[-y''(t) - 2y(t) + 6te^{-t}]dt$，求 $y(x)$.

解 在给定方程中，令 $x = 0$ 得 $y(0) = 1$. 将给定方程对 x 求导，得

$$y' = \frac{1}{3}(-y'' - 2y + 6xe^{-x}), \text{即 } y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}.$$

初始条件为 $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

解这个二阶常系数线性非齐次方程，得

$$y = -7e^{-2x} + (3x^2 - 6x + 8)e^{-x}.$$

这即为所求的函数.

11.10.17 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且满足关系式 $\int_0^x(x - t)f(t)dt = xe^x - f(x)$，求 $f(x)$.

解 将关系式 $\int_0^x(x - t)f(t)dt = xe^x - f(x)$ (1)

变形为 $x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = xe^x - f(x),$ (2)

将(2)式对 x 求导,得 $\int_0^x f(t)dt = (x+1)e^x - f'(x)$, (3)

再求导,得 $f(x) = (x+2)e^x - f''(x)$,即

$$y'' + y = (x+2)e^x, \tag{3}$$

其中 $y = f(x)$.

在(1)、(3)两式中令 $x = 0$,得 $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

解二阶常系数非齐次线性微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = (x+2)e^x, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1, \end{cases}$$

得所求的函数为 $y = \frac{1}{2}(x+1)e^x - \frac{1}{2}\cos x$.

11.10.18 已知 $f(0) = 1, f'(x) = 1 + \int_0^x [6\sin^2 t - f(t)]dt$,求函数 $f(x)$.

解 在给定方程中,令 $x = 0$,得 $f'(0) = 1$. 将给定方程的两边对 x 求导,得 $f(x)$ 满足的微分方程为

$$f''(x) = 6\sin^2 x - f(x), \text{即 } f''(x) + f(x) = 3 - 3\cos 2x,$$

初始条件为 $f(0) = 1, f'(0) = 1$.

解这个二阶常系数线性非齐次微分方程,得通解为

$$f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 3 + \cos 2x.$$

由 $f(0) = 1, f'(0) = 1$,确定 $C_1 = -4, C_2 = 1$. 故所求的函数为

$$f(x) = \sin x - 4\cos x + 3 + \cos 2x.$$

11.10.19 设有方程

$$(1+x)y = \int_0^x [2y + (1+x)^2 y'']dx - \ln(1+x),$$

其中 $x \geqslant 0, y'(0) = 0$,求此方程确定的函数 $y(x)$.

解 在给定方程中令 $x = 0$,得 $y(0) = 0$. 将给定方程的两边对 x 求导,得

$$(1+x)y' + y = 2y + (1+x^2)y'' - \frac{1}{1+x},$$

即 $$(1+x)^2 y'' - (1+x)y' + y = \frac{1}{1+x}. \tag{1}$$

且有 $y(0) = 0, y'(0) = 0$. 令 $1 + x = e^t$,(或 $t = \ln(1+x)$),将方程(1)化为

$$D(D-1)y - Dy + y = e^{-t}, \text{ 即 } D^2 y - 2Dy + y = e^{-t}. \tag{2}$$

解二阶常系数线性非齐次方程(2),得通解为

$$y=(C_1+C_2t)e^t+\frac{1}{4}e^{-t}.$$

用 $t=\ln(1+x)$ 或 $e^t=1+x$ 换回原变量,得方程(1)的通解为

$$y=[C_1+C_2\ln(1+x)](1+x)+\frac{1}{4(1+x)},$$

由初始条件 $y(0)=0,y'(0)=0$,确定 $C_1=-\frac{1}{4},C_2=\frac{1}{2}$. 故所求的函数为

$$y=[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(1+x)](1+x)+\frac{1}{4(1+x)}.$$

11.10.20 已知连续函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(0)=-2$,且使曲线积分 $\int_A^B[y\sin2x-y\varphi(x)\mathrm{tg}x]dx+\varphi(x)dy$ 与路径无关,求 $\varphi(x)$.

解 设 $P=y\sin2x-y\varphi(x)\mathrm{tg}x,Q=\varphi(x)$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\sin2x-\varphi(x)\mathrm{tg}x,\frac{\partial Q}{\partial x}=\varphi'(x).$$

由曲线积分与路径无关的充要条件 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,得

$$\varphi'(x)=\sin2x-\varphi(x)\mathrm{tg}x,\text{即 }\varphi'(x)+\mathrm{tg}x\varphi(x)=\sin2x,$$

初始条件为 $\varphi(0)=-2$.

解这个关于 $\varphi(x)$ 的一阶线性非齐次方程,得通解为

$$\varphi(x)=e^{-\int\mathrm{tg}xdx}\left(\int\sin2xe^{\int\mathrm{tg}xdx}dx+C\right)=C\cos x-2\cos^2x.$$

由 $\varphi(0)=-2$,确定 $C=0$. 故所求的函数为 $\varphi(x)=-2\cos^2x$.

11.10.21 设曲线积分 $\int_l 2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)+2x\cos y]dy$ 与路径无关,试确定函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$,设 $\varphi(0)=-1,\psi(0)=0$.

解 设 $P(x,y)=2[x\varphi(y)+\psi(y)]$,

$$Q(x,y)=x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)+2x\cos y,$$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=2x\varphi'+2\psi',\frac{\partial Q}{\partial x}=2x\psi+2y^2-2\varphi+2\cos y$,由曲线积分与路径无关的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,得

$$2\varphi'x+2\psi'=2\psi x+2y^2-2\varphi+2\cos y,$$

即 $\begin{cases}\varphi' = \psi, & (1)\\ \psi' = -\varphi + y^2 + \cos y, & (2)\end{cases}$

初始条件为 $\varphi(0) = -1$, $\psi(0) = 0$.

解这个常系数线性方程组. 将(1)式的两边对 x 求导,得

$$\varphi'' = \psi'. \tag{3}$$

由(2)、(3)两式,得

$$\varphi'' = -\varphi + y^2 + \cos y,\ 即\ \varphi'' + \varphi = y^2 + \cos y. \tag{4}$$

解二阶常系数线性非齐次方程(4),得通解

$$\varphi(y) = C_1\cos y + C_2\sin y + y^2 - 2 + \frac{1}{2}y\sin y.$$

因此,由(1)式得

$$\psi(y) = \varphi'(y) = -C_1\sin y + C_2\cos y + 2y + \frac{1}{2}\sin y + \frac{1}{2}y\cos y.$$

由初始条件 $\varphi(0) = -1$, $\psi(0) = 0$,确定 $C_1 = 1, C_2 = 0$.

故所求的函数为 $\varphi(y) = \cos y + y^2 - 2 + \frac{1}{2}y\sin y$,

$$\psi(y) = -\frac{1}{2}\sin y + 2y + \frac{1}{2}y\cos y.$$

11.10.22　设函数 $\varphi(x)$ 具有连续二阶导数,且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$,求 $\varphi(x)$ 的表达式,使方程 $\varphi(x)ydx + [\sin x - \varphi'(x)]dy = 0$ 为全微分方程.

解　给定方程为全微分方程的充要条件

$$\frac{\partial[\varphi(x)y]}{\partial y} = \frac{\partial[\sin x - \varphi'(x)]}{\partial x}$$

得, $\varphi''(x) + \varphi(x) = \cos x$.

解二阶常系数线性非齐次方程

$$\begin{cases}\varphi''(x) + \varphi(x) = \cos x,\\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0,\end{cases}$$

得所求的函数为 $\varphi(x) = \frac{1}{2}x\sin x$.

11.10.23　设 $\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x - u)\varphi(u)du$,其中 $\varphi(x)$ 为连续函数,求 $\varphi(x)$.

解　将关系式 $\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x - u)\varphi(u)du$　(1)

变形为　　$$\varphi(x) = e^x - x\int_0^x \varphi(u)du + \int_0^x u\varphi(u)du. \tag{2}$$

将(2)式对 x 求导，得　$$\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(u)du. \tag{3}$$

再求导，得 $\varphi''(x) = e^x - \varphi(x)$，即 $\varphi''(x) + \varphi(x) = e^x$.

在(1)、(3)两式中令 $x = 0$，得 $\varphi(0) = 1$，$\varphi'(0) = 1$.

解二阶常系数线性非齐次方程

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi(x) = e^x, \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 1, \end{cases}$$

得所求的函数为 $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$.

11.10.24　已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$，(1) 证明级数满足微分方程 $y^{(4)} = y$；(2) 求此级数的和函数.

解　(1) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的收敛半径为 1，在 $(-1,1)$ 内可以逐项微分，设 $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$，则

$$y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$$

即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足微分方程 $y^{(4)} = y$.

(2) 由(1)知，$y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足微分方程 $y^{(4)} = y$，又 $y(0) = 1$，$y'(0) = 0$，$y''(0) = 0$，$y'''(0) = 0$，…. 这就是说，该级数的和函数是 $y^{(4)} = y$ 的满足 $y(0) = 1$，$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ 的特解.

求出 $y^{(4)} = y$ 的通解为

$$y = c_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

由 $y(0) = 1$，$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$，确定 $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{4}$，$C_3 = \dfrac{1}{2}$，$C_4 = 0$. 故级数的和函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}\cos x.$$

11.10.25　求级数 $x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$ 的和函数.

解　设 $F(x)=x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$，则 $F(0)=0$. 又

$$F'(x)=1+x^2+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots=1+xF(x),$$

即 $F'(x)-xF(x)=1$.

解一阶线性方程 $\begin{cases}F'(x)-xF(x)=1,\\F(0)=0,\end{cases}$ 得

$$F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{x^2}{2})^n dx$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}.$$

故所求的函数为 $F(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}$.

2. 应用微分方程求曲线方程

11.10.26　试求曲线 $y=f(x)$，使其在任意点 (x,y) 处切线的倾角 α 满足关系式 $\cos 2\alpha=x$.

解　因为 $\operatorname{tg}\alpha=y'$，所以

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-y'^2}{1+y'^2}.$$

于是得 $y=f(x)$ 满足的微分方程为 $\frac{1-y'^2}{1+y'^2}=x$，即 $y'=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

直接积分，得

$$y=\pm\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\pm\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\pm\left[\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right]+C.$$

故所求的曲线方程为 $y=\pm(\arcsin x+\sqrt{1+x^2})+C$.

11.10.27　求一条通过原点，且在任意点处切线的斜率为 $2x+y$

的曲线方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$，由题意得 $y=y(x)$ 满足的微分方程为 $y'=2x+y$，即 $y'-y=2x$. 初始条件为 $y|_{x=0}=0$.

解这个一阶常系数线性非齐次方程，得通解为 $y=Ce^x-2x-2$. 由 $y|_{x=0}=0$，确定 $C=2$，故所求的曲线方程为 $y=2e^x-2x-2$.

11.10.28　试求 $y''=x$ 的通过点 $M(0,1)$，且在该点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解　设所求曲线的方程为 $y=f(x)$，因为曲线通过点 $M(0,1)$，所以有 $y|_{x=0}=1$. 又因为曲线在点 M 与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切，所以 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$. 故 $y=f(x)$ 满足

$$\begin{cases} y''=x, \\ y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

积分得 $y'=\frac{x^2}{2}+C_1$，由 $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$，得 $C_1=\frac{1}{2}$，于是有

$$y'=\frac{1}{2}(x^2+1).$$

再积分，得 $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+C_2$. 由 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$. 故所求的曲线方程为

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1.$$

11.10.29　已知 $y=f(x)$ 所确定的曲线与 x 轴相切于原点，且满足方程 $y''+y=2+\sin x$，试求 $f(x)$.

解　由题意，所求函数 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y''+y=2+\sin x$，初始条件为 $y(0)=0$，$y'(0)=0$.

解这个二阶常系数线性非齐次方程，得通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+2-\frac{x}{2}\cos x.$$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 确定 $C_1=-2$，$C_2=\frac{1}{2}$. 故所求的函数为

$$f(x)=-2\cos x+\frac{1}{2}\sin x+2-\frac{x}{2}\cos x.$$

11.10.30　问满足方程 $y''' - y'' - 2y' = 0$ 的哪条积分曲线通过点 $(0, -3)$，且在该点处切线的倾角为 arctg6，曲率为零.

解　设所求的曲线方程为 $y = f(x)$，由题意 $y = f(x)$ 是微分方程 $y''' - y'' - 2y' = 0$ 满足初始条件

$$y(0) = -3,\ y'(0) = 6,\ y''(0) = 0$$

的特解.

解这个三阶常系数齐次线性微分方程，得所求的曲线方程为

$$y = e^{2x} - 4e^{-x}.$$

11.10.31　一曲线过点 $(2,0)$，且在切点和纵坐标轴之间的切线段有定长 2，求这条曲线.

解　设曲线的方程为 $y = f(x)$，则曲线在点 (x,y) 处的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x).$$

求出切线与纵坐标轴的交点为 $(0, y - xy')$，因此切点和纵坐标轴之间的切线段长为

$$\sqrt{(x-0)^2 + [y - (y - xy')]^2} = \sqrt{x^2(1 + y'^2)}.$$

由题意得 $y = f(x)$ 满足的微分方程为

$$\sqrt{x^2(1 + y'^2)} = 2,\ 即\ y' = \pm \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}.$$

初始条件为 $y|_{x=2} = 0$. 直接积分，得

$$y = \pm \int_2^x \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = \pm \left(\sqrt{4 - x^2} + 2\ln\left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right| \right).$$

故所求的曲线方程为

$$y = \pm \left(\sqrt{4 - x^2} + 2\ln\left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right| \right).$$

11.10.32　求一曲线，使它通过点 $(2,3)$，并且使它在两坐标轴之间的任意切线段被切点平分.

解　设所求的曲线方程为 $y = f(x)$，则曲线上任意一点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x).$$

求出切线与 x 轴的交点为 $M(x - \frac{y}{y'}, 0)$，与 y 轴的交点为 $N(0, y - xy')$，

由题意，$|PM| = |PN|$，所以函数 $f(x)$ 满足的微分方程为

$\sqrt{[x-(x-\frac{y}{y'})]^2+y^2} = \sqrt{x^2+[y-(y-xy')]^2}$，即 $y' = \pm\frac{y}{x}$.

初始条件为 $y|_{x=2} = 3$.

(1) 由 $\begin{cases} y' = \frac{y}{x}, \\ y|_{x=2} = 3 \end{cases}$ 解得 $y = \frac{3}{2}x$. 这是过原点的一条直线，不合题意，舍去.

(2) 由 $\begin{cases} y' = -\frac{y}{x}, \\ y|_{x=2} = 3 \end{cases}$ 解得 $y = \frac{x}{6}$，这即为所求的曲线.

11.10.33　求一曲线族，使曲线上任意一点到过该点的法线与 x 轴的交点之间的距离为常数 a.

解　设曲线族为 $y = f(x,C)$，则曲线上任意一点 (x,y) 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

所以法线与 x 轴的交点为 $(x+yy',0)$，由题意，$y = f(x,C)$ 满足的微分方程为 $\sqrt{[x-(x+yy')]^2+y^2} = a$，即 $y' = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$.

用分离变量法解上述微分方程，得通解为

$$C \pm x = -\sqrt{a^2+y^2}，或\ (x+C)^2+y^2 = a^2.$$

这就是所求曲线簇的方程，它是圆心在 x 轴上的圆族.

11.10.34　设曲线上的点 (x,y) 在 x 轴的垂足为 $M(x,0)$，曲线上点 (x,y) 处的切线为 T，已知 M 到 T 的垂线之长等于 1，试求此曲线族的方程. 进而确定常数，在该曲线族中，求与 y 轴正交的曲线.

解　曲线 $y = f(x)$ 在点 (x,y) 处切线 T 的方程为

$$Y - y = y'(X - x)，即\ y'X - Y + y - y'x = 0.$$

点 (x,y) 在 x 轴上的垂足 $M(x,0)$ 到切线 T 的距离为 $\frac{|y|}{\sqrt{1+y'^2}}$，由题意，得

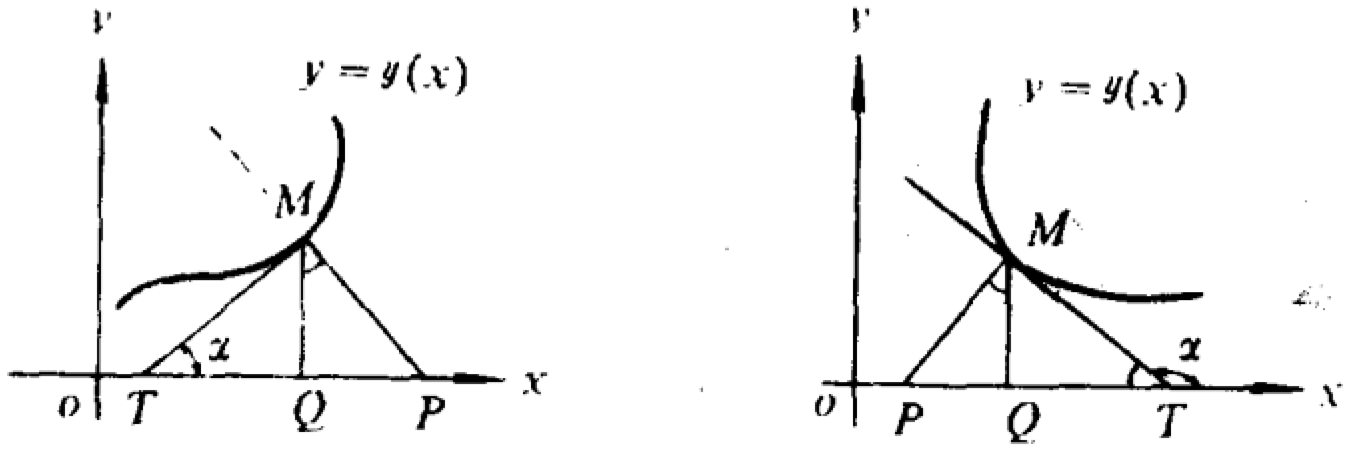
$$\frac{|y|}{\sqrt{1+y'^2}} = 1，即\ y' = \pm\sqrt{y^2-1},$$

用分离变量法解此方程，得 $y = \text{ch}(x + C)$. 这就是所求曲线族的方程.

若曲线与 y 轴正交，则 $y'(0) = 0$，从而确定 $C = 0$，故所求的曲线为 $y = \text{ch}x$.

11.10.35　若曲线的次法线的长与横坐标的平方成正比，求曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y = y(x)$（如图），过曲线上任意一点 $M(x,y)$，作曲线的切线 MT，法线 MP 及 x 轴的垂线 MQ.



(1)　　　　(2)

11.10.35 题图

(1) 当 $y' > 0$ 时（图(1)），设 $\angle MTP = \alpha$，则 $\text{tg}\alpha = y'$. 因为 $\angle PMQ = \angle MTP = \alpha$，所以次法线 QP 的长为

$$|QP| = |QM\text{tg}\alpha| = |yy'|. \tag{1}$$

(2) 当 $y' < 0$ 时（图(2)），设 $\angle MTx = \alpha$，则 $\text{tg}\alpha = y'$. 因为 $\angle PMQ = \angle MTQ = \pi - \alpha$，所以次法线 QP 的长为

$$|QP| = |QM\text{tg}(\pi - \alpha)| = |yy'|. \tag{2}$$

综上所述，得次法线 QP 的长为 $|QP| = |yy'|$. 由题意，得 $y = y(x)$ 所满足的微分方程为

$$|yy'| = kx^2, \text{即 } yy' = \pm kx^2, \tag{3}$$

其中 k 为比例系数，$k > 0$.

用分离变量法解方程(3)，得通解为

$$\frac{1}{2}y^2 = \pm \frac{k}{3}x^2 + C_1, \text{或 } 3y^2 = \pm 2kx^3 + C \ (C = 2C_1),$$

这就是所求的曲线方程.

11.10.36　求一曲线族，使其在任意点 P 处的切线在 y 轴上的截距等于原点到点 P 的距离 $|OP|$.

解　设所求的曲线族为 $y=f(x,C)$，则曲线上任意点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，或 $Y-y'X=-y'x+y$. 所以切线在 y 轴上的截距为 $-y'x+y$. 又 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$. 由题意，得 $y=f(x,C)$ 满足的微分方程为

$$-y'x+y=\sqrt{x^2+y^2},\text{或 } y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \tag{1}$$

(1) 当 $x>0$ 时，方程(1) 为

$$y'=\frac{y}{x}-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}, \tag{2}$$

令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，则方程(2) 化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\sqrt{1+u^2},\text{即 } x\frac{du}{dx}=-\sqrt{1+u^2}, \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3)，得通解为

$$\frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}=C_1x\quad(C_1>0).$$

令 $u=\frac{y}{x}$，得方程(2) 的通解为 $\dfrac{1}{\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}=C_1x$，或

$$x^2+2C_2y-C_2^2=0\ (C_2=\frac{1}{C_1})$$

(2) 当 $x<0$ 时，方程(1) 为

$$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}. \tag{4}$$

令 $\frac{y}{x}=u$，即 $y=xu$，则方程(4) 化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2},\text{ 即 } x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}. \tag{5}$$

用分离变量法解方程(5)，得通解为 $u+\sqrt{1+u^2}=C_3x\ (C_3<0)$.

令 $u=\frac{y}{x}$，得方程(4) 的通解为

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}=C_3x\text{，或 } x^2+2C_4y-C_4^2=0\ (C_4=\frac{1}{C_3}).$$

综上所述，所求曲线族为 $x^2+2Cy-C^2=0$.

11.10.37 求一曲线，使曲线上任意一点的切线与该点的矢径及 y 轴构成一个等腰三角形.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，则曲线上任意一点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

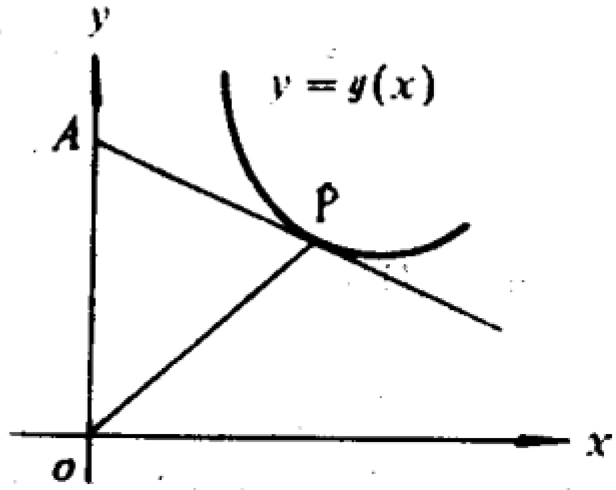
求出切线与 y 轴的交点为 $A(0,y-xy')$.

如图所示，使三角形 OAP 为等腰三角形有下列三种情形：

(1) $|OP|=|AP|$. 这时 $y=f(x)$ 满足的微分方程为

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+[y-(y-xy')]^2},$$

即
$$y'=\pm\frac{y}{x}. \qquad (1)$$



11.10.37 题图

用分离变量法解微分方程(1)，得所求曲线方程为 $xy=C$（$y'=\frac{y}{x}$ 的解不合题意，舍去）.

(2) $|OA|=|OP|$. 这时，$y=f(x)$ 满足的微分方程为

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(y-xy')^2}\text{，即 }\frac{dy}{dx}=\frac{y\pm\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \qquad (2)$$

解齐次方程(2)，得所求曲线方程为 $x^2+2Cy-C^2=0$.

(3) $|OA|=|AP|$. 这时，$y=f(x)$ 满足的微分方程为

$$\sqrt{(y-xy')^2}=\sqrt{x^2+[y-(y-xy')]^2}\text{，即 }y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}. \qquad (3)$$

解齐次方程(3)，得所求的曲线方程为 $x^2+y^2=Cx$.

11.10.38 在第一象限的曲线过点(4,1)，从曲线上任意一点 $P(x,y)$ 向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为 Q 和 R，又在 P 点处，曲线的切线交 x 轴于 T 点，若使长方形 $OQPR$（O 为坐标原点）和三角形 PQT 有相同的面积，求曲线方程.

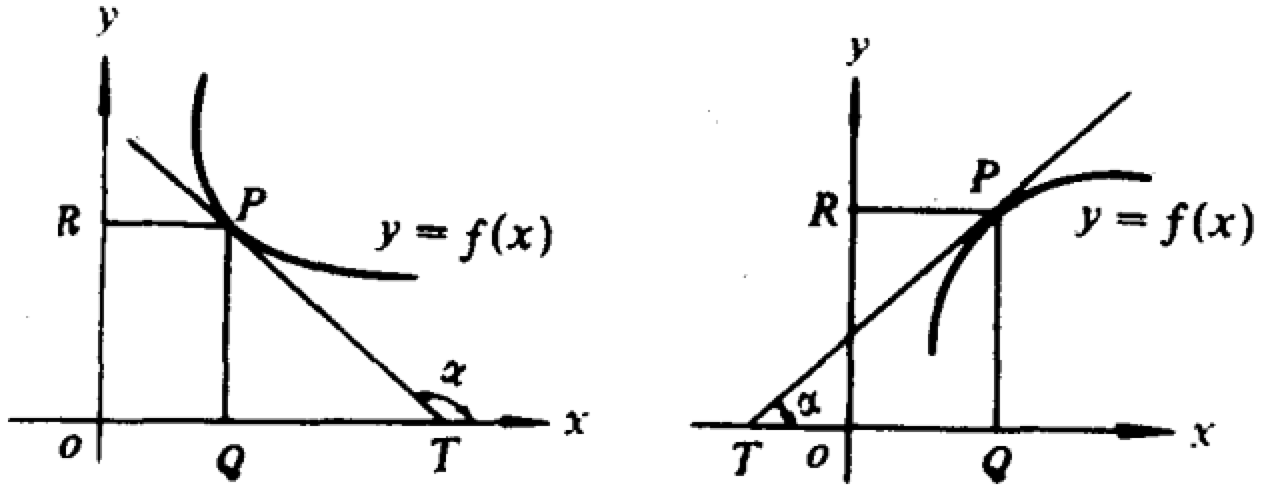
解 设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，由题意知，

$$QP = y,\ OQ = x\ (x > 0,\ y > 0).$$

当 $y' < 0$,即 $\alpha > \frac{\pi}{2}$ 时(图(1))有$QT = \frac{QP}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = \frac{y}{-y'}$,

当 $y' > 0$,即 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时(图(2))有$QT = \frac{QP}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y}{y'}$. 于是有

$$QT = \frac{y}{|y'|}.$$



(a)　　11.10.38 题图　　(b)

长方形 $OQPR$ 的面积为 xy,三角形 PQT 的面积为$\frac{1}{2}|QP| \cdot |QT| = \frac{y^2}{2|y'|}$,由题意,得 $y = f(x)$ 满足的微分方程为

$$xy = \frac{y^2}{2|y'|},\ 即\ |y'| = \frac{y}{2x}.$$

初始条件为 $y|_{x=4} = 1$.

用分离变量法解上述微分方程得

当 $y' > 0$ 时,$y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$;当 $y' < 0$ 时,$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$. 故所求的曲线为 $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$,或 $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

11.10.39　设曲线 $y = f(x)$ 过原点,且 $f(x) \geqslant 0$, $f(1) = 1$,它与 x 轴及任意垂直于 x 轴的直线所围成的以$[0,x]$为底的曲边梯形的面积与 $f(x)$ 的 $n+1$ 次幂成正比,求曲线的方程.

解　由题意得

$$\int_0^x y\,dx = ky^{n+1},\ (k\ 为比例系数) \tag{1}$$

对方程(1)的两边求微分,得 $y = f(x)$ 满足的微分方程为

$$ydx = k(n+1)y^n dy, \text{即 } dx = k(n+1)y^{n-1}dy, \tag{2}$$

初始条件为 $y(0)=0$ 或 $y(1)=1$.

将方程(2)积分,得

$$\int_0^x dx = \int_0^y k(n+1)y^{n-1}dy, \text{即 } x = \frac{k(n+1)}{n}y^n.$$

由 $y(1)=1$,确定 $k=\frac{n}{n+1}$. 故所求的曲线方程为 $x=y^n$.

11.10.40 求一曲线族,使其在 $x=a$ 与 $x=x$ 之间的一段弧长的值 k 倍于弧与 $x=a,x=x$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积的值.

解 设所求曲线族为 $y=f(x,C)$,则曲线弧在 $x=a$,与 $x=x$ 之间的一段弧长为 $\int_a^x \sqrt{1+y'^2}dx$;曲线弧与 $x=a,x=x,x$ 轴所围的面积为 $\int_a^x |y|dx$. 由题意得

$$\int_a^x \sqrt{1+y'^2}dx = k\int_a^x |y|dx, \tag{1}$$

将方程(1)的两边对 x 求导,得 $y=f(x)$ 满足的微分方程为

$$\sqrt{1+y'^2} = k|y|, \text{即 } y' = \pm\sqrt{k^2y^2-1}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得通解为

$$x + C = \pm\frac{1}{k}\ln(ky - \sqrt{k^2y^2-1}) = \pm\frac{1}{k}\text{Arch}(ky),$$

或 $ky=\text{ch}(\pm kx \pm kC)$. 于是,$y=\frac{1}{2k}(C_1e^{\pm kx}+\frac{1}{C_1}e^{\mp kx})$,$(C_1=e^{\pm kC})$,这就是所求的曲线族方程.

11.10.41 在第一象限中求曲线方程 $y=f(x)$,使从这条曲线上的任意一点 C 所作纵轴的垂线(垂足为 B)与纵轴和曲线本身三者所包围的的面积 S_{ABC} 等于矩形 $OBCD$ 面积的 $\frac{1}{3}$,其中 O 为坐标原点,A 为曲线与纵轴的交点,D 为 C 点在横轴上的垂足.

解 设 $A(0,y_1)$,$B(0,y_2)$,$C(x,y)$,其中 x、y、y_1、y_2 均为非负数,有下列两种情形:

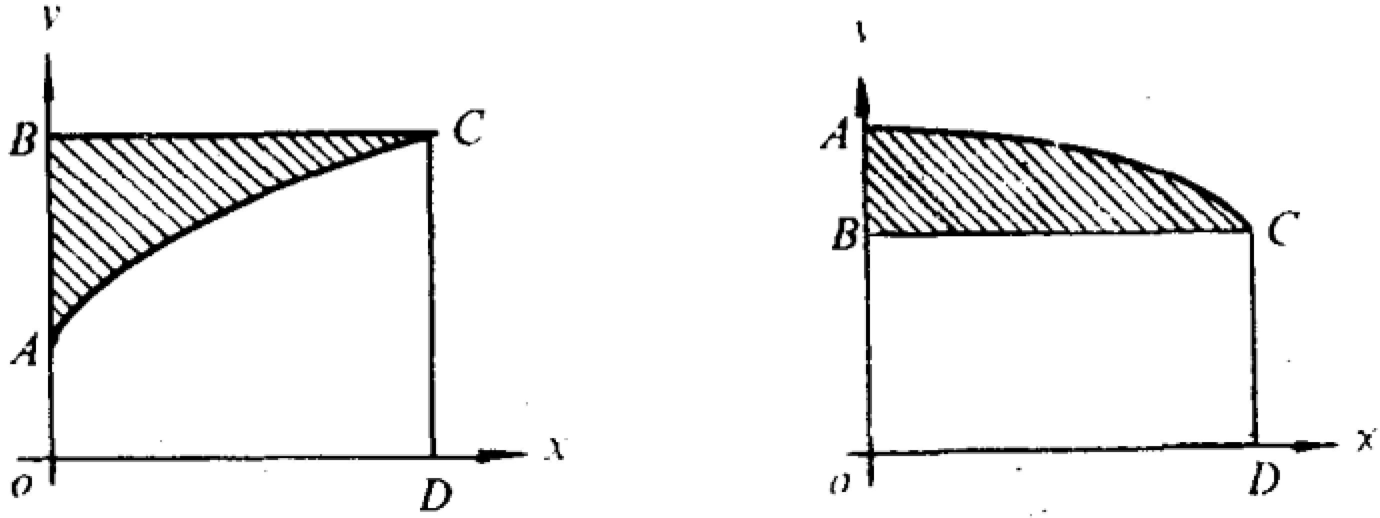
(1) 当 $y_2>y_1$ 时(图(a)),由题意知,$S_{ABC}=\frac{1}{3}S_{OBCD}$,所以

$$S_{OACD} = \frac{2}{3}S_{OBCD}, \text{即 } \int_0^x f(t)dt = \frac{2}{3}xf(x). \tag{1}$$

将方程(1)的两边对 x 求导,得 $f(x)$ 满足的微分方程为

$$f(x) = \frac{2}{3}[f(x) + xf'(x)],\ 即\ y' = \frac{y}{2x}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2)，得通解为 $y = C\sqrt{x}$. 因为 x,y 均为非负数，所以常数 $C > 0$.



(a)　　　11.10.41 题图　　　(b)

(2) 当 $y_2 > y_1$ 时(图(b))，有

$$S_{OACD} = \frac{4}{3}S_{OBCD},\ 即\ \int_0^x f(t)dt = \frac{4}{3}xf(x), \tag{3}$$

将方程(3)的两边对 x 求导，得 $f(x)$ 满足的微分方程为

$$f(x) = \frac{4}{3}[f(x) + xf'(x)],\ 即\ y' = -\frac{y}{4x}. \tag{4}$$

用分离变量法解方程(4)，得通解为 $y = \frac{C}{\sqrt[4]{x}}$. 因为当 $x \to 0$ 时，

$y = \frac{C}{\sqrt[4]{x}} \to \infty$ 不合题意，所以这个解舍去.

综上所述，所求的曲线方程为 $y = C\sqrt{x}$. (C 为常数，$C > 0$).

11.10.42　有连接两点 $A(0,1)$、$B(1,0)$ 的一条曲线，它位于弦 AB 的上方，$P(x,y)$ 为曲线上任意一点，已知曲线与弦 AP 之间的面积为 x^3，求曲线的方程.

解　设所求曲线 AB 的方程为 $y = y(x)$，过曲线上任意一点 $P(x,y)$ 作 x 轴的垂线，垂足为 Q. 则梯形 $OAPQ$ 的面积为 $\frac{x(y+1)}{2}$. 又曲边梯形 $OAPQ$ 的面积为 $\int_0^x y(t)dt$. 由题意得

$$\int_0^x y(t)dt - \frac{x(y+1)}{2} = x^3 \tag{1}$$

将方程(1) 的两边对 x 求导,得 $y = y(x)$ 满足的微分方程为

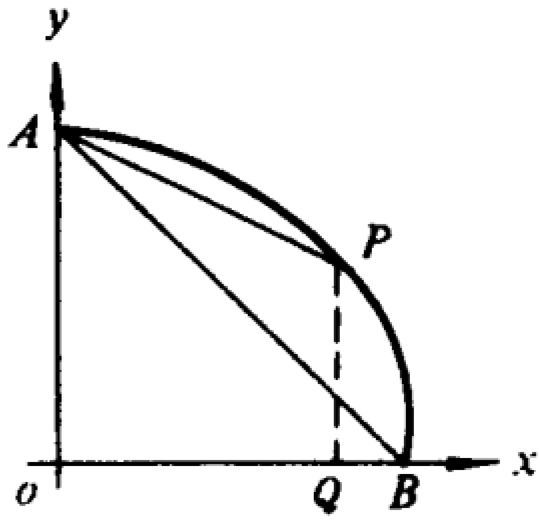
$$y - \frac{y+1}{2} - \frac{x}{2}y' = 3x^2, \text{即 } y' - \frac{1}{x}y = -\frac{6x^2+1}{x}. \tag{2}$$

初始条件为 $y(1) = 0$.

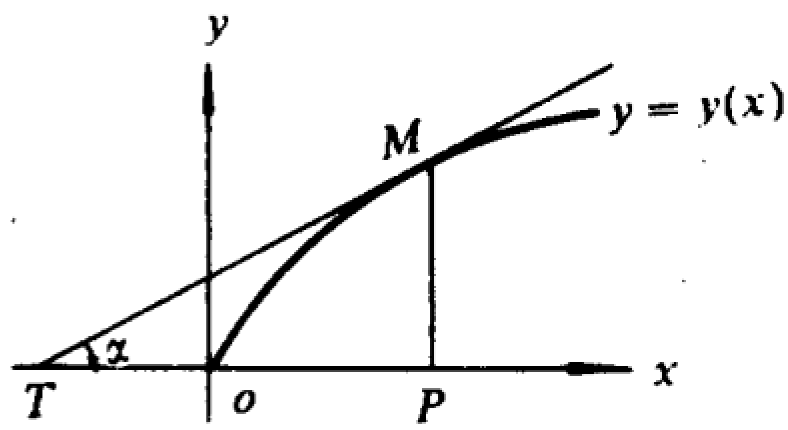
解一阶线性非齐次方程(2),得通解为

$$y = e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}\left[\int(-\frac{6x^2+1}{x})e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx + C\right] = Cx + 1 - 6x^2.$$

由 $y(1) = 0$,确定 $C = 5$. 故所求的曲线方程为 $y = -6x^2 + 5x + 1$.



11.10.42 题图



11.10.43 题图

11.10.43 设曲线在第一象限内且过坐标原点,曲线上任意一点 M 处的切线 MT、点 M 的纵坐标 MP 及 x 轴所围成的三角形 MPT 的面积与曲边三角形 OMP 的面积之比恒为常数 $k(k > \frac{1}{2})$,又曲线是沿 x 轴正向上升的,求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y = y(x)(x > 0, y > 0, y' > 0)$,如图所示,在曲线上任取一点 $M(x,y)$,则 $PM = y(x)$, $\frac{PM}{TP} = \text{tg}\alpha = y'(x)$,所以 $TP = \frac{PM}{\text{tg}\alpha} = \frac{y(x)}{y'(x)}$. 于是 ΔMPT 的面积为 $\frac{1}{2}MP \cdot TP = \frac{y^2(x)}{2y'(x)}$,曲边三角形 OMP 的面积为 $\int_0^x y(x)dx$. 由题意,得

$$\frac{\frac{y^2(x)}{2y'(x)}}{\int_0^x y(x)dx} = k, \text{即 } \frac{y^2}{y'} = 2k\int_0^x y(x)dx. \tag{1}$$

将方程(1) 的两边对 x 求导,得 $y = y(x)$ 满足的微分方程为

$$\frac{y' \cdot 2yy' - y^2y''}{y'^2} = 2ky, \text{即 } yy'' + 2(k-1)y'^2 = 0, \qquad (2)$$

初始条件为 $y(0) = 0$.

令 $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$,则方程(2)化为

$$yp\frac{dp}{dy} = 2(1-k)p^2, \text{即 } y\frac{dp}{dy} = 2(1-k)p. \qquad (3)$$

用分离变量法解方程(3),得通解为

$$p = C_1y^{2(1-k)}, \text{即 } y' = C_1y^{2(1-k)}. \qquad (4)$$

再用分离变量法解方程(4),得方程(2)的通解为

$$\frac{1}{2k-1}y^{2k-1} = C_1x + C_2,$$

由 $y(0) = 0$,确定 $C_2 = 0$,故所求的曲线方程为

$$y = Cx^{\frac{1}{2k-1}}.$$

11.10.44 设 $f(x)$ 连续,且当 $x \geqslant 1$ 时,$f(x) > 0$,又曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1, x = a(a > 1)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为 $V(a) = \frac{\pi}{3}[a^2f(a) - f(1)]$, $f(2) = \frac{2}{9}$,求曲线 $y = f(x)$.

解 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$、$x = a$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为

$$V(a) = \pi\int_0^a f^2(x)dx,$$

又由已知,$V(a) = \frac{\pi}{3}[a^2f(a) - f(1)]$,所以有

$$3\int_0^a f^2(x)dx = a^2f(a) - f(1). \qquad (1)$$

将(1)式对 a 求导,得 $\quad 3f^2(a) = 2af(a) + a^2f'(a). \qquad (2)$

因为 a 是大于 1 的任意实数,所以在(2)式中用 x 代替 a,得 $y = f(x)$ 所满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}, \ (x > 1). \qquad (3)$$

由已知,初始条件为 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$. 解齐次方程(3),令 $\frac{y}{x} = u$,或 $y = xu$,将方程(3)化为

$$u + x\frac{du}{dx} = = 3u^2 - 2u, \text{即 } x\frac{du}{dx} = 3u^2 - 3u\ , \tag{4}$$

初始条件为 $u\Big|_{\substack{x=2\\y=\frac{2}{9}}} = \frac{y}{x}\Big|_{\substack{x=2\\y=\frac{2}{9}}} = \frac{1}{9}$. 用分离变量法解方程(4)，得 $\frac{u-1}{u} = -x^3$. 用 $u = \frac{y}{x}$ 换回原变量，得所求的曲线方程为 $y = \frac{x}{1+x^3}$.

11. 10. 45　求与 $y = kx$ 相交成 $45°$ 角(指由直线 $y = kx$ 以逆时针旋转)的曲线族方程.

解　由 $y = kx$ 知其满足微分方程

$$y' = k,\ \text{即 } y' = \frac{y}{x}. \tag{1}$$

设所求曲线族的方程为 $Y = Y(X, C)$. 则曲线族上各点处切线的斜率为 Y'. 由题意知，在曲线族和直线的交点 (X,Y) 处有

$$\frac{Y' - y'}{1 + Y'y'} = \text{tg}45°,\ \text{即 } y' = \frac{Y' - 1}{Y' + 1}. \tag{2}$$

又由(1)式，有 $y' = \frac{Y}{X}$. 因此

$$\frac{Y' - 1}{Y' + 1} = \frac{Y}{X},\text{即 } Y' = \frac{X+Y}{X-Y}. \tag{3}$$

解齐次方程(3)，得 $\sqrt{X^2 + Y^2} = Ce^{\text{arctg}\frac{Y}{X}}$. 这就是所求的曲线族方程.

11. 10. 46　已知曲线的切线和切点的矢径之间的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，且曲线过点 $(1,0)$，求该曲线的方程.

解　设所求曲线的方程为 $y = y(x)$，在曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处，切线的倾角为 α，矢径的倾角为 θ. 由图可知，$\alpha - \theta = \frac{\pi}{4}$，所以

$$\text{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\theta}{1 + \text{tg}\alpha\text{tg}\theta} = 1.$$

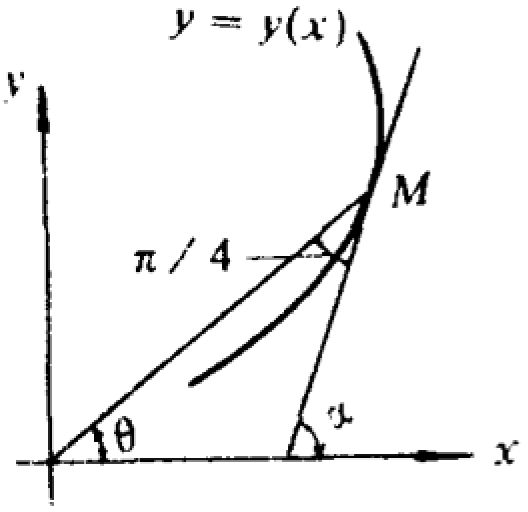
而 $\text{tg}\alpha = y'$，$\text{tg}\theta = \frac{y}{x}$. 于是得 $y = y(x)$ 满足的微分方程为

$$\frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y'\frac{y}{x}},\ \text{即 } y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

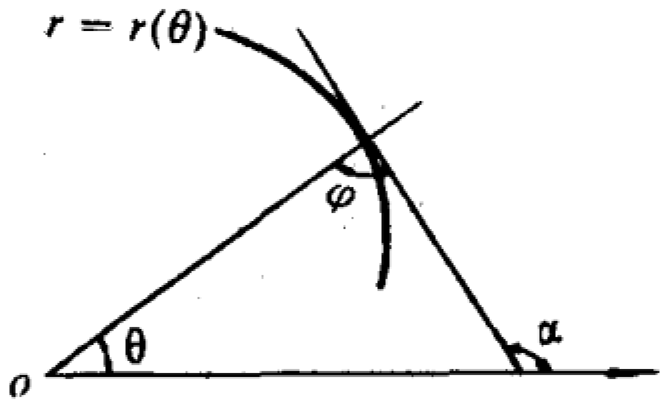
初始条件为 $y(1) = 0$.

解这个齐次方程，得通解为 $\ln x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$.
由 $y(1)=0$，确定 $C=0$. 故所求的曲线方程为

$$\ln x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\text{，即 } x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$



11. 10. 46 题图



11. 10. 47 题图

11. 10. 47　求一曲线族，它在任意点的矢径与在该点的切线之间的夹角 φ 为矢径与极轴间夹角 θ 的 n 倍(n 为正整数).

解　设曲线族的极坐标方程为 $r=r(\theta,C)$，则曲线族的参数方程为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 求出 $dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta, dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$. 所以曲线上任意一点$(x,y)$ 处的切线斜率为

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta}{\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta\frac{dr}{d\theta}+r}{\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{tg}\theta}.$$

又矢径的斜率为 $\operatorname{tg}\theta$，由图可知 $\varphi=\alpha-\theta$. 所以

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta\frac{dr}{d\theta}+r-\operatorname{tg}\theta(\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{tg}\theta)}{\frac{dr}{d\theta}-r\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\theta(\operatorname{tg}\theta\frac{dr}{d\theta}+r)}$$

$$=\frac{r+r\operatorname{tg}^2\theta}{\frac{dr}{d\theta}+\operatorname{tg}^2\theta\frac{dr}{d\theta}}=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}.$$

由题意，知 $\varphi=n\theta$. 所以 $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(n\theta)$. 故得 $r=r(\theta,C)$ 满足的微分方程为

$$\frac{1}{\frac{dr}{d\theta}} = \operatorname{tg}(n\theta), 即 \frac{dr}{d\theta} = r\operatorname{ctg}(n\theta).$$

用分离变量法解这个微分方程，得通解为

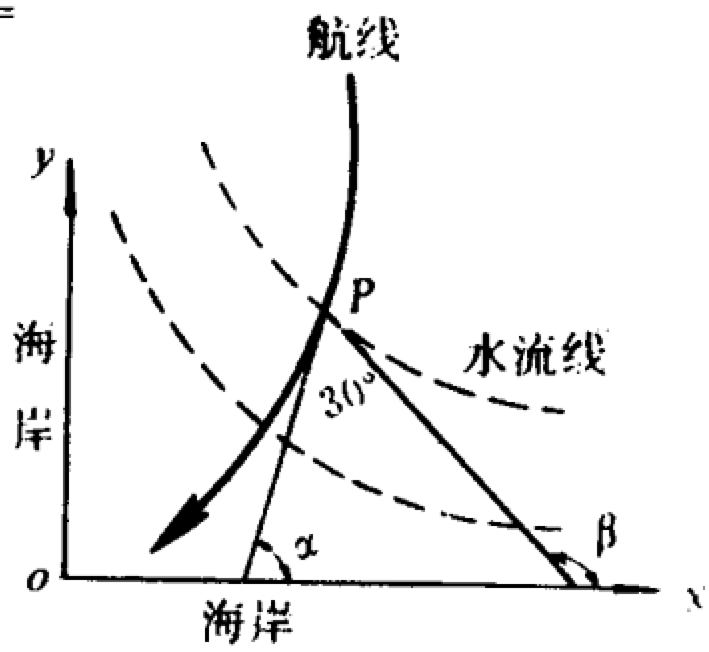
$$\ln r + \ln C_1 = \frac{1}{n}\ln\sin(n\theta), 或\ r^n = C\sin(n\theta),\quad (C = C_1^n).$$

这就是所求曲线的方程.

11.10.48　设某一海湾的海岸线呈直角形，海水的流线为双曲线族 $xy = C$，(C 为常数)，有一条船在海湾内行驶，船身保持和水流方向成 30° 角并指向海岸，问此船行驶的路线如何？

解　设船的航线方程为 $y = y(x)$，航线上任意一点 $P(x,y)$ 处切线的倾角为 α，则 $\operatorname{tg}\alpha = y'$. 设水流线在点 P 处切线的倾角为 β，则 $\operatorname{tg}\beta = -\frac{y}{x}$. 由图可知，$\beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$，所以

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}.$$



11.10.48 题图

因此，得航线所满足的微分方程为

$$y' = \frac{-\frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(-\frac{y}{x}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

解这个齐次方程，得

$$y^2 - 2\sqrt{3}xy - x^2 = k\ (k 为任意常数)$$

即为所求航线的方程. 为了确定常数 k，还需要知道船在途中一点的位置.

11.10.49　证明曲率半径为常数的曲线是圆.

证　设曲线 $y = f(x)$ 在任意点 (x,y) 处的曲率半径为 R，则

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = R\ 或\ y'' = \pm\frac{1}{R}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{1}$$

(当 $y'' > 0$ 时，取正号；当 $y'' < 0$ 时，取负号).

令 $y' = p$，$y'' = p'$，则方程(1) 化为

$$p' = \pm \frac{1}{R}(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{2}$$

用分离变量法解方程(2),得通解为

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \pm \frac{1}{R}(x - C_1)^2. \tag{3}$$

由(3)式,解得 $y' = p = \pm \dfrac{x - C_1}{\sqrt{R^2 - (x - C_1)^2}}$, (4)

将方程(4)直接积分,得方程(1)的通解为

$y = \mp \sqrt{R^2 - (x - C_1)^2} + C_2$,或$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2$.

这是半径为 R 的圆．故曲率半径为常数的曲线是圆.

11.10.50　设曲线在 x 轴的上方,在它的每一点处的曲率半径等于该点处的法线在曲线与 x 轴之间的长度．证明:如果曲线向上凹,那末它是悬链线;如果曲线向下凹,那末它是上半圆周.

证　设所求曲线的方程为 $y = y(x)$, $(y > 0)$. 在曲线上任意一点 (x,y) 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

法线与 x 轴的交点为$(x + y'y,\ 0)$,法线在曲线与 x 轴之间的长度,即 (x,y) 与$(x + y'y, 0)$ 两点之间的距离为

$$\sqrt{[x - (x + y'y)]^2 + y^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

曲线 $y = f(x)$ 在点(x,y) 处的曲率半径为$\dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$,故由题意,得 $y = f(x)$ 满足的微分方程为

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{(1 + y'^2)^{\prime 2}}{|y''|},\text{即 } y|y''| = 1 + y'^2. \tag{1}$$

(1) 当曲线向上凹时,$y'' \geqslant 0$,方程(1)为

$$yy'' = 1 + y'^2. \tag{2}$$

令 $y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$,则方程(2)化为

$$yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2. \tag{3}$$

用分离变量法解方程(3),得通解为

$$Cy = \sqrt{1 + p^2}. \tag{4}$$

由(4)式,解得

$$p=\pm\sqrt{(C_1y)^2-1},\text{即 } y'=\pm\sqrt{(C_1y)^2-1}. \tag{5}$$

再用分离变量法解方程(5),得方程(2)的通解为

$$\operatorname{Arch}(C_1y)=\pm C_1x+C_2,\text{或 } y=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_2\pm C_1x).$$

这就是所求的曲线方程,它是悬链线.

(2) 当曲线向下凹时,$y''<0$,方程(1)为

$$-yy''=y'^2+1. \tag{6}$$

与(1)类似,用降阶法解方程(6),得通解为

$$(x+C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

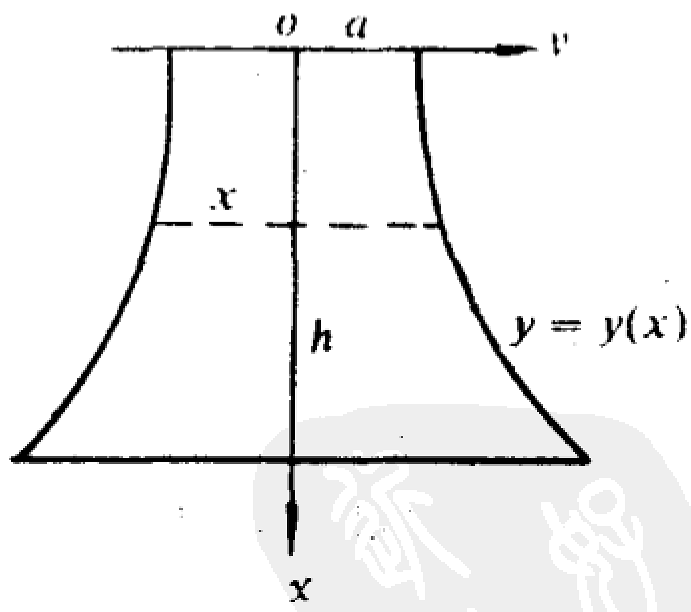
这就是所求曲线的方程,它是一圆周,又因为 $y>0$,所以是上半圆周.

3. 微分方程在物理学中的应用

(1) 静力学问题

11.10.51　用均匀材料建筑一个高为 h,顶面直径为 $2a$ 的旋转体形状的支柱.如果支柱顶部所受的压力为定值 p,并要求支柱每一个水平截面上的压强都相等,问这个支柱的侧面是由怎样的曲线旋转而成的?

解　如图选取坐标系,设旋转体是由曲线 $y=y(x)$ 绕 x 轴旋转而成的.支柱顶部的压强为$\frac{p}{\pi a^2}$.在任意点 x 处作支柱的水平截面,截面的面积为 πy^2,截面上的压力为 $\frac{p}{\pi a^2}\cdot\pi y^2=\frac{p}{a^2}y^2$.压力的来源是:(1) 支柱顶部所受的压力 p;(2) 该截面以上部分柱体本身的重量 $\gamma\int_0^x\pi y^2dx$,其中 γ 为材料的比重,于是有



11.10.51 题图

$$\frac{p}{a^2}y^2=p+\gamma\int_0^x\pi y^2dx.$$

将上式的两边对 x 求导,得所求函数满足的微分方程为

$$\frac{p}{a^2}\cdot 2yy' = \gamma\pi y^2, \text{即 } y' = \frac{\gamma\pi a^2}{2p}y.$$

初始条件为 $y|_{x=0}=a$. 分离变量后积分,得

$$\int_a^y \frac{dy}{y} = \int_0^x \frac{\gamma\pi a^2}{2p}dx, \text{即 } \ln y - \ln a = \frac{\gamma\pi a^2}{2p}x.$$

故所求的曲线为 $y = ae^{\frac{\gamma\pi a^2}{2p}x}$.

11.10.52 要在舞台上用绳索悬吊一幕布,问幕布的上沿应剪成怎样的曲线才能使它底边上的各点正好都接触地平面?

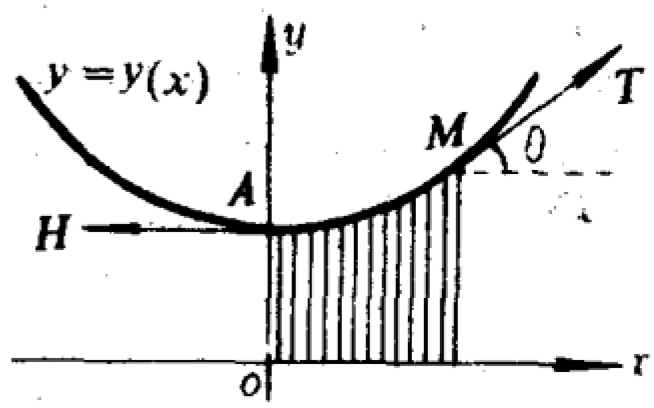
解 如图建立坐标系,设所求曲线的方程为 $y=y(x)$,因为曲线上任意一点 $M(x,y)$ 与点 $A(0,b)$ 之间的孤段受三个力:

(1) A 点的水平张力 H;

(2) M 点的拉力 T;

(3) 幕布的重力 $W=\gamma\int_0^x ydx$.

(γ 为幕布的面密度),所以由力的平衡条件,得



11.10.52 题图

$$\begin{cases} T\cos\theta = H, & (1) \\ T\sin\theta = \gamma\int_0^x ydx. & (2) \end{cases}$$

将(1)、(2)两式相除,得

$\operatorname{tg}\theta = \frac{\gamma}{H}\int_0^x ydx$,而 $y'=\operatorname{tg}\theta$,于是有

$$y' = \frac{\gamma}{H}\int_0^x ydx. \qquad (3)$$

将方程(3)的两边对 x 求导,得 $y(x)$ 满足的微分方程为

$$y'' - \frac{\gamma}{H}y = 0, \qquad (4)$$

初始条件为 $y|_{x=0}=b,\ y'|_{x=0}=0$.

解二阶常系数线性齐次微分方程(4),得通解为

$$y = C_1e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{H}}x} + C_2e^{\sqrt{\frac{\gamma}{H}}x}.$$

由初始条件 $y|_{x=0}=b, y'|_{x=0}=0$,确定 $C_1=C_2=\frac{b}{2}$. 故所求的曲线方程为

$$y = \frac{b}{2}(e^{-\sqrt{\frac{\gamma}{H}}x} + e^{\sqrt{\frac{\gamma}{H}}x}), \text{或 } y = b\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\gamma}{H}}x.$$

(2) 运动学问题

11.10.53　质量为 m 的质点沿直线运动，运动时质点所受的力为 $F = a - bv$，其中 a、b 为正常数，v 为质点运动的速度，设质点由静止出发，求该质点的速度与时间的函数关系.

解　所求速度函数 $v = v(t)$ 满足的微分方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = a - bv, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

分离变量后积分，得 $\int_0^v \frac{dv}{a - bv} = \int_0^t \frac{1}{m}dt$. 即

$-\frac{1}{b}[\ln a - \ln(a - bv)] = \frac{t}{m}$.

故所求的速度函数为 $v = \frac{a}{b}(1 - e^{-\frac{b}{m}t})$

11.10.54　一汽艇以 3m/s 的速度在静止的水面上运动时，停止了发动机，经过 20 秒后，艇的速度减到 2m/s. 设水的阻力与艇的运动速度成正比，试求发动机停止 2 分钟后艇的速度.

解　汽艇的速度函数 $v = v(t)$ 满足的微分方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -kv, \\ v|_{t=0} = 3 \quad v|_{t=20} = 2. \end{cases}$$

其中 k 为比例系数，$k > 0$；m 为汽艇质量. 分离变量后积分，得

$$\int_3^v \frac{dv}{dt} = -\int_0^t \frac{k}{m}dt,\ 即\ \ln v - \ln 3 = -\frac{k}{m}t.$$

亦即 $v = 3e^{-\frac{k}{m}t}$，由 $v|_{t=20} = 2$，确定 $\frac{k}{m} = \frac{1}{20}\ln\frac{3}{2}$. 于是有

$$v = 3e^{-\frac{\ln 1.5}{20}t}(\text{m/s})$$

当 $t = 2$ 分 $= 120$ 秒时，其速度

$$v|_{t=120} = 3e^{-\frac{\ln 1.5}{20}\cdot 120} \approx 0.263(\text{m/s}).$$

11.10.55　设伞兵降落过程中所受的阻力和当时下降的速率成正比，一伞兵在 $t = 0$ 时从飞机上降落，求降落速率和时间之间的函数关系.

解　降落速度函数 $v = v(t)$ 满足的微分方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

其中 k 为比例系数，m 为降落伞和伞兵的质量. 分离变量后积分，得

$$\int_0^v \frac{dv}{mg-kv}=\int_0^t \frac{1}{m}dt,\ 即\ -\frac{1}{k}[\ln(mg-kv)-\ln mg]=\frac{1}{m}t.$$

故所求的速度函数为 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

11.10.56 将质量为 m 的物体在空气中以初速度 v_0 竖直上抛，且空气阻力为 k^2v^2(k 为常数). 求在物体上升过程中速度与时间的函数关系.

解 速度函数 $v=v(t)$ 满足的微分方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-k^2v^2.$$

初始条件为 $v|_{t=0}=v_0$.

分离变量后积分，得 $\int_{v_0}^v \frac{m}{mg+k^2v^2}dv=-\int_0^t dt$.

即
$$t=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{g}}(\operatorname{arctg}\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}-\operatorname{arctg}\frac{kv}{\sqrt{mg}}).$$

故所求的速度函数为
$$\frac{\sqrt{mg}}{k}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}-\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t).$$

11.10.57 初始质量为 M_0 克，在空气中自由落下的雨点均匀地蒸发着，设每秒蒸发 M 克，又空气的阻力与雨点的速度成正比，如果开始雨点的速度为零，求雨点运动的速度和时间之间的函数关系.

解 设在任意时刻 t，雨点的速度为 $v=v(t)$. 这时，雨点的质量为 M_0-Mt. 故由牛顿第二定律，得 $v(t)$ 满足的微分方程为

$$(M_0-Mt)\frac{dv}{dt}=(M_0-Mt)g-kv,即\ \frac{dv}{dt}+\frac{k}{M_0-Mt}v=g.$$

其中 k 为比例系数，这就是所求速度函数所满足的微分方程。初始条件为 $v|_{t=0}=0$.

解此一阶线性微分方程，得通解为

$$v=e^{-\int\frac{k}{M_0-Mt}dt}\left(\int ge^{\int\frac{k}{M_0-Mt}dt}dt+C\right)$$

$$=\frac{g}{k-M}(M_0-Mt)+C(M_0-Mt)^{\frac{k}{M}}.$$

由 $v|_{t=0}=0$，确定 $C=\frac{g}{M-k}M_0^{1-\frac{k}{M}}$. 故所求的速度函数为

$$v = -\frac{g}{M-k}(M_0 - Mt) + \frac{g}{M-k}M_0^{1-\frac{k}{M}}(M_0 - Mt)^{\frac{k}{M}}.$$

11.10.58　设有一质量为 m 的物体在空气中由静止开始下降. 如果空气的阻力 $R = C^2v^2$,其中 v 为物体运动的速度,试求物体下落的距离与时间的函数关系.

解　设在 t 时刻物体下落的距离为 $s = s(t)$,由牛顿第二定律,得 $s(t)$ 满足的微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - C^2(\frac{ds}{dt})^2,\ 即\ \frac{d^2s}{dt^2} = g - \frac{C^2}{m}(\frac{ds}{dt})^2. \tag{1}$$

初始条件为 $s|_{t=0} = 0, \frac{ds}{dt}|_{t=0} = 0.$

令 $\frac{ds}{dt} = v, \frac{d^2s}{dt^2} = v'$,则方程(1) 化为

$$v' = g - \frac{C^2}{m}v^2, \tag{2}$$

初始条件为 $v|_{t=0} = 0.$

将方程(2) 分离变量后积分,得

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{C^2}{m^2}v^2} = \int_0^t dt,即\ \frac{m}{2C\sqrt{mg}}\ln\left|\frac{Cv+\sqrt{mg}}{Cv-\sqrt{mg}}\right| = t. \tag{3}$$

由(3) 式,解出

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{C}\frac{e^{\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}} - e^{-\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}}}{e^{\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}} + e^{-\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}}},\ 即\ \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{mg}}{C}\text{th}\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}. \tag{4}$$

$\left(v = \frac{\sqrt{mg}}{C}\frac{e^{\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}} + e^{-\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}}}{e^{\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}} - e^{-\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}}}\right.$ 不满足初始条件 $v|_{t=0} = 0$,舍去).

初始条件为 $s|_{t=0} = 0$. 将方程(4) 直接积分,得

$$s = \int_0^t \frac{\sqrt{mg}}{C}\text{th}\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}dt = \frac{m}{C^2}\ln\text{ch}\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}.$$

故所求物体下落的运动规律为 $s = \frac{m}{C^2}\ln\text{ch}\frac{C\sqrt{g}t}{\sqrt{m}}.$

11.10.59　一质点从离地很高的地方由静止开始下落(作用力服从牛顿万有引力定律),设地球相对质点是固定的,且忽略空气阻力等

其它因素. 试求质点的速度对距离的依赖关系，如果开始时质点离地心的距离为 s_0，问经过多长时间质点到达地面？

解　取 x 轴铅直向上，原点在地心处，设质点运动时的位置函数为 $x = x(t)$，设质点的质量为 m，地球的质量为 M，由万有引力定律，作用在质点上的力为 $F = -\frac{kmM}{x^2}$（k 为引力系数，$k > 0$）. 因为该万有引力在地面上等于重力，即当 $x = R$（R 为地球的半径）时，有 $\frac{kmM}{R^2} = mg$，所以 $kM = R^2 g$. 于是有 $F = -\frac{mR^2 g}{x^2}$，由牛顿第二定律，得质点运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mR^2g}{x^2}，即 \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R^2g}{x^2}. \tag{1}$$

令 $\frac{dx}{dt} = v, \frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$，则方程(1) 化为

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{R^2g}{x^2}, \tag{2}$$

将方程(2) 分离变量后积分得 $\frac{1}{2}v^2 = \frac{R^2g}{x} + C$. 故

$$v = -\sqrt{\frac{2R^2g}{x} + C_1}, \ (C_1 = 2C). \tag{3}$$

即为所求速度对距离的依赖关系（负号表示速度的方向与 x 轴的正向相反）

如果开始时质点离地心的距离为 s_0，则有初始条件

$$x|_{t=0} = s_0, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0.$$

由这两个初始条件，可以确定(3) 式中的任意常数 $C_1 = -\frac{2R^2g}{s_0}$. 因此得微分方程

$$\frac{dx}{dt} = v = -\sqrt{2R^2g}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{s_0}}, \tag{4}$$

初始条件为 $x|_{t=0} = s_0$.

将方程(4) 分离变量后积分，得

$$-\frac{1}{\sqrt{2R^2g}}\int_{s_0}^{x}\sqrt{\frac{s_0 x}{s_0 - x}}dx = \int_0^t dt.$$

即 $t = \frac{s_0\sqrt{s_0}}{\sqrt{2R^2g}}[\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\sqrt{\frac{x}{s_0 - x}} + \frac{1}{s_0}\sqrt{x(s_0 - x)}]$ (5)

当质点落到地面时，$x = R$，代入(5)式，得

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{s_0}{2g}}[\frac{\pi}{2}s_0 - s_0\text{arctg}\sqrt{\frac{R}{s_0 - R}} + \sqrt{R(s_0 - R)}].$$

这即为质点到达地面经过的时间.

11.10.60 在地面上以初速度 v_0 铅直向上射出一物体，设地球的引力与物体到地心的距离的平方成正比，求物体可能达到的最大高度(空气的阻力不计，地球半径 $R = 6370$ 千米).

解 取 x 轴铅直向上，原点位于地球的表面. 设物体运动的位置函数为 $x = x(t)$. 物体在运动过程中仅受地球引力 F 的作用，且 $F = -\frac{k}{(R+x)^2}$，其中 k 为比例常数，$k > 0$. 因为在地面上该引力就是重力，即当 $x = 0$ 时，有 $k\frac{1}{R^2} = mg$，(m 为物体的质量)，所以求出比例常数 $k = mgR^2$，于是有 $F = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$. 由牛顿第二定律，得物体运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \text{即} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}. \tag{1}$$

初始条件为 $x|_{t=0} = 0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$.

令 $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$，则方程(1)化为

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}, \tag{2}$$

初始条件为 $v|_{x=0} = v_0$.

将方程(2)分离变量后积分，得 $\int_{v_0}^{v} v dv = -\int_0^x \frac{gR^2}{(R+x)^2}dx$，即

$$v_0^2 - v^2 = \frac{2gRx}{R+x}. \tag{3}$$

当物体达到最大高度时，$v = 0$. 故由(3)式得所求的最大高度为

$$x = \frac{v_0^2R}{2gR - v_0^2}.$$

11.10.61 一质点被吸向固定点 O，吸引力与质点与点 O 的距离

成反比. 若质点是从静止状态被吸引的,求它到达 O 点所需要的时间. (已知 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).

解 设质点的初始位置为 A,取 OA 轴为 Ox 轴,则 A 点的坐标为 x_0. 设质点运动时的位置函数为 $x = x(t)$. 由牛顿第二定律,得质点运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x}\ (k \text{ 为比例常数}, k > 0). \tag{1}$$

初始条件为 $x|_{t=0} = x_0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$.

解可降阶的微分方程(1). 令 $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$,则方程(1)化为

$$mv\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x}. \tag{2}$$

初始条件为 $v|_{x=x_0} = 0$.

将方程(2)分离变量后积分,得

$$\int_0^v vdv = \int_{x_0}^x -\frac{k}{mx}dx,\ 即\ \frac{1}{2}v^2 = -\frac{k}{m}\ln\frac{x}{x_0}. \tag{3}$$

由(3)式,解得 $\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{2k}{m}\ln\frac{x_0}{x}}$. (4)

初始条件为 $x|_{t=0} = x_0$.

将方程(4)分离变量后积分,得

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{x}{x_0}}} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\int_0^t dt. \tag{5}$$

设质点到达 O 点所需的时间为 T,即 $t = T$ 时, $x = 0$,故由(5)式,得 $\sqrt{\frac{2k}{m}}T = \sqrt{\pi}x_0$,即 $T = \sqrt{\frac{\pi m}{2k}}x_0$. 其中

$$\int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{x}{x_0}}} = x_0\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{2}}du = x_0\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}x_0.\ (令\ \ln\frac{x}{x_0} = u).$$

11.10.62 一单位质量的质点沿 x 轴运动,所受的力为 $F(x) = -\sin x$. 若质点的初始位置为原点,初速度为 2,证明:当时间 $t \to +\infty$ 时,质点趋近于一个极限位置,并求出此极限位置.

解　设质点的位置函数为 $x = x(t)$，由牛顿第二定律，得 $x(t)$ 满足的微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x, \tag{1}$$

初始条件为 $x|_{t=0} = 0$，$\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 2$.

令 $\frac{dx}{dt} = v$，$\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$，则方程(1)化为

$$v\frac{dv}{dx} = -\sin x, \tag{2}$$

初始条件为 $v|_{x=0} = 2$.

将方程(2)分离变量后积分，得

$$\int_2^v vdv = \int_0^x(-\sin x)dx\text{，即}\frac{v^2}{2} - 2 = \cos x. \tag{3}$$

由(3)式，解得

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{2\cos x + 2}\text{，即}\frac{dx}{dt} = 2\cos\frac{x}{2}. \tag{4}$$

初始条件为 $x|_{t=0} = 0$.

将方程(4)分离变量后积分，得

$$\int_0^x \frac{dx}{2\cos\frac{x}{2}} = \int_0^t dt\text{，即 }\ln\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4}) = t.$$

亦即 $x = 4(\mathrm{arctg}e^t - \frac{\pi}{4})$. 故

$$\lim_{t\to+\infty} x = \lim_{t\to\infty} 4(\mathrm{arctg}e^t - \frac{\pi}{4}) = 4(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \pi.$$

11.10.63　有一物体的质量为 m，以初速度 v_0 从一斜面上推下. 若斜面的倾角为 α，摩擦系数为 μ，求物体在斜面上移动的距离和时间的关系.

解　如图所示，物体的受力情形如下：

(1) 重力 mg. 重力沿斜面的分力 $f_1 = mg\sin\alpha$，沿斜面法向的分力 $f_2 = mg\cos\alpha$.

(2) 摩擦力 $R = \mu f_2 = \mu mg\cos\alpha$. 因此，使物体运动的合力为

$$f_1 - R = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

设物体的位置函数为 $s = s(t)$，由牛顿第二定律得，物体运动的微

分方程为

$$mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m\frac{d^2s}{dt^2},\ 即\ \frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

初始条件为 $s|_{t=0} = 0$, $\frac{ds}{dt}|_{t=0} = v_0$. 积分得$\frac{ds}{dt} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1$.

由$\frac{ds}{dt}|_{t=0} = 0$,确定 $C_1 = v_0$. 于是有

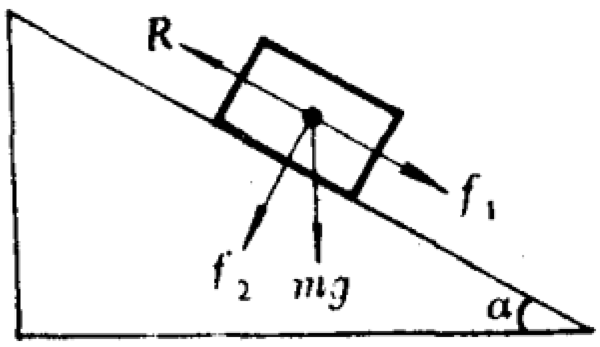
$$\frac{ds}{dt} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + v_0.$$

再积分,得

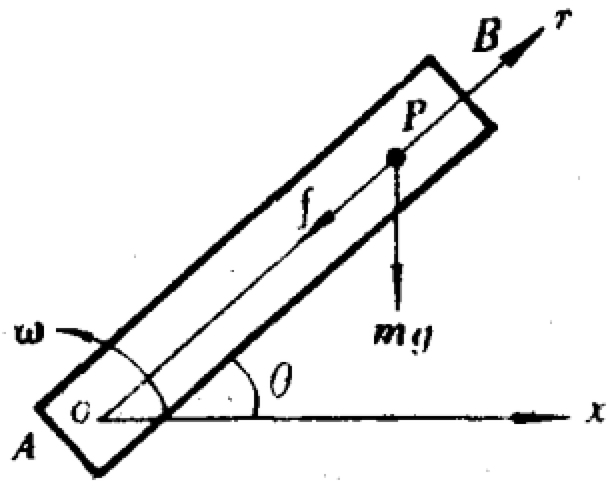
$$s = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)gt^2 + v_0t + C_2.$$

由 $s|_{t=0} = 0$,确定 $C_2 = 0$. 故所求物体在斜面上移动的距离和时间的关系为

$$s = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)gt^2 + v_0t.$$



11.10.63 题图



11.10.64 题图

11.10.64 一个玻璃管 AOB 在垂直于地面的平面内,以不变的角速度ω绕其上一点O转动,管内有一个质量为m的质点P沿着玻璃管运动,设质点 P 的初始位置与点 O 相距为 r_0,初速度为 v_0,如果不计摩擦力,求在管内

(1) 质点 P 运动的微分方程;

(2) 质点 P 在任何时刻的位置;

(3) 质点 P 作简谐运动的条件.

解 选取 x 轴与 r 轴,如图所示,原点位于 O 点. 设 r 轴与 x 轴的夹角为 θ,则 $\theta = \omega t$.

设在任意时刻 t,质点 P 的位置为 (r,θ),质点 P 所受重力 mg 沿玻璃

管方向的分力为 $f=-mg\sin\theta=-mg\sin\omega t$. 由牛顿第二定律，得质点 P 运动的微分方程为

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-mg\sin\omega t,\quad 即\ \frac{d^2r}{dt^2}=-g\sin\omega t.$$

初始条件为 $r|_{t=0}=r_0$, $\frac{dr}{dt}|_{t=0}=v_0$. 连续积分两次，得通解为

$$r=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t+C_1t+C_2.$$

由 $r(0)=r_0, r'(0)=v_0$，确定 $C_1=v_0-\frac{g}{\omega}, C_2=r_0$. 于是有

$$r=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t+(v_0-\frac{g}{\omega})t+r_0.$$

故在任意时刻 t，质点 P 的位置为

$$\begin{cases}r=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t+(v_0-\frac{g}{\omega})t+r_0,\\ \theta=\omega t.\end{cases}$$

由上式容易得到，当 $v_0=\frac{g}{\omega}$ 时，质点 P 在管内作简谐振动，振动方程为 $r-r_0=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.

11.10.65　一质量为 m 的质点由静止开始沉入液体，下沉时，液体的反作用力与质点下沉的速度成正比，求该质点的运动规律.

解　设经过时间 t，质点在水面下 $s(t)$ 处，这时，液体的反作用力为 $k\frac{ds}{dt}$(k 为比例系数). 由牛顿第二定律，得 $s(t)$ 满足的微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt}, 即\ \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{ds}{dt}=g.$$

初始条件为 $s|_{t=0}=0, \frac{ds}{dt}|_{t=0}=0$.

解这个二阶常系数线性非齐次方程，得通解为

$$s=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}t.$$

由初始条件 $s|_{t=0}=0, \frac{ds}{dt}|_{t=0}=0$，确定 $C_1=-\frac{m^2}{k^2}g$. $C_2=\frac{m^2}{k^2}g$. 故所求质点的运动规律为 $s=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2}{k^2}g(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$.

12.10.66　一潜水艇质量为 m，由静止开始沉入水中，下沉时水的

反作用力与下沉的速度成正比，求潜水艇下沉的深度与时间的函数关系.

解　取 x 轴铅直向下，原点位于水面. 设潜水艇的位置函数为 $x=x(t)$，分析潜水艇在下沉过程中所受的力：(1) 重力；(2) 浮力；(3) 下沉时水的反作用力 $f=-k\frac{dx}{dt}$（k 为比例数 $k>0$）. 前两个力（重力与浮力）都是常量，将它们的合力称为下沉力，记作 F. 由牛顿第二定律，得潜艇运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F-k\frac{dx}{dt},\text{即}\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=\frac{F}{m}.$$

初始条件为 $x|_{t=0}=0,\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$.

解此二阶常系数线性非齐次方程，得通解为

$$x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{F}{k}t.$$

由 $x(0)=0,x'(0)=0$，确定 $C_1=-\frac{mF}{k},C_2=\frac{mF}{k}$. 故潜水艇下沉的深度与时间的函数关系式为

$$x=\frac{mF}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)+\frac{F}{k}t.$$

11. 10. 67　长为 6 米的链条自桌上无摩擦地向下滑动. 假设在运动开始时，链条自桌上垂下部分已有一米长. 问需要多少时间链条才全部滑过桌面.

解　设在任意时刻 t，链条垂下的部分长为 $s=s(t)$ 米，则此时链条受力为 γsg 牛顿（γ 为链条的线密度）. 由牛顿第二定律得，$s(t)$ 满足的微分方程为

$$6\gamma\frac{d^2s}{dt^2}=\gamma sg,\text{即}\ \frac{d^2s}{dt^2}-\frac{g}{6}s=0.$$

初始条件为 $s|_{t=0}=1,\frac{ds}{dt}|_{t=0}=0$.

解这个二阶常系数线性齐次方程，得通解为

$$s=C_1e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}+C_2e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}.$$

由 $s|_{t=0}=1,s'|_{t=0}=0$，确定 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. 于是有

$$s=\frac{1}{2}(e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}+e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t})\quad(米).$$

解得 $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(s+\sqrt{s^2-1})$(秒).($t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(s-\sqrt{s^2-1})$ 不合题意,舍去).

当链条全部滑过桌面时,$s=6$,代入上式得

$$t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})\ (秒),$$

即链条全部滑过桌面需要 $\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$ 秒.

11.10.68　一链条挂在一个无摩擦的钉上,设运动开始时,链条的一边垂下 8 米,另一边垂下 10 米,试问整个链条滑过钉子需要多长时间?

解　设任意时刻 t 链条垂下较长的一边长度为 $s=s(t)$ 米,这时,链条受力为

$$\gamma[s-(18-s)]g=2\gamma g(s-9)(牛顿),$$

其中 γ 为链条的线密度. 由牛顿第二定律,得 $s(t)$ 满足的微分方程为

$$18\gamma\frac{d^2s}{dt^2}=2\gamma g(s-9),\ 即\ \frac{d^2s}{dt^2}-\frac{g}{9}s=-g.$$

初始条件为 $s|_{t=0}=10,\frac{ds}{dt}|_{t=0}=0.$

解这个二阶常系数线性非齐次方程,得通解为

$$s=C_1e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+9.$$

由初始条件 $s|_{t=0}=10,s'|_{t=0}=0$,确定 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$,于是有

$$s=\frac{1}{2}(e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t})+9\ (米).$$

由此解得,　$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left(s-9+\sqrt{(s-9)^2-1}\right)$ (秒).

在上式中,令 $s=18$,得

$$t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln\left(18-9+\sqrt{(18-9)^2-1}\right)$$
$$=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})(秒).$$

即整个链条滑过钉子需要$\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$秒.

11.10.69　设单摆的摆长为 l,摆锤的质量为 m. 开始时拉一个小角度 θ_0,然后放开,使其自由摆动. 在不计空气阻力的条件下,求单摆的角位移 θ 随时间 t 的变化规律.

解　取逆时针方向为角位移 $\theta=\theta(t)$ 的正方向,使摆锤运动的力为 $-mg\sin\theta$,设 $\theta=\theta(t)$ 所对应的弧长为 s,则 $s=l\theta$. 求出摆锤运动的切向加速度为$\frac{d^2s}{dt^2}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. 由牛顿第二定律,得 $\theta(t)$ 满足的微分方程为

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta,\text{即}\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta.$$

因为当 θ 很小时,$\sin\theta\approx\theta$,所以

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

初始条件为 $\theta|_{t=0}=0,\frac{d\theta}{dt}|_{t=0}=0.$

解这个二阶常系数线性齐次微分方程,得通解为

$$\theta=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

由初始条件 $\theta|_{t=0}=\theta,\theta'|_{t=0}=0$,确定 $C_1=\theta_0,C_2=0$. 故单摆的运动规律为

$$\theta=\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

11.10.70　有一截面均匀的梁,长为 l,其自由端受一水平牵引力 Q 的作用,其微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=Qy-\frac{1}{2}\omega x^2.$$

其中 E 为该梁材料的弹性模量,I 为梁的截面对于中和轴的转动惯量,ω 为梁的单位长度的重量,试求其弹性曲线.

解　将给定微分方程化为

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{Q}{EI}y=-\frac{\omega}{2EI}x^2.$$

这个二阶常系数线性非齐次方程所对应的齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{Q}{EI}y=0$$

的通解为 $y=C_1e^{-\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}+C_2e^{\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}$.

设给定非齐次方程的特解形如 $y^*=Ax^2+Bx+C$，代入方程，确定

$$A=\frac{\omega}{2Q},B=0,C=\frac{\omega EI}{Q^2}.$$

故所求的弹性曲线为

$$y=C_1e^{-\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}+C_2e^{\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}+\frac{\omega}{2Q}x^2+\frac{\omega EI}{Q^2}.$$

11.10.71　一根张紧的弹性弦，其一端固定，而另一端系一质量为 m 的质点，其运动方程为 $m\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{mg}{e}(s-l)$，式中 l 为该弦的固定长度，e 为弦因重量 mg 而产生的伸长，求 s 及 $v=\frac{ds}{dt}$，并由 $t=0$ 时 $s=s_0$ 及 $v=0$ 确定其常数.

解　将给定方程化为 $\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{e}s=\frac{gl}{e}$. 初始条件为

$$s|_{t=0}=s_0,\frac{ds}{dt}|_{t=0}=0.$$

解这个二阶常系数线性非齐次方程，得通解为

$$s=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{e}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{e}}+l.$$

因此　$v=\frac{ds}{dt}=-C_1\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\sqrt{\frac{g}{e}}t+C_2\sqrt{\frac{g}{e}}\cos\sqrt{\frac{g}{e}}t.$

由初始条件 $s(0)=s_0,v(0)=0$，确定 $C_1=s_0-l,C_2=0$. 故

$$s=(s_0-l)\cos\sqrt{\frac{g}{e}}t+l,\quad v=-(s_0-l)\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\sqrt{\frac{g}{e}}t.$$

即为所求.

11.10.72　圆形薄板在受轴对称的均匀分布荷载时，其挠曲面微分方程为

$$\frac{d^4\omega}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3\omega}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2\omega}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{d\omega}{dr}=\frac{q}{D}.$$

(其中 q 为单位面积的均匀荷载，D 为板的刚度)，试求微分方程的通解.

解　将给定方程化为

$$r^4\frac{d^4\omega}{dr^4}+2r^3\frac{d^3\omega}{dr^3}-r^2\frac{d^2\omega}{dr^2}+r\frac{d\omega}{dr}=\frac{q}{D}r^4. \tag{1}$$

解欧拉(Euler)方程(1)，令 $r=e^t$ 或 $t=\ln r$，则方程(1)化为

$$\frac{d^4\omega}{dt^4}-4\frac{d^3\omega}{dt^3}+4\frac{d^2\omega}{dt^2}=\frac{q}{D}e^{4t}. \tag{2}$$

解四阶常系数线性非齐次方程(2)，得通解为

$$\omega=C_1+C_2t+(C_3+C_4t)e^{2t}+\frac{q}{64D}e^{4t}.$$

令 $t=\ln r$ 或 $e^t=r$，得给定方程的通解为

$$\omega=C_1+C_2\ln r+(C_3+C_4\ln r)r^2+\frac{q}{64D}r^4.$$

11.10.73　在有阻尼的情况下，物体自由振动的微分方程为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\beta}{m}\frac{dy}{dt}+\frac{\alpha}{m}y=0,$$

其中$\frac{\beta}{m}$为介质阻力特性系数，$\frac{\alpha}{m}$为物体的固有频率的平方，试求物体振动的曲线方程.

解　给定二阶常系数线性齐次方程的特征方程为

$$r^2+\frac{\beta}{m}r+\frac{\alpha}{m}=0.$$

有下列三种情形：

(1) 当 $\beta^2-4m\alpha>0$ 时，所求的曲线方程为

$$y=C_1e^{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4m\alpha}}{2m}t}+C_2e^{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4m\alpha}}{2m}t};$$

(2) 当 $\beta^2-4m\alpha=0$ 时，所求的曲线方程为：$y=(C_1+C_2t)e^{-\frac{\beta}{2m}t}$；

(3) 当 $\beta^2-4m\alpha<0$ 时，所求的曲线方程为：

$$y=e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4m\alpha-\beta^2}}{2m}t+C_2\sin\frac{\sqrt{4m\alpha-\beta^2}}{2m}t\right).$$

11.10.74　一条拉紧的弹簧所受到的拉力与它的长度伸长成正比，当长度增长1厘米时，弹簧拉力为9.8牛顿，今有质量为2千克的物体挂在弹簧的下端，当弹簧保持平衡后将它稍向下拉，然后再放开，试求由此所产生的振动运动的周期.

解　取 x 轴铅直向下，原点位于物体的平衡位置处. 设物体运动时

的位置函数为 $x=x(t)$. 由已知，弹簧的弹性系数为 $k=9.8\times10^2$(牛顿/米)，因此，物体在运动过程中所受到的弹性恢复力为 $-kx$，由牛顿第二定律，得物体运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx,\text{即}\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

解此二阶常系数线性齐次方程，得

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$=\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi)(\text{米})$$

其中 $\mathrm{tg}\varphi=\frac{C_1}{C_2}$. 故所求振动运动的周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\approx2.8$ 秒.

11.10.75　一质量为 4 千克的物体挂在弹簧的下端，它使弹簧伸长了 1 厘米，假设弹簧的上端有一转动机产生铅直方向的作用力 $f(t)=20\sin30t$ 牛顿，并且在开始时($t=0$)重物处于静止状态，试求此重物运动的规律.

解　取 x 轴铅直向下，原点位于物体的平衡位置处. 设物体运动时的位置函数为 $x=x(t)$. 由已知弹簧的弹性系数为 $k=4\times9.8\times10^2$ 牛顿/米. 由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+f(t),\text{即}\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=20\sin30t.$$

初始条件为 $x|_{t=0}=0,\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$.

解此二阶常系数线性非齐次方程，得通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+0.25\sin30t.$$

由 $x(0)=0,x'(0)=0$ 确定 $C_1=0,C_2=-7.5\sqrt{\frac{m}{k}}\approx-0.24$.

故所求重物的运动规律为

$$x=0.25\sin30t-0.24\sin\sqrt{980}t(\text{米}).$$

11.10.76　设弹簧的上端固定，有两个相同的质量为 m 的重物挂在弹簧的下端使弹簧伸长了 $2a$，今突然取掉其中的一个重物，使弹簧由静止状态开始振动，求所挂重物的运动规律.

解 取 x 轴铅直向下，原点在距弹簧固定端的 $l+a$ 处(其中 l 为弹簧在自由状态时的长度). 设重物运动时的位置函数为 $x=x(t)$，由已知，质量为 $2m$ 的重物使弹簧伸长了 $2a$，所以由虎克定律可确定弹簧的弹性系数 k 为 $2mg=k2a$，即 $k=\frac{mg}{a}$.

因此，物体在运动过程中所受到的弹性恢复力为 $-\frac{mg}{a}x$，由牛顿第二定律，得物体运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{mg}{a}x,\text{即 }\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{a}x=0.$$

初始条件为 $x|_{t=0}=a.\frac{dx}{dt}|_{t=0}=0$.

解此二阶常系数线性齐次方程，得通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

由 $x(0)=a,x'(0)=0$，确定 $C_1=a,C_2=0$. 故重物的运动规律为

$$x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t.$$

11.10.77 有一质量为 m 的重物悬挂在弹簧的一端，并在一个铅直平面内运动，设弹簧把这物体拉向固定悬挂点 O 的弹性力与距离 $r=OM$ 成正比，问 M 点的运动轨迹是什么？

解 如图，选取坐标系，作用在重物 M 上的力有：

(1) 重力：$-mg\boldsymbol{j}$;

(2) 弹性恢复力：$-k\boldsymbol{r}=-kx\boldsymbol{i}-ky\boldsymbol{j}$($k$ 为弹性系数，$k>0$).

由牛顿第二定律，得物体运动的微分方程为

$$\begin{cases}m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx,\\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg-ky.\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m}x=0,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{k}{m}y=-g.\end{cases}$$

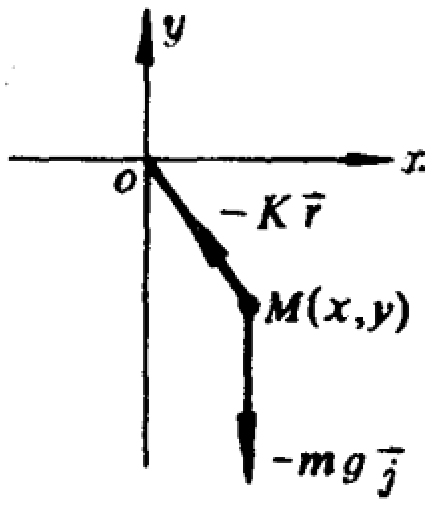
解此常系数线性微分方程组，得

$$\begin{cases}x=C_1\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t,\\ y=C_3\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-\dfrac{mg}{k}.\end{cases}$$

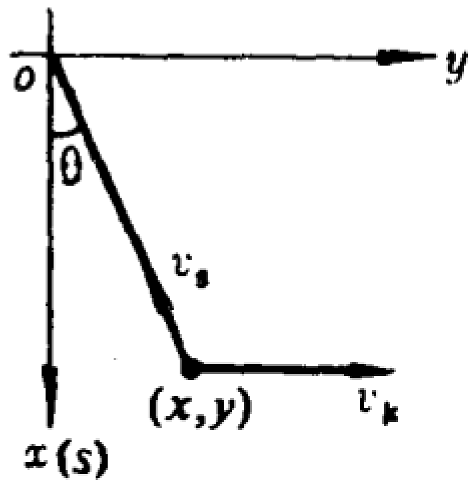
消去 t，得

$$[C_4x - C_2(y + \frac{mg}{k})]^2 + [C_3x - C_1(y + \frac{mg}{k})^2] = (C_1C_4 - C_2C_3)^2.$$

这是中心在点$(0, -\frac{mg}{k})$的椭圆族.



11. 10. 77 题图



11. 10. 78 题图

11. 10. 78　如图所示，码头位于 O 点处，在相距 a 米的河对岸向着码头开出一只轮船，速度为 v_s，方向朝着 O 点，水流的速度为 v_k，求轮船所走过的曲线方程.

解　设所求曲线方程为 $y = y(x)$. 在曲线上任意一点 (x,y) 处，轮船的瞬时速度在 x 轴与 y 轴上的分量分别为

$$\frac{dx}{dt} = -v_s\cos\theta \text{ 与 } \frac{dy}{dt} = v_k - v_s\sin\theta,$$

于是有 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{v_k - v_s\sin\theta}{-v_s\cos\theta}$，又

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

故得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_k - v_s\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-v_s\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \text{即} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{v_k}{v_s}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \tag{1}$$

这是所求函数 $y(x)$ 满足的微分方程. 初始条件为 $y|_{x=a} = 0$.

令 $\frac{y}{x} = u$，即 $y = xu$，则方程(1)化为

$$u + xu' = u - b\sqrt{1+u^2}, \text{即 } xu' = -b\sqrt{1+u^2}. \tag{2}$$

其中 $b = \frac{v_k}{v_s}$. 初始条件为 $u|_{x=a} = 0$.

将方程(2) 分离变量后积分得

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\int_a^x \frac{b}{x}dx, \text{即 } \ln(u + \sqrt{1+u^2}) = b\ln\frac{a}{x}.$$

亦即 $u = \frac{1}{2}[(\frac{a}{x})^b - (\frac{x}{a})^b]$. 故所求的曲线方程为

$$y = \frac{x}{2}[(\frac{a}{x})^b - (\frac{x}{a})^b].$$

12.10.79 位于坐标原点的战舰向位于 ox 轴上 A 点处的敌舰发射制导鱼雷,使鱼雷永远对准敌舰,设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 oy 轴的直线行驶,又设鱼雷的速率为 $5v_0$,求鱼雷航迹曲线的方程,又敌舰行多远时将被击中?

解 为计算方便,设 $OA = 1$,设鱼雷的航迹曲线为 $y = y(x)$,即在时刻 t 鱼雷的位置在 (x,y) 处,这时敌舰的位置在 $(1,v_0t)$ 处. 由已知鱼雷永远对准敌舰,所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0t - y}{1-x}, \text{即 } v_0t - y = (1-x)\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

将方程(1) 的两边对 x 求导,即

$$v_0\frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dx} = (1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}, \text{即 } v_0\frac{dt}{dx} = (1-x)\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2}$$

由已知,鱼雷的速率为 $5v_0$,即$\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} = 5v_0$.

于是有 $\frac{dx}{dt}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = 5v_0$. 由此可得

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}{5v_0}. \tag{3}$$

将(3) 式代入方程(2),得曲线 $y = f(x)$ 满足的微分方程为

$$\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} = 5(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{4}$$

初始条件为 $y|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$.

解微分方程(4)，令$\frac{dy}{dx}=p$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$，则方程(4)化为

$$\sqrt{1+p^2}=5(1-x)\frac{dp}{dx}. \tag{5}$$

初始条件为 $p|_{x=0}=0$.

将方程(5)分离变量后积分，得 $\int_0^p\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\int_0^x\frac{dx}{5(1-x)}$，即

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=-\frac{1}{5}\ln(1-x).$$

亦即

$$p+\sqrt{1+p^2}=(1-x)^{-\frac{1}{5}}. \tag{6}$$

由(6)式，得

$$-p+\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=(1-x)^{\frac{1}{5}}. \tag{7}$$

因此，由(6)、(7)两式解得

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{1}{2}[(1-x)^{-\frac{1}{5}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}]. \tag{8}$$

初始条件为 $y|_{x=0}=0$.

将方程(8)直接积分，得 $y=\frac{1}{2}\int_0^x[(1-x)^{-\frac{1}{5}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}]dx$.

即

$$y=\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}-\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{24}.$$

这就是鱼雷航迹的曲线方程.

因为鱼雷击中敌舰时，它的横坐标为 $x=1$，所以将 $x=1$ 代入(9)式得 $y=\frac{4}{25}$. 即敌舰行$\frac{4}{25}$单位长度后被击中.

11.10.80 一小船 A 从原点出发以固定的速度 v_0 沿 y 轴正向行驶，另一小船 B 从 x 轴上的负向上一点$(x_0,0)$出发，以始终指向 A 的固定速度 v_1 朝 A 船追去，试求 B 船行驶的路线，并回答下列问题：

(1) 如果 $v_1>v_0$，问 B 船需要多长时间追上 A 船？

(2) 如果 $v_1=v_0$，问 B 船与 A 船可以接近到怎样的程度？

解 与11.10.79题类似，得 B 船航行路线 $y=y(x)$ 所满足的微分方程为

$$\frac{v_0}{v_1}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=-x\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1}$$

初始条件为 $y\Big|_{x=x_0}=0,\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=0.$

解微分方程(1),令$\dfrac{dy}{dx}=p,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$,则方程(1)化为

$$\frac{v_0}{v_1}\sqrt{1+p^2}=-x\frac{dp}{dx}. \tag{2}$$

初始条件为　$p\Big|_{x=x_0}=0.$

将方程(2)分离变量后积分,得

$\displaystyle\int_0^p\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=-\frac{v_0}{v_1}\int_{x_0}^x\frac{dx}{x}$,即 $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=-\dfrac{v_0}{v_1}\ln\dfrac{x}{x_0}.$

亦即
$$p+\sqrt{1+p^2}=x_0^{\frac{v_0}{v_1}}x^{-\frac{v_0}{v_1}}. \tag{3}$$

当 $v_0\neq v_1$ 时,由(3)式解得

$$\frac{dy}{dx}=p=\frac{1}{2}\left(x_0^{\frac{v_0}{v_1}}x^{-\frac{v_0}{v_1}}-x_0^{-\frac{v_0}{v_1}}x^{\frac{v_0}{v_1}}\right). \tag{4}$$

初始条件为 $y\Big|_{x=x_0}=0.$

将方程(4)直接积分,得

$$y=\frac{1}{2}\int_{x_0}^x\left(x_0^{\frac{v_0}{v_1}}x^{-\frac{v_0}{v_1}}-x_0^{-\frac{v_0}{v_1}}x^{\frac{v_0}{v_1}}\right)dx.$$

$$y=\frac{v_1}{2}\left(\frac{x_0^{\frac{v_0}{v_1}}}{v_1-v_0}x^{1-\frac{v_0}{v_1}}-\frac{x_0^{-\frac{v_0}{v_1}}}{v_1+v_0}x^{1+\frac{v_0}{v_1}}\right)-\frac{v_0v_1}{v_1^2-v_0^2}x_0, \tag{5}$$

这即为 $v_0\neq v_1$ 时,B 船的航行路线.

(1) 设经过时刻 t,B 船追上 A 船,这时 B 船的位置在$(0,v_0t)$,将 $x=0,y=v_0t$ 代入(5)式,得 $v_0t=-\dfrac{v_0v_1}{v_1^2-v_0^2}x_0$. 故 $t=\dfrac{v_1}{v_0^2-v_1^2}x_0$.

即 B 船追上 A 船需要的时间为$\dfrac{v_1}{v_0^2-v_1^2}x_0$.

当 $v_0=v_1$ 时,(3)式为

$$p+\sqrt{1+p^2}=\frac{x_0}{x}, \tag{6}$$

由(6)式解得,$\dfrac{dy}{dx}=p=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_0}{x}-\dfrac{x}{x_0}\right).$　(7)

初始条件为 $y\Big|_{x=x_0}=0.$

将方程(7)直接积分，得 $y=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{2}(\frac{x_0}{x}-\frac{x}{x_0})dx.$

即
$$y=\frac{x_0}{2}\ln\frac{x}{x_0}-\frac{x^2}{4x_0}+\frac{x_0}{4},\tag{8}$$
这就是当 $v_1=v_0$ 时，B 船的航行路线.

(2) 由(8)式容易得到时，当 $x\to 0, y\to+\infty$. 这说明 B 船的航行路线是以 A 船的航行路线 $x=0$ 为渐近线的，所以 A、B 两船可以无限接近.

(3) 电学问题

11.10.81 有一个由电阻 R 和电容 C 串联组成的电路，其中 R 为 20 欧姆，C 为 0.01 法拉，当开关合上时($t=0$)，电容器 C 的极板上电量 q 为 0.74 库仑，求电量 $q(t)$.

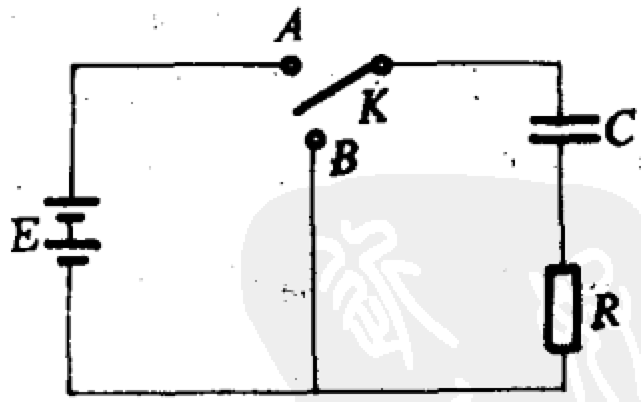
解 设电路中的电流为 $i(t)$，电容器两极板间的电压为 u_C，由电学中的知识知道，$i=\frac{dq}{dt}$，$u_C=\frac{q}{C}$，又由回路电压定律，得 $\frac{q}{C}+iR=0$. 故得 $q(t)$ 满足的微分方程为 $R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$，即 $20\frac{dq}{dt}+100q=0$. 初始条件为 $q|_{t=0}=0.74$.

解这个一阶常系数线性齐次方程，得通解为 $q=C_1e^{-5t}$. 由 $q|_{t=0}=0.74$，确定 $C_1=0.74$. 故所求的电量为 $q(t)=0.74e^{-5t}$.

11.10.82 设一电路如图所示，其中电源电动势 $E=10$ 伏特，电阻 $R=100$ 欧姆，电容 $C=0.01$ 法拉，设在 $t=0$ 时，电容器 C 极板上没有电荷.

(1) 当开关 K 拨向 A 后，问经过多长时间电容器 C 两极间的电压 $u_C=5$ 伏特？

(2) 开关 K 拨向 A 后，经过相当长时间，u_C 的值达到(接近)外加电压 E，这时将开关 K 拨向 B，试求 u_C 的变化规律，问经过多长时间，$u_C=5$ 伏特？



11.10.82 题图

解 (1) 设电路中的电流为 $i(t)$，电容器 C 极板上的电量为 $q(t)$，由电学中的知识知道

$$i = \frac{dq}{dt},\ u_C = \frac{q}{C}. \tag{1}$$

又由回路电压定律，得 $E - \frac{q}{C} - Ri = 0.$ (2)

由(1)，得 $q = Cu_C, i = C\frac{du_C}{dt}$，并代入(2)式，得

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

将给定的数值代入方程(3)，得

$$\frac{du_C}{dt} + u_C = 10. \tag{4}$$

初始条件为 $u_C|_{t=0} = 0$.

解一阶常系数线性非齐次方程(4)，得通解为 $u_C = C_1e^{-t} + 10$. 由 $u_C|_{t=0} = 0$，确定 $C_1 = -10$，于是有

$$u_C = -10e^{-t} + 10(\text{伏特}).$$

令 $u_C = 5$，由 $5 = -10e^{-t} + 10$ 解得 $t = \ln 2$(秒). 这就是说，经过 ln2 秒，电容器 C 两极板间的电压达到 5 伏特.

(2) 当开关拨向 B 时，回路中没有外接电源，即 $E = 0$，由方程(4)，得

$$\frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \tag{5}$$

初始条件为 $u_C|_{t=0} = 10$.

解一阶常系数线性齐次方程(5)，得通解为 $u_C = C_2e^{-t}$. 由 $u_C|_{t=0} = 10$，确定 $C_2 = 10$. 故 u_C 的变化规律为 $u_C = 10e^{-t}$(伏特).

令 $u_C = 5$，由 $5 = 10e^{-t}$. 解得 $t = \ln 2$(秒). 这就是说，经过 ln2 秒，电容器 C 两极板间的电压降到 5 伏特.

11.10.83　有一个由电阻 R，自感 L 和电源 E 串联组成的电路，其中 R、L 均为常量，分别在下列情况下求电流 $i(t)$：

(1) 电源电动势 E 为常量；

(2) $E = E_m\sin\omega t$ (E_m、ω 均为常量).

解　由电学中的知识知道，当电流变化时，L 上有感应电动势 $-L\frac{di}{dt}$. 由回路电压定律，得

$$E - L\frac{di}{dt} - iR = 0,\text{即}\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}di = \frac{E}{L}. \tag{1}$$

(1) $E = E_0$(E_0 为常量)，则方程(1)为

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L},\tag{2}$$

解这个一阶线性非齐次微分方程，得通解为

$$i=\left(\int\frac{E_0}{L}e^{\int\frac{R}{L}dt}dt+C\right)e^{-\int\frac{R}{L}dt}=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{R}.$$

故所求的电流为 $i(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{R}$.

(2) 方程(1) 为 $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t.$ (3)

解这个一阶线性非齐次方程，得通解为

$$\begin{aligned}i&=\left[\int(\frac{E_m}{L}\sin\omega t)e^{\int\frac{R}{L}dt}dt+C\right]e^{-\int\frac{R}{L}dt}\\&=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).\end{aligned}$$

故所求的电流为

$$i(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$$

12.10.84　有一个由电阻 R，自感 L，电容 C 和电源 E 串联组成的电路，其中 R、L 和 C 均为常量，电源电动势 $E=E_m\sin\omega t$，分别在下列情况下求串联电路的振荡方程：

(1) 电容器充电时；

(2) 电容器充电后撤去外电源 E.

解　设电路中的电流为 $i(t)$，电容器极板上的电量为 $q(t)$，两极板间的电压为 u_C，自感电动势为 E_L，由电学中的知识知道

$$i=\frac{dq}{dt},u_C=\frac{q}{C},\ E_L=-L\frac{di}{dt}.\tag{1}$$

又由回路电压定律，得

$$E-L\frac{di}{dt}-\frac{q}{C}-Ri=0.\tag{2}$$

由(1) 得，$q=Cu_C$，$i=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_C}{dt}$，$\frac{di}{dt}=C\frac{d^2u_C}{dt}$，代入方程(2)，得

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E.\tag{3}$$

(1) 在电容器充电时，$E=E_m\sin\omega t$，故得串联电路的振荡方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E_m\sin\omega t.\tag{4}$$

(2) 在电容充电后撤去外电源时，$E = 0$. 故得串联电路的振荡方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \tag{5}$$

11. 10. 85 有一个由电阻 R、自感 L、电容 C 和电源 E 串联组成的电路，其中 R 为 16 欧姆，L 为 2 享利，C 为 0. 02 法拉，电源电动势 $E = 100\sin 3t$ 伏特. 设在 $t = 0$ 时，电容器上的电量 q 和电路上的电流 i 都为零，求 $q(t)$ 与 $i(t)$.

解 在 11. 10. 64 题的方程

$$E - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0 \tag{1}$$

中因为 $i = \frac{dq}{dt}$，所以方程(1) 化为

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E. \tag{2}$$

将给定的数值代入方程(2)，得

$$2\frac{d^2q}{dt^2} + 16\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.02} = 100\sin 3t. \tag{3}$$

初始条件为 $q|_{t=0} = 0,\ i|_{t=0} = \frac{dq}{dt}|_{t=0} = 0$.

解二阶常系数线性非齐次方程(3)，得通解为

$$q = e^{-4t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t) + \frac{25}{26}(-\frac{3}{2}\cos 3t + \sin 3t).$$

由初始条件 $q|_{t=0} = 0$. $\frac{dq}{dt}|_{t=0} = 0$，确定 $C_1 = \frac{75}{52}, C_2 = \frac{25}{26}$. 故

$$q = \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos t)(\text{库仑}),$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{25}{52}e^{-4t}(6\cos 3t + 17\sin 3t) + \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t)(\text{安培})$$

即为所求.

11. 10. 86 设一电路如图所示，其中 $E = 20$ 伏特，$L = 0.1$ 享利，$C = 0.5 \times 10^{-6}$ 法拉，$R = 2 \times 10^3$ 欧姆，先将开关 K 拨向 A，达到稳定状态后，再将开关拨向 B，求电容器两极板间的电压 $u_C(t)$ 和电路中的电流 $i(t)$.

解 在 11. 10. 84 题的方程

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0,$$

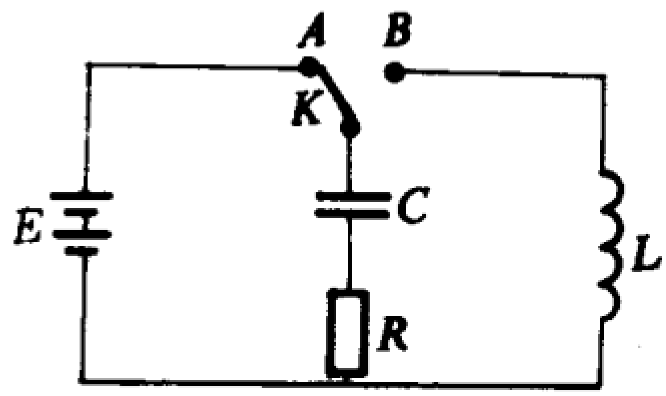
即 $$\frac{d^2u_C}{dt_2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

中，将给定的数值代入，得

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\times10^4\frac{du_C}{dt}+2\times10^7u_C=0.$$

初始条件为 $u_C(0)=20$,

$u_C'(0)=0$.



11.10.86 题图

解这个二阶常系数线性齐次方程，得通解为

$$u_C=C_1e^{-10^3t}+C_2e^{-1.9\times10^4t}.$$

由 $u_C(0)=20,u_C'(0)=0$，确定 $C_1=\frac{190}{9},C_2=-\frac{10}{9}$. 故

$$u_C=\frac{10}{9}(19e^{-10^3t}-e^{-1.9\times10^4t})\text{(伏特)},$$

$$i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{19\times10^{-2}}{18}(-e^{-10^3t}+e^{-1.9\times10^4t})\text{(安培)},$$

即为所求.

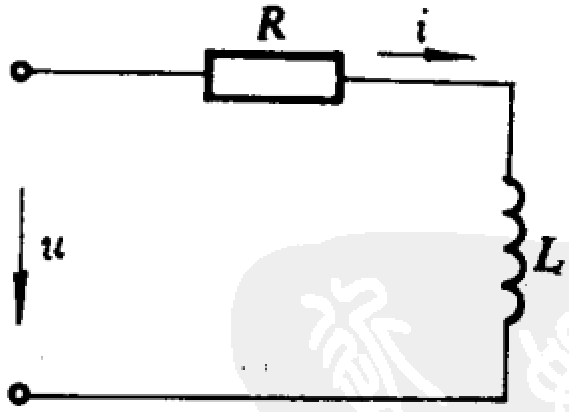
11.10.87　电路如图所示，其中电阻 $R=2$ 欧姆，电感 $L=1$ 享利，电压 $u=\begin{cases}e^{-t},t<1\text{ 秒};\\0,t>1\text{ 秒},\end{cases}$ 伏特，已知 $t=0$ 时，电流 $i=0$，求该电路中的电流 i.

解　电流 i 满足方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri=u_1+u_2,$$

其中 $u_1=e^{-t}(t>0)$,

$$u_2=\begin{cases}0,0<t<1;\\-e^{-t},t>1.\end{cases}$$



11.10.87 题图

运用叠加原理，分别求方程

$$\frac{di}{dt}+2i=e^{-t},\ i|_{t=0}=0\quad(1)$$

和 $$\frac{di}{dt}+2i=-e^{-t}(t>1),i|_{t<1}=0\qquad(2)$$

的解 i_1 和 i_2，则 $i=i_1+i_2$.

方程(1)的解为　$i_1=-e^{-2t}+e^{-t}.(t\geq0)$;

方程(2)的解为

$$i_2=\begin{cases}0, & t<1;\\ ee^{-2t}-e^{-t}, & t>1,\end{cases}$$

故所求的电流为

$$i=i_1+i_2=\begin{cases}-e^{-2t}+e^{-t}, & t<1;\\ e^{-2t}(e-1), & t>1(\text{安培}).\end{cases}$$

(4) 其它物理问题

11.10.88　放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其它元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变，由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解　铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{dM}{dt}$. 因为铀的衰变速度与其含量成正比，所以得微分方程

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M\quad(\lambda\text{ 为衰变常数},\lambda>0).$$

初始条件为 $M|_{t=0}=M_0$.

分离变量后积分，得 $\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}=\int_0^t(-\lambda)dt$. 即 $M=M_0e^{-\lambda t}$.

这就是所求的衰变规律.

11.10.89　物体在空气中冷却的速度与物体温度和空气温度之差成正比. 设 100℃ 的物体置于 20℃ 的屋子里，经过 10 分种冷却到 60℃，问该物体从 100℃ 冷却到 25℃ 需要多长时间？

解　设物体的温度为 $T=T(t)$，由题意，得

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)\ (k\text{ 为比例常数},k>0).$$

初始条件为 $T|_{t=0}=100$, $T|_{t=10}=60$.

分离变量后积分，得 $\int_{100}^{T}\frac{dT}{T-20}=\int_0^t(-k)dt$.

即 $T=20+80e^{-kt}$. 由 $T|_{t=10}=60$，确定 $k=\frac{1}{10}\ln 2$，于是有

$$T=20+80e^{-\frac{t}{10}\ln 2}.$$

令 $T=25$，由 $25=20+80e^{-\frac{t}{10}\ln 2}$ 解得 $t=40$(分)，这就是说，物体从 100℃ 冷却到 25℃ 需要 40 分钟.

11.10.90　有一水槽，在时刻 t，每单位时间流入的水量为 $g(t)$，流

出的水量与该时刻的储水量 $Q(t)$ 成正比，且比例常数为 2.

(1) 列出表示 $Q(t)$ 与 $g(t)$ 之间关系的微分方程；

(2) 设 $g(t)=p\ (p>0,t\geqslant 0)$，$Q(0)=0$，求 $Q(t)$；

(3) 设 $g(t)=\begin{cases}p,0\leqslant t<t_0;\\0,t\geqslant t_0,\end{cases}$，$Q(0)=0,Q(1)=e^2-1,Q(3)=1$，求 p 与 t_0 的值.

解　(1) 设水槽的储水量为 $Q=Q(t)$，在 $[t,t+dt]$ 时间内，流入的水量为 $g(t)dt$，流出的水量为 $2Qdt$，所以在 $[t,t+\Delta t]$ 时间内，储水量的增量为

$$dQ=[g(t)-2Q]dt,\text{即}\ \frac{dQ}{dt}+2Q=g(t),\tag{1}$$

这就是 $Q(t)$ 与 $g(t)$ 之间关系的微分方程.

(2) 方程(1) 为 $\dfrac{dQ}{dt}+2Q=p$，　　(2)

初始条件为 $Q|_{t=0}=0$.

解一阶常系数线性非齐次方程(2)，得 $Q=C_1e^{-2t}+\dfrac{p}{2}$.

由 $Q|_{t=0}=0$，确定 $C_1=-\dfrac{p}{2}$. 故所求的函数为

$$Q=\frac{p}{2}(1-e^{-2t}).\tag{3}$$

(3) 方程(1) 为

$$Q'+2Q=\begin{cases}p,\ 0\leqslant t<t_0;\\0,\ t\geqslant t_0,\end{cases}\tag{4}$$

初始条件为 $Q(0)=1,Q(1)=e^2-1,Q(3)=1$.

当 $0\leqslant t<t_0$ 时，方程(4) 为 $Q'+2Q=p$，　　(5)

初始条件为 $Q(0)=1$. 由(2)，得方程(5) 的解为

$$Q=\frac{p}{2}(1-e^{-2t}),\tag{6}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时，方程(4) 为 $Q'+2Q=0$.　　(7)

其通解为 $Q=C_2e^{-2t}$. 因为储水量 $Q(t)$ 在 $t=t_0$ 处是连续的，所以由 $\dfrac{p}{2}(1-e^{-2t_0})=C_2e^{-2t_0}$. 确定 $C_2=\dfrac{p}{2}(e^{-2t_0}-1)$. 于是有

$$Q=\frac{p}{2}(e^{-2t_0}-1)e^{-2t}.\tag{8}$$

综合(6)、(8) 两式,得

$$Q=\begin{cases}\frac{p}{2}(1-e^{-2t}),0\leqslant t<t_0;\\ \frac{p}{2}(e^{-2t_0}-1)e^{-2t},t\geqslant t_0.\end{cases}$$

由初始条件 $Q(1)=e^2-1,Q(3)=1$ 知,$1<t_0<3$.

将 $t=1$ 代入(6) 式,得 $\frac{p}{2}(1-e^{-2})=e^2-1$. 从而求得

$$p=2e^2.$$

将 $t=3,p=2e^2$ 代入(8) 式,得 $e^2(e^{-2t_0}-1)e^{-6}=1$. 从而求得 $t_0=\frac{1}{2}\ln(e^4+1)$. 故 $p=2e^2,t_0=\frac{1}{2}\ln(e^4+1)$ 即为所求.

11.10.91 根据水力学中的定律,水从距自由面深度为 h 厘米的孔流出,它的流速为 $v=\sqrt{2gh}$,式中 g 是重力加速度. 现有盛满水而高为 1 米的半球形容器,水从它底端的一个面积为 1 平方厘米的孔流出,孔口收缩系数为 0.62(孔口收缩系数是流出来的水柱的截面积与孔口面积之比).

(1) 试求水从小孔流出过程中,容器里水面的高度 h 随时间 t 变化的规律.

(2) 试求容器中水流尽所需的时间.

解 (1) 设容器中水面的高度为 $h=h(t)$. 在$[t,t+dt]$时间间隔内,从小孔流出的水量为 $0.62\sqrt{2gh}dt$,使容器中的水面的高度降低了 dh 米($dh<0$),减少的水量约为 $-\pi r^2dh=-\pi[100^2-(100-h)^2]dh$ (r 是在时刻 t 的水面半径),所以 $h(t)$ 满足的微分方程为

$$-\pi(200h-h^2)dh=0.62\sqrt{2gh}dt.$$

初始条件为 $h|_{t=0}=100$.

分离变量后积分,得 $\int_0^t dt=\int_{100}^h-\frac{\pi(200h-h^2)}{0.62\sqrt{2gh}}dh$,

即
$$t=\frac{-\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}-\frac{14}{15}\times10^5\right)$$

$$=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}).$$

故容器里水面的高度 h 随时间 t 变化的规律为

$$t = \frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7 \times 10^5 - 10^3 h^{\frac{3}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}}).$$

其中 t 的单位为秒，h 的单位为米.

(2) 当容器中的水流尽时，$h = 0$. 由上式得 $t = \frac{7 \times 10^5}{4.65\sqrt{2g}}$ 秒.

11.10.92　设在海平面上大气压强为 10^5 帕斯卡，离海平面高度为 500 米处，大气压强为 10^4 帕斯卡，求大气压强与高度的关系.

解　设在高度 h 米处，大气压强 $p = p(h)$，取一底面积为 1 平方米，高度为 dh 的空气柱，并设空气柱的密度为 ρ，则由力的平衡条件知，

$$dp = -k_1 \rho dh \ (k_1 \text{ 为某个常数}).$$

又由波义耳 — 马利奥特定律，知

$$\rho = k_2 p \ (k_2 \text{ 为某个常数}).$$

因此得到 $p(h)$ 所满足的微分方程为

$$dp = -kpdh \ (k = k_1 k_2).$$

初始条件 $p|_{h=0} = 10^5, p|_{h=500} = 10^4$.

分离变量后积分，得

$$\int_{10^5}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^h -kdh, \text{ 即 } p = 10^5 e^{-kh}.$$

由 $p|_{h=500} = 10^4$，确定 $e^{-k} = (10^{-1})^{\frac{1}{500}} = 10^{-\frac{1}{500}}$. 故所求的大气压强与高度的关系为

$$p = 10^5 \cdot 10^{-\frac{h}{500}}.$$

4. 微分方程在化学中的应用

11.10.93　一容器内盛有 100 升盐水，其中含盐 10 千克，现以每分钟 2 升的均匀速度把净水注入容器，并以同样的速度让盐水流出，在容器内有一搅拌器在不停地搅拌着，因此可以认为溶液的浓度在每一时刻都是均匀的，试求容器内盐量随时间的变化规律.

解　设在时刻 t(分)，容器内的含盐量为 $Q = Q(t)$ 千克，因为容器内的溶液量是不变的，所以在时刻 t，溶液的浓渡为 $\frac{Q}{100}$ 千克 / 升，在 $[t, t + dt]$ 时间间隔内，流出的溶液量为 $2dt$ 升，流出的盐量为 $\frac{Q}{100} \cdot 2dt$ 千克，因为流出的盐量就是容器内含盐量 Q 的改变量 $dQ (dQ < 0)$，所以

得 $Q(t)$ 满足的微分方程为 $dQ=-\frac{Q}{100}\cdot 2dt$. 初始条件为 $Q|_{t=0}=10$.

分离变量后积分，得

$$\int_{10}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\int_{0}^{t}\frac{1}{50}dt, \text{即 } Q=10e^{-\frac{t}{50}}.$$

这就是所求容器内盐量随时间的变化规律，其中盐量 Q 的单位为千克，时间 t 的单位为分.

11.10.94　一容器内盛有 100 升盐水，其中含盐 50 克，现以每分钟 3 升的均匀速度注入浓度为 2 克 / 升的盐水，并以每分钟 2 升的均匀速度让盐水流出，在容器内有一搅拌器在不停地搅拌着，因此可以认为溶液的浓度在每一时刻都是均匀的. 求在 30 分钟后，容器内所含的盐量.

解　设在时刻 t(分)，容器内的含盐量 $Q=Q(t)$ 克，因为流入盐水与流出盐水的速度之差为 1 升 / 分，所以在时刻 t，容器内的溶液量为 $100+t$ 升，溶液的浓度为 $\frac{Q}{100+t}$ 克 / 升，在 $[t,t+dt]$ 时间间隔内，流出的溶液量为 $2dt$ 升，流出的盐量为 $\frac{Q}{100+t}\cdot 2dt$ 克，流入的盐量为 $2\cdot 3dt$ 克，因为流入的盐量与流出的盐量之差 $(6-\frac{2Q}{100+t})dt$ 就是容器内含盐量 Q 的改变量 dQ $(dQ<0)$，所以得 $Q(t)$ 满足的微分方程为

$$dQ=(6-\frac{2Q}{100+t})dt, \text{即} \frac{dQ}{dt}+\frac{2}{100+t}Q=6.$$

初始条件为 $Q|_{t=0}=50$.

解这个一阶线性非齐次微分方程，得

$$Q=\left(\int 6e^{\int\frac{2}{100+t}dt}dt+C\right)e^{-\int\frac{2}{100+t}dt}=2(100+t)+\frac{C}{(100+t)^2}.$$

由 $Q|_{t=0}=50$，确定 $C=-1.5\times 10^6$. 于是有

$$Q=2(100+t)-\frac{1.5\times 10^6}{(100+t)^2}(\text{克}).$$

令 $t=30$. 得 $Q=2(100+30)-\frac{1.5\times 10^6}{(100+30)^2}\approx 171(\text{克})$.

这就是说，在 30 分钟后，容器内含盐约为 171 克.

11.10.95　在容积为 $50\times 20\times 4$ 立方米的车间内的空气中含有 0.2% 的 CO_2，而室外的新鲜空气中含有 0.05% 的 CO_2，现以 400 米^3/分

的速度进行通风，设通入新鲜空气与原有空气混合均匀后经同样的风速排出，问 20 分钟后车间的空气中含 CO_2 的百分比是多少？

解 设在时刻 t(分) 车间的空气中含有 CO_2 的百分比为 $x = x(t)$，在 $[t, t + dt]$ 时间间隔内，CO_2 的通入量为 $0.05\% \times 400dt$ 米^3，CO_2 的排出量为 $x\% \times 400dt$ 米^3，所以车间内 CO_2 的改变量为

$$0.05\% \times 400dt - x\% \times 400dt = 400(0.05 - x)dt\%(\text{米}^3).$$

该改变量等于

$$50 \times 20 \times 4[x(t + dt)\% - x(t)\%] = 400dx\%(\text{米}^3).$$

因此，得 $x(t)$ 满足的微分方程为

$$400dx\% = 400(0.05 - x)dt\%, \text{即} \frac{dx}{dt} + 0.01x = 0.005.$$

初始条件为 $x|_{t=0} = 0.2$.

解这个一阶线性非齐次微分方程，得 $x = Ce^{-0.1t} + 0.05$. 由 $x|_{t=0} = 0.2$，确定 $C = 0.15$，于是有 $x = 0.15e^{-0.1t} + 0.05(\%)$.

令 $t = 20$. 得 $x = 0.15e^{-2} + 0.05 \approx 0.07(\%)$，这就是说，20 分钟后车间的空气中含 CO_2 约为 0.07%.

11.10.96 在容积为 $30 \times 30 \times 12$ 米^{3}的车间内的空气中含有 0.12% 的 CO_2，如果需要在 10 分钟后 CO_2 的含量不超过 0.06%，则每分钟应通入多少新鲜空气？（设新鲜空气中含有 0.04% 的 CO_2，通入新鲜空气与原有空气混合均匀后以同样的风速排出）.

解 设在时刻 t(分)，车间的空气中含有 CO_2 的百分比为 $x = x(t)$，设通风的速度为 v 米^3/分(v 为常数) 与 11.10.95 题类似，得 $x(t)$ 满足的微分方程为

$$30 \times 30 \times 12dx\% = v(0.04 - x)dt\%,$$

即 $\frac{dx}{dt} + \frac{v}{10800}x = \frac{0.04v}{10800}$，初始条件为 $x|_{t=0} = 0.12$，$x|_{t=10} = 0.06$.

解这个一阶线性非齐次微分方程，得

$$x = Ce^{-\frac{v}{10800}t} + 0.04.$$

由 $x|_{t=0} = 0.12$，确定 $C = 0.08$，于是有 $x = 0.08e^{-\frac{v}{10800}t} + 0.04(\%)$. 由 $x|_{t=10} = 0.06$ 确定 $v = 1080\ln 4 \approx 1500$(米^3/分). 这就是说，每分钟应通入约为 1500 米^{3}的新鲜空气.

附　录　1

高等数学发展简史

高等数学通常仅是相对初等数学而言的，其内容并无十分确切的所指，大凡初等数学以外的数学均可包罗于其中．作为高等学校教学科目的高等数学，则一般仅包含解析几何、微积分以及常微分方程、级数论、概率论等初步知识．高等数学主要产生于 17 世纪，18 世纪发展成熟．

文艺复兴时期，由于机械的广泛使用，航海事业的迅速发展，以及我国四大发明的西传，促使欧洲生产发生了大的飞跃．16 世纪末荷兰资产阶级革命首获成功，17 世纪 40—80 年代英国也完成了资产阶级革命．在革命和生产的推动下，自然科学也得到了迅猛的发展．许多新的课题摆在科学家面前，如随着航海时期的发展，需要精确测定地球的经纬度，制造精确的时钟，把握天体运行的规律等；采矿业的兴起，需要解决地下排水和通风问题，需要改进熔炉等；在军事技术方面，火炮内部各种应力的研究、弹道学研究（空气阻力、弹着点、瞄准方法）等一系列力学问题需要解决；对天体运行规律，如开普勒行星运行三大定律等的发现，也需要新的数学方法．正是在这种情况下，自然科学以神奇的速度发展起来．正如恩格斯所说："如果说，在中世纪的黑夜之后，科学以意想不到的力量所兴起，并且以神奇的速度发展起来，那么，我们要再次把这个奇迹归功于生产"．"社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进"．16—18 世纪自然科学中最突出的进展是以力学为中心的实验科学的兴起．经过伽利略、开普勒、牛顿等大批科学家在近百年之中的辛勤工作，终于形成了经典力学的理论体系．在这一时期，"占首要地位的，必然是最基本的自然科学，即关于地球上物体的和天体的力学，和它靠近并且为它服务的，是数学方法的

发展和完善化”. 天文学和力学的发展，带动了数学，促进了解析几何和微积分等学科的创立.

16、17 世纪科学思想和科学方法也正处于一个变革时期. 在这个时期，到处是一片要求科学改革的呼声. 培根呼吁“必须给人类的理智开辟一条与以前完全不同的道路”，以结束自中世纪以来“知识状况既不景气，也没有很大进展”的现状. 他提倡通过对自然现象进行“观察和实验”来得出正确的结论. 伽利略进一步强调了在观察和实验中运用数学方法的作用，强调科学必须通过测量而追求定量的规律. 这种“实验 —— 数学方法”的思想，是划时代的，使当时许多自然科学家都十分重视数学在自然科学研究上的重要作用，这也就促使 17 世纪的数学沿着超越希腊传统的潮流而发展起来. 在这一时期，人们舍弃了希腊人的严格证明，大胆地采用直观推断的思想方式. 由于重视与实际相结合，数学成为科学研究的推理根据. 数学在自然科学方法中的地位得到确立. 数学思想方法上的巨大变革，使有别于用静止观点研究的古代初等数学，而采用运动学的观点来研究的解析几何、微积分等高等数学得以产生.

随着资本主义萌芽而产生，随着资本主义发展而发展的近代大学，对于高等数学的发展起着巨大的作用. 英国牛津大学号称政治家的摇篮，而剑桥大学则被誉为科学家的摇篮. 对微积分创立有巨大贡献的牛顿及其前辈华利斯，巴罗均是剑桥毕业生. 对高等数学的创造和发展作出过重要贡献的数学家也多受过高等教育. 笛卡儿曾攻读于波埃顿大学，惠更斯曾就学于莱顿大学和布勒达大学. 瑞士巴塞尔大学曾培养出著名伯努利数学家族的几代数学家，特别是培养出 18 世纪世界数学界中心人物欧拉. 而巴黎理工科大学和巴黎高等师范学校则是培养数学家的著名学府. 拉格朗日、拉普拉斯、勒让德、蒙日等都与这两所学校密切相联. 19 世纪初关于高等数学的基本论著，绝大部分来源于巴黎理工科大学. 就在今天，我们所有的数学论著都在某种程度导自这一源泉. 高等教育的发展对培养高等数学人才和传播数学知识起了巨大的作用.

数学知识长期的积累、数学思想方法的变革、生产和科学发展对数学的全新的要求以及数学人才的大量培养，为高等数学的产生和发展创造了充分的条件. 高等数学终于在 17 世纪开创，在 18—19 世纪茁壮成长.

一. 解析几何学

高等数学建立过程中第一个决定性的步骤是解析几何学的创立. 解析几何是几何、代数和一般变量概念结合的产物,它的出现是数学史上一件划时代的大事情. 通常人们都把解析几何创建的功绩归于笛卡儿和费尔马. 而把1637年笛卡儿《几何学》的出版作为解析几何诞生的标记.

几何学在古希腊有过较高的发展,欧几里得的《几何原本》在两千年间一直被人们奉若几何学的圣典. 阿基米德,特别是阿波罗尼对圆锥曲线的研究更几乎成为千古绝唱. 从古希腊起,在西方数学的发展过程中,几何学一直是至高无上的,而代数的方法却被忽视了.

代数学在东方(中国、印度、阿拉伯)虽然有高度的发展,但东方数学却忽视了论证几何学之研究. 因此,无论在古代的欧洲,还是在东方国家,都不具备产生解析几何的条件.

随着东方文化的西传,东方高度发展的代数也进入欧洲. 伟大的文艺复兴运动使欧洲数学在古希腊几何学和东方代数学的基础上有了巨大的发展,为解析几何的创立准备了必要的条件.

古希腊阿波罗尼在研究圆锥曲线时,曾引用了两条正交直线作为一种坐标. 稍后的天文学家依巴谷也运用经度和纬度标出天体上和地面上点的位置. 我国西晋地理学家裴秀在地图绘制中也使用了平面网络坐标法. 1486 年法国奥雷斯姆在《论形状的大小》一书中,陈述了一种坐标几何,用坐标来确定点的位置. 这是从天文地理到近代坐标几何之过度,坐标法之引入,架起了代数、几何融合的桥梁,为解析几何产生奠定了基础.

1591 年法国数学家韦达出版其《分析方法引论》. 这是西方第一本符号代数学,他率先在代数学中自觉地系统地运用字母代替数量,用统一符号表示已知量、未知量及其运算. 韦达还应用代数方法分析几何问题,这种思想对于笛卡儿创建解析几何有很大的影响,笛卡儿曾说自己是继承韦达的事业. 1607 年哥特拉底发表《阿波罗尼著作的现代阐释》,专门对几何问题的代数解法作了系统的研究. 1631 年英国哈里奥特著《实用分析学》,把韦达和哥特拉底的思想加以引申和系统化,为解析几何建立铺平了道路.

笛卡儿在自然科学研究中,深感有必要建立一种普遍的数学,使算

术、代数和几何统一起来.他认为欧氏几何的每一个证明,总是要求某种新的,往往是奇巧的想法,他批评希腊人的几何过于抽象,且过多依赖于图形,以至"它只能使人在想象力大大疲乏的情况下去练习理解力."他对于当时流行的代数也加以批评,说它完全受法则和公式的控制,以至于"成为一种充满混杂和晦暗,故意用来阻碍思想的艺术,而不象一门改进思想的科学".他主张吸收代数和几何中一切最好的东西,取长补短,融合为一门新的数学.笛卡儿开始用代数方法研究几何学,经过二十多年的探索,他终于创立了解析几何学.

1618 年末,笛卡儿采用两条正交直线解决了自由落体问题.1619 年,他研究了求两个已知量的两个比例中项问题.同年 11 月,他悟出了建立把代数方法应用到几何中去的新方法的关键在于借助坐标系建立起平面上的点与数对间的对应关系,从而可用方程表示曲线.1620 年前后,他证明了四次方程 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ 的根可以通过抛物线和圆的交点求出.1628 年他发表了《指导思想的规则》,注意到为使"数形结合",必须考虑到横坐标和纵坐标间的依存关系.1637 年 6 月 8 日,其《几何学》以其《方法论》的附录形式问世,明确提出了曲线方程的思想,并用此解决许多几何作图问题.

在这里,笛卡儿有两个基本观点.(1) 坐标观念,与前人不同,笛卡儿认为坐标不仅表示点的位置,而且可通过坐标把点动成线的观点具体应用到建立曲线的方程上;(2) 方程观念.笛卡儿不仅把方程看成是未知数与已知数的关系式,而且更多地看成是两个变量间的关系式,把有互相关联的两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线.这正是对于处理几何曲线十分有效的新方法的思想基础.

笛卡儿在研究用代数方程表示几何曲线,用代数方法解决几何问题时,曾遇到一个障碍,就是所谓齐次原则,在 16 世纪以前的西方数学家沿用古希腊的一个原则,由于长度、面积和体积不能互加,表示几何量之间关系的代数式也只能是齐次的,假如用 a,b,c 表示线段之长,则 a^2,ab,bc 等就表示面积,abc 就表示体积,那么 $a+ab+abc$ 之类的代数式就无意义了,如果不赋予 $a+ab+abc$ 之类的式子以新的解释,用代数方程表示曲线将遇到极大困难,笛卡儿在《几何学》开头,便找到一个十分巧妙的解决办法,他通过引入单位数的方法,使所有几何量都可以通过单位数而变成统一数表示,进而使几何量之间的关系均化成数之间的关系,例如 ab 不理解为面积,而看成是满足 $ab:a=b:1$ 的一条线

段. 这样以来，$a + ab + abc$ 之类的式子便有了意义，齐次原则问题获得解决.

笛卡儿在解析几何创建中作出了重大贡献. 不过，单纯使用坐标系并不是其革新，而如现在用直角坐标系研究直线、圆锥曲线的方程乃解析几何另一创始人费尔马的工作. 笛卡儿取得的成就在于：他证明了几何问题可以归结为代数形式的问题，因此在求解时可以运用代数的全部方法；由于代数语言远较几何语言富有启发性，所以问题形式改变后，只要进行一些代数变换，就可以发现许多出乎预料的性质，往往还可找出一些新的几何关系，这些关系往往是希腊人拿出其全部技巧都不一定能发现的；由于笛卡儿用代数语言表示几何性质，使他获得了许多几何定理的简单证明，而若沿用传统的综合几何的方法证明往往十分困难. 笛卡儿的方法可以把任何疑难命题的证明归结为一种代数技巧，掌握它是十分容易的.

笛卡儿的坐标系是不完备的，没有考虑到横坐标的负值情况，也没有自觉地引进第二条坐标轴（纵轴）. 笛卡儿使方程和曲线结合起来的思想往往拘泥于解决几何问题，而未能在此思想基础上从几何与代数两个方面展开深入的研究. 尽管如此，笛卡儿在创建解析几何过程中的功绩是永远不可磨灭的.

和笛卡儿分享解析几何创立人荣誉的是他的同胞费尔马. 费尔马深入研究古希腊阿波罗尼的著作，发现阿波罗尼轨迹问题之证明方法已失传. 他便从补齐这种证明方法开始，通过坐标法试图把代数方法应用于几何学，研究各种曲线的性质. 费尔马还具体研究了直线、圆和其它圆锥曲线的方程，注意到了坐标轴可以平移和旋转，并以此来化简方程. 他肯定一次方程表示直线，二次方程表示圆锥曲线. 和笛卡儿研究解析几何不同，费尔马还没有完全克服阿波罗尼静态地研究几何曲线的影响，仍带有浓厚的古典色彩. 费马尔虽然于 1629 年便已发现解析几何基本原理，比笛卡儿发表《几何学》早 8 年，但其著作死后才出版，这就使笛卡儿在解决几何发明优先权方面占了上风.

开创初期的解析几何并不完善，日后经过许多数学家在各方面作了大量的修正补充，才日臻完善. 其中贡献最大的是欧拉、拉格朗日和蒙日.

1655 年英国华利斯在《论圆锥曲线》一书中首次引进负的纵横坐标，使解析几何得以在整个坐标平面内研究各种曲线. 华利斯还突破把

圆锥曲线仅看成是圆锥的平面截线的传统观念，用二元二次方程来定义它. 1717 年英国斯特林更进一步把普通二次方程 $f(x,y)=0$ 化为若干标准型.

1729 年法国赫尔曼在牛顿、雅各·伯努利工作的基础上，提出了完整的极坐标概念，给出了直角坐标和极坐标的变换公式. 欧拉第一个在坐标中使用三角函数，给出了极坐标的现代形式，同时还引进了曲线的参数表示.

从 17 世纪中叶开始，解析几何由平面推广到空间. 1679 年法国拉·希尔在《圆锥曲线新论》里，对三维坐标几何作了较为特殊的讨论. 1715 年约翰·伯努利首先引进了我们现代通用的三个坐标平面. 在此基础上数学家们展开了对空间解析几何的研究. 至此，解析几何已成为一门系统的数学学科. 1748 年第一本现代意义下的解析几何教程终于出现，这就是欧拉的《分析引论》. 书中除了给出现代形式下的解析几何的系统叙述，还给出了空间坐标变换公式和六种二次曲面的标准形式.

继欧拉之后，法国蒙日对空间解析几何作了大量的研究. 1802 年他与他的学生阿歇特合写论文《代数在几何中的应用》，证明二次曲面的第一个平面截口是一条二次曲线，且平行截面截得的都是相似的二次曲线. 论文还证明了单叶双曲面和双曲抛物面均直纹曲面. 解析几何再一重要发展是由拉格朗日完成的. 1788 年他在《解析力学》中以类似后来的向量形式表示力、速度、加速度等具有方向的量. 拉格朗日的工作在 19 世纪 80 年代初，由吉布斯和亥维赛德各自独立地发展为向量理论. 向量代数的出现立即对解析几何产生深刻的影响，几何又一次从代数中吸收了新的活力. 向量代数成了解析几何的重要组成部分. 至此，解析几何成为一个具有完整体系的成熟的数学分支. 它又为代数几何、泛函分析等分支奠定了基础.

二. 微积分学

微积分的发明不仅是 17 世纪科学史的荣誉，而且也是自有人类科学以来重大的事件之一. 微积分的创立首先是为了解决 17 世纪力学科学问题. 主要是以下四类问题：(1) 运动学问题，物体运动的距离可以表示为时间 t 的函数 $s=f(t)$，求物体在任意时刻的速度和加速度；反之，已知物体运动的加速度为时间 t 的函数，求速度和距离. 根据物理

学原理，每一个物体在运动的每一时刻必定有瞬时速度. 沿用过去求平均速度的方法求瞬时速度显然不合适；因为这会出现$\frac{0}{0}$而变得毫无意义. (2) 求曲线的切线，这不仅仅是个纯数学问题. 在进行光学研究，设计透镜时，都必须知道光线入透镜的入射角，而入射角与透镜曲线的法线有关，法线是垂直于切线的；再者运动物体在其轨道上任一点处的运动方向即轨迹的切线方向. (3) 函数的最大最小值问题. 如求解炮弹射程最远的发射角问题. (4) 求曲线长，求曲线围成的面积，曲面围成的体积等问题. 此外还有求物体的重心等问题.

导致微积分出现的这些问题，不少在古代便已引起数学家的注意. 公元前 5 世纪，古希腊哲学家赫拉克利特凭借直觉，从哲学上提出了无穷小的概念. 稍后的德谟克利特把哲学的原子论引进数学，并用以求得锥体体积是等高柱体的$\frac{1}{3}$. 公元前 4 世纪，欧多克斯在安提丰等人提出的不断增大圆内接(外切) 正多边形的边数，可使正多边形与圆同面积的思想基础上，提出确定面积和体积的一般方法 —“穷竭法”. 阿基米德应用穷竭法求出了圆、抛物线等所围图形的面积，以及球、圆柱、旋转二次曲面所围立体的体积. 中国古代亦有一些杰出的发现，庄子提出“一尺之棰，日取之半，万世不竭”，有了极限思想萌芽，墨子提出“莫不容尺、无穷也”，已有“无穷大”的思想，而刘徽的“割圆术”和祖暅的“开立圆术”更是了不起的贡献. 这种种情况说明微积分思想的萌芽在古代便已出现.

从 15 世纪下半叶，人们开始对前面提到的求速度，加速度、长度、面积、体积、重心等问题发生了浓厚的兴趣，进行了深入的研究. 1615 年开普勒发表《新空间几何》，用无数个同维的无穷小元素之和来确定曲边形面积和各种体积. 这部著作曾被夸张地称为历来所有求积方法的灵感的源泉. 伽利略研究了距离、速度、加速度之间的关系，阐述了抛物体的运行规律. 伽利略的学生卡瓦列利在《不可分连续量几何》(1635) 中，提出不可分量的原理和方法. 认为线是由点构成的，就象链是由珠子穿成一样；面是由平行的直线所构成，就象布是由线织成的一样；立体是由平行的平面所构成，就象书是由页所组成的一样. 点、平行线、平行平面分别叫做线、面、体的不可分量. 在此基础上提出了著名的卡瓦列利原理(祖暅原理). 1638 年笛卡儿把曲线的割线在两交点趋于重合时的极限位置看作为曲线的切线. 同年，费尔马研究极值问题

时，已掌握微积分的一个重要思想方法，先是将变量稍加改变，然后令改变量为零. 不少数学家，如拉格朗日、拉普拉斯、傅里叶等曾称他为"微积分的真正的发明者". 与此同时，罗伯瓦尔用不可分量方法求得许多曲线，特别是蚌线和摆线的面积，并从运动学的思想出发，作出了这些曲线的切线. 帕斯卡改进了不可分量方法，得出求摆线绕其平面上的特殊直线旋转而得旋转体的体积以及确定该旋转体重心的方法. 他还得到相当于某些基本三角积分的结果. 惠更斯明确引入无穷小量概念，提出曲线图形的求积法. 华利斯在《无穷小算术》(1665) 中，改变了求积问题传统的几何解法，引入了相当于定积分和变量极限的概念. 1669 年巴罗发表《光学和几何学讲义》，在求切线过程中运用了"特征三角形"，这对牛顿和莱布尼兹是有影响的. 巴罗还得到了类似于积、商微分公式，幂的微分，曲线弧长，定积分中变量代换以及隐函数的微分等一系列成果，特别是他证明$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}2dx = 2$ 这个关系式(巴罗是用几何形式表达的，现改用现代符号表示)，触及到微分与积分互逆关系的微积分基本原理，巴罗的著作在微积分的发展中标志着一个重要的里程碑. 有的数学史家认为巴罗是无穷小分析的第一个发明人，这不是没有理由的. 微积分的先驱者们对纷繁众多的有关微积分问题作了长期的研究，取得很多成果，但都没有形成理论和普遍适用的方法，微积分仍在孕育之中.

17 世纪后半期，做为一门科学，微积分最后创立的条件已经成熟，需要有人把无穷小量分析中涉及到的观点、方法和发现，组成以不同于过去的独特的算法为其特征的一门新的科学. 费尔马没能够作到这一点，他未能将其方法加以系统化广泛化，也没有认清切线问题和求积问题是一个问题的两个重要侧面，涉及到两种互逆的运算. 巴罗虽是第一个认识到这种互逆关系的人，但他未能意识到他的定理竟是一个新学科的基石. 完成最终创建微积分的历史重任落在了巴罗的学生牛顿和另一位德国学者莱布尼兹身上.

牛顿是从物理观点出发来研究数学的，他创立的微积分 —— 流数术的原理同他的力学研究有关密切联系. 1665 年 5 月 20 日，在牛顿的一页文稿中出现了"流数术"的记载，这一天往往被看作微积分之诞生日，1669 年，他完成了第一篇微积分论文《运用无穷多项方程的分析学》(1711 年发表)；给出了求一个变量对于另一个变量的瞬时变化率

的普遍方法；通过证明面积可以由求变化率的逆过程得到，揭示了微积分的基本性质. 1671 年，牛顿著《流数法和无穷级数》(1736 年发表)，给出了一套求导数，求积分的具体的运算方法. 1687 年，牛顿出版经典巨著《自然哲学的数学原理》，第一次公开发表了微积分的重要成果.

德国数学家莱布尼兹也是独立完成微积分创建工作的伟人. 莱布尼兹创立微积分的途径和方法与牛顿不同，主要是在研究曲线的切线和面积问题时，运用分析学方法引进微积分概念的. 从 1673 年起，莱布尼兹就开始了对无穷小算法的研究，终于在 1675—1676 年间独立地发现微积分. 当时他称之为“无穷小算法”. 1684 年他发表第一篇微分学论文《一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无穷量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》. 这篇仅 6 页的论文是数学史上最早公开发表的微分学论文，它明确给出了微分的定义和若干函数的和差积商的微分法则. 1686 年，又发表其第一篇积分学论文《潜在的几何与分析不可分和无限》，给出了对数函数和指数函数的微分，并讨论了曲率、密切圆和包络理论. 他以求曲边形面积为出发点得到积分概念，把积分看作无穷小之和，并引入积分符号$\int$. 莱布尼兹也发现了微分和积分的互逆关系.

牛顿和莱布尼兹从不同的角度进行研究，但殊途同归，都独自完成微积分之创建工作. 他们的主要功绩在于：(1) 把各种问题(求速度、加速度、切线、弧长、面积、体积等) 解法统一成一种方法，即微分法和积分法；(2) 有明确计算微积分的方法步骤；(3) 证明微分法和积分法的互逆关系，从而使微分学和积分学成为一个完整的体系. 由于牛顿和莱布尼兹的工作，微积分运算的完整性和应用的广泛性得以揭示，微积分成为解决问题的重要工具. 牛顿和莱布尼兹被公认为微积分的奠基者.

然而牛顿和莱布尼兹的工作却又各具特色，并不雷同. 在微积分研究内容方面，牛顿先有导数概念，后有积分概念；莱布尼兹则先有求积概念，然后有求导概念. 牛顿以无穷小量“瞬”作为出发点，只是后来为了证明它才引进了有限差；莱布尼兹则从有限差出发，以类比过渡到无穷小. 牛顿重的是“实体”概念：“瞬”(不可分量，无限小) 与有限量，然后发现它们彼此过渡的运算具有某种可逆性；莱布尼兹则注重“关系”概念，一开始就得出$\int$ 与 d 是两种互逆运算，至于它们施行于什么实体上，则是次要的. 最后这一区别可以说明为什么牛顿对无限小的逻辑基

础十分关心，而莱布尼兹却始终不大关心严密性问题.从研究的方法上看，牛顿在微积分的应用上更多地结合了运动学，造诣较莱布尼兹高一筹；但莱布尼兹的表达形式简洁又准确，胜过牛顿，强有力促进了微积分的发展，牛顿自由地用级数表示函数；而莱布尼兹却宁愿用有限的形式.从工作方式来看，牛顿是经验的、具体的和谨慎的；而莱布尼兹是富于想象的、喜欢推广的而且是大胆的.

微积分的出现，大大改换了数学的面貌.随着人们对微积分的重大价值的逐渐发现，也出现了两场重大的争论.

一场争论是关于微积分发明优先权的论战.牛顿和莱布尼兹都对微积分的创建作出杰出贡献.他们在总结前辈工作的基础上，各自独立完成了这一空前盛业.但由于狭隘的民族偏见，竟发生了优先权的争论，前后绵延了一百多年.这场无谓的争论使欧州数学家分裂成两派：大陆派和英国派.争论的结果使英国和大陆的数学家停止了思想学术的交流，英国数学界陷入沉寂，落后了近一个世纪.而大陆的数学家继续研究莱布尼兹的分析法，陆续出现了伯努利家族、欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯和柯西等大数学家，呈现出一派兴旺景象.

另一场争论是关于微积分理论基础的论战.微积分来源于实践，又含有丰富生动的具体内容，解决大量初等数学所未曾解决的实际问题.但在它的诞生初期，还缺乏严格的逻辑基础，甚至包含某些逻辑上的混乱，引起所谓第二次数学危机.矛盾集中在牛顿、莱布尼兹赖以建立这门科学的基础 —— 无穷小量上.牛顿的瞬(无穷小)有时是零，有时又不是零而是有限的小量.莱布尼兹的 dx, dy 也不能自圆其说.他们在推导导函数的过程中，一开始就把变量的增量当成微分，然后对中间出现的一些项，采取“用魔术变掉”和“暴力镇压”的方法，通过错误的数学途径得到了正确的结果，从而使微积分蒙上了神秘的色彩.由于没有清楚的无穷小概念.也就没有清楚的导数、微分和积分等概念.无穷大概念亦不清楚.对于级数的敛散性不加考虑.也不考虑连续性就进行微分，不考虑导数、积分的存在性以及可否展成幂级数等.微积分基础存在的不足，使它遭到了以大主教贝克莱为代表的宗教界人士的大肆攻击.贝克莱 1734 年曾嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”极尽挖苦之能事.贝克莱之流的攻击决不是建设性的，但他们也确实击中了问题之要害.马克思曾称这个时期的微积分为“神秘的微分学”.

尽管微积分初期逻辑上有缺陷，但它在实践方面的胜利，却使人们

足以信服其威力，连贝克莱也不得不说："流数术是一把万能的钥匙，借着它近代数学家打开了几何以至大自然的秘密"．而大部数字家则暂时搁下逻辑基础不顾，勇往直前去开避新的园地．达朗贝尔有句名言，现在是"把房子盖得更高些，而不是把基础打的更加牢固．""向前进！你就会产生信念！"

在英国，牛顿的弟子罗·库兹详细地研究了微积分的应用，并编制了积分表．1715年，泰勒发表了《增量方法及其逆》，奠定了有限差分方法的基础，得到著名的单变量函数幂级数展开的泰勒公式，在公式证明中没注意到收敛性问题．严格的证明是由一个世纪后的柯西给出．泰勒级数的重要价值半个世纪后才被拉格朗日所认识，并试图以此作为基础建立全部分析学．19世纪，维尔斯特拉斯用幂级数观点建立起复变函数的理论．1730年，棣莫佛著《关于级数和求积的综合分析》，大大扩充了微积分学的范围．1742年，马克劳林著《流数论》，系统地解说了牛顿的方法，提出了马克劳林级数．《流数论》有力地捍卫了牛顿，驳斥了贝克莱主教的攻击．在分析学方面有所作为的英国数学家还有斯特林、约翰·兰登等．但由于优先权之争，兰登以后一个多世纪，英国没出过第一流数学家．拉兰得曾感叹："1764年以后英国没有一个第一流的分析学家！"

而18世纪的欧洲大陆，在伯努利家族激励下，微积分正迅猛地成为一种有巨大分析力的工具，一种用精巧的符号表示出来的科学．伯努利家族是世界数学史上一个人才辈出，产生过数十名数学家的著名的数学家族．雅各·伯努利和约翰·伯努利兄弟把莱布尼兹的学说发扬光大．他们解决了曲线的曲率、法包线、拐点、曲线弧长等课题．18世纪对微积分发展贡献最大的数学家是约翰·伯努利的学生欧拉．他的《无限小分析引论》(1748)、《微分学》(1768—1780)、《积分学》(1770)都是里程碑式的著作．他证明了多元函数的微分与次序无关的定理；得出了全微分的可积条件；给出了求未定型$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$极限的法则，并把导数作为微分学的基本概念．在积分学方面，欧拉明确提出了不定积分和定积分的概念，并给出了不少求定积分的基本方法．

18世纪后期，法国数学又崛起，出现了大批对微积分发展有重要贡献的数学家，如拉格朗日、达兰贝尔、拉普拉斯、勒让德、傅里叶等．1797年拉格朗日出版其巨著《解析函数论》．他最认识到微积分的基础

处于完全不能令人满意的状态，从而试图使微积分严谨化的最早的第一流的数学家．他企图抛弃无穷小概念，在泰勒级数基础上建立起全部分析学，未能成功．在此书中提出了著名的泰勒公式的拉格朗日型余项．拉格朗日还将分析学方法应用于力学等研究，大量发展了微分方程理论，奠定了现代力学的基础，拉普拉斯称拉格朗日的论文是“分析学家的杰作，因为它的主题重要，方法漂亮，技巧精美．”这正反映了拉格朗日做为第一位真正的分析学家的特点．傅里叶是公认的法国分析学派的代表，现代数学分析中经常用到的傅里叶级数、傅里叶积分、傅里叶变换就是以他的名字来命名的．

微积分在 18 世纪获得了巨大发展．沿着牛顿、莱布尼兹开创的道路，经过许多技巧高超的分析学家的努力，微积分从少数几个尽管天才，但毕竟单薄的概念发展成为内容丰富，领域广阔的学科，其中包括常微分方程、偏微分方程、变分法这样一些重要分支．18 世纪的数学家们冲破了传统的欧几里得演绎框架．热情地从自然界、自然科学以及社会生活的多方面汲取灵感，不倦地探索新的概念、技巧和成果．但所有这些都是建立在不严格的基础上的．比如函数的概念很模糊，无穷级数不考虑敛散性，任意进行形式的运算．拉格朗日在《解析函数论》中竟认为连续函数一定可微，并一定可展成幂级数．这种不严格情况妨碍了微积分的进一步发展．只是由于 18 世纪分析学发展迅猛，简直令人眼花缭乱，使人们来不及检查和巩固其理论基础．雕琢已有成果，赋予新发明以严密的逻辑基础，只好把这个历史任务留给下一世纪．

19 世纪 20 年代，分析学许多迫切问题已基本上得到解决，数学家们于是转向微积分基础的重建．这方面工作可以说始于捷克波尔查诺，他首先举出连续不可微函数的例子，为数学严格化指出了应遵循的方向，但却没有在当时引起同行们的注意．首先把分析建立在严格基础上的是柯西．他于 1821 年发表《分析教程》．以极限作为微积分的基础．他不是采用几何或力学的直观方法定义极限，而是用数、变量和函数给出．进一步将无穷小定义为以零为极限的变量，相应地也定义了无穷大．在此基础上，柯西严格地定义了函数的连续、导数和积分，研究了无穷级数的收敛性．其后，1826 年阿贝尔对连续函数级数进行研究，指出要严格限制滥用级数展开及求和．而级数一致收敛的概念 20 年后才被斯托克斯和塞得尔提出．1829 年狄里克雷给出了函数的现代定义．在这些工作基础上，维尔斯特拉斯消除了其中不确切之处，建立了极限理

论中的 ε—δ 方法，确定了一致收敛性的概念．他还举出了处处连续、处处不可微的函数例子，这样，经过布尔查诺、柯西、维尔斯特拉斯以及康托等数学家不懈地努力，在潜无穷的意义下，建立了较严格的极限理论，以 ε—δ 的描述方法代替了无穷小量的方法，以求增量、算比值、取极限的三步曲方式建立求导法则，从而在数学推理形式上解决了贝克莱主教之流的诘难，微积分理论有了较扎实的理论基础．

但是，分析的严格化最终还需仰赖于实数理论和集合论．1872 年，在德国同时出现了实数三大派理论：戴德金在《连续性与无理数》中阐述了他的实数分割理论；康托在《数学纪事》上发表了他关于无理数的基本序列理论；维尔斯特拉斯提出用递增有界数列定义无理数．这三种实数理论是等价的．1892 年，巴赫曼提出用区间套原理建立实数理论．戴德金、康托和维尔斯特拉斯的实数理论，刻划了实数集的有序性、稠密性、完备性（连续性）等性质，使微积分这座大厦有了坚固的基础．1883 年康托建立集合论．集合现已成为数学最基本的概念．集合论的观点和思想方法已渗透到数学几乎所有的领域，使数学的基础变得严密可靠．实数理论、集合论和柯西、维尔斯特拉斯的极限论使微积分理论建立在巩固的逻辑基础上，结束了近三百年来的混乱局面，并推动了函数论的发展．

1960 年美国数理逻辑学家鲁滨逊创立非标准分析．他利用数理逻辑模型论，成功地构造出实数集 R 的一个非标准模型 R^*，引入了新型的数 —— 无穷小量，在严密的逻辑基础上，建立起一种新的分析理论．它以逻辑的合理性消除了莱布尼兹无穷小的神秘性，并以数量化的方法表现“无限趋于 0 的过程”，更深刻地揭示了微积分的本质．无穷小量在严格的数学中又占有了一定的地位．

微积分传入我国的第一部著作是清代李善兰和伟烈亚力合译的《代微积拾级》十八卷（1859），它译自美国罗密士的《解析几何与微积分》（1850），全书包括解析几何、微分学和积分学三部分，基本上相当于现在的《高等数学》．该书许多译名已保留至今．如 differential 译为微分，integral 译为积分，funetion 译为函数，limit 译为极限等．稍后晚清数学家华蘅芳对微积分的传入也有突出贡献．他所译《微积溯源》内容更丰富，水平也较高．

三. 级数理论

级数理论是数学分析的重要内容之一，其研究的中心问题是如何用级数来表示已知的函数(即把函数展开为级数)，以及研究由函数所展开成的级数的敛散性. 由于级数具有结构简单的特点，所以成为研究函数的一个有力工具.

在历史上，级数出现的很早，亚里士多德在公元前 4 世纪就知道公比小于 1(大于 0) 的几何级数具有和数. 14 世纪奥尔斯姆就通过类似现代教科书中的方法证明了调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散到 $+\infty$.

级数真正被大量应用还是在 17 世纪建立微积分时开始的. 1669 年牛顿发现了著名的牛顿二项式定理，对于任意实数 c，函数 $(1+x)^c$ 都可以写成 x 的幂级数 $\sum a_k x^k$，即

$$(1+x)^c = 1 + cx + c(c-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + c(c-1)\cdots(c-n+1)\frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

而在 1668 年默卡托尔曾发现了对数的幂级数

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

为了要制定精确度较高的函数表. 1670 年格列哥里，1676 年牛顿先后独立发现了格列哥里 —— 牛顿内插公式. 这个公式是把函数展开为幂级数的最初方法. 牛顿将其流数术方法和将函数展开成无穷级数的技巧结合起来，使之成为更加强有力的方法. 用无穷级数他解决了一些过去无法解决的问题. 他由除法得到

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,$$

然后利用级数，很容易计算出 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 图形下的面积. 他利用二项式定理求得

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6\cdots.$$

在牛顿手中，无穷级数已成为其微积分的基本工具. 他同时还获得了三角函数、对数函数等的级数展开式.

1715年泰勒通过对格列哥里——牛顿内插法的研究，提出了著名的泰勒公式，发明了将函数展成无穷级数的一般方法：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots,$$

泰勒公式虽然使任意单变量函数展开为无穷级数成为可能，但他对该定理的证明并不严谨，也没有考虑级数的收敛性.

形如

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

的幂级数展开式是泰勒级数的一种特例. 早在1717年斯特灵就对代数函数给出了这种特例，后于1730年对一般函数进一步作了介绍，但未引起数学界重视. 1742年马克劳林在《流数术》中阐明了这个展式，通常便称其为马克劳林级数. 马克劳林是用待定系数法证明这个展式的，但证明中也没考虑级数的收敛性.

泰勒公式、马克劳林公式出现以后，人们陆续得到了一切初等函数的幂级展开式，级数成为研究函数的重要工具，得到广泛的应用.

莱布尼兹对于无穷级数作过研究. 他曾第一个给出$\frac{\pi}{4}$的级数表达式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots,$$

并考察了用级数的前有限项之和作为$\frac{\pi}{4}$近似值时误差的估计. 他还在研究交错级数基础上，提出了交错级数敛散性的莱布尼兹判别法.

伯努利兄弟也对级数进行过专门的研究. 雅各·伯努利在研究无穷级数求和问题时，证明自然数平方的倒数和是个有限数，即伯努利级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

有有限和，但他长期求不出此值.

欧拉是把无穷级数从一般的工具转变为一个重要的研究科目的数学家. 在无穷级数研究方面取得丰硕成果. 他得知伯努利级数后，认真作了研究，发现了这个和的各式各样表达式，还算出了其近似值1.644934，但并不满足，后来改换思路，通过类比代数方程得到了令人

满意的结果(1734)：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

但有人指责这种从有限项方程过渡到无限项方程的作法缺乏逻辑依据. 1748 年欧拉在《无穷小分析引论》中,终于给出了严格证明,他计算出著名的黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 在偶点的值

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2k}=a_{2k}\pi^{2k}.$$

他证明 a_{2k} 是有理数,并可通过伯努利数表示. 欧拉还研究了调和级数,相当精确地计算出欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$=0.5772156649015328606065 1209\cdots$$

欧拉还曾由

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

出发,令 $x=-1$ 得到

$$1-1+1-1+\cdots\cdots=\frac{1}{2},$$

但他认为对于这类发散级数,不能象收敛级数那样,要求它的各项陆续相加时可任意接近其和. 他写道:“有些无穷级数之和乃是这样一个有限表达式,将它展开时就产生了该级数.” 近代发散级数理论,正是从这种对级数和的广义理解中产生的.

从以上论述我们可以看出,在微积分创立初期,人们通过微积分的基本运算与级数运算的纯形式的结合,得到了一批初等函数的无穷(幂)级数的展开式. 从此以后,级数便作为函数的分析等价物,用以计算函数的值,用以代表函数参加运算,并以所得结果阐释函数的性质. 在运算过程中,级数被视为多项式的直接推广,并且也象通常的多项式一样对待. 这些基本观点的运用一直持续到 19 世纪初年,取得了许多成果.

由于把级数等同于多项式看待,没能对级数的根本性问题——收敛性和发散性引起足够的重视,结果常常出现一些荒谬的结果. 如级数

$$1-1+1-1+\cdots\cdots$$

曾引起过激烈的争论.若将其改写成$(1-1)+(1-1)+\cdots$的形式,其和应为0;若将其改写成$1-(1-1)-(1-1)\cdots$的形式,其和应为1;而将其和记为S,则有$S=1-S$,从而得到$S=\frac{1}{2}$.这真令人不可思议.这些现象迫使人们必须认真考虑级数的严格定义,以及探讨运算的合理性.

1811年法国傅里叶首先给出了级数收敛的严格定义.傅里叶还发现任意函数都可展开成三角级数(傅里叶级数)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

超几何级数

$$F(a,b,c,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}x^n$$

是欧拉1769年研究超几何方程级数解时得到的.高斯对于超几何级数进行了系统的研究.在此研究中他认识到,需要把级数的使用限制在它们的收敛范围内.

1821年柯西在其《代数分析教程》中给出了著名的柯西收敛准则,还给出了正项级数收敛的一些具体判别法,如比值法和根式法.柯西还严格地论证了泰勒级数的敛散性.柯西提出的级数收敛性理论,在当时数学界造成了巨大的轰动.有一次科学会议上,柯西提出收敛性问题,会后拉普拉斯急忙赶回家并隐居起来,认真检查起其《天体力学》中所用到的级数,直到看到书中用到的每一个级数都是收敛的时候,才松了一口气.

阿贝尔在1826年研究无穷级数时,得到了一些级数收敛的判别准则以及关于幂级数求和的定理,当时发散级数是一个使数学家们颇感棘手的问题,关于这个"魔鬼的发明",阿贝尔认为问题的症结所在是当时的数学缺乏严密性.在此基础上他得出幂级数求和定理(阿贝尔定理).

微积分基本运算与级数运算结合的需要,引导人们加强或缩小收

敛性,因而提出了一致收敛的概念.维尔斯特拉斯于1841年提出一致收敛概念.并利用一致收敛概念给出了级数逐项积分和在积分号下求微分的条件.他还发现在闭区间上任何连续函数都可以表示为该区间上绝对一致收敛的多项式级数.斯托克斯(1847)和赛德尔(1848)也对一致收敛理论作出过贡献.

在天文学、物理学中,函数的级数展开,作为一个整个函数的分析的等价物,在收敛范围以外的不断的成功的使用,又迫使人们推广或扩大收敛概念而提出了渐近性与可和性.发散级数求和理论是收敛级数研究的扩展,庞加莱(1886)、切萨罗(1890)、波莱尔(1895)都有重要的贡献.

通过近三百年的努力,级数理论就这样逐渐地建立起来了.

四.常微分方程

常微分方程被定义为包含一个自变量和它的未知函数以及未知函数的微商的方程.它可以说是方程和微分两个概念结合的产物.常微分方程在牛顿、莱布尼兹创立微积分的时侯就已经遇到了.而其理论的形成和发展是与力学、天文学、物理学及其它自然科学技术的发展相辅相成,互相促进.数学其他新分支,如复变函数、李群、组合拓扑学等都给常微分方程论的发展以深刻的影响.常微分方程论的形成和发展大致可分为四个阶段.

1.萌芽阶段

16世纪一些科学家在研究工作中遇到不少常微分方程问题.如纳皮尔在发明对数学时,涉及到形如$\frac{d(a-y)}{dt}=y$的微分方程,他还求出其近似解;伽利略研究落体运动时,曾得出过微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}=g$的解$x=\frac{1}{2}gt^2$.笛卡儿研究已知光线由定点射出,经过镜面反射之后达另一定点,求镜面形状的问题,即"切线的反问题"时,也涉及到微分方程问题.微积分产生之前生产实践和科学研究已向数学家们提供了丰富的微分方程研究课题.只是还未能找到可行的普遍解法.

2.初创阶段

微积分的创立者牛顿和莱布尼兹在考察切线的反问题——由切线确定曲线时,便提出了微分方程的概念.1676年莱布尼兹在致牛顿

信中，首次引进“微分方程”这个名称. 在他们的著作中，都构造和解决了某些类型的常微分方程.

微分方程的早期研究侧重于各类一阶方程的通解问题. 伯努利家族在这方面有重要建树. 约翰·伯努利在 1694—1697 年研究了分离变量法. 找到将一次齐次方程化为可分离变量型方程的方法；雅各·伯努利用变量替换法解决了有名的伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n.$$

伯努利兄弟还利用变换 $y = uv$ 解决了线性方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$$

约翰之子丹尼尔·伯努利 24 岁时解决了有名的黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

18 世纪关于常微分方程最杰出的工作属于欧拉. 欧拉曾研究过具有对称形式的方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

提出了利用积分因子求解方程的方法. 他还利用变换 $x = e^t$ 将欧拉方程

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_ny = 0$$

化为常系数线性方程而求解. 欧拉还发现，微分方程一般有无穷多个解，于是提出了“通解”和“特解”的概念. 欧拉在后期还为某些类型的一阶方程建立起积分因子并推广到高阶方程；考察了黎卡提方程的性质；由圆膜振动问题得到了贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

欧拉求一阶方程初值问题近似解的“欧拉方法”，构成后来证明解的存在性定理的基础.

达朗贝尔、拉格朗日、泰勒、拉普拉斯和克雷洛等人在常微分方程方面也做过不少工作. 到 18 世纪末，常微分方程论已具备完整的框架，成为一门理论.

3. 奠基阶段

19 世纪初、中期是数学史上一个大变革时期，数学分析奠基工作

的兴起，群论的产生，复变函数论的开创等都对常微分方程论产生深刻的影响. 常微分方程的基础理论受到重新审定并加以巩固. 最迫切需要解决的问题是解的存在性问题和能够求出初等函数通解的可能性问题，通常将求解满足特定的初始条件的常微分方程的问题，称为常微分方程的柯西问题或定解问题，亦称作初值问题. 柯西引入长函数概念和极限计算的方法，严格证明了初值问题解的存在性和唯一性. 柯西还创造性地将常微分方程的研究由实数域扩展到复数域，开拓出常微分方程解析理论这一重要分支.

柯西证明初值问题

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

在 $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 连续的区域内必有唯一解存在. 后来李普希兹于 1876 年用更广泛的"李普希兹条件"

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

代替 $f'_y(x,y)$ 的连续性假设，改进了这一证明. 以后，皮亚诺仅在 $f(x,y)$ 连续的假设下，证明了初值问题解的存在性. 1890 年毕卡将初值问题化为等价的积分方程，采用逐次逼近的方法证明解的存在性和唯一性.

除了通解问题和初值问题，这个阶段还出现了由斯图姆和刘维尔开创的边值问题和特征值问题的研究领域. 1833 年斯图姆首先着手对二阶常微分方程的边值问题的研究，刘维尔也参加这一工作. 1836——1837 年斯图姆给出了方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

在给定条件下具有非零解 y 的条件，以及这些解与特征值的关系. 边值问题以后在弹性力学、量子力学及技术中有着广泛应用，并逐渐形成微分方程的一个重要分支.

4. 现代发展阶段

从 19 世纪末开始，常数分方程论进入一个新的发展阶段，出现了四个方向的重大发展.

(1) 常微分方程变换群理论

1874 年 M.S. 李将群的概念用于常微分方程，引入了将常微分方程的解变为解的连续变换群的概念. 从理论上将各种各样可以用积分求解的微分方程加以统一分类.

(2) 常微分方程解析理论

1841 年刘维尔研究了黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = P(x),$$

得到该方程的解一般不能由初等函数给出的结论. 这就等于宣告,从 17 世纪起人们所走的寻求微分方程初等解的道路,前途极为有限. 庞加莱、班勒卫、福克斯和克莱因等人,便开始扩充微分方程解的范围,不管是否是初等函数,只要满足微分方程,都加以考虑. 这就使得微分方程的可解范围大大扩充,微分方程从而成了特殊函数的丰富来源. 这样,微分方程与函数论建立起密切的联系,产生了微分方程的解析理论,解析理论是复数域上的常微分方程理论,应用复变函数论研究微分方程的性状,以及把微分方程的解视为由方程定义的解析函数,并直接从微分方程本身研究解的性质的理论.

(3) 常微分方程定性理论

由于绝大多数微分方程不能用初等函数的积分来表出通解,而工程技术、天文学、物理学中对于所出现的常微分方程又并不一定要求出解,往往只需要知道解的某些性质. 在不引入新函数而又不能求出解的情况下,对方程的解进行定性研究,即讨论解的性质. 这便导致了常微分方程定性理论的出现. 1881—1886 年庞加莱连续发表了《由微分方程所确定的积分曲线》的四篇论文,这些论文标志着常微分方程定性理论的完成,俄国数学家李雅普诺夫对常微分方程定性理论也作出了卓越贡献,自庞加莱以来几十年间,定性理论有了充分的发展,在理论方面和应用方面都有重大成就. 现在仍是一个很活跃的分支.

(4) 常微分方程近似数值计算

一般的常微分方程常常不能求得精确解析解,需要借助于求近似解或数值解,或两者兼而有之.

摄动方法是重要的近似方法,它是借助于选定的并且具有精确解的微分方程组,逐次近似地描述所研究的微分方程. 关于正则摄动问题常用林斯泰特 —— 庞加莱方法、克雷洛夫 —— 博戈柳博夫方法和调和均衡法. 关于奇异摄动问题有文策尔、克拉默斯等的 WKB 方法,兰格和奥尔弗的 LO 方法以及马斯洛夫提出的方法等.

由于一般微分方程不能求得精确解析解,工程技术及自然科学各部门的需要迫使人们去寻求近似解析解,即解析形式的容许一定误差的解. 常用求近似解析解的方法有两种:线性化和小参数展开.

附　录　2

高等数学中有关数学家简介(以出生先后为序)

1. 笛卡儿(Desartes Rene，1596—1650)

笛卡儿是法国数学家、哲学家、物理学家，生于法国图赖纳省拉海镇的一个古老的贵族家庭，1612年从法国最好的学校之一——拉弗里舍的耶稣会学校毕业，1616年获普互捷大学的法律学位. 在结束学业时，他就暗下决心：一是不再在书本的字里行间求学问，而要向"世界这本大书"讨教，以获得经验"；二是要靠对自身之内的理性的探索来区别真理与谬误.

此后，他便背离家庭的职业传统，开始探索人生之路. 1617年起在军队里当过几年兵，在离开军队之后又到德国、丹麦、荷兰、瑞士、意大利等国旅行，所见所闻丰富了他的见识，更重要的是对当时科学的最新成果增强了解. 1628年定居荷兰，在那里生活的20年中，他对哲学、数学和自然科学进行了广泛而深入的研究，写出了一系列著名的作品.

笛卡儿是欧洲近代哲学的主要开拓者之一，他主张抛弃中世纪以来的神学世界观，声称一切知识只有经过合理的鉴定，才能得到逻辑上的承认. 他先后出版了《形而上学的沉思》和《哲学原理》两本名著，前者是关于物理学的全部基础，后者主要是阐述他在物理学和生物学方面的研究成果. 由于其观点触犯了经院哲学和教会的教义，因此受到教会的迫害，这些著作也被列为当时的禁书. 然而他的哲学思想受到很多人的推崇，黑格尔称他是"现代哲学之父".

笛卡儿对数学的最大贡献是创立了解析几何学. 他认为数学比其它科学更符合理性的要求，他是以下列三种身份的结合来研究数学的：作为哲学家，作为自然界的探索者，作为一个关心科学用途的人. 他的

基本思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来．为此他写了《几何学》．他的《几何学》是作为《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》一书中第三个附录中出现的，其它两个附录是《折光》和《陨星》．

笛卡儿的理论以两个观念为基础：坐标观念和利用坐标方法把带有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线．他的《几何学》共分三个部分：第一部分包括对一些代数式作几何的原则解释，在这一部分中，笛卡儿把几何算术化了；第二部分讨论了曲线的分类法以及作曲线的切线的方法；第三部分涉及高于二次方程的解法．在他的《几何学》中第一次出现变量与函数的思想．不过没有使用这两个术语．笛卡儿所谓的变量，是指具有变化长度而不变方向的线段，还指连续经过坐标轴上所有点的数字变量．正是变量的两种形式使笛卡儿试图创造一种几何与代数互相参透的科学．笛卡儿的功绩正是把数学中两个研究对象“形”与“数”统一起来，并在数学中引入“变量”，完成了数学史上一项划时代的变革．对此恩格斯给予了极高的评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了．”

应该指出，笛卡儿的坐标系是不完备的，他未曾引入第二条坐标轴，即y轴，y轴是由18世纪的瑞士数学家克拉美在他的著作《代数曲线分析引论》中引入的．另外笛卡儿也没有考虑横坐标的负值．

笛卡儿对韦达所采用的符号作了改进，他用字母表中开头几个字母a,b,c等表示已知数，而用末尾几个字母x,y,z等表示未知数，这种表示法一直沿用至今．笛卡儿还最先得出凸多面体顶点数V，边数E和面数F之间存在的关系：$V-E+F=2$．他又是最先讨论所谓笛卡儿叶形线的．在他的通信中，他还考虑高次抛物线($y^n=px,n>2$)，并且给出了作摆线切线的相当精巧的方法．

笛卡儿孜孜不倦、勤于思考，他不喜欢读带有详细解释的科学论著．他读书的方法，是把书拿来后，先弄清作者的主要意图，他只读完开头部分，而那些应由作者得出的结论，他总是力求自己得出．他认为这种方法是值得所有读者借鉴的，为此他自己的著作总是阐述得很简洁．例如，他在《几何学》开头部分的某一页上写道：“我不准备比较详细地叙述，因为那样会使你们失去独立分析的愉快，会使你们的头脑失去在进行这种练习时所得到的好处．这种好处，依我看，是能从这门科学中

吸取到的主要的好处.”

笛卡儿强调科学和目的在于“造福人类”,使人成为自然界的“主人和统治者.”

2. 牛顿(Newton Isaac, 1642—1727)

牛顿是英国数学家、物理学家、天文学家,生于英国林肯州的乌尔索浦村的农民家庭里,在他出生前两个月父亲就去世了,从小过着贫困孤苦的生活,他曾在低标准的地方学校中接受教育,在中学时没有显示出特殊才华.1661 年考入剑桥大学三一学院,由于家境经济困难,学习期间还在从事一些勤杂劳动以减免学费.但他学习勤奋,并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导,认真钻研了科珀尼斯、伽利略、开普勒、瓦里斯、笛卡儿、巴罗等人的著作,并做了不少实验,从而打下了坚实的基础,1664 年获学士学位.

1665 年,伦敦地区流行鼠疫,剑桥大学暂时关闭,牛顿回到乌尔索浦,在乡村幽居的两年中,他终日思考各种问题,探索大自然的奥秘.他平生的三大发明:微积分、万有引力定律和对光的光谱分解,都萌发于此,这时他年仅 23 岁.1667 年,他回到剑桥攻读硕士学位,在获得学位后,成为三一学院的教师.并协助巴罗编写讲义,撰写微积分和光学论文.他的学术成就得到了巴罗的高度评价.1669 年,巴罗坦然宣称牛顿的学识已经超过了自己,并把“路卡斯教授”的职位让给了牛顿,牛顿时年仅 26 岁.

牛顿发现微积分,首先得助于他的老师巴罗,巴罗的“微分三角形”的深刻思想,给他极大影响;另外费马作切线的方法和沃利斯的《无穷小算术》也给了他很大启发.形成牛顿微积分理论的,主要是他的下述三个论著.

《运用无穷多项方程的分析学》,在这一著作中他给出了求瞬时变化率的普遍方法,阐明了求变化率和求面积是两个互逆问题,从而揭示了微分与积分的联系,即沿用至今的所谓微积分的基本定理.当然,牛顿的论证在逻辑上是不够严密的.正如他所说:“与其说是精确的证明,不如说是简短的说明.”他还应用这一方法,得到了许多曲线下的面积,并解决了一些能够表示成积分和式的其它问题.这一著作是 1669 年牛顿在给他朋友散发的一本小册子中发表的.这本书直到 1711 年才出版.

《流数术和无穷级数》，在这一论著中，牛顿对他的微积分理论作了更加广泛的说明，在计算方法的技术和应用方面也有很大进展，概念结构上有了变化. 例如，他改变了过去静止的观点，认为变量是由点、线、面连续运动而产生的. 他把变量叫做“流”，把变量的变化率叫做“流数”，并引进了高阶流数的概念，他还用更清楚准确的语言阐明了微积分的基本问题：其一是，已知两个流 x 与 y 之间的关系，求它们的流数之间的关系；其二是，已知流数 $\dot{x}$ 与 $\dot{y}$ 之间的关系，求它们的流之间的关系. 并指明这两个问题是互为逆转的. 在这一著作中，牛顿又把流数法用于隐函数的微分，求函数的极值，求曲线的切线、长度、曲率和拐点. 他还分别给出了直角坐标和极坐标下的曲率半径公式. 并附了一张积分简表. 这一著作写于 1671 年，但直到 1736 年才出版.

《求曲边形的面积》，这是一篇研究可积分的曲线的经典文献. 它其中的一个主要目的在于纯清基本概念. 牛顿试图把引进“无穷小”而造成的混乱局面排除掉. 因此他把流数定义为“消逝增量”的最终比，和“初生宗量”的最初比，这尽管仍是不严格的模糊概念. 然而用极限方法作为微积分概念基础的思想在这里初露端倪. 这篇论文写于 1676 年，发表于 1704 年.

牛顿上述三个论著是微积分发展史上的重要里程碑，开辟了数学飞跃发展的新纪元.

牛顿的名著《自然哲学的数学原理》，不但包括了他对微积分的许多论述和应用，更重要的是它完成了对于日心地动说的力学解释，把开普勒的行星运动规律，伽利略的运动论和惠更斯的振动论等统一成为力学的三大定律. 这部巨著 1687 年一问世，立刻被人们认为是人类睿智的至高成就之一. 哈雷赞誉它是“无与伦比的论著”.

由于牛顿对科学作出了巨大贡献，他受到了人们的崇敬，1703 年被选为皇家学会主席，1705 年被女王封为爵士. 莱布尼兹说：“在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过一半. ”汤姆斯说：“牛顿的发现对英国及人类的贡献超过所有英国国王. ”

牛顿为人谦逊，他那些不朽的发现大都藏在自己的心头，他的大部分著作都是在朋友们劝告和坚决请求下才整理出来的. 他在临终时说：“我不知道世人对我怎样看法，但是在我看来，我只不过象一个在海滨玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无涯的真理的大海，却还在我的前面未曾被我发现. ”他还说：“如果我

之所见比笛卡儿等人要远一点，那只是因为我是站在巨人肩上的缘故”.

3. 莱布尼兹(Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646—1716)

莱布尼兹是德国数学家、物理学家、哲学家，生于德国东部的来比锡. 其父是来比锡大学教授，在莱布尼兹 6 岁时就去世了. 莱布尼兹从小聪敏好学，经常进入他父亲的书房阅读各种不同学科的书籍，中小学的基础课程主要是他自学完成的. 16 岁进入来比锡大学学习法律，并钻研哲学，1664 年取得该校哲学学士学位. 1666 年获阿尔特多夫大学博士学位并获得该校教授席位. 1672——1676 年，他任外交官，余暇则在惠更斯的指导下，深入钻研笛卡儿、帕斯卡等人的著作，并写了成百页的数学笔记. 这些笔记显示出一个最伟大的才智，从中可以看出莱布尼兹为了达到理解和创造是怎样奋斗的. 1676 年他到德国西部汉诺威，担任腓特烈公爵的顾问和图书馆长近 40 年，这使他有空闲时间可探讨和研究各门所喜爱的学科. 这期间各种课题的论文的撰写数量之多浩如烟海. 莱布尼兹 1673 年被选为英国皇家学会会员，1682 年创办了《博学文摘》，1700 年被选为巴黎科学院院士，同年他创建了柏林科学院，并但任第一任院长.

莱布尼兹以一切领域的知识作为自己追求的目标. 他被誉为“德国的百科全书式的天才”. 他的研究涉及数学、哲学、法学、力学、光学、流体静力学、气体学、海洋学、生物学、地质学、机械学、逻辑学、语言学、历史学、神学等 41 个范畴. 他终生努力寻求的是一种普遍的方法，这种方法既是获得知识的方法，也是创造发明的方法，他最突出的成就是创建了微积分的方法.

莱布尼兹才气横溢，思如泉涌，但却厚积而薄发，他创立的微积分的许多原理，都记录在 1671—1677 年的数学笔记中.

莱布尼兹研究了巴罗的《几何讲义》之后，意识到微分与积分是互逆的关系，他得出了，求曲线的切线依赖于纵坐标与横坐标的差值(当这些差值变成无穷小时)的比. 而求面积则依赖于在横坐标的无穷小区间上的纵坐标之和或无限窄矩形之和. 并且这种求和与求差的运算是互逆的. 即莱布尼兹的微分学是把微分看作变量相邻二值的无限小的差，而他的积分概念则以变量分成的无穷多个微分之和的形式出现.

莱布尼兹的第一篇微分学论文于 1684 年发表在《博学文摘》上，文

中介绍了微分的定义，函数的和、差、积、商以及乘幂的微分法则，关于一阶微分不变形式的定理，并于二阶微分的概念，以及微分学对于研究极值，作切线，求曲率及拐点的应用．他关于积分学的第一篇论文发表于 1686 年，关于积分常数的论述发表于 1694 年．他得到的特殊积分法有：变量替换法、分部积分法、在积分号下对参变量的积分法，利用部分分式求有理式的积分方法等．他还给出了判断交错级数收敛性的准则．在常微分方程中，他研究了分离变量法，得出了一阶齐次方程通过用 $y=vx$ 的代换可使其变量分离，他还得出了如何求一阶线性方程的解的方法．他给出用微分求旋转体体积的公式等等．

莱布尼兹在创建微积分的过程中，花了很多时间来选择精巧的符号，他认识到好的符号不仅可以起到速记作用，更重要的是它能够精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系．现在微积分中的一些基本符号，例如微分 dx、二阶微分 d^2x、积分 $\int ydx$、导数 $\frac{dy}{dx}$ 都是他创立的．

莱布尼兹和牛顿研究微积分学的基础，都达到了同一个目的，但是各自的方法不同．莱布尼兹是作为哲学家和几何学家对这些方法感兴趣而提出的，牛顿则主要是从运动学的观点出发而引深的．但他们都分别研究了导数、积分的概念和运算法则，阐明了求导数和求积分是互逆的两种运算，从而建立了微积分的重要基础．牛顿在时间上比莱布尼兹早 10 年，而莱布尼兹公开发表的时间却比牛顿早 3 年．

作为一个数学家，莱布尼兹的声望虽然是凭借他在微积分的创建中树立起来的，但他对其它数学分支也是有重大贡献的．例如，对笛卡儿的解析几何，他就提出过不少改进意见，“坐标”及“纵坐标”的概念都是他给出的；他提出了行列式的某些理论；他为包络理论奠基作了很多工作，并规定了曲率中的密切圆．莱布尼茨是组合拓扑的先驱，是数理逻辑学的鼻祖．

莱布尼兹是现代机器数学的先导，他在帕斯卡加、减法机械计算机的基础上进行改进，使这种机械计算机能进行乘法、除法、自乘、以及开平方和开立方的演算．

莱布尼兹是著名的哲学家，他的哲学著作是哲学博物馆中和珍品．他还是一位有特殊才干的外国语言精通者，并赢得了梵文学学者的称号．

4. 罗尔(Rolle, Michel, 1652—1719)

罗尔是法国数学家，生于法国的巴斯 —— 奥文安伯特，其父是一个小店主. 罗尔只受过正规的初等教育，年青时贫困潦倒，靠充当公证人与律师抄写员的微薄薪水养家糊口. 他业余刻苦自学代数与丢番都(Diophantus)分析(数论的一个分支). 1682 他发现了丢番都分析中一直未解决的一个困难问题的精巧解法，从而使其命运获得转机. 此后曾担任初等数学教师和陆军部行政官员. 1685 年进入巴黎科学院担任低级职务. 1699 年才获得科学院发给的固定薪水.

罗尔在数学上的成就主要是在代数方面，专长于丢番都方程的研究，而对微积分一直持怀疑、反对的态度.

罗尔的时代正当牛顿、莱布尼兹的微积分刚诞生不久，由于新生所带来的逻辑上的缺陷，遭受了多方面的非议，其中就包括罗尔. 在 1700 年，法国科学院发生一次有关无穷小方法的真实性的论战. 在这次论战中，罗尔认为无穷小方法导致谬论，他说："微积分是巧妙的谬论的汇集"，约翰·伯努利则起而反驳，并讽刺罗尔不懂微积分.

但罗尔在他 1691 年题为《任意次方程的一个解法的证明》的论文中指出：在 $f(x)=0$ 两个相邻的实根之间，$f'(x)=0$ 至少有一个根，其中 $f(x)$ 是多项式. 罗尔叙述了这个结论，而没有证明，这个定理本来和微分学无关，但在一百多年后尤斯托，伯拉维提斯(Giusto, Bellavitis)将这一推广到可微函数，后人将这个结果命名为罗尔定理.

罗尔还有另一项成就：他促成了目前所采用的负数大小顺序的建立. 而在他之前笛卡儿曾认为 $-2<-5$. 罗尔自 1691 年就已采用了现在的负数大小顺序.

5. 雅各·伯努利(Bernolli, Jacob, 1654—1705)

雅各·伯努利是瑞士数学家，生于瑞士巴塞尔. 青年时按父亲的意愿学习神学，但不久就放弃了神学而从事他喜欢的数学，他的数学几乎是无师自通的. 他在荷兰及英国旅行期间，结识了一些知名的数学家，并成了莱布尼兹的好友，从此他和莱布尼兹之间书信往来频繁，共同探讨微积分的有关问题. 雅各·伯努利从 33 岁到逝世的 18 年时间，一直是巴塞尔大学的教授 —— 开始是实验物理学教授，后来为数学教授.

雅各·伯努利在数学领域里作出了卓越的贡献：他是用微积分求

常微分方程分析解的先驱者之一，在微分方程中有以他的名字命名的伯努利方程，他使用变量分离法解出了这种方程；他研究过无穷级数，且最先发现调和级数的发散性，引出了函数 tg$x$ 的幂级数展开式的伯努利数，他写的《关于无穷级数及其有限和的算术应用》被认为是级数理论方面的第一部教科书；在数论中他提出了很有影响的伯努利数和伯努利多项式.

雅各·伯努利的名著《推测术》(又译《猜度论》)的出版是概率论这门学科的一件大事，此书可以说是把概率论建立在稳固的理论基础之上的首次尝试，他提出了著名的大数定理，从而使他的名字载入数学史册而永存不朽. 他自己也为发现这个定理而感到自豪，他曾说："这个问题我已经压了 20 年没有发表，现在打算把它公诸于世了，它又难又新奇，但它有极大的用处，以致有在这门学问所有其它分支中都有其高度的价值和位置." 为了纪念他的这个发现，现在许多书籍都把这个定理称为伯努利定理.

他提出并讨论过等周问题，并且是最早研究变分学的数学家之一；他给出了直角坐标和极坐标的曲率半径公式，指出某些高次曲线用极坐标比较容易表示且便于研究它们的性质，这也是系统地使用极坐标的开始；他研究过许多特殊曲线. 例如，他把悬链线的研究扩展到密度可变的链和在有心力作用下的链. 他对等时曲线作过深入的研究，并且由此弄清楚原来是尖点处有垂直切线的半三次抛物线. 他发现和研究了双纽线 —— 即到两定点(焦点)距离的积等于常量 a^2 的曲线. 特别是，他对对数螺线进行了极为深入的研究，发现了这种曲线经过多种变换之后仍是对数螺线. 例如，对数螺线的渐屈线和渐伸线仍是对数螺线，从极点到切线的垂足轨迹也是对数螺线，以极点为发光点经过对数螺线反射后得到无数根反射线，和所有这些反射线相切的曲线还是对数螺线. 从而他非常赞叹这种曲线的美妙特性，以致他在遗嘱里要求把对数螺线刻在他的墓碑上并题颂词"虽经沧桑，我仍将以故我出现."

6. 洛比达(L'Hospital, Guillaume Francis Antoine de, 1661—1704)

洛比达是法国数学家，生于法国巴黎，他拥有圣梅曾候爵昂特尔芒伯爵的称号，青年时期一度任骑兵军官，因患有近视而自行告退.

洛比达很早即显示出他的数学才华，15 岁时就解决了帕斯卡所提出的一个摆线难题. 他是莱布尼兹微积分学说的热忱推崇者，并且是约

翰·伯努利的高足.他成功地解答过约翰·伯努利提出的"最速降线"问题,并且写出了不少数学著作.

洛比达最大的功绩是撰写了世界上第一本系统的微积分课本——《用于理解曲线的无穷小分析》.这部著作出版于1696年,后来多次修订再版,为在欧洲大陆,特别是在法国,普及微积分起了重要作用.他这本书是追随欧几里得和阿基米德古典范例,以定义和公理为他的出发点.

洛比达这本书中的许多内容是取材于他的老师约翰·伯努利早期的著作.其经过是这样:约翰·伯努利在1691—1692年间写了两篇关于微积分的短论,但末发表.不久以后,他答应为年轻的洛比达侯爵讲授微积分,定期领取薪金,作为报答,他把自己的数学发现传授给洛比达,并允许他随时利用.于是洛比达根据约翰·伯努利的传授和未发表的论著以及自己的学习心得,撰写了《用于理解曲线的无穷小分析》.这部著作不但普及了微积分,而且帮助约翰·伯努利完成并传播了平面曲线的理论.值得着重指出,在这部书中有求分子分母同趋于零的分式极限的法则,即所谓"洛比达法则":如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是可微函数,$f(a)=g(a)=0$ 且,则,$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,当然,在右端的极限存在的情况下.但当时洛比达的论证没有使用函数的符号,是用文字叙述的;它不过相当于断言

$\frac{f(a+dx)}{g(a+dx)}=\frac{f(a)+f'(a)dx}{g(a)+g'(a)dx}=\frac{f'(a)dx}{g'(a)dx}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$,如果 $f(a)=g(a)=0$.他的结论是:如果把给定曲线的纵坐标 y"表示为一个分式,当 $x=a$ 时分子和分母都等于零",那么"如果求出分子的微分,再除以分母的微分,最后在其中令 $x=a$,则得到[当 $x=a$ 时的纵坐标 y 的]值."这个法则实际上是约翰·伯努利在1694年写信告诉他的.至于现在一般微积分教材上用来解决其它未定式的法则,都是后人对洛比达法则所作的推广,不过都笼统地叫做"洛比达法则"了.

7. 约翰·伯努利(Bernoulli, John, 1667—1748)

约翰·伯始利是瑞士数学家,他生于瑞士巴塞尔,雅各·伯努利之弟.青年时经商,后来在其兄雅各·伯努利的指导下研究数学和学习医学.27岁时获得巴塞尔大学博士学位,其论文是关于肌肉的收缩问题.

但不久他爱上了微积分学，并且很快的掌握了它. 他 28 岁时任荷兰格罗宁根大学数学物理教授，当其兄雅各·伯努利去世后，他继任巴塞尔大学数学教授达 43 年之 、，他还被选为彼得堡科学院的名誉院士.

伯翰·伯努利是莱布尼兹的好友和热诚拥护者，并在为莱布尼兹的微积分学辩护时起了很大作用，并大大地充实和丰富了微积分学的很多内容：在函数理论中，他认为函数可借助于常量和变量用解析式表达出来，这是一个不同寻常的进步，因为在这之前函数只有几何解释；他在研究分子分母问题同趋于零的分式极限时，发现了一个法则，这个法则在的现在的微积分教材上被错误地命名为洛比达法则，其实是他 1696 年写信告诉洛比达的；他曾把函数展成级数的形式，这个级数与泰勒级数相似，但他得到的结果比泰勒要早；他在求曲线的长度和积分的计算时利用某些几何性质，完善和发展了积分计算的一套方法，例如他曾出色的完成了有理分式的积分法；他关于微积分学方面的著作对微分方程的发展产生了深远的影响. 他研究了怎样解齐次微分方程，并得出了其兄雅各·伯努利提出的一种微分方程的另一解法. 他还给出了解常系数微分方程的方法，导出了与一特殊曲线族正交的轨线所满足的微分方程，并解出了它. 他写的《积分法数学讲义》一书是微积分发展中划时代的著作，使这门学科的作用在欧洲大陆得到正确评价，而自己也成为最有影响的人物.

约翰·伯努利是一位多产的数学家. 在几何方面：他给出了空间坐标的定义，曾研究过多种特殊曲线，建立了焦散曲面. 在力学方面：他对很多的概念都给出了准确的解释，提出了所谓虚拟速度原理，对光学中的反射和折射研究也颇多建树. 他曾用级数求曲线的长和区域面积，他在三角函数，指数函数等各个方面都有重要的研究成果. 特别是在 1696 年，他曾向欧洲数学家提出了一个挑战性的数学问题："设在垂直平面内，有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑到较低点，不计摩擦，问沿什么曲线时间最短？"—— 这就是有名的"最速降线问题". 当时许多数学家都被这个问题的新颖所吸引. 牛顿、莱布尼兹、洛比达、雅各·伯努利和他自己分别都做出了正确解答. 稍后，欧拉、拉格朗日进一步找出了这类问题的普遍解法，从而引出了数学的一个新分支 —— 变分学. 希尔伯特 1900 年，在第二届国际数学家代表大会上的演说中，对这个问题给予了极高的评价. 他说："约翰·伯努利在当时杰出的分析学家面前提出的这个问题，好比一块试金石，通过它分

析学家们可以检验其方法的价值,衡量他们的能力.伯努利希望因此而博得数学界的感谢.变分学的起源归功于这个伯努利问题和相似的一些问题".

约翰·伯努利是一个有名的教师,他在这方面的业绩斐然:18世纪首屈一指的大数学家欧拉和法国著名数学家洛比达都是他的得意门生;他的三个儿子和两个孙子都是数学家.长子尼古拉第三,年仅30岁便被聘到彼得科学院任数学教授,他曾在那里提出了一个概率论中的悖论问题,这个问题以"彼得堡悖论"闻名于世;次子丹尼尔,25岁就成为彼得堡科学院教授,也是该院名誉院士,75岁时当选为瑞士皇家学会会员.他对概率论、微分方程、物理学、流体力学、植物学、解剖学都作出了卓越贡献,曾先后荣获过法兰西科学院的十次奖励,被誉为数学物理方程的开拓者和奠基人;三子约翰第二,是巴塞尔大学数学教授;孙子约翰第三,年仅19岁被柏林科学院聘为教授,后来还兼任该院数学部主任;孙子雅各第二是巴塞尔大学的实验物理教授.伯努利这个家族是数学史上最有名的数学家族,他们为近代代数学物理和力学的发展创立了不朽的业绩.

8. 泰勒(Taylor,Brook,1685—1731)

泰勒是英国数学家,生于英国伦敦北部的艾德蒙吞,他毕业于剑桥大学圣约翰学院.在转向数学之前曾研究过法律,24岁获得法学博士学位.由于在英国《皇家学会会报》发表了一些杰出的论文,而崭露头角.27岁时当选为皇家学会会员,两年后担任该会学术秘书.

泰勒和牛顿、哈雷是亲密的朋友,也是牛顿流数法的一位拥护者和推广者.

他1715年出版了《增量法及其逆》,这本书发展了牛顿的方法,并且奠定了有限差分法的基础.在这本书中载有现在微积分教程中以他的名字命名的单元函数的幂级数展开公式,这个公式是他通过对格里哥里——牛顿插值公式求极限而得到的.用现代的标准来衡量,他的证明有欠严格.和他同时代人一样,他也没有认识到在处理无穷级数时,必须先考虑它的收敛性,在一百多年之后柯西才给出一个严格的证明.另外,泰勒级数的重要性最初并未引起人们的注意.直到1755年欧拉把泰勒级数用于他的微分学时才认识到其价值;稍后拉格朗日用带余项的级数作为其函数理论的基础,才进一步确认泰勒级数的重要地

位.泰勒也以函数的无穷级数的展开式而闻名于后世.

泰勒还对改进分几次提取方程之根的近似方法作研究,其中包括计算对数的一种巧妙方法.他研究过插值法的某些原理,引进有限分的方法,并利用这方法研究了弦的横向振动问题,光在非均匀介质中传播的微分方程问题.

泰勒还是一位有才华的音乐家和画家,他曾将几何方法应用于绘画中的透视,并于1715年、1719年先后编写出版了《直线透视》、《直线透视的新原理》,这是关于透视画法的权威性著作.

泰勒在《皇家学会会报》上还发表过关于物理学、动力学、流体动力学、磁学和热学方面的论文,其中包括对磁引力定律的实践说明.他还写过一些关于哲学和宗教的文章.

泰勒曾被任命到一个为解决牛顿与莱布尼兹关于微积分发明权之争的仲裁委员会中担任委员之职.

9. 马克劳林(Maclaurin Colin,1698—1746)

马克劳林是英国的数学家,生于苏格兰的基尔莫丹.他是一位数学上的奇材:11岁就考上了格林斯哥大学;15岁取得了硕士学位并为自己关于重力做功的论文作了精彩的公开答辨;19岁担任阿伯丁大学的数学教授并主持该校马里沙学院数学系;两年后被选为英国皇家学会会员;1722—1726年在巴黎从事研究工作,并在1724年因写了物体碰撞的杰出论文而荣获巴黎科学院奖金;回国后任爱丁堡大学教授.

马克劳林是牛顿最得意的学生和继承者.牛顿71岁那年,发现了15岁的马克劳林的才能,便在学术上给以指导,在经济上给予资助.马克劳林在阿伯丁大学和爱丁堡大学荣任教授,都是由于牛顿的举荐.

马克劳林21岁时发表了第一本重要著作《构造几何》,在这本书中描述了作圆锥曲线的一些新的巧妙方法,精辟地讨论了圆锥曲线及高次平面曲线的种种性质,并且推广了帕斯卡的六线形.他1742年撰写的《流数论》以泰勒级数作为基本工具,这也是对流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书.本书企图为牛顿流数法提供一个几何框架,以答复贝克莱大主教等人对牛顿的微积分学原理的攻击.著名的马克劳林级数就是在本书中提出的.他还用牛顿的逐次微分法引入泰勒级数,然后应用这个级数导出局部极大值和极小值存在的充分条件.他撰写的《代数论》一书开创了用行列式的方法解含有两个、三个和四个未

知量的联立线性方程的先例. 这本书在他死后的 4 年才出版. 他还给《皇家学会会报》写过很多论文. 其中有论曲线的构造和度量的,还有论述有奇异根的方程.

马克劳林对其它科学也作出过贡献. 1740 年曾以铸造方面的研究成果,与丹尼尔·伯努利、欧拉共享巴黎科学院的一项奖金. 他还发表过天文学方面的论文,改进了奥克尼和谢特兰岛的地图.

马克劳林在 1745 年内乱期间积极参与了保卫爱丁堡的活动. 该城陷落后便逃往约克,并在那里去世.

马克劳林终生铭记牛顿对他的栽培,并为继承、捍卫、发展牛顿的学说而奋斗. 他曾打算写一本《关于伊索克·牛顿爵士的发现说明》,但未能完成便去世了. 死后在他的墓碑上刻有"曾蒙牛顿的推荐"以表达他对牛顿的感激之情.

10. 辛普生(Simpson, Thomas, 1710—1761)

辛普生是英国数学家,生于英国累斯特郡的波士沃西镇,其父是织布工人并想培养辛普生也成为一名织布工,但辛普生坚持读书,遭到父亲的强烈反对,于是愤然离开家庭. 不久他在一个小贩处得到一本数学书,从此开始钻研数学.

1736 年,他的第一批数学论文在著名的杂志《处女作》上发表了,其中有一篇表明他当时已精通流数术,这篇文章引起了人们的关注. 1737 年,出版了他的第一本书《流数的一种新处理方法》. 在此书中,他在一些预备定义之后,给出了流数如下定义:"一个流动的量,按它在任何一个位置或瞬时所产生的速率(从该位置或瞬间起持续不变),在一段给定的时间内,所均匀增长的数量称为该流动量在该位置或瞬间的流数."用今天的话说,辛普生是用$(dy/dt)\triangle t$来定义微分的. 他还认识到把流数仅仅看成速度,思想将局限于一点上,如不加以注意,就将陷入哲学上的困境.

1740 年,他出版了《概率的规律》和《短篇论文集》,前者是 18 世纪的一本重要的概率论著作. 1742 年和 1743 年,他又先后出版了《年金论和将来享有权》和《数学论文》. 他的这些论著的出版,使他的声誉不断提高. 1743 年 8 月被聘为乌尔威治皇家陆军军官学院教授,1745 年被选为皇家学会会员.

辛普生是一位很有成就的数学教师. 他接连写了下列三本很畅销

的数学教科书:《代数学》、《几何学》、《三角学》.这三本书不但在英国多次再版,而且还在法国、美国、德国等国出版.

辛普生赢得了英国"能干的分析学家"的称号.当他读了译自由法国数学家洛比达写的《无穷小分析》后,他意识到和欧洲大陆的数学家之间进行交流的重要性.他在其最后一部著作《综合文集》的序言中写道:"由于在现代分析学领域中的勤奋耕耘,……,外国数学家们近来已经能够把他们在许多方面的研究推进得比依萨克·牛顿先生和他在本国的追随者所作到的更先进了…….”

在定积分计算中,以他的名字命名的近似积分公式"辛普生公式",虽早在他之前牛顿的学生科茨和斯特林就已经知道这个近似公式(以及一些更高阶的近似公式)了,而辛普生在1743年又重新发现了这一公式,而且从此为后人所重视,因此以后一直称为"辛普生公式".

11. 欧拉(Euler,Leonhard,1707—1783)

欧拉是瑞士数学家、物理学家、天文学家,生于瑞士巴塞尔.其父是一个爱好研究数学的基督教牧师,1720年他把欧拉送入巴塞尔大学学习神学、医学和东方语言学.在巴塞尔大学欧拉结识了著名的伯努利数学家族的几位成员,引起了他对数学的强烈兴趣,16岁时以优异的成绩获得巴塞尔大学硕士学位.先后担任过彼得堡科学院院士、柏林科学院物理数学所所长等职.

欧拉是数学上一位最多产的学者.他从19岁开始写作,直到76岁逝世为止,一共发表了论文(著作)500多篇(部),如果加上他生前未及发表和出版的手稿,则他一生的论、著就有800多篇(部)之多.在他一生中的大部份年代里,平均每年约写出800页左右、高质量的、有创造性的著作和论文.

欧拉的论著不但数量多,而且涉猎面广.他的论著包括:代数、几何、数论、分析、微分方程、变分法、力学、光学、声学、热学、天文学、弹道学、航海科学、建筑学等等.其中有些曾荣获科学院奖金,有不少是科学中里程碑式的经典著作.欧拉的有名发现,可以列成一张长表.直到今天,我们在数学和其它学科中,常常可以看到以欧拉的名字命名的公式、定理和方程.所以美国数学史家克来因说:"没有一个人象他那样多产,象他那样巧妙地把握数学;也没有一个人能收集和利用代数、几何、分析的手段去产生那么多令人钦佩的结果.他是顶呱呱的方法发明家,

又是一个熟练的巨匠."

在微积分学方面:随着牛顿和莱布尼茨研究提出微积分之后,很快出现了许许多多毫无联系的数学成果.欧拉通过他的《无穷分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等著作,把前人的发现加以总结定型并注入他的见解.例如,他基于量的代数关系给出了函数概念的新定义,并用 $f(x)$ 来表示一个没有明确规定的函数;他首创了对函数 $\log x$ 与 e^x 的现代讲法并发现了 $\log x$ 是无穷多值的,他导出了三角函数和指数函数之间联系的著名公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.他首先把导数归作为微分学的基本概念.他提了二阶偏导数的演算,并给出了关于微分后的结果与微分次序无关的理论,即 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 的条件,但未给出证明.研究了二元函数的极值,给出了全微分的可积条件.确定未定式 $\frac{\infty}{\infty}$、$\infty-\infty$ 的极限运算规则.引出了很多函数的无穷幂级和无穷乘积的展式.积分作为原函数的概念是欧拉创建的基本概念.在不定积分中属于中心地位的研究是把积分表示为初等函数的各种方法与技巧,欧拉曾确定出这些方法的范围,今天在微积分教程中所叙述的方法与技巧,几乎都可以在欧拉的作品中找到,他发展了定积分的理论,并演算了大量的广义积分,如 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$,从而奠定了 Γ 函数与 β 函数的理论基础.他给出了用累次积分计算二重积分的方法,并讨论了二重积分的变量替换问题.他还提出了积分因子的概念,并确定了可采用积分因子的方程类型,证明了凡是可用分离变量求解的微分方程都可以用积分因子求解,但反之不然.他还考虑了求解常系数一般线性方程的问题.总之欧拉的功绩在于:用形式化方法把微积分从几何中解脱出来,使其建立在算术和代数的基础上,从而为完整实数系统的微积分学的基本论证而畅开了渠道.

欧拉的著作,不但包含许多开创性的成果,而且在表述上思路清晰,极富有启发性.他的行文优美而流畅,把他那丰富的思想和发现表露得淋漓尽致,且妙趣横生.因此人们把欧拉誉为"数学界的莎士比亚".

欧拉具有坚韧的毅力,在他双目失明的 17 年中,他凭借惊人的记忆力和罕见的心算能力艰苦卓绝的继续从事研究工作,竟口述让人笔录就完成了 400 篇左右的论文和好几本专著,并完成了曾使牛顿头痛的《月球运动理论》.因此,纽曼称欧拉是"数学家之英雄".

12. 达朗贝尔(*D'*Alembert, Jean LeRond, 1717—1783)

达朗贝尔是法国数学家，力学家、哲学家，生于法国巴黎. 他是希凡利·得斯陶切斯的私生子，一出生就被遗弃在巴黎至哲勒隆(SaintJean—Ie—Rond)教堂附近的路旁，在那里被一位宪兵发现，这位宪兵即以其被发现地方的名字给他起了教名，然后交给了一位贫穷的玻璃匠抚养. 好心的玻璃匠不但抚养他长大，并且送他上学接受正规教育.

达郎贝尔早先研究医学和法律，并且当过律师，后来转向自然科学. 他在 22 岁时向巴黎科学院呈交了关于固体在流体中运动和积分学的两篇论文. 在第一篇论文中，他提出了绕圆柱体无环量流动问题，即著各的"达朗贝尔疑题" 这篇论文得到了科学院的高度评价，并将他选为科学院院士.

达朗贝尔对数学和力学都作出了杰出的贡献，在数学方面；他得出了描述弦横向振动的二阶偏微分方程的解法；他与欧拉、丹尼尔·伯努利共同奠立了数学物理的基础；在解流体力学中的一个椭圆型偏微分方程时，他首先运用了复变函数；他与欧拉最先得出了解析函数实部与虚部的一些基本方法并发现复变函数可微的条件；在常微分方程方面他也有不少建树，他加强了从特殊积分鉴别奇解的判别法，他研究过黎卡提微分方程；他在动力学中推广了偏导数的演算；他针对当时微积分基础逻辑上有欠严密曾提出过很多好的见解. 他推进了源于牛顿的极限概念. 他认为"极限的完整理论对于把分析置于牢固的基础之上是完全必要的." 他说微分学的基础同流数法一样，可以建立在极限的概念之上. "求方程的导数只要求方程中所包含的两个变量的差分比的极限." 他第一个把导数明确定义为增量比的极限. 他认为这是微分学的真实理论基础. 马克思说达朗贝尔脱下了微分学的神秘外衣. 达朗贝尔还提出了级数 $u_1 + u_2 + \cdots$ 绝对收敛的一个检验法则，即现在微积分教材中所介绍的达朗贝尔检验法则；在代数中他得出了代数基本定理的辅助定理. 在力学方面：1743 年他发表的《动力学论文》，大大改进了动力学的一般原理，书中包括后来以达朗贝尔命名的力学原理；1744—1747 年他发表了《关于风的成因的推论》的论文，因而荣获柏林科学院的奖金，并被选为该院院士. 在天文学方面：他建立了行星摄动的理论，并对二分点和章动的问题作了严格解释. 在哲学上，他赞成感

觉性学说，反对笛卡儿的天赋观念论，其著作有《哲学原理》.

达朗贝尔是18世纪法国《百科全书》的编纂人. 他主张按培根的原则，将人类知识分为历史、哲学（科学）、美术三大类；强调技术和科学的关系，并指出《百科全书》的目的不仅在于提供知识，而更重要的在于改变读者的思想.

13. **拉格朗日**(Lagrange, Joseph—Louis, 1736—1813)

拉格朗日是法国数学家、力学家、天文学家，生于意大利西北部的都灵，其祖父是法国人、祖母是意大利人. 他的父亲一度很富有，曾想把拉格朗日培养成自己商业上的接班人，因此希望他学习法律. 但拉格朗日在中学时代读了天文学家哈雷写的《在解决求光学玻璃的焦点问题时，近世代数优越性的一个实例》这篇论文后，就对数学和天文学发生了浓厚的兴趣，不久他进入了都灵皇家炮兵学院学习，开始凭自己的努力钻研数学，还未毕业就担任了该院的一些数学教学工作，18 岁时开始撰写论文，19 岁被正式聘任为该院的数学教授.

1755 年，拉格朗日开始和欧拉通信讨论"等周问题"，继而奠定了变分法的基础.

1757 年，他和一些年轻的科学家、创办了都灵科学协会和学术杂志《都灵文集》，在《都灵文集》上他发表了大量的论文，1764 年和 1766 年他在天文学研究中先后两次获得法国科学院奖金，从而赢得了世界性的声誉.

1766 年，在柏林科学院物理数学所任所长的欧拉，要重回彼得堡，临行前普鲁士国王腓特烈大帝要欧拉推荐一位称职的继任者. 欧拉认为非拉格朗日莫属，同时达朗贝尔也作了同样的推荐. 于是腓特烈大帝亲笔写了一封信给拉格朗日说："欧洲最伟大的君王希望欧洲最伟大的数学家到他的宫廷里来." 拉格朗日于是到了柏林，就任柏林科学院物理数学所所长职务，这时他年仅 30 岁.

拉格朗日在柏林科学院整整工作了 20 年，在这期间，他对代数、数论、微分方程、变分法、力学和天文学都进行了广泛而深入的研究，并取得了丰硕的成果.

对于微积分学，拉格朗日试图抛弃自牛顿以来模糊不清的无穷小概念. 为此他在《解析函数论》一书中，广泛地发展了微积分学. 他试图把微分、无穷小和极限等概念从微积分中完全排除. 他先用代数方法证

明了泰勒展开式,接着定义导数(微商)是 $f(x+h)$ 的泰勒展开式中 h 的系数,然后建立起全部分析学.他以为这样就可以克服极限理论的困难.可是无穷级数的收敛问题,仍然无法逃避极限.他的《解析函数论》在这方面虽然没有成功,但对函数的抽象处理,却可说是实变函数论的起点.他还研究了二元函数极值,阐明了条件极值的理论,并研究了三重积分的变量代换等问题.

在微分方程中,他也获得了很多重要结果:例如,他对奇解与通解的联系作了系统的研究,他用明确而漂亮的手法从通解中消去常数而得到奇解,从而给出了一般性的方法;他还发现,齐次方程的通解是由一些独立的特解分别乘以任意常数后相加而成,而且在知道了 n 阶齐次方程的 m 个特解后,可以把方程降低 m 阶;在解线性微分方程时,他提出了常数变易法.

拉格朗日最得意的著作是《分析力学》,撰写这部巨著,他倾注了大量的智慧和精力,整整经历了37个春秋.在这部著作中,他利用变分原理,建立了优美、和谐的力学体系,把宇宙描绘成为一个由数字和方程组成的有节奏的旋律.这部著作里的精辟论述,使得动力学这门科学达到了登峰造极的地步,它把固体力学和流体力学这两个分支统一了起来,奠定了现代力学的的基础.哈密顿把这部著作誉之为一部"科学诗篇".

拉格朗日1759年被选为柏林科学院院士,1772年被选为巴黎科学院院士,1776年被选为彼得堡科学院名誉院士,1766—1786年担任柏林科学院的主席.

拉格朗日为人好学而谦逊,在学术上取得了辉煌的成就,受到了广泛的崇敬.例如,1793年9月法国资产阶级革命政府曾颁布一项法命;将一切在敌国境内出生的人驱逐出境并没收其财产,但特别声明尊贵的拉格朗日先生除外.拿破仑赞美拉格朗日是"一座高耸的金字塔".

14. 傅里叶(Fourier Joseph,1768—1830)

傅里叶是法国数学家、物理学家,生于法国奥塞尔.他是一个裁缝的儿子,8岁时父母双亡,成为孤儿,在一个由天主教僧侣管理的军事学校受教育,后来在那里当了数学讲师,他参加了发动法国革命,并和蒙日一道随拿破仑到埃及远征及进行科学考察,在那里担任过地方行政长官.1817年被选为巴黎科学院院士,1829年获彼得堡科学院荣誉

院士称号.

傅里叶是法国分析学派公认的代表,1807 年他开始进行热传导的数学分析的研究工作,此项目 1812 年荣获巴黎科学院奖金.他 1822 年出版的名著《热的分析理论》,是一本将数学理论应用于物理学的典范.在此书中他把半个世纪前欧拉和伯努利在关于弦振动的研究工作中,在一些孤立的、特殊情况下所应用的三角级数方法,丰富并发展为一般理论,他杰出的贡献在于证明了相当一类函数(连续的或不连续的)能用形如 $\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$ 的三角级数来表示.傅里叶的这项工作的意义是它不仅推动了偏微分方程的理论的发展,而且改变了数学家们对函数概念的传统局限认识,动摇了 18 世纪的这样一个观念:所有的函数不管它们是以何种形式出现的,总都是代数函数衍变.于是代数函数,甚至初等超越函数,都不再是函数的原型了.由于代数函数的性质不能搬到一切函数上去,所以这种更广泛含意下所说的函数及其连续性、可微性、可积性以及其它的性质,其真实意义究意是什么自然也就作为一个新的问题被提出来了.傅里叶的工作标志着人们可以且必须从解析函数或可展成泰勒级数的函数的圈子里解放出来,从而大大地扩充了函数概念的本身.由此,函数不仅可以展成为三角级数,而且还可以展开为各种不同的正交函数系(如契比雪夫多项式、勒让德多项式、厄米特多项式、拉盖尔多项式、雅可比多项式等等)的级数.此即广义的傅里叶级数理论,它也是泛函数分析产生的原动力之一.

傅里叶本人所做的主要工作,虽然是针对研究热传导的具体问题提出来的级数解法,但这无疑在数学物理上又有着相当独到的意义.而更重要的,是在整个数学发展的历史上,他的研究起到了超越时代的巨大作用.因此,著名物理学家麦克斯韦尔称傅立叶的论著为"一部伟大的数学诗".汤姆森自称自己在数学物理上所取得的成就是受益于傅立叶热学著作的影响.

傅里叶对数学发表了下列言简意赅的见解:"对自然界的深入研究是数学发现的最丰富的源泉.""数学的主要目标是大众的利益和对自然现象的解释."

傅里叶一生忠实诚挚、勤奋不懈、勇于助人.在雅各宾党执政的"恐怖时期"他曾挺身而出保护一些无辜受迫害的科学家,如斯图姆等.

傅里叶 1880 年逝世于巴黎,人们称他是 19 世纪中令人眼花缭乱

的数学太空中的一颗明星.

15. 高斯(Gauss,Garl Friedrich,1777—1855)

高斯是德国的数学家、物理学家、天文学家,他生于德国北部的布伦瑞克一个贫苦的家庭里,祖父是农民,父亲是园丁兼泥瓦匠.

高斯很小就表现出数学方面的非凡才华:他10岁时,发现了级数1 + 2 + 3 + 4 + …… + 97 + 98 + 99 + 100的一个巧妙的求和方法;11岁时,发现了二项式定理.高斯的才华受到了布伦瑞克公爵的赏识,亲自承担起对他的培养教育计划,先把他送到布伦瑞克的卡罗林学院学习(1792——1795),嗣后又推荐他去格廷根大学深造(1795——1798).

高斯在卡罗林学院认真研读了牛顿、欧拉、拉格朗日的著作.在这时期他发现了素数定理;发现了数据拟合中广有用途的最小二乘法;提出了概率论中的正态分布并用高斯曲线形象地予以说明.进入格廷根大学的第二年,他发现了正17边形的尺规作图法,这是欧几里得以来二千年悬而未决的问题,这一成功促使他毅然地献身于数学.高斯22岁获博士学位,30岁被聘为格廷根大学数学和天文学教授,并担任该校天文台的台长.

高斯的博士论文可以说是数学史上的一块里程碑.他在这篇文章中第一次严格地证明了"每一个实系数或复系数的任意多项式方程存在实根或复根",即所谓代数基本定理.从而开创了"存在性"证明的新时代.

高斯在数学世界"处处留芳":他对数论、复变函数、椭圆函数、超几何级数、统计数学等各个领域都有卓越的贡献.他是第一个成功地运用复数和复平面几何的数学家;他的《算术探究》一书奠定了近代数论的基础;他的《一般曲面论》是近代微分几何的开端;他在一篇关于超几何数的论文中,对级数的收敛性作了第一次系统的研究;他是第一个领悟到存在非欧几何的数学家.

在天文学方面,他研究了月球的运转规律.创立了一种可以计算星球的椭圆轨道的方法,能准确地预测出行星的运行位置.他利用自已创造的最小二乘法算出了谷神星的轨道和发现了智神星的位置.他阐述了星球的摄动理论和处理摄动的方法,这种方法导致海王星的发现.他的《天体运动理论》是一本不朽的经典名著.

在物理学方面：他发明了"日光反射器".他与韦伯一道建立了电磁学中的高斯单位制，最早设计与制造了电磁电报机.他发表了地磁概论，绘出了世界第一张地球磁场图，定出了磁南极和磁北极的位置.

高斯对天文学和物理学的研究，开辟了数学与天文学、物理学相结合的光辉时代.高斯认为：数学，要学有灵感，必须接触现实世界.他有一句名言："数学是科学之王，数论是数学之王，它常常屈尊去为天文学和其它自然科学效劳，但在所有的关系中，它都堪称第一."

高斯治学严谨，一生发表了 155 篇论文，但仍有大量创作没有发表出来，因为他对自己的科学著作总是要求尽善尽美.他的格言是"宁肯少一些，但要好一些."

高斯是近代数学的伟大奠基者之一，他在历史上的影响之大可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列.高斯被誉为："能从九霄云外的高度按某种观点掌握星空和深奥数学的天才."

16. 柯西(Cauchy，Augustin—Louis，1789—1857)

柯西是法国数学家，生于法国巴黎.他的父亲是一位精通古典文学的律师，并经常和拉格朗日、拉普拉斯等人往来，因此柯西从小就认识了一些著名科学家.由于柯西自幼聪敏好学，拉格朗日预言他日后必成大器.他 1805 年进入多科工艺学校，1807 年转入道路桥梁工程学校.大约在 1809 年成了一名工程师.由于他的身体欠佳，而又很有数学天赋，他就听从拉格朗日与拉普拉斯的劝告转攻数学.

柯西在纯数学和应用数学两方面都取得了辉煌的成果，他一生写了 789 篇论文，数量之多仅次于欧拉，其全集共 24 本.柯西 27 岁即被选为巴黎科学院院士，他还是英国皇家学会会员和几乎所有外国科学院的院士.

柯西对数学最大贡献之一，是在微积分中引进了严格的方法，在这方面他写出了三部著作：《分析教程》、《无穷小计算教程》、《微分计算教程》.通过这些著作，他把微积分及其推广从对几何概念、运动和直觉了解的完全依赖中解放了出来，从而赋予了微积分以今天所带有的特色，在这个数学分支中他作出了比任何人都要多的贡献.为此我们可以确切的说，微积分的基本概念正是由于柯西而得到严格的论述.由于这一理由，人们通常将柯西看作是在近代意义下严格微积分学的奠基者.是他在极限概念精确定义的基础上，建立和完善了连续性、无穷级数、以

及导数、微分和积分等方面的理论.通过他的上述三大教程的广泛流传和他的学术讲演,他对微积分学的解释被普遍采纳,并至今为在这个数学分支中所广为沿用.

柯西的另一个重要贡献,是发展了复变函数的理论,取得了一系列重大成果,例如,他给出了复变函数的几何概念,他证明了在复数范围内幂级数具有收敛圆,给出了含有复积分限的积分概念以及残数理论等.

柯西是探讨微分方程解的存在性问题的第一个人.他证明了在不包含奇点的区域内存在满足确定条件的微分方程的解,从而使微分方程的理论深化了.在研究微分方程的解法时,他成功地提出了特征带方法并发展了强函数方法.

柯西对于代数学、几何学、数论等数学分支中一些重要概念和理论的创建也都很有建树,例如,他深入研究了行列式的理论,总结了多面体的理论,证明了费马关于多角数的定理等等.

柯西对物理学、力学和天文学都作过深入的研究.特别在固体力学方面,奠定了弹性理论的基础.仅凭这个成就,就足以使他跻身杰出的科学家之列.

柯西在政治上属于保皇党,但他终身坚守气节非常执拗:1830年,法王查理被逐,路易·腓力普称帝.柯西由于拒绝宣誓效忠新皇帝,被革去职务,并出走意大利都灵,后移居布拉格.1848年,路易·腓力普君主政体被推翻,成立法兰西第二共和国,宣誓的规定废除,柯西才回到巴黎高等工艺学院任教授.1852年政变,共和国又变帝国,恢复了宣誓仪式,但拿破仑三世特地豁免柯西和阿拉哥(法国著名物理学家)两人可以免除效忠宣誓.

17. 格林(Green, George, 1793—1841)

格林是英国数学家、物理学家,他生于英国诺廷厄姆附近的斯内顿,是一位自学成材的科学家.格林的父亲是一位面包师,格林童年时辍学在父亲的面包房里干活,他一边干活一边利用工余时间坚持自修数学和物理,特别是在他读了拉普拉斯的《天体力学》后很受启发,试图完全用数学方法来论述静电磁学.在他32岁那年出版了一本他私人印的小册子《数学分析在电磁学中的应用》,这是在电磁学的数学理论方面的最初尝试.在这本书中,他引入了位势概念,包含了他首先发现

的展布在一个平面区域上的二重积分与沿这个区域边界的曲线积分之间的关系(即数学分析中有名的格林公式). 但由于这份小册子印数不多,而且不是大范围的发行,因此未引起人们的注意. 十几年后威廉·汤姆生发现了这本小册子,并认识到它的巨大价值,于 1845 年发表在《数学杂志》上,但这时格林已去世 4 年.

格林的父亲去世后,他的一些好友鼓励他到大学去深造,他经过 4 年的自学,将其初等教育中的空白填补后,在 1833 年 —— 当时他已经 40 岁,才以自费生的身份进入剑桥大学凯厄斯学院学习,4 年后毕业获得文学士学位. 1839 年被聘为敛桥大学教授,两年后他就去世了,终年才 48 岁.

格林发展了电磁理论,他引入的位势等概念,其意义远远超出了解位势方程,他首次研究了与求解数学物理边值问题密切相关的特殊函数 —— 格林函数,格林函数现已成为偏微分方程理论中的一个基本概念. 格林还发展了能量守恒定律,将其运用于变形弹性体,得出了弹性理论的基本方程. 格林在光学与声学领域也很有建树,其中关于光在晶体中的反射和折射的研究具有特别重要的意义.

格林在学术研究中反对门阀偏见,在分析引入英国后,他是第一个沿着大陆上的研究线索前进的英国数学家. 他的工作培育了数学物理学方面的剑桥学派,其中包括近代很多最伟大的数学物理学家如威廉·汤姆生爵士、格布里厄耳·斯托克士爵士、雷利勋爵和克拉克·马克斯韦尔.

格林留下的著作于 1871 年汇集出版. 为数虽然不多,但在现代数学、物理方面是有举足轻重的地位,以他的名字命名的格林函数、格林公式、格林定理、格林曲线、格林测度、格林算子、格林方法等,在数学物理中都是经典的内容. 而格林那种自强不息的精神,大器晚成的范例,一直为后人所称道.

18. 奥斯特洛格拉得斯基(Ostrogradsky Michel ,1801—1862)

奥斯特洛格拉得斯基是俄国数学家、力学家,他生在俄国波尔塔瓦一个地主家庭. 他从小就表现出强烈的求知精神. 中学毕业后曾立志献身于军事,并到一个近卫军团部学习军事. 但他的伯父却极力建议他进大学深造. 于是奥斯特洛格拉得斯基 15 岁那年进入了哈尔科夫大学数学物理系. 他在大学期间学习勤奋、成绩优异,但是由于他反对宗教

的观点及不信仰“神学和基督教的学说”的表现，触犯了某些唯心主义教授和有关当局，从而未能获得该大学的毕业证书和学位. 为了继续深造，1822 年他到了巴黎，结识了拉普拉斯、傅里叶、安培、泊松柯西等人，并在巴黎索尔奔纳和法兰西学院听数学物理学科的讲座. 不久便在数学、力学中取得一系列的学术成果，并赢得了著名科学家的声誉. 1828 年回到俄国，在彼得堡各大学和军事院校任教. 1830 年被选为彼得堡科学院院士. 他还是美国科学院、都灵科学院、罗马科学院的院士及巴黎科学院的通讯院士.

奥斯特洛格拉得斯基是 19 世纪俄国最伟大的数学家之一，是俄国在数学物理方面的奠基人.

在数学方面，他给出了体积积分与面积积分的相互关系的公式，即奥斯特洛格拉得斯基 —— 高斯公式；他研究了有理函数的积分能否表示成代数函数和对数函数的问题，并顺便给出有理分式积分的分解公式；其中一部分表示成代数函数，而另一部分是分母中带有单根的分式的积分，这个公式叫做奥斯特洛格拉得斯基 —— 埃米特公式；他利用任意参数的变分方法揭示了线性微分方程积分的某些性质；他在研究傅里叶提出的固体中热分布的微分方程以后，解决了物体温度的测定方法，并将傅里叶热传导方法应用于多面体；他还给出求气体声振方程、弹性薄片方程的积分等；他对数论、概率论、高等代数和几何学等也都作过深入地研究.

在力学方面，他对球形弹头的飞行进行了大量的理论研究和实验，给出了偏心弹头在空中运动的微分方程；他还给出虚位移原理和最小作用原理的一般形式，应该说是他和哈密顿分别独立完成的；他讨论了力学系统的微分方程的积分法；还研究了关于冲击的一般理论.

奥斯特洛格拉得斯基还是一位卓越的教育家. 他不但学术造诣很深，而且非常重视教学法的研究. 他治学严谨，撰写了一系列教科书，其中最主要的有《初等几何教程》、《三角学概要》、《代数和超越分析讲义》、《天体力学教程》等. 他的科学思想和教育思想孕育了俄国几代的学者，被奉为苏联数学界一代宗师.

19. 阿贝尔(Abel, Niels Henrik, 1802—1829)

阿贝尔是挪威数学家. 他生于挪威奥斯陆附近的芬多，父亲是村子里的基督教牧师，家境贫困. 在中学时代，得到一位很有才华的数学

教师 —— 洪保的教育，激起了他对数学的酷爱，从 16 岁开始，就自学了牛顿、欧拉、拉格朗日、勒让德等人的数学著作，被同学称誉为“数学迷”. 阿贝尔 18 岁时，父亲便去世了，贫苦的家庭失去了唯一的经济支持，靠着几位教授和邻居的资助，在 19 岁那年，阿贝尔进入了奥斯陆大学学习.

阿贝尔是 19 世纪最杰出的数学家之一，当他还是一个中学生的时候，就按照高斯对二项式方程的处理方法探讨高次方程的可解性问题，起初，他以为自己用根式已经解决了一般的五次方程，但很快就发现了自己的错误. 进大学后他继续研究这一问题，终于在 1824 年证明了一般五次方程是不能像低次方程那样用根式求解的，从而解脱了使数学家们困惑了 300 年之久的一个难题，这时他年仅 22 岁. 他自己出资印发了他的证明. 另外，在 1823 年他还发表了其它一些论文，其中包括用积分方程解古典的等时线问题，可以说是这类方程的第一个解法. 为积分方程在 19 世纪末 20 世纪初的全面发展开辟了道路.

阿贝尔深刻的数学思想超出了挪威数学界所能理解的水平，因此他渴望出访德、法等国. 在他的朋友和教授们的支持下，经过和政府的多次交涉，才获准一笔不大的出国奖学金.

在柏林期间，他接受了高斯、柯西学派注重严格推导的学风，给出了二项式定理对于所有复指数都是正确的证明，从而奠定了幂级数收敛的一般理论，也解决了在实数和复数范围内分别求幂级数的收敛区间和收敛半径的问题. 在柏林他有幸结识了一位热情的业余数学爱好者克雷勒，克雷勒对阿贝尔的才华十分敬佩. 阿贝尔则鼓励克雷勒创办《纯粹与应用数学学报》，这是世界上专载数学研究的第一个学术刊物. 该刊前三期便登载了阿贝尔 22 篇文章，他的《五次方程代数解法不可能存在的证明》就发表在创刊号上. 阿贝尔把他关于五次方程的小册子寄给格廷根的高斯，想借此作为晋谒高斯的通行证. 但不知什么原因高斯都根本未看(因为在高斯死后 30 年人们发现其遗稿中这本小册子还没有启封)，阿贝尔觉得受到冷遇，决心不再见高斯而径自去巴黎.

在巴黎他会见了柯西、勒让德、狄利克雷等人，但这些会面也是虚与敷衍，因为《纯粹与应用数学学报》这个新刊物当时在法国几乎无人知道，而阿贝尔又太腼腆，不好意思在陌生人面前谈论自己的著作，因此人们并没有真正认识到他的天才. 在巴黎期间他完成了巨著《论一类广泛的超越函数的一般性质》，其中包括他发现的关于代数函数的积

分，如今被称为阿贝尔定理，他把稿件呈给法国科学院，希望这能引起法国数学家们对他的注意，但不幸稿被柯西、勒让德等人在审阅时丢失了．他空等了一段时间，终因旅资用尽而不得不返回柏林．

在柏林他完成了关于椭圆函数的一篇开创性论文后就回到了挪威．他原希望回国后能被聘为大学教授，但希望又一次落空．他只能靠给私人补课谋生，间或当代课教师．生活极其困苦，用他自己的话来说“穷得就象教堂里的老鼠”．在这样艰苦的条件下，他仍坚持搞科研工作，主要研究椭圆函数论，并开创这一数学分支．阿贝尔的声誉随着他的研究成果逐渐传到欧洲的所有数学中心，但他却身处消息闭塞之地，毫无所知，更不幸的是他于 1829 年染上肺病，不久在贫病交加中死去，终年不足 27 岁．死后的第三天柏林大学聘他为数学教授的聘书才寄到挪威，这也是使后世数学家谈起来扼腕叹息的憾事．

阿贝尔短短的一生，却在数学史上写下了光辉的一页，以他的名字命名的有：阿贝尔群，阿贝尔变换，阿贝尔求和法，阿贝尔函数，阿贝尔范畴，阿贝尔扩张，阿贝尔定理，阿贝尔遍历定理，阿贝尔连续性定理，阿贝尔方程，阿贝尔积分方程，阿贝尔微分，阿贝尔积分，阿贝尔射影算子，阿贝尔问题，…….著名数学家厄米特曾说：“阿贝尔留下来的问题，足够数学家忙 500 年．”克雷勒在他主编的《学报》里写道“阿贝尔在他的所有著作里都打下了天才的烙印，表现出了不起的思维能力．我们可以说他能够穿透一切障碍深入问题的根底，具有似乎是无坚不摧的气势…….”

20. 狄利克雷(Dirichlet，Peter Gustav Lejeune，1805—1859)

狄利克雷是德国数学家，生于德国杜连(Düre)的一个法兰西血统家庭，起先在杜连学习，后来在格廷根受业于高斯门下．1822——1827 年旅居巴黎当家庭教师，在此期间他参加了以傅里叶为首的青年数学家小组的活动．1827 年在波兰任布雷斯大学讲师，从 1839 年起任柏林大学教授．1855 年，高斯逝世后，他作为高斯的继任者受聘到格廷根大学任教授，直至逝世．

狄利克雷对数学作出了许多贡献，其中尤以数论、分析、位势论最著名．他是解析数论的创始人，在这方面他创立了带给定行列式的二元二次型各类数的公式，并证明了关于整数算术级数中素数数量无限的定理，指明第一项与级数的公差互为素数．为了解决这些问题，他引入

了解析函数.在 1840 年的一篇论文中,他指出如何把解析函数论的全部力量用于数论中的问题,在这些研究中他引入了狄利克雷级数.在 1841 年他证明了一个关于在复数 $a+ib$ 的级数中的素数定理.他还证明了当 $n=5$ 时,费马最后定理的正确性.

在数学分析方面,他最成功的工作是对傅里叶级数收敛性的分析.1829 年他在其论文《关于三角级数的收敛性》中,第一次对傅里叶级数的收敛性给出了严格的证明.这件事还促使他将函数概念作了一般化推广.他给出了(单值)函数的定义,这个定义是现今常用的,即如果对于给定区间上的每一个 x 的值有唯一的 y 值同它对应,则 y 就是 x 的一个函数.他还强调指出,至于在整个区间上 y 是否按照一种或多种规律依赖于 x 或者 y 依赖于 x 是否用数学运算式来表达,是无关紧要的.在 1829 年,他给出了 x 的一个函数的著名典例

$$y=\begin{cases}c,\text{当 } x \text{ 为有理数;}\\ d,\text{当 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

这种难用通常解析式子表示的函数,正是数学从研究"算"到研究"概念、性质、结构"的转变的开始.狄利克雷在 1837 年的一篇论文中证明了:对于一个绝对收敛的级数,可以组合或重新排列它的项,而不改变级数的和.他还以例说明任何一个条件收敛的级数的项可以重新排列而使级数的和有不相同的结果.

在力学和物理中,特别是位势理论方面,他也有不少贡献.例如,他把所谓狄利克雷原理引入到变分法中,这一原理假定了能在已知边界条件下使积分 $\int[v_x^2+v_y^2+V_z^2]d\tau$ 成为极小的一个函数的存在.后来这成为黎曼在位函数论中解决问题的一个强有力的工具.

狄利克雷是高斯的学生和继承人.他毕生敬佩高斯,特别对高斯的《算术研究》爱不释手,即使在旅行中也总是随身携带并反复研究.在 1849 年 7 月 16 日,格廷根大学为高斯获得博士学位 50 周年举行庆祝会.席间高斯准备用他的《算术研究》的一页原稿点烟抽,狄利克雷见到了如同亵渎神灵一般大吃一惊,立即冒失地从高期手里夺了过来,并终生加以珍藏.他的《数论讲义》是在高斯数论的研究基础上的最好发展,这本书对后来的一些数学家,如黎曼、克罗内克、埃森斯等都有很大影响.

狄利克雷是雅可比最亲密的朋友、评述者和女婿.他的工作对德国

和法国都很有影响，他促进了这两个国家数学家的学术交流与合作.

21. 维尔斯特拉斯(Weierstrass,Karl,1815—1897)

维尔斯特拉斯是德国数学家，生于德国西部西发里亚的小村落奥斯坦菲. 1834—1838 年在波恩大学学习商业和法律. 1839—1840 年移居蒙斯特，并在古德曼指导下自修数学. 1841 年通过考试而获得中学教师的职务，从此先后在蒙斯特、达赤克郎、布伦斯堡等中小城镇的中学里任教达 15 年之久. 他除了教数学外还教物理、德语、作文、地理、体育.

维尔斯特拉斯是一个有条理而又刻苦能干的人. 白天认真进行教学，晚上埋头数学研究，写出了不少数学论文，但由于他只是一位中学教师因而未受到科学界的应有重视，直到 1854 年他发表了一篇有关解析函数基础的重要论文，从而轰动了数学界，哥尼斯堡大学立即授予他名誉博士学位. 1856 年被聘为柏林大学助理教授，1864 年成为该校教授一直到 1897 年去世. 他还被选为法国科学院和柏林科学院院士.

维尔斯特拉斯是将严格论证引入分析学的一位大师，被人们誉为"现代分析之父". 有鉴于柯西的理论建立在几何的基础上，他转而从构造实数理论着手，研究了数集的界限和极限点. 给出了现今微积分教材中的 $\varepsilon—\delta$ 极限定义和在一点处函数的连续性定义. 陈述了闭区间上连续函数必定达到其上确界和下确界的性质. 他在幂级数的基础上建立起了解析函数的理论，并建立起解析开拓的方法. 他提出了级数理论中关于均匀收敛的概念和判别准则. 特别重要的他给出了一个处处不可微的连续函数的例子：在 19 世纪初期，一般人都认为每一个连续函数都是可微的，只是在一些孤立的奇点处可能除外. 但维尔斯特拉斯在 1861 年在讲课中就明确提出，要想从连续性推出可微性的任何企图都必定失败. 为此他在 1872 年 7 月 18 日在柏林科学院的一次讲演中，正式给出了下述一个处处不可微的连续函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

其中 a 是一个奇数，b 是 (0,1) 中的一个常数，使得 $ab > 1 + 3\pi/2$. 这个无穷级数在实轴上均匀收敛，所以 $f(x)$ 是处处连续的. 但是，可以推知，当给定任何点 x_0 和任何正数 M 时，存在与 x_0 任意接近的点 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}>M,\qquad \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}<-M.$$

因此,函数 $f(x)$ 在点 x_0 是不可微的.

他的这个例子使数学界大为震惊.因为这个例子说明了:连续性并不蕴含可微性,以及函数可以具有各种各样的反常性质.这一阐述其历史意义是巨大的,它使数学家们更加不敢轻信直观或者几何的直觉了.这个例子使数学家们清楚地认识到重新考虑分析基础的必要性.特别是不再理所当然地认为实数系是"已知的",而必须通过严格证明无理数的存在及其各种性质来构造或定义实数.继而维尔斯特拉斯用"递增有界数列"来定义无理数以完整实数系体统.

维尔斯特拉斯不但对数学分析作出了杰出贡献.他还写了不少超椭圆积分、阿贝尔函数方面的论文.在变分学方面,他研究了积分极值的充分条件等问题.在微分几何方面,他研究了大地测量线和最小面积.在线性代数方面,他和史密斯一道创立了 π 矩阵和初等因子理论,他还对双线性和二次型作过贡献.

维尔斯特拉斯是一位优秀的教师.他对花费在初等数学的年月从不感到遗憾,而且他后来把他杰出的教学才能用于大学教学,使他成为享有世界盛名的杰出高等数学教师.他在柏林大学的讲课吸引了许多听众.在讲课前,他总是精心准备讲稿对每一个细节都加以推敲.他对数学的许多发现并不完全存在于他发表的论著中而更多的是听其讲课时记下的笔记中."维尔斯特拉斯式的严谨"成为"极仔细地推理"的同义词.他的工作培养了大批数学家,晚年他作为数学界的权威而倍受敬佩.

22. 斯托克斯(Stokes,SirGeorge Gabriel,1819—1903)

斯托克斯是爱尔兰数学家、物理学家,他生于爱尔兰斯克临(Skreen)的一个爱尔兰教会家庭里,他的父亲是教区长,母亲是一位教区长的女儿,他的兄弟中有三人从事圣职.早年给他以教育的是他的父亲和本教区的一个书记.18 岁时,他进了彭布鲁克(Pembroke)学院,在获最高荣誉毕业后应聘为该学院的研究员.1847 年受任为剑桥大学"路卡斯教授".

斯托克斯对数学和物理学都作出了不少贡献.在数学方面,1848

年以前他就清楚的认识到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一致收敛原理.他研究过发散级数的应用.他很清楚发散级数可以一般地用来解微分方程.1856年和1857年他还给出了几个有实用价值的代表性实例.在1849年他在其论文《关于运动流体内部摩擦的理论》中,导出了偏微分方程里著名的斯托克斯方程.他阐明了沿着某一曲面块 s 的确定一侧的曲面积分可以化作沿着围成 S 的闭曲线 l 按一确定方向所取的某一空间曲线的曲线积分,这就是微积分教程曲面积分中的著名的斯托克斯公式.此公式在矢量分析中引深为"矢量旋度通过截面(F)的通量等于矢量本身沿截面边界的环量"而更具重要性.

在物理学方面,他系统地研究了流体力学、固体力学、波在弹性固体内的性态,以及光的衍射等.对于斯托克斯来说,数学是他进行物理研究的重要工具,他是第一流的数学物理学家.他撰写了关于粘滞流体运动的经典论文,从而奠定了近代流体力学的基础;他帮助完成了光的波动理论;他还撰写了关于引力变异的论文,从而使他成为近代大地测量学的奠基者.斯托克斯是促使自然科学转变方向而更着重实践经验的19世纪杰出的科学家之一.

斯托克斯晚年荣获各种学位、奖章及外国的学会会员资格.1889年,他受封为爵士.他一生从不吝惜时间为各学术团体服务,并热忱帮助那些为解决问题向他求教的人.

注 上述22位数学家简介,摘自李心灿编:航空工业出版社出版的《"高等数学"中的著名数学家简介》一书,特此说明.